



HAL
open science

La Nahe-geometrie comme solution au problème de l'espace

Julien Bernard

► **To cite this version:**

Julien Bernard. La Nahe-geometrie comme solution au problème de l'espace. Journée des jeunes chercheurs, CEPERC, Nov 2010, Marseille, France. hal-00654931

HAL Id: hal-00654931

<https://hal.science/hal-00654931>

Submitted on 3 Jan 2012

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

La Nahe-geometrie comme solution d'Hermann Weyl au problème de l'espace

BERNARD Julien,
Chercheur en philosophie,

CNRS CEPERC,

www.philo-bernard.fr

ju_bernard@yahoo.fr

Hermann Weyl (les titres correspondent aux différentes diapositives powerpoint)

(Les symboles « (*****) » indiquent une étape franchie dans le fichier powerpoint)

D'abord une très succincte présentation historique d'Hermann Weyl et de ce qui constitue pour lui le *problème de l'espace*. Si j'ai choisi, à la fois pour mon travail de thèse et pour la présentation d'aujourd'hui de me pencher sur les travaux d'Hermann Weyl, c'est qu'il a un double intérêt pour un philosophe des sciences.

(*****)

D'une part, il est considéré comme un des mathématiciens les plus profonds et fertiles de son époque. Etudiant brillant sous la direction de David Hilbert à Göttingen, il commence par travailler en théorie spectrale, en théorie des ensembles, il écrit un ouvrage de référence sur les surfaces de Riemann. Puis, après la guerre, il se tourne simultanément vers la théorie de la relativité et les fondements de la géométrie et de l'analyse. Il écrit quelques ouvrages devenus classiques en philosophie et histoire des sciences avant de se tourner essentiellement vers la classification des groupes de Lie, et en particulier celles des groupes de Lie compacts, et l'étude mathématique des symétries et de la théorie de jauge. Voilà, pour un aperçu de l'étendue de son travail mathématique.

Mais, deuxièmement, il est également un connaisseur de la tradition philosophique et, à l'occasion, il écrit lui-même des ouvrages de philosophie. Le plus intéressant pour nous c'est de comprendre que ces deux centres d'intérêt, la science et la philosophie, ne font pas que se côtoyer chez lui mais se mêlent étroitement si bien **qu'Hermann Weyl est le témoin d'une époque** où il était assez évident que sciences et philosophie se nourrissaient respectivement l'une l'autre. Pour Weyl comme pour beaucoup d'auteur de son époque, et sans doute pour Einstein, la science avance en étant partiellement guidée par les problèmes hérités de la tradition philosophique, et la philosophie à son tour ne peut aboutir à des résultats solides qu'en ancrant sa réflexion sur les résultats solides établis par l'avancée des théories scientifiques.

(*****)

Le problème de l'espace

Ce jeu d'échanges entre philosophie et sciences est particulièrement fécond dans la pensée d'Hermann Weyl en ce qui concerne le *problème de l'espace* dont nous allons traiter aujourd'hui. C'est un terme omniprésent dans les écrits d'Hermann Weyl de cette période. Il correspond à la période de son investissement massif dans la théorie de la relativité générale et dans la réflexion sur les fondements de l'analyse et de la géométrie. Cela correspond en même temps à l'intervalle de temps qui recouvre les différentes éditions d'*Espace-temps-matière*, le manuel général où Hermann Weyl introduit, édition après édition, le résultat de ses investigations.

(*****)

Dans un premier sens large du terme, le « problème de l'espace » ne désigne pas question unique mais plutôt une pluralité de questions de nature ontologique et épistémologiques visant à caractériser la nature de l'espace et à positionner la géométrie par rapport à ces disciplines voisines que sont les mathématiques pures et la science physique.

(*****)

Mais bien que cette problématique soit de prime abord philosophique, nous verrons cependant quelle est à l'origine de la création ou du développement de nombreux concepts et méthodes mathématiques qui sont encore utilisées de nos jours en géométrie différentielle.

(*****)

En particulier, nous verrons que la créativité mathématique et physique dont fait preuve Weyl pendant la période 1917-1923 est le fruit d'une réflexion philosophique qui vise à conjoindre deux traditions de pensée en géométrie : d'une part celle du programme d'Erlangen et de l'étude algébrique de la géométrie à travers l'étude du groupes de transformations spatiales, et d'autre part la tradition de la géométrie analytique des espaces courbes héritée de Gauss et Riemann.

(*****)

Finalement, à la fin de sa réflexion sur la notion d'espace, ce problème général et philosophique de l'espace va permettre de réactiver un problème de fondements de la géométrie qui était né à partir des travaux de Riemann et Helmholtz et qu'on connaît de nos jours sous le nom de « problème de Riemann-Helmholtz ». C'est ce problème qu'Hermann Weyl appelle précisément « le problème *mathématique* de l'espace » et pour lequel il va donner une solution originale qui est permise par la conciliation première entre les traditions du programme d'Erlangen, et des géométries analytiques de Riemann.

(*****)

Contexte historique (philosophique et mathématique) de la réémergence du problème de l'espace

Le choix d'Hermann Weyl de se pencher pendant la période 1917-1923 sur cette problématique générale de l'espace n'est pas le résultat arbitraire d'une simple préférence personnelle. Il y voit un problème dont l'explicitation et la résolution sont réclamés par l'état atteint par les connaissances mathématiques et physiques de son époque. Pour comprendre cela, il faut faire quelques rappels historiques.

(*****)

Premièrement, la découverte des géométries non-euclidiennes au XIXème siècle et la multiplication des systèmes géométriques qui en avait suivi avait marqué une première étape dans la remise en cause du statut de la géométrie et de la façon corrélatrice dont on pense la nature de l'espace. L'idée que la géométrie n'était pas une théorie mathématique mais physique s'imposait, en

Allemagne en particulier, cette physicalisation de la géométrie s'accompagnant d'un schéma épistémologique pour comprendre la géométrie intégrant une dose plus ou moins importante d'empirisme. Les positions les plus extrêmes en ce sens là laissent à la raison le simple rôle consistant à produire de la façon totalement libre le plus possible de systèmes géométriques entre lesquels, ensuite, seule l'expérience pourra sélectionner celle qui colle à la réalité et permet en particulier de faire de la physique.

(*****)

A côté de ce schéma empiriste pour penser la géométrie, il subsistait une forte tradition idéaliste, inspirée de la philosophie d'Emmanuel Kant. Selon l'idéalisme transcendantal de l'espace, inauguré par cet auteur, la géométrie est bien une science mathématique dont les vérités sont nécessaires car elles s'appuient non sur l'expérience mais sur l'usage *a priori* de la raison. C'est le sens du mot « idéalisme » qui signifie que l'espace se rapporte au sujet et à sa raison et non à une réalité empirique. Mais si la géométrie s'applique de façon nécessaire à la réalité empirique que l'on mesure, c'est parce qu'elle n'est pas une pure construction logique mais s'appuie sur la forme pure de notre sensibilité. L'espace est un élément sensible de notre raison qui préexiste à la constitution physique des objets de la science et les rend possibles. C'était l'essence de la solution kantienne permettant de concilier naturellement le statut mathématique *a priori* de la géométrie avec sa capacité à ordonner les faits empiriques.

(*****)

Si Hermann Weyl en 1917 prend parti sur le problème de l'espace, c'est qu'il estime que la géométrie est entrée dans un âge mûre où elle peut avoir un meilleur recul sur la nature de son objet : l'espace. Cette entrée dans l'âge mûre de la réflexion géométrique est la conséquence de l'établissement de la théorie de la relativité générale par Albert Einstein en 1915.

(*****)

La leçon essentielle que nous apprend la théorie de la relativité générale sur le problème de l'espace consiste à prendre acte définitivement du fait de la physicalisation des relations métriques. Le cœur de la théorie, comme il est bien connu, consiste à considérer que les relations métriques possibles dans l'espace ne sont plus fixées sur toute l'étendue de l'espace par une forme mathématique donnée *a priori* par l'intermédiaire d'axiomes, mais sont le résultat d'une interaction entre un nouvel objet physique, le champ métrique, prenant la forme mathématique locale d'une forme quadratique, et la matière qui remplit l'espace et intervient pour déterminer les coefficients de cette forme quadratique. Pour faire appel à une image connue de tous, la lumière est déviée dans la théorie d'Einstein en passant au voisinage d'un corps, non pas parce qu'elle cesse alors de suivre ce qui est la ligne droite de l'espace-temps, la géodésique, mais parce que c'est bel et bien la métrique de l'espace-temps lui-même qui est déformée par la présence de la masse du corps.

(Bref topo sur l'écriture de l'équation d'Einstein)

Nous avons vu tout à l'heure que l'idée d'un statut physique de la géométrie au XIXème s'accompagnait souvent d'un schéma épistémologique empiriste pour penser la géométrie. Ici, il ne faut cependant pas sauter le pas chez Hermann Weyl. Nous allons voir que l'originalité de sa position épistémologique tient à concilier ce mouvement de physicalisation de la métrique confirmé par la théorie d'Einstein avec un schéma global de compréhension de la géométrie qui soit résolument dans la continuation de la tradition rationaliste-idéaliste plutôt qu'empiriste.

Pour comprendre la position d'Hermann Weyl, nous allons commenter pas à pas un texte, extrait d'*Espace-temps-matière*, qui vous a été distribué. Il est un peu long et ne comporte pas le dernier mot de la position de Weyl. D'une certaine façon, ce texte passe même à côté de certains aspects de la question étudiée par un abus de simplifications didactiques. Mais il reste un texte intéressant pour présenter la position de Weyl parce qu'il se situe à un moment charnière de son livre, au moment où il n'a pas encore exposé les principes de la théorie de la relativité générale mais où se propose déjà en amont de justifier la position de Riemann en géométrie.

(Lecture du Texte 1)

Le texte de Riemann auquel Weyl fait allusion ici est le fameux texte d'habilitation du mathématicien Bernhard Riemann où il développe sa conception générale des espaces courbes connus aujourd'hui sous le nom d'« espaces de Riemann ». Riemann montre que, d'un point de vue purement mathématique, une richesse infinie de structures métriques est envisageable. Il conclut alors à la nécessité de trouver un critère non-mathématique de détermination de la véritable métrique, c'est-à-dire de celle qui se trouve instanciée dans la réalité. Riemann ne fait qu'évoquer ce que pourrait être ce critère de détermination, en indiquant que c'est, dans la physique des forces d'interactions de la matière qu'on doit le chercher.

Le texte d'habilitation de Riemann, outre son aspect précurseur dans le domaine de la géométrie différentielle des variétés métriques, ouvrait un problème philosophique crucial, connu désormais sous le nom de « problème de Riemann-Helmholtz » et qui consiste précisément à se demander, devant cette multiplicité infinie des géométries courbes envisageables, quel type de critère on doit élaborer pour déterminer celle(s) qui s'applique(nt) à la réalité empirique, et ensuite quelles est(sont) alors la ou les « bonnes » géométries répondant à ces critères.

La réponse propre à Weyl se construit dans ce texte à partir d'une exigence d'homogénéité, lisible au début du texte. Ce slogan d'une exigence d'homogénéité pour la géométrie est souvent repris par les géomètres de cette époque, mais avec une signification mathématique qui fluctue de façon significative. Hermann Weyl caractérise toujours l'espace comme une « forme nécessairement homogène » auquel il attribue une sorte d'idéalité en la qualifiant de forme de notre intuition ou de formes des apparences. Il mêle ainsi dans sa définition 1) la tradition de l'idéalisme transcendantal allemand mais aussi 2) celle des géomètres du XIXème siècle qui comme Helmholtz, Klein ou Lie, avaient proposé, pour unifier la multiplicité des systèmes géométriques, de recourir à une certaine caractérisation générale de l'espace comme forme homogène, à travers la notion du groupe des transformations laissant globalement invariant les structures spatiales. Plus précisément, un « espace de Klein » est homogène au sens mathématique précis de l'existence d'un isomorphisme envoyant n'importe quel point de l'espace en n'importe quel autre et laissant globalement invariante la structure de l'espace. C'est un espace sur lequel un groupe de transformations agit transitivement, au sens algébrique de l'action de groupe.

Mais cette homogénéité globale de l'espace est précisément le type de symétrie que ne possèdent pas les espaces courbes de Riemann. La variabilité de la courbure d'un point à un autre de l'espace empêche généralement la possibilité d'une telle isométrie globale. C'est pour cela qu'Hermann Weyl parle dans le texte de l'éventualité de devoir réduire les géométries possibles aux trois seules géométries à courbure constante répondant à l'homogénéité au sens de Klein. Cette solution draconienne évoquée par Hermann Weyl est sérieuse puisqu'elle avait conduit d'autres penseurs de la géométrie comme Henri Poincaré à mettre à l'écart l'usage physique des géométries courbes de Riemann précisément au nom de l'exigence d'homogénéité.

(*****)

Ceux qui ne connaissent pas ce texte pourront le lire plus tard. Précisons juste que la solution de Poincaré semble consister à refuser aux espaces de Riemann le statut d'authentiques géométries exploitables physiquement parce qu'elles ne répondent pas à ce critère d'homogénéité.

(*****)

Helmholtz, premier à exprimer le problème de Riemann-Helmholtz, avait proposé une solution semblable à celle de Poincaré, pour ainsi dire conservatrice dans la mesure où elle aboutissait à ne voir les nouvelles géométries analytiques que comme de simples systèmes logico-mathématiques sans application à la mesure physique, tentant de trouver des critères asseyant définitivement l'usage millénaire de la géométrie euclidienne. Hermann Weyl a **une stratégie complètement différente**, en accordant la même importance à l'homogénéité mais en déplaçant le sens qu'elle revêt, il va légitimer les géométries de Riemann comme d'authentiques géométries. Il va même montré qu'elle sont en un sens les seules pouvant s'appliquer au réel physique.

(*****)

Avant d'aller plus loin dans le texte, il faut comprendre que, s'il veut conserver à tout prix une notion d'homogénéité, c'est parce que cette notion, avant de revêtir un sens mathématique précis, a d'abord une fonction épistémique. L'homogénéité de l'espace n'est pas en effet une propriété mathématique qui viendrait *a posteriori* distinguer certains espaces au détriment d'autre. Elle est au contraire une exigence de la raison qui rend possible *a priori* la géométrie comme une science objective. En effet, l'espace n'est pas homogène chez Weyl seulement vis-à-vis de ses points, mais plus généralement vis-à-vis de la multiplicité arbitraire des systèmes de coordonnées qu'on peut y introduire. Chaque système de coordonnée peut être interprété comme le point de vue singulier d'un sujet-observateur sur la réalité géométrique. L'homogénéité de l'espace peut alors être interprétée comme l'indifférence des différents systèmes de coordonnées à caractériser une même réalité géométrique objective. Elle est donc un principe constitutif de l'objectivité géométrique.

Ce point est un des mieux développés dans les écrits de Weyl sur la géométrie. Weyl arrive à caractériser une notion générale de système de coordonnées qui est valable dans chaque strate structurelle de la notion d'espace (projective, affine, conforme et métrique). Un objet géométrique pourra toujours être donné par le biais de ses coordonnées. C'est ensuite l'homogénéité supposée de l'espace qui permet d'établir les relations fonctionnelles entre les coordonnées d'un seul et même

objet géométrique dans chacun des systèmes de coordonnées possibles. Suivant la nature de l'objet géométrique étudié, vecteur, tenseur, pseudo-tenseur, etc., la relation fonctionnelle changera de nature. Mais l'important est que, en raison de l'homogénéité de l'espace, cette relation existe. L'important est que le groupe (en un certain sens homogène) des transformations de l'espace doit agir (action de groupe) sur l'espace des valeurs numériques possibles des coordonnées de l'objet géométrique considéré. Cette définition générale des objets géométriques par abstraction à partir de la manière dont ils se donnent en coordonnées a d'ailleurs joué un rôle important dans la fondation constructive qu'Hermann Weyl demande pour les mathématiques pures. Voilà pour l'importance de l'homogénéité et sa fonction constitutive de l'objectivité géométrique. Continuons la lecture du texte.

(*****)

(Texte 3)

On va voir que cet œil-ponctuel, sujet physique incarné situé dans le monde, correspond au niveau mathématique à la singularité du système de coordonnées introduit. Ainsi, au niveau mathématique, le système de coordonnées est arbitraire parce qu'au niveau physique, il correspond à la singularité d'un point de vue ponctuel sur le monde. L'homogénéité de l'espace, postulée à un niveau mathématique, deviendra ensuite le fondement d'un *principe de relativité des mesures physiques* qui pose la possibilité de passer d'un certain point de vue singulier, ici un œil-ponctuel localisé, à un quelconque autre point de vue similaire sans rien changer aux propriétés des objets géométriques observés. Ainsi, l'objectivité géométrique est pensée chez Weyl comme un processus où le sujet doit expliciter la position singulière qu'il occupe dans le monde pour pouvoir ensuite s'en abstraire par le jeu du groupe homogène des transformations de l'espace.

(*****)

(Texte 4 :

**Faire uniquement les dessins (un dessin par système de coordonnées)
Montrer les Mietskasernen et parler de l'histoire de l'espace-temps
escargot)**

On sait qu'Einstein utilisait une image pour parler de ces rapports complexes entre l'espace sans forme intrinsèque et son contenu, la matière qui en le remplissant vient lui donner forme. Il parle en effet d'un mollusque. Hermann Weyl précise la zoologie de l'espace-temps en disant que la matière est à l'espace comme un escargot à sa coquille. La coquille ne préexiste pas à l'escargot lui-même mais c'est l'escargot qui forme la coquille dans laquelle il vit au fur et à mesure qu'il se développe. Pour poursuivre l'analogie, nous demandons alors quelle est la méthode fixée préalablement que suit l'escargot pour construire une coquille adaptée à sa morphologie.

(*****)

La façon dont procède Weyl est décrite de nos jours dans les termes d'une opposition entre *transformations passives* et *transformations actives* de coordonnées. De plus, on peut mieux voir les choses quand on les écrit dans le langage actuel des variétés différentielles, parce qu'on y perçoit de façon plus claire la distinction entre d'un côté, l'espace lui-même et sa structure différentielle, et de l'autre l'espace numérique de paramétrisation \mathbb{R}^3 . Si on le temps à la fin, on pourra aussi voir cela.

(Texte 5)

Pour comprendre cette fin de texte, il est sans doute intéressant de connaître un minimum le long débat qui est né à partir d'Albert Einstein autours de ce qu'on appelle en physique « l'argument du trou ». En effet, le cheminement de Weyl qui a été vu jusqu'ici colle très près aux textes d'Einstein liés à cette polémique. Einstein a peiné pendant près de 3 ans avant de pouvoir achever sa théorie car il rencontrait un problème dans la compréhension du nouveau statut des systèmes de coordonnées dans la géométrie riemannienne, conjointement avec un problème de compréhension de la façon dont devait penser les rapports entre les propriétés (différentielle-)topologique de la variété spatio-temporelle et ses propriétés métriques. Einstein exprimait ses difficultés à l'aide d'une petite expérience de pensée, l'image d'un univers qui serait rempli de matière sauf dans un petit voisinage qu'on nomme le « trou ». Einstein prend alors un difféomorphisme qui est quelconque dans le trou mais se réduit à l'identité en dehors du trou. Pour contracter ça on parle rapidement d'un « difféomorphisme de trou ». Il tracte alors la matière simultanément à la métrique par le difféomorphisme comme le fait Weyl. Chez Weyl, cette tractation simultanée résolvait son problème qui était de montrer l'homogénéité de l'espace. Mais le problème d'Einstein est différent. A cause de la supposition du vide dans le trou, la matière n'aura pas changé de distribution alors que la métrique, elle, va prendre de nouveaux coefficients dans le trou. C'est alors, chez Einstein, non pas l'homogénéité qui pose problème mais la détermination entière et complète de la métrique par la matière.

Revenons à Weyl. Il inverse en quelque sorte l'argument du trou d'Einstein. Au lieu d'un univers dans lequel il y a de la matière sauf en un trou, on prend un univers où il n'y a rien sauf une boule d'argile. Si les particules de la boule d'argile sont déplacées de façon difféomorphe, sans cassure ni changement de la densité, l'argument développé semble nous montrer qu'on devrait pouvoir trouver une position dans l'espace P' d'où le morceau d'argile semble toujours une boule. Pourquoi est-ce que cela ne se passe pas comme ça dans la réalité ? D'abord, parce que la boule n'est pas la seule à influencer sur la métrique locale de notre espace ambiant. Elle n'y joue qu'un rôle infime. La structure métrique de notre espace est avant tout déterminée par les grandes masses qui nous environnent dans l'Univers. Ce n'est que dans un univers uniquement constitué de la boule d'argile, que le phénomène étrange décrit par Weyl pourrait bien advenir. Si on découpait dans l'espace, à côté de la boule d'argile sphérique, une portion d'espace non sphérique mais homéomorphe à la sphère, et qu'on déplaçait petit à petit les particules d'argile vers leur point-image, alors, en vertu même de l'inter-dépendance matière/métrique, la forme préalablement déterminée se métamorphoserait au fur et à mesure qu'elle recevrait la matière pour devenir en fin de compte une sphère et cela quelle que soit la forme initiale choisie.

Mais, si on pousse plus loin l'analyse, on voit que ce n'est que parce que, pour les besoins de notre explication, nous avons décomposé le mouvement total de la matière par petit morceaux que

nous avons pu donner un sens *physique* à notre difféomorphisme. En réalité, puisque le difféomorphisme est global et ne fait que tracter la métrique d'un point à un autre de la variété différentielle, il ne concerne pas les relations métriques elles-mêmes, qui sont les seules choses mesurées physiquement mais seulement, comme chez Einstein, un simple changement dans la façon dont est paramétrée cette réalité métrique par des coordonnées. La liberté qu'il y a dans le couplage entre la variété différentielle et la métrique n'est pas le signe d'une *indétermination physique* mais d'une *liberté mathématique* à l'égard du système de coordonnées choisi. Et la portion de variété choisie pour y placer un certain contenu physique (matière+métrique) est alors sans signification physique.

C'est ce que Weyl, après cette phrase hésitante sur les considérations microscopiques et cosmologiques, finit par exprimer brillamment par ce résultat mathématique très beau qui découle très directement de son argumentation. C'est-à-dire que, si au lieu de garder la même répartition de matière (la boule d'argile) et de changer son lieu, on fixe au contraire un certain domaine sur la variété et qu'on y fait varier la répartition de la masse à l'intérieur, on pourra alors donner n'importe quelle forme (métrique) à ce domaine. Un domaine de la variété spatio-temporelle n'a donc absolument aucune forme indépendamment de la matière qui vient le remplir.

(Lire et commenter le récapitulatif de l'argumentation de Weyl et d'Einstein)

Revenons alors au problème initial qu'avait posé Weyl avant son argumentation : l'homogénéité nécessaire de l'espace doit-elle nous amener à mettre à l'écart les géométries à courbures variables ? Poincaré avait répondu dans *La Science et l'Hypothèse* : oui. Ici, Weyl a répondu l'exact opposé, à savoir qu'une métrique riemannienne est indispensable pour sauver l'homogénéité de l'espace. Mais on a l'impression, à la lecture de cette argumentation, qu'il y a un tour de passe-passe. Elle n'est qu'à moitié convaincante. Car, à regarder de près les prémisses de sa démonstration, on se rend compte qu'il n'a sauvé l'homogénéité de l'espace qu'en lui ôtant ses caractéristiques métriques. Plus précisément, il a montré que l'espace était homogène car la métrique pouvait se déplacer dans l'espace simultanément avec la matière à l'intérieur d'un espace qui a bien conservé son caractère homogène mais seulement au prix qu'il n'est plus caractérisé que par ses propriétés différentio-topologiques. Il y a toujours une métrique mais celle-ci ne fait pas partie des caractéristiques de l'espace lui-même, elle est un objet physique qui est *contenu* dans l'espace au même titre que la matière.

Cette position pour penser les rapports entre géométrie mathématique et géométrie physique n'est pas satisfaisante.

(*****)

D'abord, réduire la géométrie mathématique à la seule topologie est intenable sur le plan de l'histoire de la discipline.

(*****)

Ensuite, parce que cette vue radicale nous oblige à concéder trop à la géométrie physique au vu même de la façon dont la géométrie analytique s'est constituée préalablement aux premières mesures physiques de l'espace chez Gauss.

En effet, quand Friedrich Gauss au début du XIXème siècle, mesurait la courbure de l'espace à l'intérieur d'un triangle entre trois villes allemandes, les *coefficients* mesurés de la métrique avait de plein droit un statut physique. C'était le premier acte d'une géométrie physique, dans le sens où, pour la première fois, on ne mesurait pas physiquement un objet contenu dans un espace mais on mesurait l'espace lui-même. Mais il n'en reste pas moins vrai qu'on voudrait pouvoir exprimer épistémologiquement le fait que cette mesure physique n'a pu être possible que par ce qu'il avait établi une notion mathématique générale, celle des espaces courbes et de la métrique à coefficients variables, qui était un préalable mathématique, condition de possibilité d'une telle mesure, tout comme, dans les géométries de type « Klein », l'espace et son groupe de transformation était un préalable mathématique à la mesure physique, non plus cette fois certes de l'espace lui-même mais de son contenu.

Si on retourne au texte de Weyl avec cette idée en tête, on s'aperçoit vite que la conclusion du raisonnement de Weyl de l'îlot de matière est en fait plus fine que d'affirmer de manière brutale que la métrique ne fait plus partie des caractéristiques de l'espace mathématique. En toute rigueur, Weyl énonce ceci :

(*****)

Malgré la nuance apportée, il restait encore à trouver quel sens exact on pouvait donner à cette interaction entre deux entités aussi disparates qu'un espace mathématique d'un côté et son contenu physique de l'autre. Quel éclaircissement épistémologique pouvait permettre de penser une telle interaction ?

Très tôt après la publication de la première édition d'*Espace-temps-matière*, Hermann Weyl parfait sa position épistémologique sur les relations du mathématique au physique à partir d'une idée qui découle elle-aussi naturellement de la position de Riemann. Weyl remarque que le sujet incarné dans le monde qui permet l'ancrage de la géométrie mathématique dans la réalité physique est toujours un sujet ponctuel localisé en un lieu singulier du monde. C'est l'œil ponctuel de tout à l'heure. En mettant l'accent sur cette nature essentiellement locale du sujet, Weyl met le doigt sur ce qui est pour lui l'erreur fondamentale d'Emmanuel Kant qui avait amené à accepter la géométrie euclidienne qui est une géométrie rigide à distance, une « Mietskasern », au sens où le sont encore toutes les géométries de Klein.

J'en viens au point le plus important de l'exposé. Si la possibilité d'une science mathématique *a priori* de l'espace est subordonnée aux facultés du sujet, pense Weyl, celle-ci ne peut en aucun dépasser sa sphère légitime d'application qui est celle des relations spatiales de proximité. L'espace comme forme de l'intuition ne serait alors qu'un espace des relations infinitésimalement proches, alors que les relations spatiales à distance finie seraient, imparfaitement déterminées par cette forme de l'intuition laisserait la place pour une détermination physique. L'argument épistémologique de la localité du sujet dans le phénomène de la mesure consolide donc la position riemannienne et d'une manière beaucoup plus solide que par le seul argument de l'îlot de matière, puisque la métrique recouvre de plein droit son statut mathématique au niveau infinitésimal et on comprend comment une géométrie mathématique peut côtoyer sans conflit une physique des interactions entre matière et relations spatiales. Riemann trouve ainsi sa place dans

une compréhension épistémologique de la géométrie dans laquelle une place est également ouverte pour une forme d'idéalisme limitée aux relations de proximité.

Entre l'année 1918 et 1923, Hermann Weyl va élaborer et achever à grande vitesse un programme de reconstruction de toute la géométrie différentielle de son époque qui est entièrement fondé sur cette idée. Il va l'appeler la *géométrie infinitésimale pure* [Reine Infinitesimalgeometrie], ou *géométrie du proche* [Nahe-geometrie]. Cette reconstruction va non seulement amener à une clarification philosophique de la façon dont on peut penser l'articulation entre le mathématique et le physique, la part de rationalité et le rôle de l'expérience dans l'élaboration du concept d'espace. Mais elle va aussi amener à l'émergence de nombreuses nouvelles notions et structures mathématiques et même à une innovation physique, la première tentative dans l'histoire d'une théorie géométrique unitaire relativiste des champs. Terminons l'exposé en balayant brièvement ces trois champ de créativité ouverts par la solution de Weyl au problème de l'espace.

D'abord, les innovations mathématiques. Une Nahe-geometrie est une géométrie qui ne doit fixer mathématiquement que la structure *locale* des relations spatiales qui doit être la même pour chaque sujet-ponctuel, laissant indéterminée les relations à distance domaine où interviendra la matière et ses lois. Une Nahe-geometrie sera donc avant tout déterminée par des espaces infinitésimaux, tous identiques.

(*****)

Mais un espace mathématique simplement constitué d'espaces infinitésimaux simplement juxtaposés les uns à côtés des autres, sans relations, ne pourrait servir de fondement à l'objectivité de la mesure. Il y aurait une forme d'incommunicabilité entre les mesures effectuées par les sujets-ponctuels. Il faut donc que le mathématique fixe *a priori* non seulement cette forme identique de tous les espaces infinitésimaux mais aussi le mode de connexion d'un espace infinitésimal à tous ses espaces voisins.

(*****)

L'espace dans ses différentes strates est alors pensé comme une sorte de patchwork composé d'une infinité de petit tissus identiques, les éléments d'espaces infinitésimaux, pouvant être cousus ensembles selon une infinité de manière mais toujours en suivant la même idée générale d'une connexion.

C'est la promotion de la notion mathématique de connexion. Nous disons « promotion » et non pas « innovation » car plusieurs géomètres entre Riemann et Einstein avaient déjà travaillé à développer une première idée de connexion mathématique entre les espaces tangents d'un espace de Riemann. Les principaux auteurs étaient Christoffel, Ricci et Levi-Civita.

(*****)

Par exemple, dans un espace riemannien comme une sphère, on peut définir en chaque point un espace affine tangent qui est l'espace infinitésimal pour la strate affine. Mais si on veut pouvoir connecter un espace tangent en un point P à un espace tangent en un point

infinitésimalement proche P' , alors il faut exprimer le fait qu'on doit imprimer un changement d'orientation infinitésimal d'un espace tangent à l'autre. On savait alors que ce changement d'orientation pouvait s'exprimer par une connexion donnée en coordonnées par les symboles de Christoffel $\left\{ \begin{smallmatrix} i \\ jk \end{smallmatrix} \right\}$, objet mathématique décrivant ce changement d'orientation infinitésimal que subit l'espace affine tangent quand on passe d'un point à son voisin. Cet outil étant apparu au sein des géométries de Riemann, il pouvait s'exprimer à partir de la métrique g_{mn} .

Weyl montre que toutes les strates de la notion riemannienne d'espace ne sont pas, par ce biais, pensées selon ce schéma d'une Nahe-geometrie. L'idée d'espace infinitésimal sous-jacente à la notion d'espace de Riemann mais ne s'y exprime pas dans toute sa pureté. Pour parvenir à une géométrie infinitésimale pure, Weyl va innover mathématiquement dans deux directions.

D'abord, il va œuvrer, en approfondissant les travaux de Ricci et Levi-Civita, à élaborer une notion mathématique de connexion affine qui généralise les symboles de Christoffel en devenant véritablement intrinsèques à la strate affine et non plus dérivée d'un espace métrique riemannien. C'est la notion actuelle de connexion affine sans torsion.

Il montre ensuite que, lorsque cette connexion affine dérive d'une géométrie riemannienne, c'est-à-dire de la donnée d'une forme quadratique locale g_{mn} , on a alors l'idée d'un changement d'orientation infinitésimal entre un espace tangent et son voisin, exprimé par la variabilité des coefficients de la forme. Ainsi le g_{mn} établit en fait une connexion conforme car, bien qu'un espace de Riemann soit métrique, et que le g_{mn} soit une forme quadratique donnant une notion de longueur, ce qui varie infinitésimalement d'un point à un autre c'est uniquement l'orientation des vecteurs et non pas la notion même de longueur. Dans la géométrie riemannienne, il est toujours présupposé que cela a un sens de comparer à distance finie la mesure de deux longueurs disons $g_{mn}(P)dx^m dx^n$ avec $g_{mn}(P')dy^m dy^n$. Pour lever cette dernière impureté dans le programme d'une géométrie infinitésimale, Hermann Weyl invente un nouvel objet mathématique : la connexion métrique φ_i qui est un champ de formes différentielles indiquant que la longueur d'un vecteur quand on passe d'un point $P(x)$ à un voisin infinitésimal $P'(x+dx)$ varie d'un facteur $(1+\varphi_i(x)dx^i)$. Alors, ce n'est plus seulement la comparaison entre la *direction* de deux vecteurs définis en deux points éloignés P et P' qui dépend du chemin envisagé pour rejoindre ces points, comme dans le cas d'un espace de Riemann, mais c'est aussi la comparaison de la *longueur* des vecteurs qui dépendra du chemin envisagé.

Ainsi, de nos jours, la donnée $(M, \Gamma_{jk}^i, [g_{mn}], \varphi_i)$ d'une variété différentielle munie d'une connexion affine, de ce qu'on peut appeler une connexion conforme, en fait une forme quadratique g_{mn} définie à multiplication par un facteur près, et une forme différentielle φ_i , est ce qu'on appelle de nos jours simplement un « espace de Weyl ». Dans un tel espace, le programme de la géométrie comme Nahe-geometrie est réalisé dans chacune des strates affines, conformes et métriques.

On peut donc s'en tenir à trois innovations majeures pour parvenir à achever ce programme de reconstruction de la géométrie selon la norme de la Nahe-geometrie : 1) L'émancipation de la connexion affine à l'égard du niveau métrique où elle est apparue, 2) la notion d'espace de Weyl et de connexion métrique. Mais aussi 3) la conception même de la géométrie comme Nahe-geometrie doit être prise comme une innovation mathématique majeure qui fournit un nouveau cadre pour penser de façon unifiée les géométries analytiques de la même façon que Klein et Lie au siècle précédent avaient unifié les géométries dites « synthétiques ». Si, dans l'argument de l'ilot de matière, Weyl n'avait pu sauver l'homogénéité de l'espace qu'au prix de l'évacuation de la métrique hors de la notion proprement dite d'espace c'est au fond parce que sa notion d'homogénéité était alors encore celle de Klein-Lie-Poincaré.

Mais dans une géométrie qui répond aux idéaux de la Nahe-geometrie, la notion d'homogénéité va naturellement se métamorphoser. En raison du caractère local de cette géométrie, l'espace n'a plus à être homogène au sens d'un groupe de transformations *globales* qui opère transitivement sur l'espace, mais seulement au sens de l'existence d'un même groupe de transformations *infinitésimales* qui exprime le fait qu'on trouve partout le même mode de connexion pour passer d'un point de l'espace à un autre. On passe des « géométries de Klein » aux géométries à connexions, qui sont très proches des espaces fibrés élaborés à la même époque par Elie Cartan.

(*****)

Passons maintenant aux innovations philosophiques. Nous avons suffisamment aperçu comment l'argument de la localité du sujet dans le schéma de compréhension de la géométrie chez Weyl permettait de penser de façon cohérente la place du mathématique et du physique dans la détermination des relations spatiales. Mais il y a plus sur le plan philosophique. Car on peut passer chez Hermann Weyl de l'idée d'une détermination mathématique des structures de proximité à l'idée plus forte d'un idéalisme transcendantal de proximité, le terme n'étant pas de Weyl. C'est une construction interprétative. L'écart d'un point de vue philosophique est grand entre un élément de connaissance qu'on appelle « *a priori* » simplement parce qu'il est fixé mathématiquement préalablement à la mesure, et un élément qui est *a priori* au sens plus fort d'une condition de possibilité de toute mesure fondée sur la nature de notre mode de notre raison et de notre rapport à la réalité sensible. Chez Weyl, dans une large mesure, ce sens fort de l'*a priori* peut être appliqué aux structures de proximité et à ces connexions qui fondent mathématiquement la géométrie infinitésimale pure.

De fait, dans une série de conférences à Madrid et Barcelone, intitulée *Analyse mathématique du problème de l'espace*, Hermann Weyl va essayer de donner des critères de détermination pour trouver quel est le bon groupe de transformations infinitésimales qu'on doit accepter pour construire la géométrie, dans le but de pouvoir ensuite appliquer cette géométrie à la compréhension des relations spatiales effectives. Autrement dit c'est la variante du problème de Riemann-Helmholtz telle qu'elle se pose une fois qu'on est passé dans le cadre d'une géométrie infinitésimale.

Ce qui permet de déterminer la « bonne géométrie », ce n'est pas une simple affaire de convention, ni une question d'un quelconque recours à l'expérience. Mais la raison, à l'intérieur de sa sphère légitime d'application, celle de la localité, est extrêmement normative chez Weyl. Il arrive à déterminer ce qu'il considère comme « la bonne géométrie », qui se trouve être finalement la

sienne, la géométrie infinitésimale pure, par des exigences rationnelles qui lui sont propres. Ce sont d'une part des motifs purement mathématiques comme des questions d'harmonie, de généralité, etc. et d'autre part des principes qu'on peut appeler « transcendants » et qui consistent à poser certains principes organisatifs de la géométrie comme le principe d'homogénéité infinitésimale.

(*****)

Il faudrait sans doute une conférence entière pour expliquer cette analyse qu'Hermann Weyl fait du problème *mathématique* de l'espace. Pour aujourd'hui, soulignons seulement ici la différence épistémologique entre les deux types de voies ouvertes par Henri Poincaré et Hermann Weyl. A partir d'une même problématique, grosso modo, arriver à sauver le caractère mathématique de l'espace en l'immunisant contre les attaques de l'expérience, les réponses apportées ouvrent des voies épistémologiques très différentes. La stratégie de Poincaré¹ conduit à immuniser la géométrie mathématique contre les attaques de l'expérience aussi bien dans la sphère des relations de proximité que pour les relations distantes, la géométrie devant vérifier une homogénéité de type kleinien. Mais à l'intérieur de sa sphère d'influence, la sphère mathématique, la raison est alors très peu normative. Son rôle est restreint à la possibilité du choix entre plusieurs systèmes logiquement indifférentiables, le choix pouvant être seulement guidé par l'expérience, à défaut de d'être véritablement imposé. Sans être parfaitement empiriste, à cause de la nuance apportée entre nécessité et commodité, le schéma du choix de la géométrie chez Poincaré reste proche de celui des empiristes, la raison ayant un simple rôle de construction d'une pluralité de systèmes entre lesquels seules l'expérience suggère une sélection.

Chez Hermann Weyl, la raison abandonne une partie de son règne, affirmant son droit de regard uniquement sur la sphère des relations de proximité, et abandonnant les relations distantes à la détermination physique. Mais à l'intérieur de son règne restreint, la raison est alors beaucoup plus normative et contraignante que chez Poincaré. L'analyse mathématique du problème de l'espace est une tentative de déterminer de façon univoque la bonne géométrie en éliminant au maximum tout appel à l'expérience pour ne conserver que les exigences rationnelles. En ce sens la voie que suit Hermann Weyl est bien dans la continuation de la tradition de l'idéalisme transcendantal, et nous proposons de l'appeler un « idéalisme transcendantal de proximité » pour nuancer la simple appellation d'« idéalisme transcendantal » qu'on trouve chez des commentateurs comme Thomas Ryckman.

(*****)

Enfin, troisième et dernier plan : les innovations physiques. Weyl est conscient du fait qu'en ne fixant *a priori* que localement les structures de l'espace, sa géométrie devient un cadre naturel dans lequel s'exprime la physique « moderne » qui est la physique des champs, née de la prise en compte de la propagation de proche en proche et à vitesse finie des interactions physiques. De fait le terme allemand « Nahe », choisi par Weyl pour désigner sa géométrie et celle de Riemann, est le

¹ (immuniser la géométrie contre les attaques de l'expérience en invoquant le fait que, si une bizarrerie physique intervient comme la courbure d'un rayon lumineux, on pourra toujours conserver la géométrie et modifier le mode de couplage de la géométrie à la réalité physique en abandonnant la loi de propagation rectiligne des rayons lumineux).

même qui sert en physique à désigner les actions par contacts par opposition aux anciennes forces à distance des newtoniens. L'idée de l'action par contact avait amené à l'élargissement de l'ontologie de la physique, à la création d'une nouvelle entité : « le champ », irréductible à la notion de particule. De ce point de vue, Hermann Weyl montre avec virtuosité comment tous les concepts de la physique des champs s'écrivent naturellement dans le cadre de sa nouvelle géométrie.

(*****)

Certains auteurs comme Gustav Mie allaient même plus loin en cherchant à éliminer carrément à un niveau fondamental la notion de particule, la dérivant de celle de champ, une particule n'étant qu'une concentration d'énergie dans le champ ou une singularité sur le plan mathématique. La première innovation physique d'Hermann Weyl consiste à adapter le programme de Gustav Mie de réduction de l'ontologie de la physique à la notion de champ, à la nouvelle théorie de la relativité générale, Gustav Mie ayant effectué ces travaux dans un cadre pré-relativiste. Le programme est intéressant mais n'arrivera pas à expliquer tous les comportements des particules à partir des seules notions de champ, il sera abandonné alors même que la mécanique quantique naît et connaît ces premiers succès dans une explication discrète (et non pas continue) de la notion de particule.

(*****)

La deuxième grande innovation physique naît d'une manière purement spéculative quand Hermann Weyl se rend compte que la forme différentielle φ_i qu'il a introduite pour exprimer ce nouvel objet mathématique qu'est la connexion métrique partage de nombreuses propriétés formelles du 4-champ potentiel électromagnétique relativiste. Il a alors l'audace de supposer que sa géométrie infinitésimale pure va pouvoir permettre de donner une vision géométrique unifiée à la fois des interactions gravitationnelles et électromagnétiques. C'est le premier exemple dans l'histoire d'une théorie relativiste unitaire des champs, à peu près simultanée à celle de Kaluza et Klein. Comme pour la théorie de Mie, cette hypothèse physique sera par la suite abandonnée par Weyl. Mais elle a eu le mérite d'ouvrir la voie des théories relativistes unitaires des champs qui sont tellement d'actualité dans la recherche physique du 21^{ème} siècle, et cela a permis d'ouvrir un débat passionnant entre Einstein et Weyl sur la possibilité d'avancer dans les théories physiques par la pure spéculation mathématique.

(*****)

Enfin, par une curieuse ironie du sort, ce sera au sein de la mécanique quantique qui avait définitivement rendu obsolète les théories de Mie et Weyl, que la notion d'espace à connexion, sous la forme des espaces de jauge, va trouver son utilisation physique la plus naturelle et efficace.

Terminons en rappelant que ces innovations mathématiques et physiques, d'une part, et cet investissement philosophique d'autre part, n'étaient pas étrangers l'un à l'autre. Nous espérons avoir montré que Weyl n'aimait pas la philosophie comme un passe temps à côté son travail sérieux que serait la science. Son interrogation ontologique et épistémologique sur la nature de l'espace, sur le mode d'interaction du mathématique et du physique, et les arguments de types « transcendants » qu'il avançait dans son analyse mathématique du problème de l'espace ont été les moteurs

essentiels de sa créativité scientifique. Il nous montre comment la tradition philosophique et ses problématiques fournissent au scientifique une incroyable force heuristique. Hermann Weyl est en même temps, pour le philosophe, un témoin du fait que la philosophie ne peut trouver de réponse à ses interrogations dans une pratique spéculative coupée des avancées de la science. Il est l'apôtre d'une vision dynamique de la philosophie dans ses rapports à l'histoire des sciences.