

FRUMAM-CEPERC  
4 novembre 2009,

HERMANN WEYL ET LA NAHEGEOMETRIE  
COMME SOLUTION AU PROBLEME DE L'ESPACE

Julien Bernard,  
[Ju\\_bernard@yahoo.fr](mailto:Ju_bernard@yahoo.fr)  
[www.philo-bernard.fr](http://www.philo-bernard.fr)

**Textes extrait (sauf celui de Poincaré) d'*Espace-temps-matière*, §11,  
« Géométries de Riemann-caractère dynamique de la métrique »,  
(notre traduction à partir de l'original avec l'aide de la traduction anglaise)**

## **L'homogénéité de l'espace :**

L'espace est une forme des phénomènes et, en tant que tel, il est nécessairement homogène. A partir de là, il pourrait sembler qu'à partir de la riche abondance des géométries possibles incluses dans la conception de Riemann, on ne doive conserver en fin de compte que les trois géométries évoquées [celles à courbure constante]. Riemann avait une opinion différente comme il est évident à partir des remarques de conclusion de son essai. [Il s'agit des *Hypothèses sur lesquelles reposent la géométrie*]

## **Une problématique proche chez Henri Poincaré**

[D'après un théorème de Sophus Lie], si on admet la possibilité du mouvement [équivalent du postulat d'homogénéité chez Weyl], on ne pourra inventer qu'un nombre fini et même assez restreint de géométries à trois dimensions. [...] Cependant, ce résultat semble contredit par Riemann, car ce savant construit une infinité de géométries différentes. [...] Mais la plupart de ces définitions [celles des espaces courbes de Riemann] sont incompatible avec le mouvement d'une figure invariable[...] Ces géométries de Riemann, si intéressantes à divers titres, ne pourraient donc jamais être que purement analytiques et ne se prêteraient pas à des démonstrations analogues à celles d'Euclide.

*La Science et l'Hypothèse*, chapitre 3, p73

## Le sujet-observateur comme « œil ponctuel »:

Bien que le véritable état de fait soit vraiment plus complexe, nous partons du plus simple des systèmes de géométrie optique, dont la loi fondamentale stipule que le rayon de lumière, provenant d'un point M émettant de la lumière à un observateur situé en P, est une ligne « géodésique » ; la plus courte des lignes connectant ces deux points. Nous ne tenons pas compte de la finitude de la vitesse de propagation de la lumière. Nous n'attribuons à la conscience qui reçoit qu'une simple faculté de perception et la simplifions en un « œil-ponctuel » qui observe immédiatement les différences de direction des rayons incidents, ces directions étant les valeurs de  $\theta$  données par:

$$\cos(\theta) = \frac{Q(d\delta)}{\sqrt{Q(d\delta)+Q(\delta\delta)}}.$$

L'«œil ponctuel» obtient ainsi une image des directions dans lesquelles se trouvent les objets environnants (On ignore le facteur « couleur »). La loi de la continuité gouverne non seulement l'action des choses physiques mais aussi les interactions psycho-physiques. La direction dans laquelle nous observons des objets n'est pas déterminée par leurs seules positions mais aussi par la direction du rayon lumineux qui en émerge et vient frapper la rétine, et, par là, par l'état du champ optique directement en contact avec le corps de cette énigmatique réalité dont l'essence est d'avoir un monde objectif qui se présente à elle sous la forme d'expériences de conscience. Dire qu'un contenu matériel G est le même que le contenu matériel G' ne peut alors rien vouloir dire d'autre que le fait qu'à chaque point P respectivement à G correspond un point de vue P' relativement à G' (et vice et versa) de telle sorte qu'un observateur en P' dans G' reçoit la même « image directionnelle » qu'un observateur dans G reçoit en P.

## Evacuation de la métrique hors de l'espace pour sauver l'homogénéité :

Prenons comme base un système de coordonnées déterminé  $x_i$ . Les mesures d'état [mesures de phase] scalaires, comme la densité de charge  $\rho$ , sont alors représentées par des fonctions déterminées :

$$\rho=f(x_1x_2x_3).$$

Considérons la forme fondamentale:

$$\sum_{i,k=1}^3 g_{ik} dx_i dx_k$$

où les  $g_{ik}$  (tout comme dans la terminologie mathématique) dénotent certaines fonctions déterminées de  $x_1, x_2, x_3$ . Supposons de plus que soit donnée une quelconque transformation de l'espace en lui-même, par laquelle un point P' correspond à chaque point P. En utilisant ce système de coordonnée et les notations :

$$P = (x_1 x_2 x_3) \qquad P' = (x'_1 x'_2 x'_3)$$

la transformation sera alors exprimée par:

$$x'_i = \phi_i (x_1 x_2 x_3). \qquad (16)$$

Cette transformations convertit une portion d'espace S en une portion d'espace S'. Je veux montrer que si l'opinion de Riemann est correcte, S' sera congruente avec S dans le sens défini.

Je vais, pour cela, utiliser un second système de coordonnées qui donnera au point P les valeurs «  $x_i$  » qui avaient été données par la formule (16) au point P'. Les expressions (16) deviennent alors des formules de changements de coordonnées. La région mathématique à trois variables [variété à 3 dimensions] représentée par S dans les coordonnées  $x'$  est identique à celle qui était représentée par S' dans les coordonnées  $x$ . Je vais maintenant imaginer qu'on remplit l'espace d'une nouvelle manière, précisément celle qui est exprimée par la formule :

$$\rho = f(x'_1, x'_2, x'_3)$$

au point P; et de même pour les autres quantités scalaires. Si les relations métriques de l'espace sont prises comme étant indépendantes de la matière qui y est contenue, la forme métrique sera, comme dans le cas de la première répartition de masse, de la forme :

$$\sum_{i,k} g_{ik} dx_i dx_k = \sum_{i,k} g'_{ik}(x'_1, x'_2, x'_3) dx'_i dx'_k$$

le membre de droite désignant l'expression après transformation dans le nouveau système de coordonnées. Si, en revanche, les relations métriques de l'espace sont déterminées par le contenu matériel -et nous admettons avec Riemann qu'il en est ainsi- alors, puisque la seconde répartition de la matière s'exprime dans les coordonnées  $x'$  exactement de la même manière que la première dans les coordonnées  $x$ , alors la forme métrique fondamentale sera :

$$\sum_{i,k} g_{ik}(x'_1, x'_2, x'_3) dx'_i dx'_k.$$

En conséquence des principes d'optique géométrique sous-jacents que nous avons acceptés plus haut, le contenu dans la portion d'espace S', lors de la première répartition de masse, présentera exactement la même apparence à un observateur en P' que celle que présente le contenu matériel en S à un observateur en P durant la seconde répartition de masse. Si l'ancienne opinion des « casernes à loyers » était correcte, cela ne serait évidemment pas le cas.

## **De l'argument du trou d'Einstein à l'argument de l'ilot de matière de Weyl**

Le simple fait que je puisse presser une boule d'argile à modeler entre mes mains pour lui donner n'importe quelle forme régulière totalement différente d'une sphère pourrait nous sembler réduire l'opinion de Riemann à une absurdité. En réalité, cela ne prouve rien. Car si Riemann a bien raison, la déformation de la structure atomique interne de l'argile qui ferait apparaître la boule d'argile sphérique à un observateur depuis un point de vue quelconque est entièrement différente de celle que je peux effectuer avec mes mains, et un réarrangement des masses de l'Univers serait nécessaire pour que la balle distordue soit amenée à apparaître sphériquement à un observateur en un point de vue quelconque. Le point essentiel est qu'un morceau d'espace n'a pas de forme visuelle du tout, mais que cette forme dépend du contenu matériel occupant le monde, et, en effet, en l'occupant de telle sorte que par le biais d'un réarrangement approprié du mode d'occupation (de la matière), je peux lui donner n'importe quelle forme visuelle. Par là, je peux également transformer n'importe quels morceaux *différents* d'espace pour leur donner la *même* forme visuelle en choisissant le mode de répartition de la matière adapté. Einstein a aidé à faire triompher des idées de Riemann.