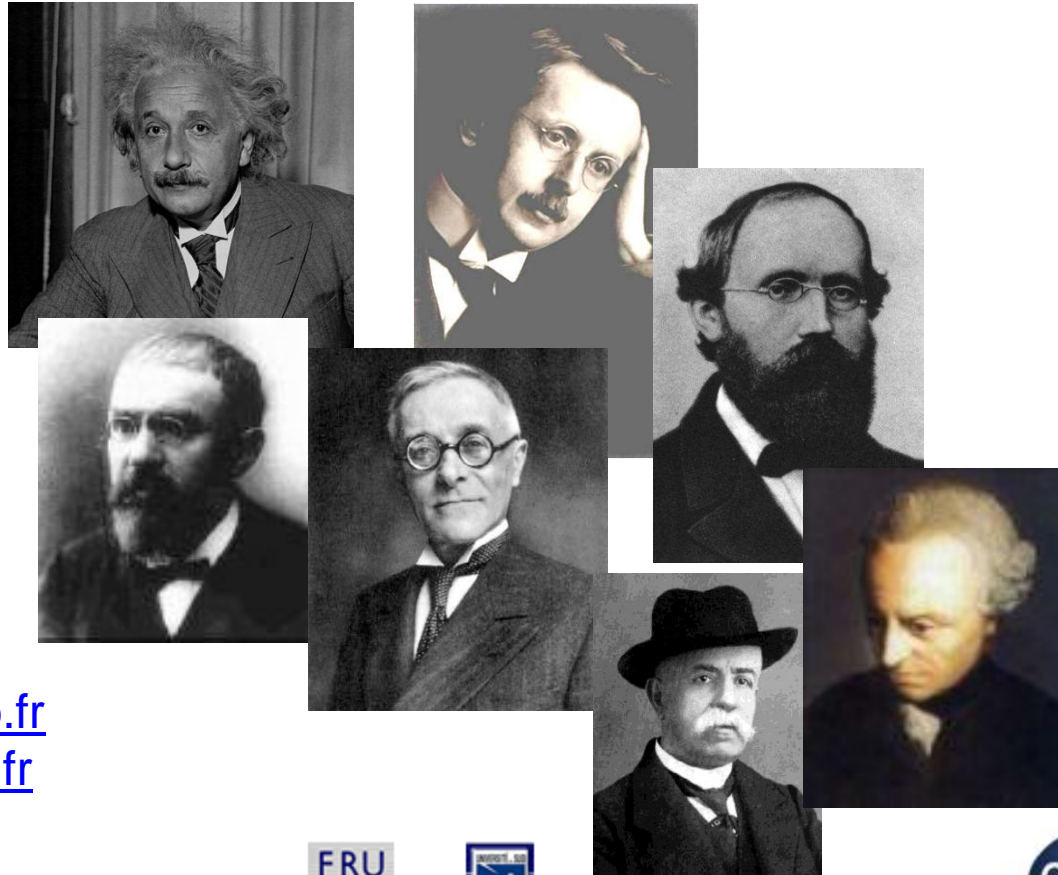


La « Nahe-geometrie » comme solution d'Hermann Weyl au problème de l'espace



4 novembre 2009,

Julien Bernard

ju_bernard@yahoo.fr

www.philo-bernard.fr



La « Nahe-geometrie » comme solution d'Hermann Weyl au problème de l'espace

Hermann Weyl 1885-1955

| | |
|-----------|------------------------------|
| 1904-1913 | Etudes à Göttingen |
| 1913-1929 | ETH de Zürich |
| 1930-1933 | En poste à Göttingen |
| 1933-1951 | En poste à l'IAS (Princeton) |




Principaux thèmes de travail

| | |
|---|--|
| Théorie spectrale | Thèse (1908) |
| Théorie des ensembles/ fondements de l'analyse | Sur les définitions des concepts mathématiques fondamentaux (1910), Das Kontinuum (1918) |
| Topologie/analyse complexe | Les surfaces de Riemann (1913) |
| Fondements de la géométrie (en relation avec la théorie de la relativité générale) | 1917-1923: <i>Espace-temps-matière</i> |
| Classification des groupes de Lie et études des espaces de jauge | A partir de 1924 |



Le problème de l'espace (Weyl, *Espace-Temps-Matière*, 1917-1923)

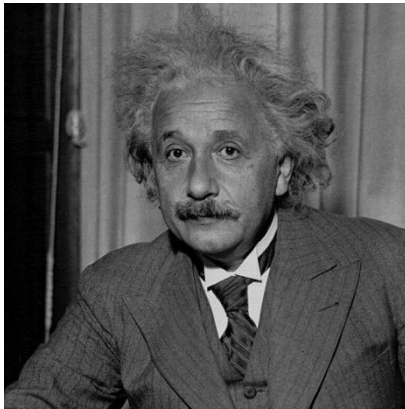
- **Un terme global pour regrouper les questions ontologiques et épistémologiques sur l'espace**
- Un problème qui a eu un formidable **rôle heuristique**.
- **Réconciliation de deux grandes traditions de la pensée géométrique** (Erlangen+Riemann)
- → Réactivation **du problème *mathématique* de l'espace** (Problème de Riemann-Helmholtz)



Contexte historique (philosophique et mathématique) de la réémergence du problème de l'espace

- **Profusion des géométries au XIXème, physicalisation de la géométrie et interprétations empiristes à divers degrés**
- **Forte tradition philosophique de l'idéalisme transcendantal**
- **1915, L'âge mature de la réflexion géométrique
(→Einstein, Théorie de la relativité générale)**

Physicalisation des relations métriques dans la théorie de la relativité générale



$$G_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^2} T_{\mu\nu}$$

$g_{\mu\nu}$ = Forme quadratique locale exprimant la métrique

$$G_{\mu\nu} = F \left(g_{\mu\nu}, \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda}, \frac{\partial^2 g_{\mu\nu}}{(\partial x^\lambda)^2} \right)$$

(Einstein a écrit ses équations dans un espace riemannien)

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} (+\Lambda g_{\mu\nu})$$

(avec $R_{\mu\nu} = R^\alpha{}_{\mu\alpha\nu}$ et $R = R^\alpha{}_\alpha$)

$$R^\alpha{}_{\beta\gamma\delta} = \frac{\partial \Gamma^\alpha{}_{\beta\gamma}}{\partial x^\delta} - \frac{\partial \Gamma^\alpha{}_{\beta\delta}}{\partial x^\gamma} + \Gamma^\lambda{}_{\beta\gamma} \Gamma^\alpha{}_{\delta\lambda} - \Gamma^\lambda{}_{\beta\delta} \Gamma^\alpha{}_{\gamma\lambda}$$

(tenseur de Riemann)

$$\Gamma^\alpha{}_{\beta\gamma} = \frac{1}{2} g^{\alpha\lambda} \left(\frac{\partial g_{\beta\lambda}}{\partial x^\gamma} + \frac{\partial g_{\gamma\lambda}}{\partial x^\beta} - \frac{\partial g_{\beta\gamma}}{\partial x^\lambda} \right)$$

(symboles de Christoffel=

connexion affine sous-jacente à l'espace métrique)

Espace-temps-matière §11,

« Géométrie de Riemann -Vision dynamique des propriétés métriques »

L'homogénéité de l'espace :

L'espace est une forme des phénomènes et, en tant que tel, il est nécessairement homogène. A partir de là, il pourrait sembler qu'à partir de la riche abondance des géométries possibles incluses dans la conception de Riemann, on ne doive conserver en fin de compte que les trois géométries évoquées [celles à courbure constante]. Riemann avait une opinion différente comme il est évident à partir des remarques de conclusion de son essai. [Il s'agit des *Hypothèses sur lesquelles reposent la géométrie*]

[D'après un théorème de Sophus Lie], si on admet la possibilité du mouvement, on ne pourra inventer qu'un nombre fini (et même restreint de géométries à trois dimensions.. Cependant, ce résultat semble contredit par Riemann, car ce savant construit une infinité de géométries différentes. [...] Mais la plupart de ces définitions [celles des espaces courbes de Riemann] sont incompatibles avec le mouvement d'une figure invariable[...] Ces géométries de Riemann, si intéressantes à divers titres, ne pourraient donc jamais être que purement analytiques et ne se prêteraient pas à des démonstrations analogues à celles d'Euclide.

Henri Poincaré, *La Science et l'Hypothèse*, chapitre 3, p73

- Le problème de Helmholtz-Riemann
- La fonction épistémique de la notion d'homogénéité

Espace-temps-matière, §11

Le sujet-observateur comme « œil ponctuel » :

○ Bien que le véritable état de fait soit vraiment plus complexe, nous partons du plus simple des systèmes de géométrie optique, dont la loi fondamentale stipule que le rayon de lumière, provenant d'un point M émettant de la lumière à un observateur situé en P, est une ligne « géodésique » ; la plus courte des lignes connectant ces deux points. Nous ne tenons pas compte de la finitude de la vitesse de propagation de la lumière. Nous n'attribuons à la conscience qui reçoit qu'une simple faculté de perception et la simplifions en un « œil-ponctuel » qui observe immédiatement les différences de direction des rayons incidents, ces directions étant les valeurs de θ données par:

$$\cos(\theta) = \frac{Q(d\delta)}{\sqrt{Q(dd) * Q(\delta\delta)}}$$

L'« œil ponctuel » obtient ainsi une image des directions dans lesquelles se trouvent les objets environnants (On ignore le facteur « couleur »). La loi de la continuité gouverne non seulement l'action des choses physiques mais aussi les interactions psycho-physiques. La direction dans laquelle nous observons des objets n'est pas déterminée par leurs seules positions mais aussi par la direction du rayon lumineux qui en émerge et vient frapper la rétine, et, par là, par l'état du champ optique directement en contact avec le corps de cette énigmatique réalité dont l'essence est d'avoir un monde objectif qui se présente à elle sous la forme d'expériences de conscience. Dire qu'un contenu matériel G est le même que le contenu matériel G' ne peut alors rien vouloir dire d'autre que le fait qu'à chaque point P respectivement à G correspond un point de vue P' relativement à G' (et vice et versa) de telle sorte qu'un observateur en P' dans G' reçoit la même « image directionnelle » qu'un observateur dans G reçoit en P.

Espace-temps-matière, §11

Evacuation de la métrique hors de l'espace pour sauver l'homogénéité :

Prenons comme base un système de coordonnées déterminé x_i . Les mesures d'état [mesures de phase] scalaires, comme la densité de charge ρ , sont alors représentées par des fonctions déterminées :

$$\rho = f(x_1, x_2, x_3).$$

Considérons la forme fondamentale: $\sum g_{ik} dx^i dx^k$ où les g_{ik} (tout comme dans la terminologie mathématique) dénotent certaines fonctions déterminées de x_1, x_2, x_3 . Supposons de plus que soit donnée une quelconque transformation de l'espace en lui-même, par laquelle un point P' correspond à chaque point P . En utilisant ce système de coordonnées et les notations :

$$P = (x_1, x_2, x_3)$$

$$P' = (x'_1, x'_2, x'_3)$$

la transformation sera alors exprimée par:

$$x'_i = \phi_i(x_1, x_2, x_3). \quad (16)$$

Cette transformations convertit une portion d'espace [représentée par]S en une portion d'espace [représentée par] S'. Je veux montrer que si l'opinion de Riemann est correcte, ces deux régions d'espaces seront congruentes dans le sens défini.

Je vais, pour cela, utiliser un second système de coordonnées qui donnera au point P les valeurs « x'_i » qui avaient été données par la formule (16) au point P'. Les expressions (16) deviennent alors des formules de changements de coordonnées. La région mathématique à trois variables [variété à 3 dimensions] [qui représente] S dans les [nouvelles coordonnées] est identique à celle qui [représentait] S' dans les [premières coordonnées].

Espace-temps-matière, §11

Je vais maintenant imaginer qu'on remplit l'espace d'une nouvelle manière, précisément celle qui est exprimée par la formule :

$$\rho = f(x'_1, x'_2, x'_3)$$

au point P; et de même pour les autres quantités scalaires. Si les relations métriques de l'espace sont prises comme étant indépendantes de la matière qui y est contenue, la forme métrique sera, comme dans le cas de la première répartition de masse, de la forme :

$$\sum_{i,k} g_{ik} dx^i dx^k = \sum_{i,k} g'_{ik}(x'_1, x'_2, x'_3) dx'^i dx'^k$$

le membre de droite désignant l'expression après transformation dans le nouveau système de coordonnées. Si, en revanche, les relations métriques de l'espace sont déterminées par le contenu matériel -et nous admettons avec Riemann qu'il en est ainsi- alors, puisque la seconde répartition de la matière s'exprime dans les coordonnées x' exactement de la même manière que la première dans les coordonnées x , alors la forme métrique fondamentale sera :

$$\sum_{i,k} g_{ik}(x'_1, x'_2, x'_3) dx'^i dx'^k$$

En conséquence des principes d'optique géométrique sous-jacents que nous avons acceptés plus haut, le contenu dans la portion d'espace S' , lors de la première répartition de masse, présentera exactement la même apparence à un observateur en P' que celle que présente le contenu matériel en S à un observateur en P durant la seconde répartition de masse. Si l'ancienne opinion des « casernes à loyers » était correcte, cela ne serait évidemment pas le cas.



Casernes à loyers
'Mietskasernen'

Espace-temps-matière, §11

Le simple fait que je puisse presser une boule d'argile à modeler entre mes mains pour lui donner n'importe quelle forme régulière totalement différente d'une sphère pourrait nous sembler réduire l'opinion de Riemann à une absurdité. En réalité, cela ne prouve rien. Car si Riemann a bien raison, la déformation de la structure atomique interne de l'argile qui ferait apparaître la boule d'argile sphérique à un observateur depuis un point de vue quelconque est entièrement différente de celle que je peux effectuer avec mes mains, **et un réarrangement des masses de l'Univers serait nécessaire pour que la balle distordue soit amenée à apparaître sphériquement à un observateur en un point de vue quelconque.** Le point essentiel est qu'un morceau d'espace n'a pas de forme visuelle du tout, mais que cette forme dépend du contenu matériel occupant le monde, et, en effet, en l'occupant de telle sorte que par le biais d'un réarrangement approprié du mode d'occupation (de la matière), je peux lui donner n'importe quelle forme visuelle. Par là, je peux également transformer n'importe quels morceaux *différents* d'espace pour leur donner la *même* forme visuelle en choisissant le mode de répartition de la matière adapté. Einstein a aidé à faire triompher des idées de Riemann.

Espace-temps-matière, §11

Structure de l'argumentation de Weyl:

•Deux hypothèses:

1) Dépendance de la métrique à l'égard du contenu de la matière. (R.E.M.)

(Le champ métrique, au sens de la classe d'équivalence des fonctions $g_{\mu\nu}$ à isométrie près, est une fonctionnelle de la répartition de masse ρ :

$$[g_{\mu\nu}] = F(\rho)$$

Weyl semble même demander plus. Si on considère deux répartitions de la matière identiques. Alors les deux fonctions $g_{\mu\nu}$ qui en sont issues ont le même parcours de valeurs. Plus précisément, les valeurs de $g_{\mu\nu}$ seront les mêmes pour deux points correspondant à la même position au sein du champ de répartition de la matière

Si pour tout x , $\rho(x) = \rho'(\phi(x))$, (ϕ difféomorphisme) alors $g_{mn}(x) = g'_{mn}(x' = \phi(x))$

2) Homogénéité de l'espace (vis-à-vis de l'œil observateur dont les observations dépendent de sa position vis-à-vis de la matière et de la métrique)

Conclusion:

- **Exigence de prendre une métrique à coefficients variables (réhabilitation des espaces riemanniens en les rendant garants de l'homogénéité)**

De l'argument du trou d'Einstein à l'argument de l'îlot de matière de Weyl


Structure de l'argumentation d'Einstein:

- 1) **Dépendance de la métrique à l'égard du contenu de la matière. (R.E.M.)**
Pris sous une forme plus précise que Weyl comme égalité tensorielle entre un tenseur dérivant de la métrique G_{mn} et le tenseur impulsion T_{mn} .
- 2) **Forme riemannienne de la métrique.**
Ce n'est pas une conclusion mais une hypothèse chez Einstein
- 3) **Présence d'une zone d'espace-temps sans matière**
(hypothèse absente chez Weyl)

Conclusion aporétique::

- Les coefficients de G_{mn} ne peuvent être pleinement déterminés par les coefficients T_{mn} à l'intérieur du trou.

Pour sortir de l'aporie: comprendre que les différentes solutions trouvées sont toutes isométriques et que la latitude dans les coefficients n'est qu'une liberté mathématique de paramétrisation et non pas le signe d'une indétermination physique. La variété topologique n'a pas de réalité préalable à son remplissage par la matière et par le champ métrique. Dans les termes d'Einstein: la théorie de la relativité générale a oté toute trace d'objectivité à l'espace et au temps.



Insuffisance de à l'argument de l'îlot de matière pour donner un statut épistémologique pertinent à la métrique riemannienne

- Réduire la géométrie mathématique à la seule topologie est une position intenable sur plan de l'histoire de la discipline.
- Ce n'est pas fidèle à la façon même dont est née la géométrie physique chez Gauss.
- Une conclusion nuancée de l'argument de l'îlot de matière:

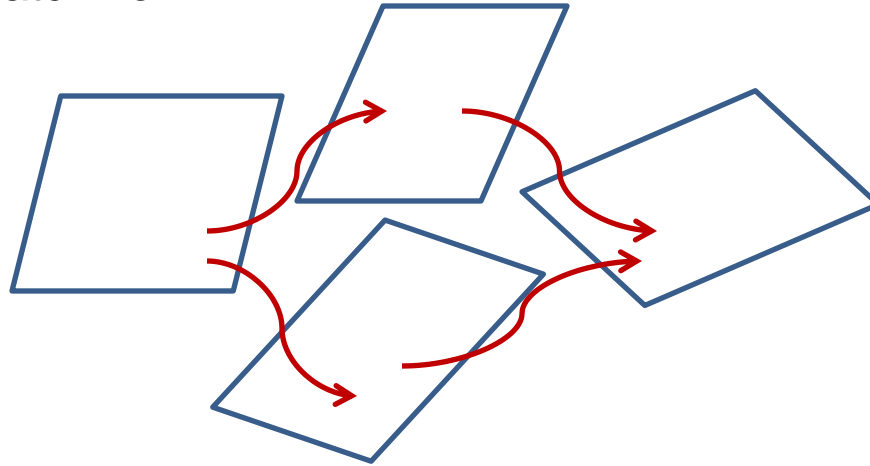
« Les relations métriques ne sont pas des propriétés de l'espace *en soi* mais de l'espace dans sa relation avec son contenu matériel », Hermann Weyl, *Espace-temps-matière*

Programme de reconstruction de la géométrie comme « géométrie infinitésimale pure », ou « Nahe-geometrie »

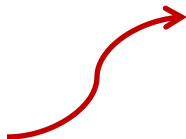
- • Réflexions philosophiques sur la localité du sujet
- Justifie une distinction de nature entre les relations spatiales infinitésimales fixables a priori et donc objet possible de mathématique/les relations spatiales « à distance » partiellement indéterminées mathématiquement et susceptible de recevoir une signification physique.
- 1918-1923: Programme de reconstruction de l'ensemble des strates (affines/conformes/métriques) de la géométrie pour répondre à l'idéal d'une Nahe-géométrie.
- Période de créativité intense mathématique et physique, fondée sur l'étude philosophique du problème de l'espace et du programme de la Nahe-geometrie qui en constitue sa solution.

Les innovations mathématiques

La « géométrie infinitésimale pure »,
un espace « patchwork »

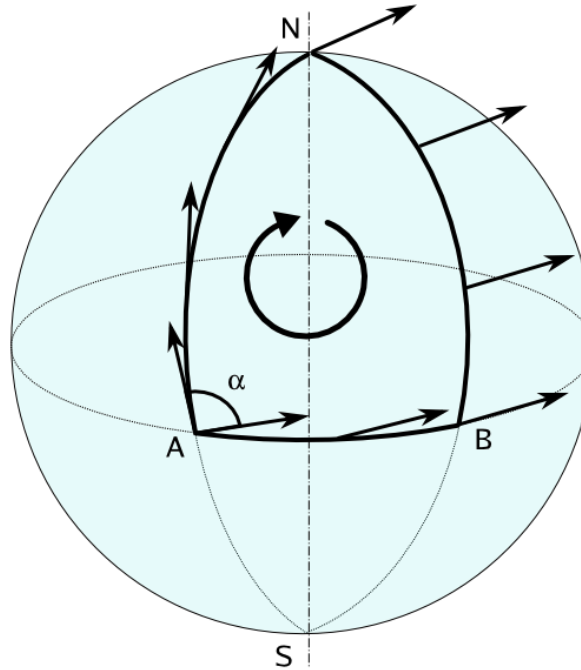


Les espaces infinitésimaux (locaux)
tous identiques



La connexion qui spécifie la façon dont sont
« cousus » ensemble ces espaces
infinitésimaux

Les innovations mathématiques



- Passage de $\left\{ \begin{matrix} i \\ jk \end{matrix} \right\}$ à Γ^i_{jk}
- Interprétation seulement « conforme » de la forme quadratique g_{mn} (et introduction du fameux « tenseur de Weyl »)
- Introduction de la notion de connexion métrique φ^i : quand un vecteur ξ^i est transporté de $P(x)$ à $P'(x+dx)$ sa longueur n'est plus $g_{mn}(x+dx)(\xi^m+d\xi^m)(\xi^m+d\xi^m)$ mais $g_{mn}(x+dx)(\xi^m+d\xi^m)(\xi^m+d\xi^m)[1+\varphi_i dx^i]$

Les innovations mathématiques

| | Espaces infinitésimaux | Connexion | Courbure |
|----------|------------------------------------|---|--------------------------------------|
| Affine | Espace affine | Γ_{jk}^i connexion affine | |
| Conforme | Espace affine muni de $[g_{mn}]$ | Γ_{jk}^i connexion dérivant du champ $[g_{mn}]$ | Tenseur de Weyl – Tenseur de Riemann |
| Métrique | Espace pseudo-euclidien (g_{mn}) | Connexion métrique φ_i | Courbure métrique |

Les innovations philosophiques

- **Un « idéalisme transcendantal de proximité »,**
l'Analyse mathématique du problème de l'espace.
- **Deux voies épistémologiques à partir d'un motif commun:**
Poincaré et Weyl.

Les innovations physiques

- Formalisation naturelle de la physique des champs
- Adaptation de la théorie de Mie au cadre relativiste.
- Première théorie unitaire relativiste des champs.
(géométrisation complète de la physique)
- Les symétries de jauge comme cadre naturel pour la mécanique quantique.

Conclusion

- La tradition philosophique comme moteur de la créativité scientifique
- Le dialogue avec la science dans son évolution historique comme seule façon pour la philosophie d'atteindre une vision solide et juste des problèmes ontologiques et de théorie de la connaissance.