

معدل النمو والتكاثر للنماذج السكانية بعامل دوري بسيط

Math. Biosci. 210 (2007) 647-658

<https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01293898>

Nicolas Bacaër

Institut de Recherche pour le Développement ، بوندي ، فرنسا
nicolas.bacaer@ird.fr

Rachid Ouifki

SACEMA ، مركز DST / NRF للتميز في التحليل الوبائي والنمذجة ، جامعة ستيلينبوش ، جنوب أفريقيا

ملخص

بالنسبة للنماذج السكانية ذات المعامل الدوري الجيبي ، نوضح أن معدل النمو وقابلية التكاثر هي حلول لمعادلات بسيطة تتضمن كسورًا مستمرة. على سبيل المثال ، نعيد النظر في نموذج SEIS مع فترة استجابة ثابتة ، وفترة معدية موزعة بشكل كبير ومعدل اتصال جيبي مأخوذ من [Math. Biosci. 145 (1997) 77-88]. نوضح أنه بصرف النظر عن عدد قليل من قيم المعلمات الاستثنائية ، فإن عتبة الوباء لا تعتمد فقط على متوسط معدل الاتصال ، ولكن أيضًا على اتساع التقلبات.

1 المقدمة

درس لوتكا (1939) نموذجًا سكانيًا خطيًا يربط عدد المواليد لكل وحدة من الوقت إلى الوقت t ، $B(t)$ ، مع الخصوبة $f(x)$ ومع الوفيات $\mu(x)$ في سن x :

$$B(t) = \int_0^{\infty} \phi(x) B(t-x) dx , \quad (1)$$

مع $\phi(x) = f(x) e^{-\int_0^x \mu(y) dy}$. أظهر ذلك $B(t)$ وإجمالي عدد السكان ينمو أضعافًا مضاعفة ، كما e^{rt} حيث r هو الجذر الوحيد للمعادلة

$$1 = \int_0^{\infty} \phi(x) e^{-rx} dx . \quad (2)$$

نظائرها المنفصلة في (1) و (2) هي نموذج مصفوفة مجتمع ليزلي والمعادلة المميزة لمصفوفة ليزلي (1945). درس أويلر بالفعل حالة معينة في عام 1760. غالبًا ما نسمي (2) "معادلة أويلر-لوتكا". استخدم Lotka الترميز

$$R_0 = \int_0^{\infty} \phi(x) dx . \quad (3)$$

هو متوسط عدد الأحمال الذين ولدتهم الفرد خلال حياته. R_0 هو التكاثر. عدد السكان ينمو ($r > 0$) إذا $R_0 > 1$. يقل ($r < 0$) إذا $R_0 < 1$. يظهر النموذج (1) أيضًا في دراسة الثبات الخطي للتوازن الخالي من الأمراض للنماذج الوبائية: ثم يمثل المتغير x الوقت المنقضي منذ الإصابة و $B(t)$ حدوث الإصابات في بداية الوباء (ديكمان وهيستربيك ، 2000).

تظهر على العديد من الحيوانات والنباتات والعديد من الأمراض المعدية تقلبات موسمية. تؤثر هذه التقلبات على كل من معدل النمو وقابلية التكاثر. (Thieme، 1984؛ Jagers، 1985) استبدال النموذج (1) بـ

$$B(t) = \int_0^{\infty} \Phi(t, x) B(t-x) dx . \quad (4)$$

$\Phi(t, x)$ هي وظيفة دورية للفترة T . عندئذ يكون معدل النمو r هو الرقم الحقيقي الوحيد الذي يساوي نصف القطر الطيفي لعامل التكامل الخطي ، على مساحة الوظائف الدورية للفترة T ، 1 ، T

$$u(t) \mapsto \int_0^{\infty} \Phi(t, x) e^{-rx} u(t-x) dx. \quad (5)$$

(2006، Bacaër and Guernaoui؛ 2007، Bacaër) اقترحوا أن قابلية التكرار يمكن تعريفها بنفس طريقة نصف القطر الطيفي للمشغل

$$u(t) \mapsto \int_0^{\infty} \Phi(t, x) u(t-x) dx$$

على نفس المساحة وظائف مستمرة دورية للفترة T . كما كان من قبل، إذا $r > 0$ إذا $R_0 > 1$ و $r < 0$ إذا $R_0 < 1$. إذا كانت الوظيفة $\Phi(t, x)$ لا تعتمد على t ، يتم تخفيض هذه التعريفات والنتائج إلى تلك الموجودة في Lotka.

لنفترض الآن ذلك

$$\Phi(t, x) = [1 + \varepsilon \cos(\omega t)] \phi(x), \quad (6)$$

مع $\omega = 2\pi/T$ ، $|\varepsilon| \leq 1$ و $\phi \geq 0$. نحدد

$$\xi = \inf \left\{ s \in \mathbb{R}, \int_0^{\infty} \phi(x) e^{-sx} dx < +\infty \right\}.$$

ومن المفترض $\xi < 0$. نحدد

$$\phi_n(s) = \int_0^{\infty} \phi(x) e^{-sx - ni\omega x} dx, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad s > \xi. \quad (7)$$

وقد أظهر (1972، Coale، الفصل 6) مع تدوينات مختلفة $\varepsilon^2 r_0 + r_2$ إلى عن على ε أين صغير r_0 يعرف ضمناً و r_2 صراحة من قبل

$$1 = \phi_0(r_0) \quad , \quad r_2 = -\frac{1}{2\phi_0'(r_0)} \operatorname{Re} \left(\frac{1}{1/\phi_1(r_0) - 1} \right). \quad (8)$$

الرمز $\operatorname{Re}(z)$ يدل على الجزء الحقيقي من العدد المركب z . في (باكير، 2007)، أظهرنا بنفس الطريقة $\varepsilon^2 R_{0,0} + R_{0,2}$ إلى عن على ε أين صغير

$$R_{0,0} = \phi_0(0) \quad , \quad R_{0,2} = \frac{\phi_0(0)}{2} \operatorname{Re} \left(\frac{\phi_1(0)}{\phi_0(0) - \phi_1(0)} \right). \quad (9)$$

في هذه المقالة، قمنا بتكييف طريقة يستخدمها (فقط، 2000). نظهر في الحالة المعينة (6) أن معدل النمو وقابلية التكاثر هما أكبر الجذور الحقيقية للمعادلات ذات الكسور المستمرة.

$$\frac{1}{\phi_0(r)} - 1 = 2 \operatorname{Re} \frac{\varepsilon^2/4}{\frac{1}{\phi_1(r)} - 1 - \frac{\varepsilon^2/4}{\frac{1}{\phi_2(r)} - 1 - \frac{\varepsilon^2/4}{\dots}}}, \quad (10)$$

$$\frac{R_0}{\phi_0(0)} - 1 = 2 \operatorname{Re} \frac{\varepsilon^2/4}{\frac{R_0}{\phi_1(0)} - 1 - \frac{\varepsilon^2/4}{\frac{R_0}{\phi_2(0)} - 1 - \frac{\varepsilon^2/4}{\dots}}}. \quad (11)$$

$|\varepsilon| \leq 1$. لاحظ مرة أخرى على الجانب الأيمن أنه يجب أن تأخذ الجزء الحقيقي من الكسر المستمر. يمكن استخدام هذه المعادلات البسيطة نسبياً لحساب معدل النمو والتكاثر. إذا كتبنا على سبيل المثال $r(\varepsilon)$ للإصرار على اعتماد معدل النمو على المعلمة، ثم سنرى أن لدينا عدم المساواة بشكل عام $r(\varepsilon) \neq r(0)$ إلى عن على $\varepsilon \neq 0$. وبعبارة أخرى، عتبة النمو السكاني ($r > 0$) لا يمكن الحصول عليها ببساطة عن طريق حساب متوسط المعامل الدوري لأن هذا سيكون معادلاً $\varepsilon = 0$. هذه النقطة موضحة بنموذج وباء SEIS / SEIR من (Williams and Dye، 1997)، والذي يتضمن فترة زمنية ثابتة وفترة معدية موزعة بشكل كبير.

نحصل على المعادلتين (10) و (11) في القسم 2. ونجد منهما الصيغ التقريبية (8) و (9) في القسم 3. نموذج وباء SEIS / SEIR (Williams and Dye، 1997) كمثال في القسم 4. يذكر الاستنتاج أمثلة أخرى.

2. إثبات رقم (10) و (11)

وفقاً لـ (Thieme، 1984؛ Jagers، 1985)، فإن نصف القطر الطيفي للعامل الخطي الإيجابي (5) هو دالة متناقصة لـ r ومعدل نمو النموذج (4) هو الرقم الحقيقي الوحيد بحيث نصف القطر الطيفي يساوي 1. وبالتالي، فإن معدل النمو r هو أيضاً أكبر عدد حقيقي بحيث توجد وظيفة دورية غير تافهة $u(t)$ مع

$$\int_0^{\infty} \Phi(t, x) e^{-rx} u(t-x) dx = u(t), \quad \forall t. \quad (12)$$

أولا النظر في الحالة حيث $\Phi(t, x) = p(t) \phi(x)$ مع وظيفة دورية للفترة T ، $p(t)$. تأمل تحليلات سلسلة فورييه

$$p(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} p_n e^{ni\omega t}, \quad u(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} u_n e^{ni\omega t},$$

مع $\omega = 2\pi/T$. كما لوحظ (Coale، 1972؛ Williams and Dye، 1997)، المعادلة (12) تعادل نظام لا نهائي من المعادلات الخطية

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} p_{k-n} \phi_n(r) u_n = u_k \quad (k \in \mathbb{Z}), \quad (13)$$

و ϕ_n يعرف بـ (7).

الآن النظر في حالة معينة حيث $p(t) = 1 + \varepsilon \cos(\omega t)$ لان $p(t) = 1 + \frac{\varepsilon}{2} e^{i\omega t} + \frac{\varepsilon}{2} e^{-i\omega t}$ نظام مكتوب (13)

$$\frac{\varepsilon}{2} \phi_{k-1}(r) u_{k-1} + \phi_k(r) u_k + \frac{\varepsilon}{2} \phi_{k+1}(r) u_{k+1} = u_k \quad (k \in \mathbb{Z}). \quad (14)$$

يمكننا تكيف الطريقة التي يستخدمها (فقط، 2000) لنظام ثلاثي الأبعاد مماثل. لنعيد كتابة النظام (14)

$$\frac{1}{\phi_k(r)} - 1 = \frac{\varepsilon}{2} \frac{\phi_{k-1}(r)}{\phi_k(r)} \frac{u_{k-1}}{u_k} + \frac{\varepsilon}{2} \frac{\phi_{k+1}(r)}{\phi_k(r)} \frac{u_{k+1}}{u_k}. \quad (15)$$

إذا كانت $k = 0$ ، تتم كتابة هذه المعادلة

$$\frac{1}{\phi_0(r)} - 1 = \frac{\varepsilon^2/4}{\frac{\varepsilon}{2} \frac{\phi_0(r)}{\phi_{-1}(r)} \frac{u_0}{u_{-1}}} + \frac{\varepsilon^2/4}{\frac{\varepsilon}{2} \frac{\phi_0(r)}{\phi_1(r)} \frac{u_0}{u_1}}. \quad (16)$$

ولكن (15)، مع استبدال $k-1$ أو $k+1$ ، تظهر أيضاً

$$\frac{\varepsilon}{2} \frac{\phi_k(r)}{\phi_{k-1}(r)} \frac{u_k}{u_{k-1}} = \frac{1}{\phi_{k-1}(r)} - 1 - \frac{\varepsilon^2/4}{\frac{\varepsilon}{2} \frac{\phi_{k-1}(r)}{\phi_{k-2}(r)} \frac{u_{k-1}}{u_{k-2}}}, \quad (17)$$

$$\frac{\varepsilon}{2} \frac{\phi_k(r)}{\phi_{k+1}(r)} \frac{u_k}{u_{k+1}} = \frac{1}{\phi_{k+1}(r)} - 1 - \frac{\varepsilon^2/4}{\frac{\varepsilon}{2} \frac{\phi_{k+1}(r)}{\phi_{k+2}(r)} \frac{u_{k+1}}{u_{k+2}}}. \quad (18)$$

دعونا نجمع (16) و (17) - (18) بشكل متكرر. نحصل على الكسور المستمرة

$$\frac{1}{\phi_0(r)} - 1 = \frac{\varepsilon^2/4}{\frac{1}{\phi_{-1}(r)} - 1 - \frac{\varepsilon^2/4}{\frac{1}{\phi_{-2}(r)} - 1 - \frac{\varepsilon^2/4}{\dots}}} + \frac{\varepsilon^2/4}{\frac{1}{\phi_1(r)} - 1 - \frac{\varepsilon^2/4}{\frac{1}{\phi_2(r)} - 1 - \frac{\varepsilon^2/4}{\dots}}}.$$

لان $\phi_k(r)$ و $\phi_{-k}(r)$ هي أرقام مترافقة معقدة، نصل إلى "المعادلة المميزة" (10). معدل النمو r هو الحل الأكبر.

والدليل على (11) مشابه بدءاً من المشكلة

$$\int_0^{\infty} \Phi(t, x) u(t-x) dx = R_0 u(t). \quad (19)$$

R_0 هو أكبر عدد حقيقي، تكون هذه المعادلة لها حل صفرية دوري من فترة T . لحالة محددة $\Phi(t, x) = (1 + \varepsilon \cos(\omega t)) \phi(x)$ المعادلة (19) تؤدي إلى

$$\frac{\varepsilon}{2} \phi_{k-1}(0) u_{k-1} + \phi_k(0) u_k + \frac{\varepsilon}{2} \phi_{k+1}(0) u_{k+1} = R_0 u_k \quad (k \in \mathbb{Z}),$$

والمعادلة (11).

3. الصيغ التقريبية (8) - (9)

بدءاً من (10) - (11)، يمكن للمرء بسهولة العثور على التقديرات (8) - (9)، والتي تم إثباتها بطريقة أكثر تعقيداً في (Coale، 1972)؛ (Bacaër، 2007).

لنبدأ بمعدل النمو r . دعونا نبحث عن تقريب لـ ε صغير من النموذج $r \simeq r_0 + r_1 \varepsilon + r_2 \varepsilon^2$. إذا كانت $\varepsilon = 0$ ، فسيتم إلغاء الجانب الأيمن من (10) ونحصل r_0 كحل للمعادلة $\phi_0(r_0) = 1$ ، وهو بالطبع مطابق لمعادلة أويلر-لونتكا (2). بالمناسبة، التغيير $\varepsilon \mapsto -\varepsilon$ يتوافق مع استبدال $p(t) = 1 + \varepsilon \cos(\omega t)$ مع $p(t - T/2)$. الآن العامل الخطي

$$u(t) \mapsto \int_0^\infty \Phi(t - T/2, x) e^{-rx} u(t - x) dx$$

على مساحة الوظائف الدورية للفترة T لها نفس القيم الذاتية مثل العامل الخطي (5)، يتم تحويل وظائف eigen للتو بواسطة $T/2$. لإبراز اعتماد r على ε دعنا نكتب $r(\varepsilon)$. لقد فعلنا ذلك $r(\varepsilon) = r(-\varepsilon)$ و $r_1 = 0$ (باكير، 2007) استخدم حجة مماثلة لتقريب التكاثر.

لذلك لدينا $r \simeq r_0 + r_2 \varepsilon^2$ وعلينا أن نحدد r_2 . معدل النمو r هو حل المعادلة الضمنية (10). لأن $\phi_0(r_0) = 1$ ، نملك

$$\phi_0(r_0) - \phi_k(r_0) = \int_0^\infty \phi(x) e^{-r_0 x} (1 - e^{-k i \omega x}) dx \neq 0, \quad \forall k \geq 1$$

على سبيل المثال أن الوظيفة $\phi(x)$ إيجابي بشكل صارم على الأقل خلال فترة زمنية صغيرة). إذا لدينا $\phi_k(r_0) \neq 1$ و $1/\phi_k(r_0) - 1 \neq 0 \forall k \geq 1$ للحفاظ على التعبير التربيعي فقط في ε على الجانب الأيمن من المعادلة (10)، نستبدل المقام بأقرب تقريب ترتيب له. نستبدل $\phi_1(r)$ مع $\phi_1(r_0)$. نحن نهمل الباقي التربيعي في ε من الكسر المستمر. نحصل

$$\frac{1}{\phi_0(r)} - 1 \simeq 2 \operatorname{Re} \left(\frac{\varepsilon^2/4}{1/\phi_1(r_0) - 1} \right). \quad (20)$$

لكن

$$\phi_0(r) \simeq \phi_0(r_0 + r_2 \varepsilon^2) \simeq \phi_0(r_0) + r_2 \varepsilon^2 \phi_0'(r_0) = 1 + r_2 \varepsilon^2 \phi_0'(r_0).$$

نستخدم التقريب لـ $\phi_0(r)$. نحدد التعبيرات التربيعية في ε في (20). هذا يعطي

$$r_2 = -\frac{1}{2 \phi_0'(r_0)} \operatorname{Re} \left(\frac{1}{1/\phi_1(r_0) - 1} \right),$$

وهو ما يعادل (8). يمكن كتابة هذه الصيغة في شكل مختلف قليلاً. في الواقع، مع

$$c_1 = \int_0^\infty \phi(x) e^{-r_0 x} \cos(\omega x) dx, \quad s_1 = \int_0^\infty \phi(x) e^{-r_0 x} \sin(\omega x) dx,$$

نملك $\phi_1(r_0) = c_1 - i s_1$ وبالتالي

$$r_2 = -\frac{1}{2 \phi_0'(r_0)} \operatorname{Re} \left(\frac{c_1 - i s_1}{1 - c_1 + i s_1} \right) = -\frac{1}{2 \phi_0'(r_0)} \frac{(1 - c_1) c_1 - s_1^2}{(1 - c_1)^2 + s_1^2},$$

وهو مطابق بشكل أساسي لصيغة (6.27) من (Coale، 1972).

كذلك، $\varepsilon R_0 \simeq R_{0,0} + R_{0,2} \varepsilon^2$ من المعادلة (3) أو المعادلة (11) مع $\varepsilon = 0$ ، نملك $R_{0,0} = \phi_0(0)$ للحفاظ على الجانب الأيمن فقط من المعادلة (11) التعبير التربيعي في ε ، نستبدل المقام بأدنى تقريب تقريب، باستخدام $R_{0,0} = \phi_0(0)$. نحن نهمل بقية الكسر المستمر لأنه تربيعي في ε . نملك

$$\frac{R_0}{\phi_0(0)} - 1 \simeq 2 \operatorname{Re} \left(\frac{\varepsilon^2/4}{\phi_0(0)/\phi_1(0) - 1} \right).$$

هذا يؤدي إلى الصيغة (9).

4. نموذج SEIS مع فترة الكمون الثابتة

4.1 الخلفية

النماذج الوبائية تسمى SEIR أو SEIS لها فترة كمون وحجرة معدية. لقد كانوا موضوعاً للعديد من الدراسات الرياضية أو العددية، بالإضافة إلى ذلك، يكون معدل الاتصال دورياً (Williams and Dye، 1997؛ Schwartz and Smith، 1983؛ Aron and Schwartz، 1984؛ Kuznetsov and Piccardi، 1994؛ Moneim and Greenhalgh، 2005؛ ما وما ما 2006). (إيرن وآخرون، 2000) مهتمة بشكل خاص بالحصبة، (Deguen et al.، 2000) في جدي الماء، بينما (Altizer وآخرون، 2006؛ Grassy and Fraser، 2006) يقدمان مراجعات عامة. على الرغم من أهميتها لقضايا الاستئصال، إلا أن (Williams and Dye، 1997) و (Ma and Ma، 2006) قد درسوا عتبة الوباء، التي تعتمد على المعادلات الخطية بالقرب من التوازن دون مرض. تركز المراجع الأخرى على المواقف المستوطنة، وتبحث عن الفوضى أو تحاول تقدير المعلمات، وتذكر فقط المشكلة قبل التحول مباشرة إلى نماذج أبسط بدون فترة تأخير. كل هذه المراجع تأخذ فترة معدية توزع أضعافاً مضاعفة.

(Williams and Dye، 1997) تستخدم سلسلة فورييه لدراسة الحالة التي تكون فيها فترة الكمون ثابتاً ثابتاً وحيث يكون معدل الاتصال وظيفية دورية عشوائية. يؤكد المؤلفون أن معدل نمو المعادلات الخطية يعتمد على معدل الاتصال الدوري فقط بقيمته المتوسطة. يظهر أدناه للحالة الخاصة لمعدل الاتصال الجيبي أن هذا يمكن أن يكون صحيحاً فقط للقيم الاستثنائية للمعلمات. يمكن للمرء أن يدرك ذلك باستخدام الصيغة التقريبية (9) من (Coale، 1972).

(Ma and Ma، 2006) يدرس عددياً نموذج SEIR وهو نظام من المعادلات التفاضلية العادية، والذي يتوافق مع فترة الكمون الموزعة أسياً، مع معدل اتصال يختلف حسب $1 + \varepsilon \cos \omega t$. وجد المؤلفون أن متوسط قيمة معدل الاتصال لم يكن كافياً لتحديد عتبة الوباء. (باكار، 2007) أكد تحليلياً هذه الملاحظة باستخدام الصيغة التقريبية (9)، والتي تظهر في هذا المثال أن التكاثر، وبالتالي عتبة الوباء، تعتمد على ε .

(فقط، 2000) يستخدم سلسلة فورييه لدراسة معادلة خطية تفاضلية تأخير، والتي هي رسمياً مثل الخطية لنموذج SEIS أو SEIR مع فترة زمنية ثابتة. ومع ذلك اختار المؤلف الوظيفة $c(t) = \varepsilon \cos(\omega t)$ للمعلمة المقابلة لمعدل الاتصال، وهو غير مناسب في سياق ديناميكيات السكان حيث يجب أن يكون معدل الاتصال إيجابياً (الدافع فقط، 2000) هو مشكلة مهندس). توصل المؤلف إلى معادلة مميزة لمعدل نمو نمودجه متضمناً كسوراً متواصلة شبيهة بـ (11).

4.2 النموذج

دعونا نعود إلى حالة فترة الكمون الثابتة التي نظر فيها ويليامز وداي (1997) ونذكر الصيغ المختلفة الممكنة لنموذج SEIS نفسه. نلاحظ أن نموذج SEIR يؤدي إلى نفس المعادلات الخطية بالقرب من التوازن دون مرض. لذا فإن لها نفس عتبة الوباء.

تحتوي الصيغة مع معادلة تفاضلية جزئية على ثلاثة أقسام:

- $S(t)$ هو السكان الأصحاء في الوقت t
- $E(t, x)$ إصابة السكان ولكن ليس معدياً بعد، وهو في الوقت t تم إصابة ل s أحداث الوقت
- $I(t)$ هو السكان المعدية في الوقت t .

معلمات النموذج

- N : مجموع السكان، الذي لا يزال ثابتاً؛
- L : فترة الكمون الثابتة؛
- a : معدل شفاء الأشخاص المعديين، بحيث يتم توزيع الفترة المعدية أضعافاً مضاعفة؛
- $c(t)$: الاتصال معدل في وقت t ، التي هي وظيفية دورية مع الفترة T .

النموذج هو

$$\frac{dS}{dt}(t) = -c(t) S(t) I(t)/N + a I(t), \quad E(t, 0) = c(t) S(t) I(t)/N$$

$$\frac{\partial E}{\partial t}(t, x) + \frac{\partial E}{\partial x}(t, x) = 0 \quad (0 < x < L), \quad \frac{dI}{dt}(t) = E(t, L) - a I(t),$$

مع $E(t, x) = 0 \forall x > L$ من خلال دمج المعادلة التفاضلية الجزئية على طول الخطوط المميزة ، نحصل عليها $E(t, L) = E(t - L, 0)$ وبالتالي يمكن كتابة النظام بشكل أكثر إحكاما باستخدام معادلات التأخير التفاضلي:

$$\frac{dS}{dt}(t) = -c(t) S(t) I(t)/N + a I(t),$$

$$\frac{dI}{dt}(t) = c(t - L) S(t - L) I(t - L)/N - a I(t).$$

نقوم بترتيب هذه المعادلات خطيا بالقرب من التوازن دون مرض $(S = N, I = 0)$. نحصل

$$\frac{dI^*}{dt}(t) = c(t - L) I^*(t - L) - a I^*(t).$$

نملك $i^*(t) = c(t) I^*(t)$ هو عدد الإصابات الجديدة لكل وحدة زمنية في الوقت t في هذا النموذج الخطي.

$$\frac{d}{dt} \left[e^{at} I^*(t) \right] = e^{at} i^*(t - L).$$

نحن ندمج بين $-\infty$ و t ونقوم بتغيير المتغير. نحصل على المعادلة المتكاملة التالية لـ $i^*(t)$:

$$i^*(t) = c(t) \int_0^\infty f(x) i^*(t - x) dx, \quad (21)$$

مع

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \forall x < L, \\ e^{-a(x-L)} & \forall x > L. \end{cases} \quad (22)$$

المعادلة (21) لها الشكل (4) مع $\Phi(t, x) = c(t) f(x)$.

4.3 مثال عددي

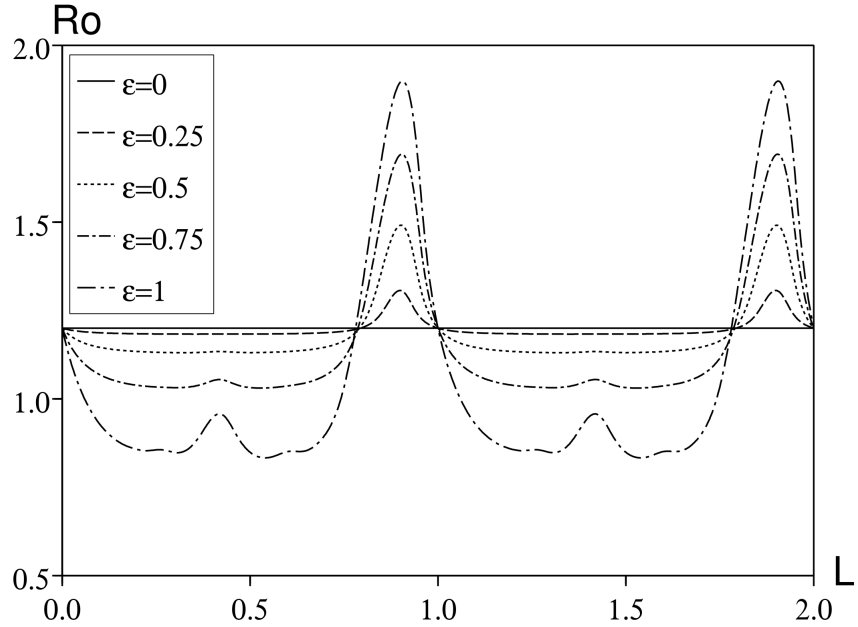
لنفترض الآن كما في المعادلة (6) ذلك $c(t) = c_0 [1 + \varepsilon \cos(\omega t)]$ بحيث $\Phi(t, x) = (1 + \varepsilon \cos(\omega t)) \phi(x)$ مع $\phi(x) = c_0 f(x)$ حسب التعريف (7) لدينا

$$\phi_n(s) = c_0 \int_L^\infty e^{-a(x-L)} e^{-sx - ni\omega x} dx = c_0 \frac{e^{-sL - ni\omega L}}{s + a + ni\omega}. \quad (23)$$

يمكننا بعد ذلك حل المعادلتين الضمنييتين (10) و (11) للمعدل النمو والتكاثر بقيم مختلفة من المعلمات باستخدام ثنائي الانقسام البسيط. لاحظ على سبيل المثال أن المقام على الجانب الأيمن من المعادلة (10) يمكن تقريبه بالرقم المركب z_1 ، مع الخوارزمية التكرارية

$$z_n = \frac{1}{\phi_n(r)} - 1, \quad z_{k-1} = \frac{1}{\phi_{k-1}(r)} - 1 - \frac{\varepsilon^2/4}{z_k} \quad (k = n, n-1, \dots, 2).$$

الخطأ الذي تم إدخاله صغير جداً إذا تم أخذ n بشكل كافٍ. استخدمنا $n = 20$ ولكن النتيجة مع $n = 2$ قريبة جداً بالفعل. علاوة على ذلك ، يجب توخي الحذر مع الانقسام لأن المعادلتين (10) و (11) يمكن أن يكون لهما جذور حقيقية عديدة: ص و R_0 هي الأكبر. يوضح الشكل 1 قابلية التكاثر كدالة لفترة الكمون L ، لقيم مختلفة من ε . لـ T و a أخذنا نفس القيم الموجودة في (Williams and Dye، 1997). إلى عن على c_0 ، أخذنا $c_0/a = 1,2$ في مكان $c_0/a = 1,5$ كما في (Williams and Dye، 1997). ولكن لاحظ مع المعادلة (11) أنه إذا c_0 مضروباً في ثابت ، ثم R_0 مضروباً في نفس الثابت. لذا يبقى شكل الشكل 1 كما هو ولكن بمقياس مختلف على المحور الرأسي.



الشكل 1. الشكل التكراري R_0 اعتمادًا على فترة الكمون L إلى عن على $\{0; 0,25; 0,5; 0,75; 1\}$. ϵ . معاملات أخرى: $T = 1$ ، $\log 2/a = 1/12$ و $c_0/a = 1,2$.

لقيمة معينة من فترة الكمون ، يمكن أن تختلف قابلية التكاثر بشكل كبير كدالة ϵ . إلى عن على $\epsilon = 1$ جزء كبير من المنحنى R_0 أقل من 1 ، أي تحت عتبة الوباء ، بينما $R_{0,0} = c_0/a$ (القيمة المطابقة $\epsilon = 0$) أعلى من هذا الحد: متوسط معدل الاتصال من شأنه توقع نتيجة خاطئة. فيما يلي بعض الملاحظات الأخرى:

- R_0 مستقل عن L إذا $\epsilon = 0$
- R_0 هي دالة لـ L وهي دورية مع الفترة T
- R_0 لا يعتمد على ϵ إذا $L = 0$ ، وبالتالي أيضا إذا L مضاعفًا صحيحًا لـ T ؛
- لفترة زمنية معينة L ، يمكن أن تكون قابلية التكاثر وظيفة زيادة أو تناقص ϵ .

النقطة الأولى معروفة جيدًا: باستخدام (3) أو (11) ، لدينا $R_0 = \phi_0(0) = c_0/a$ إذا $\epsilon = 0$. بدون دورية ، لا تؤثر فترة الكمون على عدد الحالات الثانوية لأن جميع الأفراد ينجون من فترة الكمون ويصبحون معديين ولأن معدل الاتصال يبقى كما هو .

النقطة الثانية ناتجة عن المعادلة (11) وحقيقة ذلك

$$\phi_n(0) = c_0 e^{-ni\omega L} / (a + ni\omega)$$

لم يتغير عندما L يتم استبدال $L + T$. بشكل حدسي ، يعاني الفرد المصاب من نفس البيئة بعد فترة الكمون L أو بعد فترة الكمون $L + T$ ؛ ينتج نفس العدد من الحالات الثانوية.

النقطة الثالثة معروفة أيضًا. إذا كان $L = 0$ ، يتم تقليل النموذج إلى نموذج SIS مع فترة معدية يتم توزيعها أضعافًا مضاعفة. في هذه الحالة بالذات ، يتم الحصول على التكاثر عن طريق حساب متوسط معدل الاتصال (5) ، Bacaër and Guernaoui، 2006 ، §5.1.1 ، والمراجع المدرجة. في الواقع ، $R_0 = c_0/a$ هو حل (11) إذا $L = 0$ ، لأن $R_0(a + ni\omega)/c_0 - 1 = ni\omega/a$.

لفهم النقطة الرابعة ، نستخدم الصيغة التقريبية (9) . نملك $R_0 \simeq R_{0,0} + R_{0,2} \epsilon^2$ مع

$$R_{0,0} = \frac{c_0}{a} \quad , \quad R_{0,2} = \frac{c_0}{2a} \operatorname{Re} \left(\frac{1}{e^{i\omega L} (1 + i\omega/a) - 1} \right) .$$

إلى عن على ϵ ضغير ، R_0 هي وظيفة متزايدة (أو متناقصة) لـ ϵ إذا $R_{0,2} > 0$ (أو $R_{0,2} < 0$) . $R_{0,2} = 0$ إذا فقط إذا $e^{i\omega L} (1 + i\omega/a) - 1$ هو رقم وهمي خالص. هذا الشرط مكتوب

$$\cos(\omega L) - \frac{\omega}{a} \sin(\omega L) - 1 = 0 .$$

نحدد الرقم الحقيقي الوحيد مع $\psi \in (0, \pi/2)$

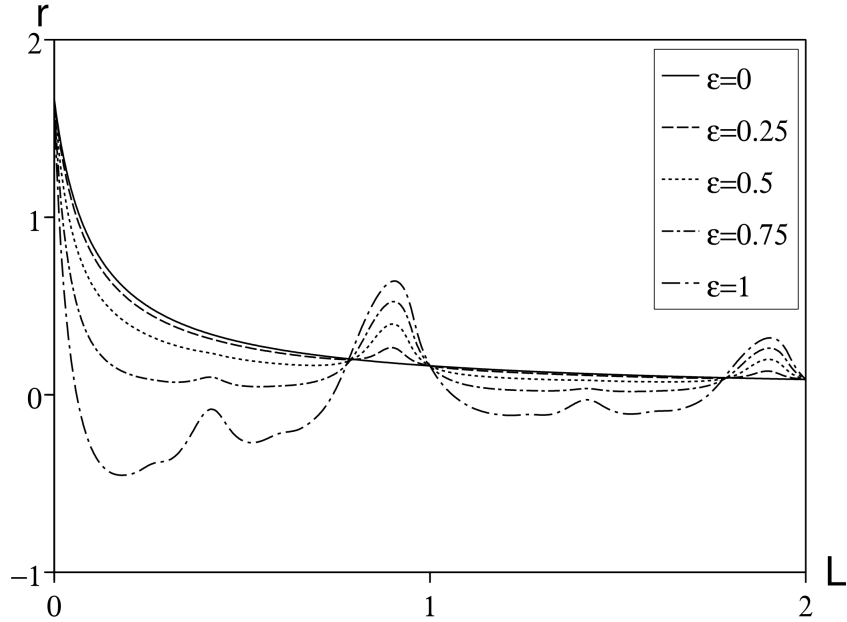
$$\cos \psi = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega/a)^2}}, \quad \sin \psi = \frac{\omega/a}{\sqrt{1 + (\omega/a)^2}},$$

ذلك بالقول $\psi = \arctan(\omega/a)$. هذا depends يعتمد فقط على المنتج aT . إذا لدينا $R_{0,2} = 0$ إذا فقط إذا

$$\cos(\omega L + \psi) = \cos(\omega L) \cos \psi - \sin(\omega L) \sin \psi = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega/a)^2}} = \cos \psi,$$

ذلك بالقول $\omega L + \psi = \pm \psi + 2k\pi$ إلى عن على $k \in \mathbb{Z}$. لأن $\omega = 2\pi/T$ ، نملك $R_{0,2} = 0$ إذا $L = kT$ أو $L/T = 1 - \psi/\pi \simeq 0,794$ إذا $R_{0,2} = 0$ ، على وجه الخصوص، مع القيم العددية في الشكل 1. ولكن على عكس ما قد يوحي به الشكل 1، فإن المنحنيات الأربعة لا تعبر الخط الأفقي $R_0 = c_0/a$ بالضبط في $L/T = 1 - \psi/\pi$ لكن قريب جداً.

وبالمثل، يوضح الشكل 2 معدل النمو كدالة لفترة الكمون لقيم مختلفة من ε لكن مع T ، c_0 و a كما كان من قبل. معدل النمو ليست وظيفة دورية لل L . ينخفض هذا المعدل مع فترة الكمون، ولكن ليس بشكل رتيب. هناك الأصداء بين L و T .



الشكل 2. معدل النمو r اعتماداً على فترة الكمون L إلى عن على $\varepsilon \in \{0; 0,25; 0,5; 0,75; 1\}$. المعلمات الأخرى هي كما في الشكل 1.

ومع ذلك، r لا تزال مستقلة عن ε إذا كان L من مضاعفات T ، أي $L = kT$ مع $k = 0, 1, 2, \dots$ في الواقع، تذكر ذلك r_0 هو الحل الوحيد للمعادلة

$$\phi_0(r_0) = 1 \Leftrightarrow c_0 e^{-r_0 k T} / (r_0 + a) = 1.$$

$r = r_0$ هو أيضاً حل المعادلة (10) لأن

$$1/\phi_n(r) - 1 = (r_0 + a + ni\omega) e^{r_0 k T} / c_0 - 1 = ni\omega e^{r_0 k T} / c_0$$

هو خيالي بحت ل $n \geq 1$: الجانبين الأيسر والأيمن لـ (10) صفر.

لفترة الكمون العام L ، باستخدام (8) و (23)، لدينا $r \simeq r_0 + r_2 \varepsilon^2$ ، إلى عن على ε صغير مع r_0 تم تعريفه ضمناً بواسطة

$$\phi_0(r_0) = 1 \Leftrightarrow c_0 e^{-r_0 L} / (r_0 + a) = 1.$$

معطاة بواسطة (8) و (23). مع

$$\phi_1(r_0) = c_0 \frac{e^{-r_0 L - i\omega L}}{r_0 + a + i\omega} = c_0 \frac{e^{-r_0 L}}{r_0 + a} \times \frac{e^{-i\omega L}}{1 + i\omega/(r_0 + a)} = \frac{e^{-i\omega L}}{1 + i\omega/(r_0 + a)},$$

$$\phi_0'(r_0) = -c_0 \frac{e^{-r_0 L}}{r_0 + a} \left(L + \frac{1}{r_0 + a} \right) = -\left(L + \frac{1}{r_0 + a} \right),$$

نحصل

$$r_2 = -\frac{1}{2\phi_0'(r_0)} \operatorname{Re}\left(\frac{1}{1/\phi_1(r_0) - 1}\right)$$

$$= \frac{1}{2[L + 1/(r_0 + a)]} \operatorname{Re}\left(\frac{1}{e^{i\omega L}[1 + i\omega/(r_0 + a)] - 1}\right).$$

5. الخلاصة

بصرف النظر عن نماذج SEIS / SEIR المذكورة في القسم السابق ، يتم تقليل الاستقرار الخطي للتوازن التافه للعديد من النماذج السكانية الأخرى إلى المعادلة (4) ، حيث $\Phi(t, x)$ تعطى بواسطة (6). هذا هو الحال بشكل خاص بالنسبة للنماذج الوبائية مع n المقصورات المصابة ، حيث تتبع العدوى دورة $I_1 \rightarrow I_2 \rightarrow \dots \rightarrow I_n \rightarrow I_1$ وبوظيفة التلامس الجيبية فقط. انظر (Bacaër, 2007) ومراجع الملائم والكويلير. نموذج وباء SIS / SIR مع فترة معدية ثابتة L ومعدل ملامسة جيبية يتوافق مع

$$\phi(x) = c_0 \quad \forall x < L, \quad \phi(x) = 0 \quad \forall x > L.$$

في هذه الحالة،

$$\phi_n(s) = c_0(1 - e^{-sL - ni\omega L})/(s + ni\omega).$$

كما هو الحال في الجزء السابق، واستنساخ ومعدل النمو تكون مستقلة عن ε إذا L من مضاعفات T . هذه حالة متدهورة ، حيث لا يوجد سبب لفترة العدوى لعلاقة حسابية مع فترة الاتصال ، والتي عادة ما تكون أسبوعاً (اتصال أقل في عطلات نهاية الأسبوع) أو سنة. (عدد أقل من الاتصالات خلال العطلة الصيفية لأمراض الطفولة ، وزيادة احتمال انتقال الأمراض المنقولة جواً خلال فصل الشتاء). و $L = T$ حالة تلقت مع ذلك الكثير من الاهتمام في الأدب الرياضية (كوك وكابلان، 1976؛ سميث، 1977؛ نوسباوم و 1977 و 1978).

إن الأهمية الأكثر عمومية لنتائجنا هي أن متوسط معدل التكاثر ومعدل النمو يجب أن يعتبر استثنائياً. بصرف النظر عن الحالات المتدهورة المشابهة لتلك التي سبق ذكرها ، فإن الوضع الوحيد لمعرفتنا حيث يكون المتوسط صحيحاً هو أنه مع المقصورة المعدية ، فترة معدية موزعة بشكل كبير ولا فترة الكمون (5) §5.1.1، Bacaër and Guernaoui، 2006، §5.1.1، Bacaër، 2007، §5.1.1، ومراجعها). لا يعد المتوسط صحيحاً لأي انحراف ، على سبيل المثال جزأين معديين لأمراض ناقلات الأمراض (4.1) §4.1، Bacaër، 2007، §4.1، أو فترة معدية لا يتم توزيعها بشكل كبير (5.1.1) §5.1.1، Bacaër، 2007، §5.1.1، أو فترة الكمون غير الصفيرية (5.1.2) §5.1.2، Bacaër، 2007، §5.1.2).

شكر

تم هذا العمل أثناء زيارة NB ل SACEMA في Stellenbosch.

المراجع البيولوجرافية

- S. Altizer, A. Dobson, P. Hosseini, P. Hudson, M. Pascual, P. Rohani (2006) Seasonality and the dynamics of infectious diseases, *Ecol. Lett.* 9, 467–484.
- J. L. Aron, I. B. Schwartz (1984) Seasonality and period–doubling bifurcations in an epidemic model, *J. Theor. Biol.* 110, 665–679.
- N. Bacaër, S. Guernaoui (2006) The epidemic threshold of vector–borne diseases with seasonality, *J. Math. Biol.* 53, 421–436.
- N. Bacaër (2007) Approximation of the basic reproduction number R_0 for vector–borne diseases with a periodic vector, *Bull. Math. Biol.* 69, 1067–1091.
- A. J. Coale (1972) *The Growth and Structure of Human Populations : A Mathematical Investigation.*

Princeton University Press.

- K. L. Cooke, J. L. Kaplan (1976)
A periodicity threshold theorem for epidemics and population growth,
Math. Biosci. 31, 87–104.
- S. Degen, G. Thomas, N. P. Chau (2000)
Estimation of the contact rate in a seasonal SEIR model :
application to chickenpox incidence in France, *Statist. Med.* 19, 1207–1216.
- O. Diekmann, J. A. P. Heesterbeek (2000)
Mathematical Epidemiology of Infectious Diseases : Model Building, Analysis and Interpretation
John Wiley & Sons, New York.
- D. J. D. Earn, P. Rohani, B. M. Bolker, B. T. Grenfell (2000)
A simple model for complex dynamical transitions in epidemics, *Science* 287, 667–670.
- L. Euler (1760/1767)
Recherches générales sur la mortalité et la multiplication du genre humain.
Histoire de l'Académie royale des sciences et belles-lettres de Berlin, 144–164.
<http://bibliothek.bbaw.de>
- N. C. Grassly, C. Fraser (2006) Seasonal infectious disease epidemiology,
Proc. R. Soc. B 273, 2541–2550.
- P. Jagers, O. Nerman (1985) Branching processes in periodically varying environment,
Ann. Prob. 13, 254–268.
- W. Just (2000) On the eigenvalue spectrum for time-delayed Floquet problems,
Physica D 142, 153–165.
- Yu. A. Kuznetsov, C. Piccardi (1994)
Bifurcation analysis of periodic SEIR and SIR epidemic models, *J. Math. Biol.* 32, 109–121.
- P. H. Leslie (1945) On the use of matrices in certain population mathematics,
Biometrika 33, 213–245.
- A. J. Lotka (1939) *Théorie analytique des associations biologiques : analyse démographique avec application particulière à l'espèce humaine.* Hermann, Paris.
- J. Ma, Z. Ma (2006) Epidemic threshold conditions for seasonally forced SEIR models,
Math. Biosci. Eng. 3, 161–172.
- I. A. Moneim, D. Greenhalgh (2005)
Use of a periodic vaccination strategy to control the spread of epidemics with seasonally varying
Math. Biosci. Eng. 2, 591–611.
- R. D. Nussbaum (1977)
Periodic solutions of some integral equations from the theory of epidemics.
In : V. Lakshmikantham, ed., *Nonlinear Systems and Applications*, Academic Press, New York.
- R. D. Nussbaum (1978) A periodicity threshold theorem for some nonlinear integral equations,
SIAM J. Math. Anal. 9, 356–376.
- I. B. Schwartz, H. L. Smith (1983)
Infinite subharmonic bifurcation in an SEIR epidemic model, *J. Math. Biol.* 18, 233–253.
- H. L. Smith (1977) On periodic solutions of a delay integral equation modelling epidemics,
J. Math. Biol. 4, 69–80.
- H. R. Thieme (1984) Renewal theorems for linear periodic Volterra integral equations,
J. Integr. Equ. 7, 253–277.
- B. G. Williams, C. Dye (1997)
Infectious disease persistence when transmission varies seasonally, *Math. Biosci.* 145, 77–88.