

単純な周期的因子を持つ母集団モデルの成長率と再現性

Math. Biosci. 210 (2007) 647-658

<https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01293898>

Nicolas Bacaër

Institut de Recherche pour le Développement、ボンディ、フランス
nicolas.bacaer@ird.fr

Rachid Ouifki

SACEMA、DST / NRF Center of Excellence in Epidemiological Analysis and Modeling、University of Stellenbosch、南アフリカ

概要

周期的な正弦係数を持つ母集団モデルの場合、成長率と再現性が連続分数を含む単純な方程式の解であることを示します。例として、固定レイテンシ期間、指数関数的に分布した感染期間、および[数学]から取得した正弦波接触率のSEISモデルを再検討します。Biosci. 145 (1997) 77-88]。いくつかの例外的なパラメーター値は別として、流行のしきい値は平均接触率だけでなく、変動の振幅にも依存することを示しています。

1.はじめに

Lotka (1939) は、単位時間あたりの出生数を時間 t に関連付ける線形母集団モデルを研究しました。 $B(t)$ 、不妊治療あり $f(x)$ そして死亡率とともに $\mu(x)$ 年齢 x :

$$B(t) = \int_0^{\infty} \phi(x) B(t-x) dx, \quad (1)$$

と $\phi(x) = f(x) e^{-\int_0^x \mu(y) dy}$ 。彼はそれを示した $B(t)$ そして総人口は指数関数的に増加します e^{rt} 、ここで r は方程式の唯一の根です

$$1 = \int_0^{\infty} \phi(x) e^{-rx} dx. \quad (2)$$

(1) と (2) の離散時間アナログは、レスリー母集団行列モデルとレスリー行列の特性方程式 (1945) です。オイラーはすでに1760年に特定のケースを研究していました。しばしば (2) を「オイラー-ロトカ方程式」と呼びます。ロトカは表記を使用しました

$$R_0 = \int_0^{\infty} \phi(x) dx. \quad (3)$$

これは、個人が生涯に生成した子孫の平均数です。 R_0 再現性です。人口は増加しています ($r > 0$) もし $R_0 > 1$ 。減少します ($r < 0$) もし $R_0 < 1$ 。モデル (1) は、流行病モデルの無病平衡の線形安定性の研究にも表示されます。変数 x は、感染からの経過時間と $B(t)$ 流行開始時の感染の発生率 (Diekmann and Heesterbeek, 2000)。

多くの動植物個体群と多くの感染症は季節変動を示します。これらの変動は、成長率と再現性の両方に影響を与えます。(Thieme, 1984; Jagers, 1985) モデル (1) を

$$B(t) = \int_0^{\infty} \Phi(t, x) B(t-x) dx. \quad (4)$$

$\Phi(t, x)$ は、周期 T の t の周期関数です。成長率 r は、周期 T の周期的連続関数の空間上の線形積分演算子のスペクトル半径が1に等しい唯一の実数です。

$$u(t) \mapsto \int_0^\infty \Phi(t, x) e^{-rx} u(t-x) dx. \quad (5)$$

(Bacaërand Guernaoui, 2006; Bacaër, 2007) は、再現性はオペレーターのスペクトル半径と同じ方法で定義できることを示唆しています

$$u(t) \mapsto \int_0^\infty \Phi(t, x) u(t-x) dx$$

期間の定期的な連続関数の同じスペースに T 。以前と同じように $r > 0$ もし $R_0 > 1$ そして $r < 0$ もし $R_0 < 1$ 。関数が $\Phi(t, x)$ t に依存せず、これらの定義と結果はロトカのものに縮小されます。

今それを仮定します

$$\Phi(t, x) = [1 + \varepsilon \cos(\omega t)] \phi(x), \quad (6)$$

と $\omega = 2\pi/T$, $|\varepsilon| \leq 1$ そして $\phi \geq 0$ 。私たちは定義します

$$\xi = \inf \left\{ s \in \mathbb{R}, \int_0^\infty \phi(x) e^{-sx} dx < +\infty \right\}.$$

とする $\xi < 0$ 。私たちは定義します

$$\phi_n(s) = \int_0^\infty \phi(x) e^{-sx - ni\omega x} dx, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad s > \xi. \quad (7)$$

Coale (1972, Chapter 6) は、 $r \simeq r_0 + r_2 \varepsilon^2$ ために ε 小さな場所 r_0 暗黙的に定義され、 r_2 明示的に

$$1 = \phi_0(r_0) \quad , \quad r_2 = -\frac{1}{2\phi_0'(r_0)} \operatorname{Re} \left(\frac{1}{1/\phi_1(r_0) - 1} \right). \quad (8)$$

象徴 $\operatorname{Re}(z)$ 複素数 z の実部を表します。(Bacaër, 2007) では、同じ方法で $R_0 \simeq R_{0,0} + R_{0,2} \varepsilon^2$ ために ε 小さな場所

$$R_{0,0} = \phi_0(0) \quad , \quad R_{0,2} = \frac{\phi_0(0)}{2} \operatorname{Re} \left(\frac{\phi_1(0)}{\phi_0(0) - \phi_1(0)} \right). \quad (9)$$

この記事では、(2000年だけ) によって使用される方法を採用します。特定のケース (6) では、成長率と再現性が連続分数を持つ方程式の最大の根であることを示しています。

$$\frac{1}{\phi_0(r)} - 1 = 2 \operatorname{Re} \frac{\varepsilon^2/4}{\frac{1}{\phi_1(r)} - 1 - \frac{\varepsilon^2/4}{\frac{1}{\phi_2(r)} - 1 - \frac{\varepsilon^2/4}{\dots}}}, \quad (10)$$

$$\frac{R_0}{\phi_0(0)} - 1 = 2 \operatorname{Re} \frac{\varepsilon^2/4}{\frac{R_0}{\phi_1(0)} - 1 - \frac{\varepsilon^2/4}{\frac{R_0}{\phi_2(0)} - 1 - \frac{\varepsilon^2/4}{\dots}}}. \quad (11)$$

$\forall |\varepsilon| \leq 1$ 。右側で、連続した端数の実数部をとらなければならないことに注意してください。これらの比較的単純な方程式を使用して、成長率と再現性を数値で計算できます。例えば書いたら $r(\varepsilon)$ 成長率のパラメータへの依存を主張するために、我々は一般的に不平等を持っていることがわかります $r(\varepsilon) \neq r(0)$ ために $\varepsilon \neq 0$ 。つまり、人口増加の閾値 ($r > 0$) 周期係数を平均化するだけでは取得できません。これは、 $\varepsilon = 0$ 。この点は、(Williams and Dye, 1997) のSEIS / SEIR流行モデルで示され、固定潜伏期間と指数分布感染期間が含まれています。

セクション2で式 (10) と (11) を取得します。それらから、セクション3で近似式 (8) と (9) を見つけます。(Williams and Dye, 1997) はセクション4の例として取り上げられています。結論は他の例に言及しています。

2. (10) および (11) の証明

(Thieme, 1984; Jagers, 1985) によれば、正の線形演算子 (5) のスペクトル半径は r の減少関数であり、モデル (4) の成長率は次のような唯一の実数です。スペクトル半径は1です。したがって、成長率 r も最大の実数であり、自明でない周期関数が存在します。 $u(t)$ と

$$\int_0^{\infty} \Phi(t, x) e^{-rx} u(t-x) dx = u(t), \quad \forall t. \quad (12)$$

最初に、 $\Phi(t, x) = p(t) \phi(x)$ 周期 T の周期関数で、 $p(t)$ 。フーリエ級数分解を考える

$$p(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} p_n e^{ni\omega t}, \quad u(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} u_n e^{ni\omega t},$$

と $\omega = 2\pi/T$ 。述べたように (Coale, 1972; Williams and Dye, 1997) 、方程式 (12) は線形方程式の無限系と同等です。

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} p_{k-n} \phi_n(r) u_n = u_k \quad (k \in \mathbb{Z}), \quad (13)$$

そして ϕ_n (7) で定義されます。

ここで、 $p(t) = 1 + \varepsilon \cos(\omega t)$ 。なぜなら $p(t) = 1 + \frac{\varepsilon}{2} e^{i\omega t} + \frac{\varepsilon}{2} e^{-i\omega t}$ 、システム (13) が書かれています

$$\frac{\varepsilon}{2} \phi_{k-1}(r) u_{k-1} + \phi_k(r) u_k + \frac{\varepsilon}{2} \phi_{k+1}(r) u_{k+1} = u_k \quad (k \in \mathbb{Z}). \quad (14)$$

(2000年7月) で使用した方法を、同様の三重対角システムに適合させることができます。システムを書き直そう (14)

$$\frac{1}{\phi_k(r)} - 1 = \frac{\varepsilon}{2} \frac{\phi_{k-1}(r)}{\phi_k(r)} \frac{u_{k-1}}{u_k} + \frac{\varepsilon}{2} \frac{\phi_{k+1}(r)}{\phi_k(r)} \frac{u_{k+1}}{u_k}. \quad (15)$$

$k=0$ の場合、この方程式は

$$\frac{1}{\phi_0(r)} - 1 = \frac{\varepsilon^2/4}{\frac{\varepsilon}{2} \frac{\phi_0(r)}{\phi_{-1}(r)} \frac{u_0}{u_{-1}}} + \frac{\varepsilon^2/4}{\frac{\varepsilon}{2} \frac{\phi_0(r)}{\phi_1(r)} \frac{u_0}{u_1}}. \quad (16)$$

しかし、(15) は $k-1$ または $k+1$ を k に置き換えて、

$$\frac{\varepsilon}{2} \frac{\phi_k(r)}{\phi_{k-1}(r)} \frac{u_k}{u_{k-1}} = \frac{1}{\phi_{k-1}(r)} - 1 - \frac{\varepsilon^2/4}{\frac{\varepsilon}{2} \frac{\phi_{k-1}(r)}{\phi_{k-2}(r)} \frac{u_{k-1}}{u_{k-2}}}, \quad (17)$$

$$\frac{\varepsilon}{2} \frac{\phi_k(r)}{\phi_{k+1}(r)} \frac{u_k}{u_{k+1}} = \frac{1}{\phi_{k+1}(r)} - 1 - \frac{\varepsilon^2/4}{\frac{\varepsilon}{2} \frac{\phi_{k+1}(r)}{\phi_{k+2}(r)} \frac{u_{k+1}}{u_{k+2}}}. \quad (18)$$

(16) と (17) - (18) を繰り返し組み合わせてみましょう。連続した分数を取得します

$$\frac{1}{\phi_0(r)} - 1 = \frac{\varepsilon^2/4}{\frac{1}{\phi_{-1}(r)} - 1 - \frac{\varepsilon^2/4}{\frac{1}{\phi_{-2}(r)} - 1 - \frac{\varepsilon^2/4}{\dots}}} + \frac{\varepsilon^2/4}{\frac{1}{\phi_1(r)} - 1 - \frac{\varepsilon^2/4}{\frac{1}{\phi_2(r)} - 1 - \frac{\varepsilon^2/4}{\dots}}}.$$

なぜなら $\phi_k(r)$ そして $\phi_{-k}(r)$ は複素共役数なので、「特性方程式」 (10) に到達します。成長率 r が最大のソリューションです。

(11) の証明も同様で、問題から始まります

$$\int_0^{\infty} \Phi(t, x) u(t-x) dx = R_0 u(t). \quad (19)$$

R_0 は、この方程式が非ゼロの解を持ち、周期 T の周期的な最大の実数です。特定のケースについて $\Phi(t, x) = (1 + \varepsilon \cos(\omega t)) \phi(x)$ 、方程式 (19) は

$$\frac{\varepsilon}{2} \phi_{k-1}(0) u_{k-1} + \phi_k(0) u_k + \frac{\varepsilon}{2} \phi_{k+1}(0) u_{k+1} = R_0 u_k \quad (k \in \mathbb{Z}),$$

そして式 (11) に。

3.近似式 (8) - (9)

(10) ~ (11) から、(Coale, 1972; Bacaër, 2007) でより複雑な方法で証明された (8) ~ (9) の近似を簡単に見つけることができます。

成長率 r から始めましょう。フォームの ε small の近似を探しましょう $r \simeq r_0 + r_1 \varepsilon + r_2 \varepsilon^2$ 。 $\varepsilon = 0$ の場合、(10) の右辺はキャンセルされ、 r_0 方程式の (一意の) 解として $\phi_0(r_0) = 1$ 、これはもちろんオイラー・ロトカ方程式 (2) と同じです。ちなみに、変化は $\varepsilon \mapsto -\varepsilon$ 置換に対応 $p(t) = 1 + \varepsilon \cos(\omega t)$ と $p(t - T/2)$ 。今、線形演算子

$$u(t) \mapsto \int_0^\infty \Phi(t - T/2, x) e^{-rx} u(t - x) dx$$

周期 T の周期関数の空間では、線形演算子 (5) と同じ固有値を持ち、固有関数は $T/2$ だけシフトされます。 r の ε への依存性を強調するために、 $r(\varepsilon)$ 。このように $r(-\varepsilon) = r(\varepsilon)$ そして $r_1 = 0$ 。(Bacaër, 2007) は、再現性の近似について同様の議論を使用しました。

したがって、 $r \simeq r_0 + r_2 \varepsilon^2$ そして私たちは決定する必要があります r_2 。成長率 r は、陰的方程式 (10) の解です。なぜなら $\phi_0(r_0) = 1$ 、我々は持っています

$$\phi_0(r_0) - \phi_k(r_0) = \int_0^\infty \phi(x) e^{-r_0 x} (1 - e^{-k i \omega x}) dx \neq 0, \quad \forall k \geq 1$$

(たとえば、関数が $\phi(x)$ 少なくとも短い間隔で厳密に正です)。だから私たちは $\phi_k(r_0) \neq 1$ そして $1/\phi_k(r_0) - 1 \neq 0 \forall k \geq 1$ 。式 (10) の右辺の ε の2次式のみを保持するために、分母をその最低次の近似で置き換えます。入れ替え $\phi_1(r)$ と $\phi_1(r_0)$ 。連続部分の ε の二次剰余を無視します。私達は手に入れました

$$\frac{1}{\phi_0(r)} - 1 \simeq 2 \operatorname{Re} \left(\frac{\varepsilon^2/4}{1/\phi_1(r_0) - 1} \right). \quad (20)$$

だが

$$\phi_0(r) \simeq \phi_0(r_0 + r_2 \varepsilon^2) \simeq \phi_0(r_0) + r_2 \varepsilon^2 \phi_0'(r_0) = 1 + r_2 \varepsilon^2 \phi_0'(r_0).$$

近似を使用します $\phi_0(r)$ 。(20) の ε の2次式を特定します。これは与える

$$r_2 = -\frac{1}{2 \phi_0'(r_0)} \operatorname{Re} \left(\frac{1}{1/\phi_1(r_0) - 1} \right),$$

これは (8) と同等です。この式は少し異なる形式で書くことができます。確かに、

$$c_1 = \int_0^\infty \phi(x) e^{-r_0 x} \cos(\omega x) dx, \quad s_1 = \int_0^\infty \phi(x) e^{-r_0 x} \sin(\omega x) dx,$$

我々は持っています $\phi_1(r_0) = c_1 - i s_1$ 。そう

$$r_2 = -\frac{1}{2 \phi_0'(r_0)} \operatorname{Re} \left(\frac{c_1 - i s_1}{1 - c_1 + i s_1} \right) = -\frac{1}{2 \phi_0'(r_0)} \frac{(1 - c_1) c_1 - s_1^2}{(1 - c_1)^2 + s_1^2},$$

これは (Coale, 1972) の式 (6.27) と本質的に同じです。

同様に、 $R_0 \simeq R_{0,0} + R_{0,2} \varepsilon^2$ が小さい。式 (3) または式 (11) から $\varepsilon = 0$ 、我々は持っています $R_{0,0} = \phi_0(0)$ 。式 (11) の右辺のみを保持するために、 ε の2次式を使用するために、 $R_{0,0} = \phi_0(0)$ 。 ε は2次であるため、残りの連続部分は無視します。我々は持っています

$$\frac{R_0}{\phi_0(0)} - 1 \simeq 2 \operatorname{Re} \left(\frac{\varepsilon^2/4}{\phi_0(0)/\phi_1(0) - 1} \right).$$

これにより、式 (9) が導かれます。

4.レイテンシ期間が固定されたSEISモデル

4.1背景

SEIRまたはSEISと呼ばれる流行モデルには、潜伏期間と感染性コンパートメントがあります。さらに、接触率が周期的である場合、それらは多くの数学的または数値的研究の対象となっています (Williams and Dye, 1997; Schwartz and Smith, 1983; Aron and Schwartz, 1984; Kuznetsov and Piccardi, 1994; MoneimおよびGreenhalgh, 2005; MaおよびMa, 2006)。(Earn et al., 2000) は水痘の麻疹 (Deguen et al., 2000) に特に関心があり、(Altizer et al., 2006; Grassly and Fraser, 2006) は一般的なレビューを提示しています。根絶問題に対するその重要性にもかかわらず、(Williams and Dye, 1997) と (Ma and Ma, 2006) のみが、病気のない平衡に近い線形化方程式に依存する流行のしきい値を調査しました。他のリファレンスは、カオスを探るか、パラメータを推定しようとする、風土的な状況に焦点を合わせており、ラグ期間のない単純なモデルにすぐに移る前に問題についてのみ言及しています。これらの参考文献はすべて、指数関数的に分布する感染期間を要します。

(Williams and Dye, 1997) は、フーリエ級数を使用して、潜伏期間が固定定数であり、接触率が任意の周期関数であるケースを分析的に研究しています。著者らは、線形化された方程式の成長率は、その平均値によってのみ定期的な接触の率に依存すると主張します。正弦波接触率の特定のケースについて以下に示しますが、これはパラメータの例外的な値に対してのみ当てはまる可能性があります。これは、(Coale, 1972) の近似式 (9) を使用して実現できます。

(MaおよびMa, 2006) は、常微分方程式のシステムであるSEIRモデルを数値的に研究します。これは、接触率が次のように変化する、指数関数的に分布する待ち時間に対応します。 $1 + \varepsilon \cos \omega t$ 。著者らは、接触率の平均値が流行の閾値を決定するのに十分ではないことを発見した。(Bacaer, 2007) 近似式 (9) を使用してこの観察を分析的に確認しました。これは、この例で再現性、したがって流行のしきい値も ε に依存することを示しています。

(2000年だけ) は、フーリエ級数を使用して遅延微分線形方程式を研究します。これは形式的には、固定レイテンシ期間のSEISまたはSEIRモデルの線形化と同じです。ただし、作成者は関数を選択しました $c(t) = \varepsilon \cos(\omega t)$ 接触率は正でなければならないので (2000年8月の動機はエンジニアの問題です)、接触ダイナミクスのコンテキストでは適切ではありません。著者は、(11) と同様の連続部分を含むモデルの成長率の特性方程式に到達しました。

4.2モデル

ウィリアムズとダイ (1997) が検討した固定レイテンシ期間の場合に戻り、同じSEISモデルのさまざまな可能な定式化を思い出してみましょう。SEIRモデルは、疾患のない平衡近くで同じ線形化方程式を導くことに注意してください。そのため、同じ流行しきい値があります。

偏微分方程式を使用した定式化には3つの区画があります。

- $S(t)$ 時間 t における健康な人口
- $E(t, x)$ 感染しているがまだ感染していない集団であり、時間 t に x 時間単位で感染している
- $I(t)$ は、時間 t における感染人口です。

モデルのパラメータは

- N : 一定である総人口。
- L : 固定レイテンシー期間。
- a : 感染者の治癒率。感染期間は指数関数的に分布します。

- $c(t)$: 周期 T の周期関数である時間 t のレートに問い合わせます。

モデルは

$$\begin{aligned} \frac{dS}{dt}(t) &= -c(t)S(t)I(t)/N + aI(t), & E(t,0) &= c(t)S(t)I(t)/N \\ \frac{\partial E}{\partial t}(t,x) + \frac{\partial E}{\partial x}(t,x) &= 0 \quad (0 < x < L), & \frac{dI}{dt}(t) &= E(t,L) - aI(t), \end{aligned}$$

と $E(t,x) = 0 \forall x > L$ 。特性線に沿って偏微分方程式を積分すると、 $E(t,L) = E(t-L,0)$ 。したがって、システムは微分遅延方程式を使用して、よりコンパクトな形式で記述できます。

$$\begin{aligned} \frac{dS}{dt}(t) &= -c(t)S(t)I(t)/N + aI(t), \\ \frac{dI}{dt}(t) &= c(t-L)S(t-L)I(t-L)/N - aI(t). \end{aligned}$$

私たちはこれらの方程式を病気の無い平衡近くで線形化します ($S = N, I = 0$)。私達は手に入れました

$$\frac{dI^*}{dt}(t) = c(t-L)I^*(t-L) - aI^*(t).$$

$i^*(t) = c(t)I^*(t)$ この線形化モデルの時間 t における単位時間あたりの新しい感染数です。我々は持っています

$$\frac{d}{dt} \left[e^{at} I^*(t) \right] = e^{at} i^*(t-L).$$

私たちは $-\infty$ そして t と変数を変更します。次の積分方程式を取得します $i^*(t)$:

$$i^*(t) = c(t) \int_0^\infty f(x) i^*(t-x) dx, \quad (21)$$

と

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \forall x < L, \\ e^{-a(x-L)} & \forall x > L. \end{cases} \quad (22)$$

式 (21) の形式は (4) で、 $\Phi(t,x) = c(t)f(x)$ 。

4.3 数値例

ここで、式 (6) のように、 $c(t) = c_0[1 + \varepsilon \cos(\omega t)]$ 、そのため $\Phi(t,x) = (1 + \varepsilon \cos(\omega t))\phi(x)$ と $\phi(x) = c_0 f(x)$ 。定義 (7) によれば、

$$\phi_n(s) = c_0 \int_L^\infty e^{-a(x-L)} e^{-sx - ni\omega x} dx = c_0 \frac{e^{-sL - ni\omega L}}{s + a + ni\omega}. \quad (23)$$

次に、単純な二分法を使用して、パラメーターの異なる値を使用して、成長率と再現性について陰的方程式 (10) と (11) を解くことができます。たとえば、式 (10) の右辺の分母は複素数で近似できることに注意してください。 z_1 、反復アルゴリズム

$$z_n = \frac{1}{\phi_n(r)} - 1, \quad z_{k-1} = \frac{1}{\phi_{k-1}(r)} - 1 - \frac{\varepsilon^2/4}{z_k} \quad (k = n, n-1, \dots, 2).$$

導入されたエラーは、 n が十分に大きい場合、非常に小さくなります。 $n = 20$ を使用しましたが、 $n = 2$ の結果はすでに非常に近いです。さらに、ケアは、式 (10) 及び (11) は、いくつかの実根を持つことができるので、二分法で撮影されなければならなかった： R と R_0 最大です。図1は、さまざまな値の再現性を待ち時間 L の関数として示しています ε 。以下のための T と a 、(Williams and Dye, 1997) と同じ値を使用しました。ために c_0 、私たちは取った $c_0/a = 1,2$ の代わりに $c_0/a = 1,5$ (Williams and Dye, 1997) のように。ただし、式 (11) では、 c_0 定数を掛けて、 R_0 同じ定数が乗算されます。したがって、図1の形状は同じですが、縦軸のスケールが異なります。

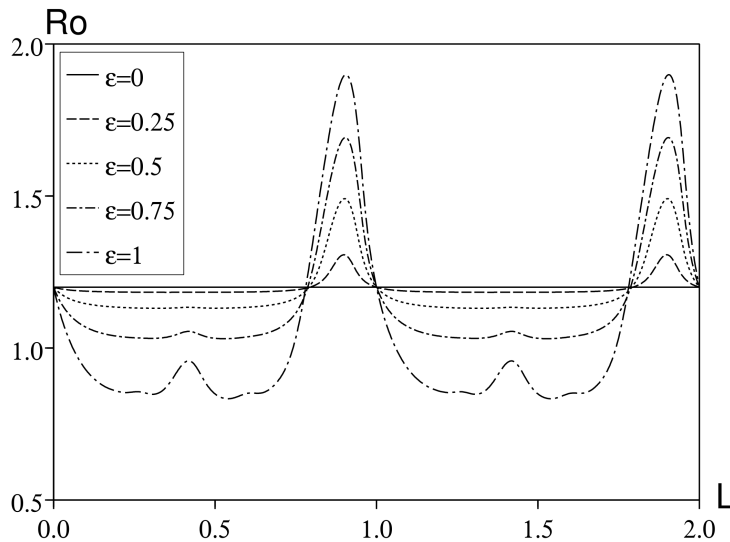


図1.再現性 R_0 待ち時間に応じて L ために $\varepsilon \in \{0; 0,25; 0,5; 0,75; 1\}$ 。その他のパラメーター： $T = 1$ 、 $\log 2/a = 1/12$ そして $c_0/a = 1,2$ 。

レイテンシ期間の特定の値に対して、再現性は ε の関数としてかなり変化する可能性があります。ために $\varepsilon = 1$ 、曲線の大部分 R_0 未満、つまり流行のしきい値を下回る一方で、 $R_{0,0} = c_0/a$ （に対応する値 $\varepsilon = 0$ ）がこのしきい値を上回っています。接触率を平均すると、誤った結果が予測されます。その他の注意事項は次のとおりです。

- R_0 独立しています L もし $\varepsilon = 0$
- R_0 は周期 T で周期的な L の関数です
- R_0 以下の場合、 ε に依存しません $L = 0$ 、したがって、 L が T の整数倍の場合も同様です。
- 決定された待ち時間 L の場合、再現性は次の関数の増加または減少になります。 ε 。

最初の点はよく知られています：(3) または (11) を使用して、 $R_0 = \phi_0(0) = c_0/a$ もし $\varepsilon = 0$ 。周期性がなければ、潜伏期間は二次症例の数に影響を与えません。これは、すべての個人が潜伏期間を生き延びて感染力を持ち、接触率が同じままであるためです。

2番目の点は、式 (11) と、

$$\phi_n(0) = c_0 e^{-ni\omega L} / (a + ni\omega)$$

L が $L + T$ に置き換えられても、変化はありません。直感的に、感染した個人は、潜伏期間 L または潜伏期間 $L + T$ の後に同じ環境を経験します。同じ数の二次ケースが生成されます。

3番目の点もよく知られています。場合、 L は $= 0$ 、モデルは、指数分布、感染期間と SIS モデルに低減されます。この特定のケースでは、接触率を平均化することで再現性が得られます (Bacaër および Guernaoui, 2006年、§5、Bacaër, 2007年、§5.1.1、および参考文献を含む)。確かに、 $R_0 = c_0/aL = 0$ の場合、(11) の解です。 $R_0/\phi_n(0) - 1 = R_0(a + ni\omega)/c_0 - 1 = ni\omega/a n \geq 1$ の整数については純粋に虚数です。(11) の左側と右側は0に等しくなります。

4番目の点を理解するために、近似式 (9) を使用します。我々は持っています $R_0 \simeq R_{0,0} + R_{0,2} \varepsilon^2$ 、

$$R_{0,0} = \frac{c_0}{a}, \quad R_{0,2} = \frac{c_0}{2a} \operatorname{Re} \left(\frac{1}{e^{i\omega L} (1 + i\omega/a) - 1} \right).$$

ために ε 小さい、 R_0 の増加 (または減少) 関数です ε もし $R_{0,2} > 0$ (または $R_{0,2} < 0$)。 $R_{0,2} = 0$ もしそうなら $e^{i\omega L} (1 + i\omega/a) - 1$ 純粋な虚数です。この状態が書かれています

$$\cos(\omega L) - \frac{\omega}{a} \sin(\omega L) - 1 = 0.$$

私たちは定義します $\psi \in (0, \pi/2)$ 唯一の実数

$$\cos \psi = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega/a)^2}}, \quad \sin \psi = \frac{\omega/a}{\sqrt{1 + (\omega/a)^2}},$$

つまり $\psi = \arctan(\omega/a)$ 。これは製品にのみ依存します aT 。だから私たちは $R_{0,2} = 0$ もしそうなら

$$\cos(\omega L + \psi) = \cos(\omega L) \cos \psi - \sin(\omega L) \sin \psi = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega/a)^2}} = \cos \psi,$$

つまり $\omega L + \psi = \pm \psi + 2k\pi$ ために $k \in \mathbb{Z}$ 。なぜなら $\omega = 2\pi/T$ 、我々は持っています $R_{0,2} = 0$ もし $L = kT$ または $L = (k - \psi/\pi)T$ と $k \in \mathbb{Z}$ 。特に、図1の数値では、 $R_{0,2} = 0$ もし $L/T = 1 - \psi/\pi \simeq 0,794$ 。しかし、図1の示唆とは異なり、4つの曲線は水平線と交差していません。 $R_0 = c_0/a$ 正確に $L/T = 1 - \psi/\pi$ しかし非常に近い。

同様に、図2は、さまざまな値のレイテンシ期間の関数として成長率を示しています ε しかし T 、 c_0 そして a 以前と同じように与えられます。成長率は L の周期関数ではありません。この率は、待ち時間に応じて減少しますが、単調ではありません。 L と T の間には共振があります。

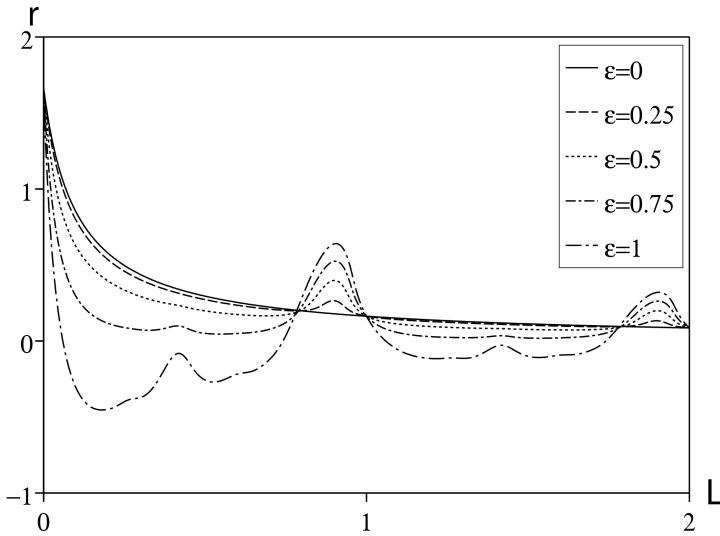


図2.成長率 r 待ち時間に応じて L ために $\varepsilon \in \{0; 0,25; 0,5; 0,75; 1\}$ 。その他のパラメーターは図1のとおりです。

しかしながら、 r まだ独立しています εL が T の倍数の場合、つまり $L = kT$ と $k = 0, 1, 2, \dots$ 。確かに、覚えておいてください r_0 方程式の唯一の解です

$$\phi_0(r_0) = 1 \Leftrightarrow c_0 e^{-r_0 k T} / (r_0 + a) = 1.$$

$r = r_0$ また、式 (10) の解でもあります。

$$1/\phi_n(r) - 1 = (r_0 + a + ni\omega) e^{r_0 k T} / c_0 - 1 = ni\omega e^{r_0 k T} / c_0$$

純粋に架空のものです $n \geq 1$: (10) の左側と右側はゼロです。

(8) と (23) を使用して、一般的な待ち時間 L に対して、 $r \simeq r_0 + r_2 \varepsilon^2$ ために ε 小さい、と r_0 によって暗黙的に定義された

$$\phi_0(r_0) = 1 \Leftrightarrow c_0 e^{-r_0 L} / (r_0 + a) = 1.$$

r_2 (8) と (23) によって与えられます。と

$$\begin{aligned} \phi_1(r_0) &= c_0 \frac{e^{-r_0 L - i\omega L}}{r_0 + a + i\omega} = c_0 \frac{e^{-r_0 L}}{r_0 + a} \times \frac{e^{-i\omega L}}{1 + i\omega / (r_0 + a)} = \frac{e^{-i\omega L}}{1 + i\omega / (r_0 + a)}, \\ \phi_0'(r_0) &= -c_0 \frac{e^{-r_0 L}}{r_0 + a} \left(L + \frac{1}{r_0 + a} \right) = -\left(L + \frac{1}{r_0 + a} \right), \end{aligned}$$

私達は手に入れました

$$\begin{aligned} r_2 &= -\frac{1}{2\phi_0'(r_0)} \operatorname{Re}\left(\frac{1}{1/\phi_1(r_0) - 1}\right) \\ &= \frac{1}{2[L + 1/(r_0 + a)]} \operatorname{Re}\left(\frac{1}{e^{i\omega L}[1 + i\omega/(r_0 + a)] - 1}\right). \end{aligned}$$

5. 結論

前のセクションで述べたSEIS / SEIRモデルとは別に、他のいくつかの母集団モデルの自明な平衡の線形安定性は、式 (4) に削減されます。 $\Phi(t, x)$ (6) で与えられます。これは特に、感染が循環する n 個の感染したコンパートメントを持つ流行モデルの場合に当てはまります。 $I_1 \rightarrow I_2 \rightarrow \dots \rightarrow I_n \rightarrow I_1$ および正弦波の接触関数のみ。

(Baca andr, 2007) およびマラリアとコレラの参考文献を参照してください。一定の感染期間 L と正弦波接触率の SIS / SIR 流行モデルは、

$$\phi(x) = c_0 \quad \forall x < L, \quad \phi(x) = 0 \quad \forall x > L.$$

その場合、

$$\phi_n(s) = c_0(1 - e^{-sL - ni\omega L}) / (s + ni\omega).$$

前のセクションと同様に、 L が T の倍数である場合、再現性と成長率は ε に依存しません。これは退行性のケースです。感染期間が接触期間と算術的な関係を持つ理由はないためです。接触期間は通常、週（週末は接触が少ない）または年です。（子供の病気の夏休み中の接触が少ない、冬の間の空中の病気の伝染の可能性が高い）。それにもかかわらず、 $L = T$ の場合は、数学的文献で多くの注目を集めています（Cooke and Kaplan, 1976; Smith, 1977; Nussbaum, 1977、および1978）。

私たちの結果のより一般的な重要性は、再現性と成長率の平均化は例外的であると考えられるべきであるということです。すでに述べたのと同様の退化したケースを除いて、平均化が正しいという私たちの知る限りの唯一の状況は、感染コンパートメントがあり、感染期間が指数関数的に分布し、潜伏期間がないことです（Bacaërand Guernaoui, 2006、§5; Bacaër, 2007、§5.1.1、およびその参照）。平均化は、偏差については正しくありません。たとえば、ベクター疾患の場合の2つの感染性区画（Bacaër, 2007、§4.1）、または指数関数的に分布しない感染期間（Bacaër, 2007、§5.1.1）、またはゼロ以外の待ち時間（Bacaër, 2007、§5.1.2）。

ありがとう

この作業は、NBがステレンボッシュのSACEMAを訪問したときに行われました。

参考文献

- S. Altizer, A. Dobson, P. Hosseini, P. Hudson, M. Pascual, P. Rohani (2006) Seasonality and the dynamics of infectious diseases, *Ecol. Lett.* 9, 467–484.
- J. L. Aron, I. B. Schwartz (1984) Seasonality and period-doubling bifurcations in an epidemic model, *J. Theor. Biol.* 110, 665–679.
- N. Bacaër, S. Guernaoui (2006) The epidemic threshold of vector-borne diseases with seasonality, *J. Math. Biol.* 53, 421–436.
- N. Bacaër (2007) Approximation of the basic reproduction number R_0 for vector-borne diseases with a periodic vector population, *Bull. Math. Biol.* 69, 1067–1091.
- A. J. Coale (1972) *The Growth and Structure of Human Populations: A Mathematical Investigation.* Princeton University Press.
- K. L. Cooke, J. L. Kaplan (1976) A periodicity threshold theorem for epidemics and population growth, *Math. Biosci.* 31, 87–104.
- S. Deguen, G. Thomas, N. P. Chau (2000) Estimation of the contact rate in a seasonal SEIR model: application to chickenpox incidence in France, *Statist. Med.* 19, 1207–1216.
- O. Diekmann, J. A. P. Heesterbeek (2000) *Mathematical Epidemiology of Infectious Diseases: Model Building, Analysis and Interpretation.* John Wiley & Sons, New York.

- D. J. D. Earn, P. Rohani, B. M. Bolker, B. T. Grenfell (2000) A simple model for complex dynamical transitions in epidemics, *Science* 287, 667–670.
- L. Euler (1760/1767) Recherches générales sur la mortalité et la multiplication du genre humain. Histoire de l'Académie royale des sciences et belles-lettres de Berlin, 144–164. <http://bibliothek.bbaw.de>
- N. C. Grassly, C. Fraser (2006) Seasonal infectious disease epidemiology, *Proc. R. Soc. B* 273, 2541–2550.
- P. Jagers, O. Nerman (1985) Branching processes in periodically varying environment, *Ann. Prob.* 13, 254–268.
- W. Just (2000) On the eigenvalue spectrum for time-delayed Floquet problems, *Physica D* 142, 153–165.
- Yu. A. Kuznetsov, C. Piccardi (1994) Bifurcation analysis of periodic SEIR and SIR epidemic models, *J. Math. Biol.* 32, 109–121.
- P. H. Leslie (1945) On the use of matrices in certain population mathematics, *Biometrika* 33, 213–245.
- A. J. Lotka (1939) Théorie analytique des associations biologiques : analyse démographique avec application particulière à l'espèce humaine. Hermann, Paris.
- J. Ma, Z. Ma (2006) Epidemic threshold conditions for seasonally forced SEIR models, *Math. Biosci. Eng.* 3, 161–172.
- I. A. Moneim, D. Greenhalgh (2005) Use of a periodic vaccination strategy to control the spread of epidemics with seasonally varying contact rate, *Math. Biosci. Eng.* 2, 591–611.
- R. D. Nussbaum (1977) Periodic solutions of some integral equations from the theory of epidemics. In : V. Lakshmikantham, ed., *Nonlinear Systems and Applications*, Academic Press, New York. 235–257.
- R. D. Nussbaum (1978) A periodicity threshold theorem for some nonlinear integral equations, *SIAM J. Math. Anal.* 9, 356–376.
- I. B. Schwartz, H. L. Smith (1983) Infinite subharmonic bifurcation in an SEIR epidemic model, *J. Math. Biol.* 18, 233–253.
- H. L. Smith (1977) On periodic solutions of a delay integral equation modelling epidemics, *J. Math. Biol.* 4, 69–80.
- H. R. Thieme (1984) Renewal theorems for linear periodic Volterra integral equations, *J. Integr. Equ.* 7, 253–277.
- B. G. Williams, C. Dye (1997) Infectious disease persistence when transmission varies seasonally, *Math. Biosci.* 145, 77–88.