

具有简单周期因子的人口模型的增长率和可重复性

Math. Biosci. 210 (2007) 647-658
<https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01293898>

Nicolas Bacaër

Institut de Recherche pour le Développement, 法国邦迪
nicolas.bacaer@ird.fr

Rachid Ouifki

SACEMA, DST / NRF南非斯泰伦博斯大学流行病学分析和建模卓越中心

摘要

对于具有周期正弦系数的总体模型，我们表明增长率和可再现性是涉及连续分数的简单方程式的解。例如，我们重新研究具有固定潜伏期，呈指数分布的传染期和取自[数学]的正弦接触率的SEIS模型。生物科学。145 (1997) 77-88]。我们表明，除了一些例外的参数值外，流行阈值不仅取决于平均接触率，还取决于波动幅度。

1.简介

Lotka (1939) 研究了线性人口模型，该模型将单位时间的出生人数与时间 t 相关联， $B(t)$ ，有生育能力 $f(x)$ 和死亡率 $\mu(x)$ 在 x 岁：

$$B(t) = \int_0^{\infty} \phi(x) B(t-x) dx, \quad (1)$$

与 $\phi(x) = f(x) e^{-\int_0^x \mu(y) dy}$ 。他表明 $B(t)$ 并且总人口呈指数增长 e^{rt} ，其中 r 是方程式的唯一根

$$1 = \int_0^{\infty} \phi(x) e^{-rx} dx. \quad (2)$$

(1) 和 (2) 的离散时间类似物是Leslie人口矩阵模型和Leslie矩阵的特征方程 (1945年)。欧拉 (Euler) 在1760年就已经研究了一个特殊的情况。我们经常将 (2) 称为“欧拉-洛特卡方程”。Lotka使用了表示法

$$R_0 = \int_0^{\infty} \phi(x) dx. \quad (3)$$

它是个人一生中产生的平均后代数。 R_0 是可重复性。人口在增长 ($r > 0$) 如果 $R_0 > 1$ 。它减少了 ($r < 0$) 如果 $R_0 < 1$ 。模型 (1) 也出现在流行病模型无病平衡的线性稳定性研究中：变量 x 代表自感染和 $B(t)$ 流行开始时的感染率 (Diekmann和Heesterbeek, 2000年)。

许多动植物种群和许多传染病表现出季节性波动。这些波动会影响增长率和可重复性。(Thieme, 1984; Jagers, 1985) 将模型 (1) 替换为

$$B(t) = \int_0^{\infty} \Phi(t, x) B(t-x) dx. \quad (4)$$

$\Phi(t, x)$ 是周期 T 的 t 的周期函数。那么，增长率 r 是唯一的实数，在周期 T 的周期连续函数的空间上，线性积分算符的谱半径等于1

$$u(t) \mapsto \int_0^{\infty} \Phi(t, x) e^{-rx} u(t-x) dx. \quad (5)$$

(Bacaër和Guernaoui, 2006; Bacaër, 2007) 提出，可重复性的定义可以与算子的光谱半径相同

$$u(t) \mapsto \int_0^\infty \Phi(t, x) u(t-x) dx$$

在周期 T 的周期连续函数的相同空间上。就像之前一样， $r > 0$ 如果 $R_0 > 1$ 和 $r < 0$ 如果 $R_0 < 1$ 。如果功能 $\Phi(t, x)$ 不依赖于 t ，这些定义和结果简化为Lotka的定义和结果。

现在假设

$$\Phi(t, x) = [1 + \varepsilon \cos(\omega t)] \phi(x), \quad (6)$$

与 $\omega = 2\pi/T$, $|\varepsilon| \leq 1$ 和 $\phi \geq 0$ 。我们定义

$$\xi = \inf \left\{ s \in \mathbb{R}, \int_0^\infty \phi(x) e^{-sx} dx < +\infty \right\}.$$

我们猜测 $\xi < 0$ 。我们定义

$$\phi_n(s) = \int_0^\infty \phi(x) e^{-sx - ni\omega x} dx, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad s > \xi. \quad (7)$$

Coale (1972年, 第6章) 用不同的符号表示: $r \simeq r_0 + r_2 \varepsilon^2$ 对于 ε 小地方 r_0 是隐式定义的 r_2 明确地由

$$1 = \phi_0(r_0) \quad , \quad r_2 = -\frac{1}{2\phi_0'(r_0)} \operatorname{Re} \left(\frac{1}{1/\phi_1(r_0) - 1} \right). \quad (8)$$

符号 $\operatorname{Re}(z)$ 表示复数 z 的实部。在 (Bacaër, 2007) 中, 我们以相同的方式显示 $R_0 \simeq R_{0,0} + R_{0,2} \varepsilon^2$ 对于 ε 小地方

$$R_{0,0} = \phi_0(0) \quad , \quad R_{0,2} = \frac{\phi_0(0)}{2} \operatorname{Re} \left(\frac{\phi_1(0)}{\phi_0(0) - \phi_1(0)} \right). \quad (9)$$

在本文中, 我们改编了 (Just, 2000) 使用的方法。我们在特定情况下 (6) 表明, 增长率和可再现性是具有连续分数的方程的最大实根。

$$\frac{1}{\phi_0(r)} - 1 = 2 \operatorname{Re} \frac{\varepsilon^2/4}{\frac{1}{\phi_1(r)} - 1 - \frac{\varepsilon^2/4}{\frac{1}{\phi_2(r)} - 1 - \frac{\varepsilon^2/4}{\dots}}}, \quad (10)$$

$$\frac{R_0}{\phi_0(0)} - 1 = 2 \operatorname{Re} \frac{\varepsilon^2/4}{\frac{R_0}{\phi_1(0)} - 1 - \frac{\varepsilon^2/4}{\frac{R_0}{\phi_2(0)} - 1 - \frac{\varepsilon^2/4}{\dots}}}. \quad (11)$$

$\forall |\varepsilon| \leq 1$ 。再次在右侧注意, 您必须取连续分数的实部。这些相对简单的方程式可用于数值计算生长速率和重现性。如果我们写例如 $r(\varepsilon)$ 坚持增长率对参数的依赖, 那么我们将看到我们通常有不平等 $r(\varepsilon) \neq r(0)$ 对于 $\varepsilon \neq 0$ 。换句话说, 人口增长的门槛 ($r > 0$) 不能简单地通过平均周期系数来获得, 因为这等效于 $\varepsilon = 0$ 。(Williams and Dye, 1997) 的SEIS / SEIR流行模型说明了这一点, 该模型包括一个固定的潜伏期和一个呈指数分布的传染期。

我们在第2节中获得等式 (10) 和 (11)。从它们中, 我们找到第3节中的近似公式 (8) 和 (9)。(Williams and Dye的SEIS / SEIR流行模型 (1997年) 作为示例在第4节中进行。结论中还提到了其他示例。

2. (10) 和 (11) 的证明

根据 (Thieme, 1984; Jagers, 1985), 正线性算子 (5) 的谱半径是 r 的递减函数, 模型 (4) 的增长率是唯一的实数, 使得光谱半径等于1。因此, 增长率 r 也是最大的实数, 因此存在非平凡的周期函数 $u(t)$ 与

$$\int_0^\infty \Phi(t, x) e^{-rx} u(t-x) dx = u(t), \quad \forall t. \quad (12)$$

首先让我们考虑一下 $\Phi(t, x) = p(t) \phi(x)$ 用周期的周期函数 \hat{f} , $p(t)$ 。考虑傅立叶级数分解

$$p(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} p_n e^{ni\omega t}, \quad u(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} u_n e^{ni\omega t},$$

与 $\omega = 2\pi/T$ 。如前所述 (Coale, 1972; Williams和Dye, 1997), 等式 (12) 等价于线性方程的无限系统。

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} p_{k-n} \phi_n(r) u_n = u_k \quad (k \in \mathbb{Z}), \quad (13)$$

和 ϕ_n 由 (7) 定义。

现在考虑特殊情况 $p(t) = 1 + \varepsilon \cos(\omega t)$ 。因为 $p(t) = 1 + \frac{\varepsilon}{2} e^{i\omega t} + \frac{\varepsilon}{2} e^{-i\omega t}$, 系统 (13) 被写入

$$\frac{\varepsilon}{2} \phi_{k-1}(r) u_{k-1} + \phi_k(r) u_k + \frac{\varepsilon}{2} \phi_{k+1}(r) u_{k+1} = u_k \quad (k \in \mathbb{Z}). \quad (14)$$

我们可以将 (Just, 2000) 使用的方法改编为类似的三对角线系统。让我们重写系统 (14)

$$\frac{1}{\phi_k(r)} - 1 = \frac{\varepsilon}{2} \frac{\phi_{k-1}(r)}{\phi_k(r)} \frac{u_{k-1}}{u_k} + \frac{\varepsilon}{2} \frac{\phi_{k+1}(r)}{\phi_k(r)} \frac{u_{k+1}}{u_k}. \quad (15)$$

如果 $k=0$, 则写入此等式

$$\frac{1}{\phi_0(r)} - 1 = \frac{\varepsilon^2/4}{\frac{\varepsilon}{2} \frac{\phi_0(r)}{\phi_{-1}(r)} \frac{u_0}{u_{-1}}} + \frac{\varepsilon^2/4}{\frac{\varepsilon}{2} \frac{\phi_0(r)}{\phi_1(r)} \frac{u_0}{u_1}}. \quad (16)$$

但是 (15) 用 $k-1$ 或 $k+1$ 代替 k , 也表明

$$\frac{\varepsilon}{2} \frac{\phi_k(r)}{\phi_{k-1}(r)} \frac{u_k}{u_{k-1}} = \frac{1}{\phi_{k-1}(r)} - 1 - \frac{\varepsilon^2/4}{\frac{\varepsilon}{2} \frac{\phi_{k-1}(r)}{\phi_{k-2}(r)} \frac{u_{k-1}}{u_{k-2}}}, \quad (17)$$

$$\frac{\varepsilon}{2} \frac{\phi_k(r)}{\phi_{k+1}(r)} \frac{u_k}{u_{k+1}} = \frac{1}{\phi_{k+1}(r)} - 1 - \frac{\varepsilon^2/4}{\frac{\varepsilon}{2} \frac{\phi_{k+1}(r)}{\phi_{k+2}(r)} \frac{u_{k+1}}{u_{k+2}}}. \quad (18)$$

让我们迭代地组合 (16) 和 (17) - (18)。我们得到连续分数

$$\frac{1}{\phi_0(r)} - 1 = \frac{\varepsilon^2/4}{\frac{1}{\phi_{-1}(r)} - 1 - \frac{\varepsilon^2/4}{\frac{1}{\phi_{-2}(r)} - 1 - \frac{\varepsilon^2/4}{\dots}}} + \frac{\varepsilon^2/4}{\frac{1}{\phi_1(r)} - 1 - \frac{\varepsilon^2/4}{\frac{1}{\phi_2(r)} - 1 - \frac{\varepsilon^2/4}{\dots}}}.$$

因为 $\phi_k(r)$ 和 $\phi_{-k}(r)$ 是复共轭数, 我们得出“特征方程” (10)。增长率 r 是最大的解决方案。

从问题开始 (11) 的证明是相似的

$$\int_0^\infty \Phi(t, x) u(t-x) dx = R_0 u(t). \quad (19)$$

R_0 是最大的实数, 指此方程具有非零解, 周期时段的 \tilde{t} 。对于特定情况 $\Phi(t, x) = (1 + \varepsilon \cos(\omega t)) \phi(x)$, 等式 (19) 导致

$$\frac{\varepsilon}{2} \phi_{k-1}(0) u_{k-1} + \phi_k(0) u_k + \frac{\varepsilon}{2} \phi_{k+1}(0) u_{k+1} = R_0 u_k \quad (k \in \mathbb{Z}),$$

并至方程 (11)。

3. 近似公式 (8) - (9)

从 (10) - (11) 开始, 可以轻松找到近似值 (8) - (9), 这些近似值已在 (Coale, 1972; Bacaer, 2007) 中以更复杂的方式得到证明。

让我们从增长率 r 开始。让我们寻找 ε 小形式的近似值 $r \simeq r_0 + r_1 \varepsilon + r_2 \varepsilon^2$ 。如果 $\varepsilon = 0$ ，则取消 (10) 的右侧，我们得到 r_0 作为方程的 (唯一) 解 $\phi_0(r_0) = 1$ ，当然与 Euler-Lotka 公式 (2) 相同。顺便说一下 $\varepsilon \mapsto -\varepsilon$ 对应于替换 $p(t) = 1 + \varepsilon \cos(\omega t)$ 与 $p(t - T/2)$ 。现在线性算子

$$u(t) \mapsto \int_0^\infty \Phi(t - T/2, x) e^{-rx} u(t - x) dx$$

在周期 T 的周期函数的空间上具有与线性算子 (5) 相同的特征值，特征函数仅移位 $T/2$ 。为了强调 r 对 ε 的依赖性，我们写 $r(\varepsilon)$ 。因此，我们有 $r(-\varepsilon) = r(\varepsilon)$ 和 $r_1 = 0$ 。(Bacaër, 2007年) 对可再现性的近似使用了类似的论点。

因此，我们有 $r \simeq r_0 + r_2 \varepsilon^2$ 我们必须确定 r_2 。增长率 r 是隐式方程 (10) 的解。因为 $\phi_0(r_0) = 1$ ，我们有

$$\phi_0(r_0) - \phi_k(r_0) = \int_0^\infty \phi(x) e^{-r_0 x} (1 - e^{-ki\omega x}) dx \neq 0, \quad \forall k \geq 1$$

(例如，假设该功能 $\phi(x)$ 至少在很小的时间间隔内都是正数)。所以我们有 $\phi_k(r_0) \neq 1$ 和 $1/\phi_k(r_0) - 1 \neq 0 \forall k \geq 1$ 。为了仅在等式 (10) 右侧的 ε 中保留二次表达式，我们将分母替换为其最低阶近似。我们取代 $\phi_1(r)$ 与 $\phi_1(r_0)$ 。我们忽略了连续分数 ε 中的二次余数。我们获得

$$\frac{1}{\phi_0(r)} - 1 \simeq 2 \operatorname{Re} \left(\frac{\varepsilon^2/4}{1/\phi_1(r_0) - 1} \right). \quad (20)$$

但

$$\phi_0(r) \simeq \phi_0(r_0 + r_2 \varepsilon^2) \simeq \phi_0(r_0) + r_2 \varepsilon^2 \phi_0'(r_0) = 1 + r_2 \varepsilon^2 \phi_0'(r_0).$$

我们使用近似值 $\phi_0(r)$ 。我们在 (20) 中确定 ε 中的二次表达式。这给

$$r_2 = -\frac{1}{2 \phi_0'(r_0)} \operatorname{Re} \left(\frac{1}{1/\phi_1(r_0) - 1} \right),$$

等价于 (8)。该公式可以用略有不同的形式编写。的确，

$$c_1 = \int_0^\infty \phi(x) e^{-r_0 x} \cos(\omega x) dx, \quad s_1 = \int_0^\infty \phi(x) e^{-r_0 x} \sin(\omega x) dx,$$

我们有 $\phi_1(r_0) = c_1 - is_1$ 。所以

$$r_2 = -\frac{1}{2 \phi_0'(r_0)} \operatorname{Re} \left(\frac{c_1 - is_1}{1 - c_1 + is_1} \right) = -\frac{1}{2 \phi_0'(r_0)} \frac{(1 - c_1) c_1 - s_1^2}{(1 - c_1)^2 + s_1^2},$$

它与 (Coale, 1972) 的公式 (6.27) 基本相同。

同样 $R_0 \simeq R_{0,0} + R_{0,2} \varepsilon^2$ 对于 ε 小。根据等式 (3) 或等式 (11) $\varepsilon = 0$ ，我们有 $R_{0,0} = \phi_0(0)$ 。为了仅在等式 (11) 的右边保持 ε 中的二次表达式，我们用分母的最低阶近似值代替 $R_{0,0} = \phi_0(0)$ 。我们忽略了连续分数的其余部分，因为它在 ε 中是二次方的。我们有

$$\frac{R_0}{\phi_0(0)} - 1 \simeq 2 \operatorname{Re} \left(\frac{\varepsilon^2/4}{\phi_0(0)/\phi_1(0) - 1} \right).$$

这导致公式 (9)。

4. 具有固定等待时间的SEIS模型

4.1 背景

称为SEIR或SEIS的流行病模型具有潜伏期和感染区室。当接触率是周期性的时，它们已经成为许多数学或数值研究的主题 (Williams和Dye, 1997; Schwartz和Smith, 1983; Aron和Schwartz, 1984; Kuznetsov和Piccardi, 1994; Moneim和Greenhalgh, 2005; Ma and Ma, 2006)。 (Earn等人, 2000) 对水痘的麻疹特别感兴趣 (Deguen等人,

2000) , 而 (Altizer等人, 2006 ; Grassly和Fraser, 2006) 提出了一般性评论。尽管它对于根除问题很重要, 但只有 (Williams和Dye, 1997年) 和 (Ma和Ma, 2006年) 研究了流行阈值, 该阈值取决于接近平衡且无病的线性方程。其他参考文献则关注流行情况, 寻找混乱或试图估计参数, 并且仅在立即转向没有滞后时间的简单模型之前提及问题。所有这些参考文献都经历了一个呈指数分布的传染期。

(Williams and Dye, 1997) 使用傅里叶级数来分析研究潜伏期为固定常数且接触率为任意周期函数的情况。作者确认线性化方程的增长率仅取决于周期性接触的速率, 且仅取决于其平均值。下面显示了对于正弦接触率的特殊情况, 这仅对于参数的例外值才适用。可以通过使用 (Coale, 1972) 的近似公式 (9) 来实现这一点。

(Ma and Ma, 2006) 对SEIR模型进行了数值研究, 该模型是一个常微分方程组, 它对应于呈指数分布的潜伏期, 接触率随 $1 + \varepsilon \cos \omega t$ 。作者发现, 接触率的平均值不足以确定流行病阈值。(Bacaër, 2007年) 使用近似公式 (9) 在分析上证实了这一观察结果, 该公式在本示例中表明, 再现性以及流行阈值均取决于 ε 。

(Just, 2000) 使用傅立叶级数研究延迟微分线性方程, 其形式与具有固定等待时间的SEIS或SEIR模型的线性化相同。但是作者选择了该功能 $c(t) = \varepsilon \cos(\omega t)$ 对于与接触率相对应的参数, 由于接触率必须为正, 因此不适用于人口动态情况 (Just, 2000) 的动机是工程师的问题)。作者得出了与连续分数相似的模型增长率的特征方程, 类似于 (11)。

4.2模型

让我们回到威廉姆斯和戴伊 (Williams and Dye, 1997) 考虑的固定等待时间的情况, 并回顾同一SEIS模型的不同可能公式。我们注意到SEIR模型导致平衡接近平衡而没有疾病的线性化方程。因此它具有相同的流行阈值。

具有偏微分方程的公式包含三个部分 :

- $S(t)$ 时间 t 的健康人口是多少
- $E(t, x)$ 是被感染但尚未感染的人口, 在时间 t 已被感染 x 个时间单位
- $I(t)$ 是时间 t 的感染人口。

模型的参数是

- N : 总人口, 保持不变 ;
- L : 固定的等待时间 ;
- a : 传染病的治愈率, 使传染期呈指数分布 ;
- $c(t)$: 与时间 t 处的速率联系, 时间 t 是周期 T 的周期函数。

该模型是

$$\begin{aligned} \frac{dS}{dt}(t) &= -c(t) S(t) I(t)/N + a I(t), & E(t, 0) &= c(t) S(t) I(t)/N \\ \frac{\partial E}{\partial t}(t, x) + \frac{\partial E}{\partial x}(t, x) &= 0 \quad (0 < x < L), & \frac{dI}{dt}(t) &= E(t, L) - a I(t), \end{aligned}$$

与 $E(t, x) = 0 \forall x > L$ 。通过沿特征线积分偏微分方程, 我们得到 $E(t, L) = E(t - L, 0)$ 。因此, 可以使用差分延迟方程以更紧凑的形式编写系统:

$$\begin{aligned} \frac{dS}{dt}(t) &= -c(t) S(t) I(t)/N + a I(t), \\ \frac{dI}{dt}(t) &= c(t - L) S(t - L) I(t - L)/N - a I(t). \end{aligned}$$

我们将这些方程线性化接近平衡而没有疾病 ($S = N, I = 0$)。我们获得

$$\frac{dI^*}{dt}(t) = c(t - L) I^*(t - L) - a I^*(t).$$

$i^*(t) = c(t) I^*(t)$ 是此线性化模型中在时间 t 处每单位时间的新感染数。我们有

$$\frac{d}{dt} [e^{at} I^*(t)] = e^{at} i^*(t - L).$$

我们整合 $-\infty$ 和 t , 我们更改变量。我们得到以下积分方程 $i^*(t)$:

$$i^*(t) = c(t) \int_0^\infty f(x) i^*(t - x) dx, \quad (21)$$

与

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \forall x < L, \\ e^{-a(x-L)} & \forall x > L. \end{cases} \quad (22)$$

公式 (21) 的形式为 (4) $\Phi(t, x) = c(t) f(x)$ 。

4.3数值示例

现在假设如式 (6) 所示 $c(t) = c_0[1 + \varepsilon \cos(\omega t)]$, 以便 $\Phi(t, x) = (1 + \varepsilon \cos(\omega t)) \phi(x)$ 与 $\phi(x) = c_0 f(x)$ 。根据定义 (7), 我们有

$$\phi_n(s) = c_0 \int_L^\infty e^{-a(x-L)} e^{-sx - ni\omega x} dx = c_0 \frac{e^{-sL - ni\omega L}}{s + a + ni\omega}. \quad (23)$$

然后我们可以使用简单的二分法求解隐含方程 (10) 和 (11) 的增长率和具有不同参数值的可再现性。请注意, 例如, 方程 (10) 右侧的分母可以由复数近似 z_1 , 使用迭代算法

$$z_n = \frac{1}{\phi_n(r)} - 1, \quad z_{k-1} = \frac{1}{\phi_{k-1}(r)} - 1 - \frac{\varepsilon^2/4}{z_k} \quad (k = n, n-1, \dots, 2).$$

如果将 n 取足够大, 则引入的误差非常小。我们使用 $n = 20$, 但是 $n = 2$ 的结果已经非常接近。此外, 必须谨慎对待二分法, 因为等式 (10) 和 (11) 可以有多个实根: r 和 R_0 是最大的。图1显示了对于不同的值, 延迟时间 L 的可再现性 ε 。对于 T 和 a , 我们采用与 (Williams and Dye, 1997) 中相同的价值观。对于 c_0 , 我们 $c_0/a = 1, 2$ 代替 $c_0/a = 1, 5$ 如 (Williams and Dye, 1997)。但是请注意, 使用等式 (11), 如果 c_0 乘以一个常数, 然后 R_0 乘以相同的常数。因此, 图1的形状保持不变, 但垂直轴上的比例不同。

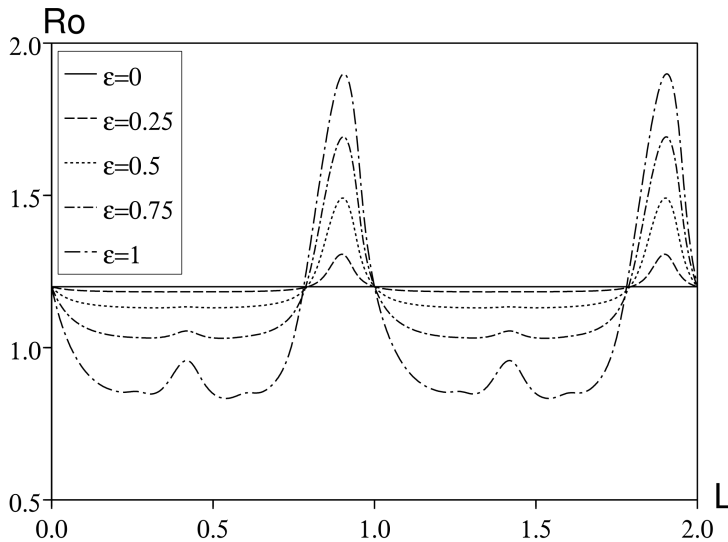


图1.重现性 R_0 取决于等待时间 L 对于 $\varepsilon \in \{0; 0,25; 0,5; 0,75; 1\}$ 。其他参数: $T = 1$, $\log 2/a = 1/12$ 和 $c_0/a = 1,2$ 。

对于潜伏期的给定值, 可重复性可以根据 ε 显著变化。对于 $\varepsilon = 1$, 曲线的很大一部分 R_0 低于1, 即低于流行阈值, 而 $R_{0,0} = c_0/a$ (对应于 $\varepsilon = 0$) 高于此阈值: 平均接触率会预测错误的结果。以下是其他一些注意事项:

- R_0 独立于 L 如果 $\varepsilon = 0$

- R_0 是周期为 T 的 L 的函数
- R_0 不依赖于 ε , 如果 $L = 0$, 因此如果 L 是 T 的整数倍;
- 对于给定的潜伏期 L , 重现性可以是 ε 。

第一点是众所周知的: 使用 (3) 或 (11), 我们有 $R_0 = \phi_0(0) = c_0/a$ 如果 $\varepsilon = 0$ 。如果没有周期性, 则潜伏期不会影响继发病例的数量, 因为所有个体都在潜伏期中存活并变得具有传染性, 并且接触率保持不变。

第二点是由等式 (11) 和

$$\phi_n(0) = c_0 e^{-ni\omega L} / (a + ni\omega)$$

当 L 替换为 $L + T$ 时, 保持不变。直觉上, 受感染的个体在潜伏期 L 或潜伏期 $L + T$ 之后经历相同的环境。它产生相同数量的辅助案件。

第三点也是众所周知的。如果 $L = 0$, 则将模型简化为传染期呈指数分布的 SIS 模型。在这种特殊情况下, 可通过平均接触率获得可重复性 (Bacaër 和 Guernaoui, 2006 年, 第 5 节; Bacaër, 2007 年, 第 5.1.1 节, 包括参考文献)。确实, $R_0 = c_0/a$ 如果 $L = 0$, 则是 (11) 的解, 因为 $R_0/\phi_n(0) - 1 = R_0(a + ni\omega)/c_0 - 1 = ni\omega/a$ 对于任何 $n \geq 1$ 的整数纯粹是虚构的: (11) 的左侧和右侧等于 0。

为了解第四点, 我们使用近似公式 (9)。我们有 $R_0 \simeq R_{0,0} + R_{0,2} \varepsilon^2$, 带有

$$R_{0,0} = \frac{c_0}{a}, \quad R_{0,2} = \frac{c_0}{2a} \operatorname{Re} \left(\frac{1}{e^{i\omega L}(1 + i\omega/a) - 1} \right).$$

对于 ε 小, R_0 是...的增加 (或减少) 功能 ε 如果 $R_{0,2} > 0$ (要么 $R_{0,2} < 0$)。 $R_{0,2} = 0$ 当且仅当 $e^{i\omega L}(1 + i\omega/a) - 1$ 是一个纯虚数。这个条件写成

$$\cos(\omega L) - \frac{\omega}{a} \sin(\omega L) - 1 = 0.$$

我们定义 $\psi \in (0, \pi/2)$ 唯一的实数

$$\cos \psi = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega/a)^2}}, \quad \sin \psi = \frac{\omega/a}{\sqrt{1 + (\omega/a)^2}},$$

也就是说 $\psi = \arctan(\omega/a)$ 。该 ψ 仅取决于乘积 aT 。所以我们有 $R_{0,2} = 0$ 当且仅当

$$\cos(\omega L + \psi) = \cos(\omega L) \cos \psi - \sin(\omega L) \sin \psi = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega/a)^2}} = \cos \psi,$$

也就是说 $\omega L + \psi = \pm \psi + 2k\pi$ 对于 $k \in \mathbb{Z}$ 。因为 $\omega = 2\pi/T$, 我们有 $R_{0,2} = 0$ 如果 $L = kT$ 要么 $L = (k - \psi/\pi)T$ 与 $k \in \mathbb{Z}$ 。特别是图 1 中的数值 $R_{0,2} = 0$ 如果 $L/T = 1 - \psi/\pi \simeq 0,794$ 。但是, 与图 1 可能暗示的相反, 这四个曲线没有越过水平线 $R_0 = c_0/a$ 恰好在 $L/T = 1 - \psi/\pi$ 但非常接近

同样, 图 2 显示了对于不同的值, 增长率是等待时间周期的函数 ε 但随着 T , c_0 和 a 如前所述。增长率不是 L 的周期函数。该速率随潜伏期降低, 但不是单调的。 L 和 T 之间存在共振。

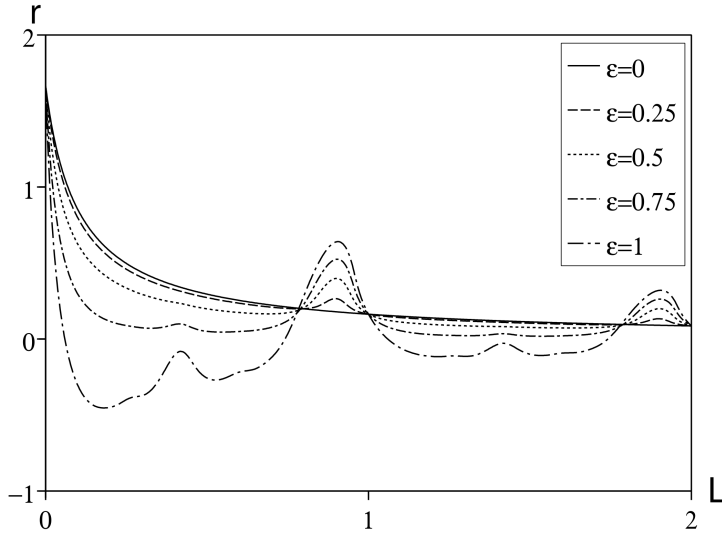


图2.增长率 r 取决于等待时间 L 对于 $\varepsilon \in \{0; 0,25; 0,5; 0,75; 1\}$ 。其他参数如图1所示。

然而， r 仍然独立于 ε 如果 L 是 T 的倍数，即 $L = kT$ 与 $k = 0, 1, 2, \dots$ 确实，请记住 r_0 是方程的唯一解决方案

$$\phi_0(r_0) = 1 \Leftrightarrow c_0 e^{-r_0 k T} / (r_0 + a) = 1.$$

$r = r_0$ 也是方程式 (10) 的解，因为

$$1/\phi_n(r) - 1 = (r_0 + a + ni\omega) e^{r_0 k T} / c_0 - 1 = ni\omega e^{r_0 k T} / c_0$$

纯粹是虚构的 $n \geq 1$ ：(10) 的左侧和右侧为零。

对于一般的等待时间 L ，使用 (8) 和 (23) $r \simeq r_0 + r_2 \varepsilon^2$ 对于 ε 小，有 r_0 隐式定义

$$\phi_0(r_0) = 1 \Leftrightarrow c_0 e^{-r_0 L} / (r_0 + a) = 1.$$

r_2 由 (8) 和 (23) 给出。用

$$\begin{aligned} \phi_1(r_0) &= c_0 \frac{e^{-r_0 L - i\omega L}}{r_0 + a + i\omega} = c_0 \frac{e^{-r_0 L}}{r_0 + a} \times \frac{e^{-i\omega L}}{1 + i\omega / (r_0 + a)} = \frac{e^{-i\omega L}}{1 + i\omega / (r_0 + a)}, \\ \phi_0'(r_0) &= -c_0 \frac{e^{-r_0 L}}{r_0 + a} \left(L + \frac{1}{r_0 + a} \right) = -\left(L + \frac{1}{r_0 + a} \right), \end{aligned}$$

我们获得

$$\begin{aligned} r_2 &= -\frac{1}{2\phi_0'(r_0)} \operatorname{Re} \left(\frac{1}{1/\phi_1(r_0) - 1} \right) \\ &= \frac{1}{2[L + 1/(r_0 + a)]} \operatorname{Re} \left(\frac{1}{e^{i\omega L} [1 + i\omega / (r_0 + a)] - 1} \right). \end{aligned}$$

5. 结论

除了上一节提到的SEIS / SEIR模型之外，其他几个总体模型的平凡平衡的线性稳定性也可以简化为公式 (4)，其中 $\Phi(t, x)$ 由 (6) 给出。对于具有 n 个被感染隔室的流行模型，尤其是这种情况，其中感染遵循一个周期 ($I_1 \rightarrow I_2 \rightarrow \dots \rightarrow I_n \rightarrow I_1$) 且仅具有正弦接触功能。参见 (Bacaer, 2007年) 以及有关疟疾和霍乱的参考资料。具有固定传染期 L 和正弦接触率的SIS / SIR流行模型

$$\phi(x) = c_0 \quad \forall x < L, \quad \phi(x) = 0 \quad \forall x > L.$$

在这种情况下，

$$\phi_n(s) = c_0 (1 - e^{-sL - ni\omega L}) / (s + ni\omega).$$

如上一节所述，如果 L 是 T 的倍数，则重现性和增长率与 ε 无关。这是一个简陋的案例，因为没有理由使传染期与接触期有任何算术关系，接触期通常是一周（周末较少接触）或一年。（在暑假期间因儿童疾病而减少的接触，在冬季传播空气传播疾病的可能性更高）。然而， $L = T$ 的情况在数学文献中受到了很多关注（Cooke和Kaplan, 1976；Smith, 1977；Nussbaum, 1977和1978）。

我们的结果更普遍的意义是，应将重现性和增长率的平均值视为例外。除了类似于已经提到的简并的情况外，据我们所知，唯一正确的均值情况是传染性区室，传染期呈指数分布且无潜伏期（Bacaër and Guernaoui, 2006, §5; Bacaër, 2007年, 第5.1.1节及其参考）。该平均值对于任何偏差都是不正确的，例如对于传染病而言是两个传染区室（Bacaër, 2007年, 第4.1节），或者是传染期不是按指数分布的（Bacaër, 2007年, 第5.1节）。1) 或非零延迟期（Bacaër, 2007年, 第5.1.2节）。

谢谢

这项工作是在NB访问斯泰伦博斯的SACEMA时进行的。

书目参考

- S. Altizer, A. Dobson, P. Hosseini, P. Hudson, M. Pascual, P. Rohani (2006) Seasonality and the dynamics of infectious diseases, *Ecol. Lett.* 9, 467–484.
- J. L. Aron, I. B. Schwartz (1984) Seasonality and period–doubling bifurcations in an epidemic model, *J. Theor. Biol.* 110, 665–679.
- N. Bacaër, S. Guernaoui (2006) The epidemic threshold of vector–borne diseases with seasonality, *J. Math. Biol.* 53, 421–436.
- N. Bacaër (2007) Approximation of the basic reproduction number R_0 for vector–borne diseases with a periodic vector population, *Bull. Math. Biol.* 69, 1067–1091.
- A. J. Coale (1972) *The Growth and Structure of Human Populations : A Mathematical Investigation.* Princeton University Press.
- K. L. Cooke, J. L. Kaplan (1976) A periodicity threshold theorem for epidemics and population growth, *Math. Biosci.* 31, 87–104.
- S. Deguen, G. Thomas, N. P. Chau (2000) Estimation of the contact rate in a seasonal SEIR model : application to chickenpox incidence in France, *Statist. Med.* 19, 1207–1216.
- O. Diekmann, J. A. P. Heesterbeek (2000) *Mathematical Epidemiology of Infectious Diseases : Model Building, Analysis and Interpretation.* John Wiley & Sons, New York.
- D. J. D. Earn, P. Rohani, B. M. Bolker, B. T. Grenfell (2000) A simple model for complex dynamical transitions in epidemics, *Science* 287, 667–670.
- L. Euler (1760/1767) *Recherches générales sur la mortalité et la multiplication du genre humain.* Histoire de l'Académie royale des sciences et belles–lettres de Berlin, 144–164. <http://bibliothek.bbaw.de>
- N. C. Grassly, C. Fraser (2006) Seasonal infectious disease epidemiology, *Proc. R. Soc. B* 273, 2541–2550.
- P. Jagers, O. Nerman (1985) Branching processes in periodically varying environment, *Ann. Prob.* 13, 254–268.
- W. Just (2000) On the eigenvalue spectrum for time–delayed Floquet problems, *Physica D* 142, 153–165.
- Yu. A. Kuznetsov, C. Piccardi (1994) Bifurcation analysis of periodic SEIR and SIR epidemic models, *J. Math. Biol.* 32, 109–121.
- P. H. Leslie (1945) On the use of matrices in certain population mathematics, *Biometrika* 33, 213–245.
- A. J. Lotka (1939) *Théorie analytique des associations biologiques : analyse démographique avec application particulière à l'espèce humaine.* Hermann, Paris.
- J. Ma, Z. Ma (2006) Epidemic threshold conditions for seasonally forced SEIR models, *Math. Biosci. Eng.* 3, 161–172.
- I. A. Moneim, D. Greenhalgh (2005) Use of a periodic vaccination strategy to control the spread of epidemics with seasonally varying contact rate, *Math. Biosci. Eng.* 2, 591–611.
- R. D. Nussbaum (1977) Periodic solutions of some integral equations from the theory of epidemics. In : V. Lakshmikantham, ed., *Nonlinear Systems and Applications*, Academic Press, New York. 235–257.
- R. D. Nussbaum (1978) A periodicity threshold theorem for some nonlinear integral equations, *SIAM J. Math. Anal.* 9, 356–376.
- I. B. Schwartz, H. L. Smith (1983) Infinite subharmonic bifurcation in an SEIR epidemic model, *J. Math. Biol.* 18, 233–253.
- H. L. Smith (1977) On periodic solutions of a delay integral equation modelling epidemics, *J. Math. Biol.* 4, 69–80.

- H. R. Thieme (1984) Renewal theorems for linear periodic Volterra integral equations, *J. Integr. Equ.* 7, 253–277.
- B. G. Williams, C. Dye (1997) Infectious disease persistence when transmission varies seasonally, *Math. Biosci.* 145, 77–88.