



HAL
open science

Notes sur l'intérêt des sous-ensembles flous en analyse de l'attraction de points de vente

Didier Dubois

► **To cite this version:**

Didier Dubois. Notes sur l'intérêt des sous-ensembles flous en analyse de l'attraction de points de vente. [Rapport de recherche] Institut de mathématiques économiques (IME). 1979, 20 p., figures, bibliographie. hal-01527211

HAL Id: hal-01527211

<https://hal.science/hal-01527211>

Submitted on 24 May 2017

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

R P 210 (9)
I.M.E.

ÉQUIPE DE RECHERCHE ASSOCIÉE AU C.N.R.S.

DOCUMENT DE TRAVAIL

N°35

NOTES SUR L'INTERET DES SOUS ENSEMBLES FLOUS
EN ANALYSE DE L'ATTRACTION DE POINTS DE VENTE



Didier DUBOIS
Février 1979

INSTITUT DE MATHÉMATIQUES ÉCONOMIQUES

UNIVERSITÉ DE DIJON

FACULTÉ DE SCIENCE ÉCONOMIQUE ET DE GESTION

4, BOULEVARD GABRIEL — 21000 DIJON

27 OCT. 1980

N°35

NOTES SUR L'INTERET DES SOUS ENSEMBLES FLOUS
EN ANALYSE DE L'ATTRACTION DE POINTS DE VENTE

Didier DUBOIS
Février 1979



Ce travail a été réalisé par Monsieur Didier DUBOIS à
ADEPA - B.P.54 - 92123 MONTRouGE CEDEX
Monsieur Dubois est actuellement à: IMAG - B.P.53X - 38041 Grenoble Cedex

TRAVAUX DEJA PUBLIES

- N°24 Pietro BALESTRA: Determinant and Inverse of a Sum of Matrices with Applications in Economics and Statistics (avril 1978)
- N°25 Bernard FUSTIER: Etude empirique sur la notion de région homogène (avril 1978)
- N°26 Claude PONSARD: On the Imprecision of Consumer's Spatial Preferences (avril 1978)
- N°27 Roland LANTNER: L'apport de la théorie des graphes aux représentations de l'espace économique (avril 1978)
- N°28 Emmanuel JOLLES: La théorie des sous-ensembles flous au service de la décision: deux exemples d'application (mai 1978)
- N°29 Michel PREVOT: Algorithme pour la résolution des systèmes flous (mai 1978)
- N°30 Bernard FUSTIER: Contribution à l'analyse spatiale de l'attraction imprécise (juin 1978)
- N°31 TRAN QUI Phuoc: Régionalisation de l'économie française par une méthode de taxinomie numérique floue (juin 1978)
- N°32 Louis De MESNARD: La dominance régionale et son imprécision, traitement dans le type général de structure (juin 1978)
- N°33 Max PINHAS: Investissement et taux d'intérêt. Un modèle stochastique d'analyse conjoncturelle (octobre 1978)
- N°34 Bernard FUSTIER, Bernard ROUGET: La nouvelle théorie du consommateur est-elle testable? (janvier 1979)
- N°35 Didier DUBOIS: Notes sur l'intérêt des sous-ensembles flous en analyse de l'attraction de points de vente (février 1979)

I - INTRODUCTION

La représentation mathématique des phénomènes d'attraction des points de ventes dans une zone géographique donnée a fait l'objet de nombreuses recherches. Le but est de pouvoir simuler le comportement du consommateur selon son lieu de résidence, ce qui permet de mieux visualiser les zones d'influence de centres commerciaux.

Les raisons qui font qu'un consommateur se rendra ici ou là pour effectuer ses achats sont extrêmement difficiles à analyser de façon globale parce qu'elles peuvent beaucoup varier d'un individu à l'autre. Il est souvent possible de dégager un certain nombre de facteurs importants tels que distance, surface de vente, qualité des produits, etc.; on peut ainsi rassembler un certain nombre d'informations pour évaluer ces facteurs. Tous les modèles d'attraction essaient de définir le traitement numérique le plus judicieux pour ces informations, lesquelles sont pourtant souvent plutôt qualitatives que quantitatives. On a souvent recours à des indices numériques objectifs pour chiffrer des grandeurs qui ne sont que subjectivement perçues (par exemple la distance géographique se substitue à une distance psychologique qui est celle qui conditionne réellement l'individu).

Le propos de cette note n'est que de suggérer l'utilisation de certains outils de la théorie des sous-ensembles flous pour affiner certains modèles d'attraction déjà existants. Ces outils sont décrits en détail dans le livre de Dubois et Prade (4).

On esquisse d'abord une critique de l'interprétation probabiliste d'un modèle mathématique proposé par Huff (7). Puis dans le cadre d'hypothèses simples, une méthode d'estimation d'un paramètre flou (Chang (1)) est proposée. Comme conséquence, il est possible de définir l'utilité floue d'un point de vente et de localiser une frontière floue entre zones d'influences. Dans le cadre du modèle d'attraction multi-aspect, on rappelle l'approche de Zadeh (14) pour étendre la notion d'optimalité au sens de Pareto. Enfin des indices de similitude permettant de comparer des zones d'attraction imprécises au sens de Fustier (5),(6) sont définis, notamment la distance floue entre sous-ensembles flous.

II - CRITIQUE DU MODELE DE HUFF

Dans son modèle, Huff (7) considère comme facteurs déterminants de l'attraction d'un centre k l'assortiment des marchandises affectées s_k et le temps de transport t_{ik} du consommateur i au centre k. Huff suppose que le consommateur ignore a priori si tel centre commercial est en mesure de le satisfaire. Mais plus le nombre d'articles offert par le centre est grand, et plus la probabilité pour qu'un consommateur soit client du centre est grande, dans la mesure où le temps de parcours n'est pas trop pénalisant. C'est-à-dire que cette probabilité p_{ik} est supposée proportionnelle à l'utilité du centre, u_{ik} .

$$\text{Formellement on a : } u_{ik} = \frac{s_k}{(t_{ik})^\lambda} \quad (1)$$

avec s_k = surface de vente du centre k (représentative de l'assortiment de marchandises proposé par k)

t_{ik} = temps de transport du client i se rendant en k

λ = paramètre estimé empiriquement

$$\text{et } p_{ik} = \frac{u_{ik}}{\sum_l u_{il}}$$

De fait, p_{ik} étant l'utilité relative du centre k, on peut admettre que ce nombre reflète le désir du consommateur de se rendre en k plutôt qu'ailleurs. L'assimiler à une probabilité paraît abusif. Par exemple supposons qu'il y ait 2 centres k_1 et k_2 accessibles tous deux par i en même temps t, et adjacents. On a donc :

$$u_{ik_1} = \frac{s_{k_1}}{t^\lambda} \quad u_{ik_2} = \frac{s_{k_2}}{t^\lambda}$$

On peut poser la question: quelle sera l'utilité de l'ensemble des deux centres pour i, à supposer que ces deux centres soient de même nature? Strictement cette utilité est

$$u_{ik_{12}} = u_{ik_1} + u_{ik_2} = \frac{s_{k_1} + s_{k_2}}{t^\lambda}$$

car les surfaces de vente sont additives. Cependant on utilise la surface de vente pour évaluer l'assortiment des produits offerts. Il est fort peu probable que l'assortiment proposé par k_1 et celui proposé par k_2 soient disjoints, et

que les utilités soient donc additives. Il est plus prudent de supposer

$$u_{ik_{12}} \in [\max(u_{ik_1}, u_{ik_2}), u_{ik_1} + u_{ik_2}] \text{ ou encore}$$

$$p_{ik_{12}} \in [\max(p_{ik_1}, p_{ik_2}), p_{ik_1} + p_{ik_2}]$$

Il semble donc plus juste de considérer $\{p_{ik}\}_k$ comme une distribution associée à une mesure floue g_i (Sugeno (12), Ponsard (11)) telle que

$$g_i(\emptyset) = 0 \quad g_i(K) = 1$$

$$g_i(A) \leq g_i(B) \quad \forall A, B, A \subseteq B \subseteq K$$

où $K = \{\text{ensemble des centres}\}$

et la propriété supplémentaire

$$\forall (A, B) \in \mathcal{P}(K) \text{ tel que } A \cap B = \emptyset, g_i(A \cup B) \leq g_i(A) + g_i(B)$$

Par exemple g peut être:

. une mesure λ -floue (Sugeno (12)) c'est-à-dire

$$\forall (A, B) \in \mathcal{P}(K) \text{ tel que } A \cap B = \emptyset, g_i(A \cup B) = g_i(A) + g_i(B) + \lambda g_i(A) \cdot g_i(B)$$

avec $-1 \leq \lambda \leq 0$

. une mesure de possibilité (Zadeh (15))

$$g_i(A \cup B) = \max(g_i(A), g_i(B)) \quad \forall (A, B) \in \mathcal{P}(K)$$

on notera que cette définition implique: $\exists k^* \in K : g_i(\{k^*\}) = 1$ ce qui impose de définir

$$g_i(\{k\}) = \frac{u_{ik}}{\max_1 u_{i1}} \quad \forall k$$

L'ensemble de tous les clients étant noté I , l'ensemble des couples $(i, g_i(\{k\}))$

$\forall i \in I$ est le sous-ensemble flou des clients du centre k . Connaissant la localisation des clients on peut en déduire les zones floues d'attraction de chaque centre.

III - ESTIMATION DU PARAMETRE λ

Dans la formule $u_{ik} = \frac{s_k}{t_{ik}^\lambda}$ le coefficient λ , dit coefficient de

résistance superficiel mesure l'influence des biens sur la distance, et est estimé empiriquement. Les données de bases sont les résultats d'enquêtes auprès de consommateurs. L'ensemble des enquêtés est partitionné en classes de comportement homogènes, et on suppose que λ est spécifique d'une classe de

comportement (voir Fustier (5)). Par classe de comportement on entend un schéma donné de préférences sur l'ensemble des facteurs qui conditionnent l'attractivité d'un centre.

Selon Fustier (5) si deux centres k_1 et k_2 sont cités comme prioritaires pour le client i , on suppose que les attractions sont égales, c'est-à-dire

$$u_{ik_1} = u_{ik_2} \Leftrightarrow \frac{m_{k_1}}{(t_{ik_1})^\lambda} = \frac{m_{k_2}}{(t_{ik_2})^\lambda} \quad (2)$$

où m_{k_1} , m_{k_2} sont les "masses" associées à k_1 et k_2 (par exemple s_{k_1} et s_{k_2})

N.B. Fustier prend pour t_{ik} la distance rectilinéaire entre i et k (voir (5))

$$(2) \text{ s'écrit encore } y_i = \log\left(\frac{t_{ik_2}}{t_{ik_1}}\right) = \frac{1}{\lambda} \log\left(\frac{m_{k_2}}{m_{k_1}}\right) = \frac{1}{\lambda} x_i$$

le consommateur i est ainsi repéré dans un plan.

Ce qu'on connaît c'est le nuage de points: $\{(x_i, y_i), i \in I\}$

Chang (1) a proposé de considérer λ comme un paramètre flou $\tilde{\lambda}$, pour tenir compte de l'imprécision présente dans le nuage de points. La fonction d'appartenance

$\mu_{\tilde{\lambda}}$ de λ est définie par

$$\forall z \in \mathbb{R} \quad \mu_{\tilde{\lambda}}(z) = \exp\left(\frac{(|I| - 1)(1 - \frac{\varepsilon(z)}{\varepsilon(\lambda_0)})}{\varepsilon(\lambda_0)}\right) \quad (3)$$

avec $\varepsilon(z) = \sum_{i=1}^{|I|} \frac{1}{|I|} (y_i - \frac{1}{z} x_i)^2$ erreur quadratique moyenne commise en assimilant le nuage de points à la droite $y = \frac{1}{z} x$

. λ_0 valeur de z qui minimise $\varepsilon(z)$

. $|I|$ = cardinal de I .

N.B. la formule (3) n'est qu'une façon possible de définir $\mu_{\tilde{\lambda}}$, d'autres définitions sont permises.

En conséquence, l'utilité d'un centre k pour un consommateur i sera floue, puisqu'elle vaudra

$$\tilde{u}_{ik} = \frac{m_k}{(t_{ik})^\lambda} \tilde{\lambda}$$

\tilde{u}_{ik} est un sous-ensemble flou de \mathbb{R} dont la fonction d'appartenance se déduit de celle de $\tilde{\lambda}$ par le principe d'extension (Zadeh (13)). Plus précisément $\mu_{\tilde{u}_{ik}}$ est telle que:

$$\mu_{\tilde{u}_{ik}}(u) = \sup_{u = \frac{m_k}{(t_{ik})^z}} \mu_{\tilde{\lambda}}(z) = \mu_{\tilde{\lambda}}(\text{Log}(\frac{m_k}{u}) / \text{Log } t_{ik})$$

Si $\epsilon(z)$ est une fonction convexe de $1/z$ comme en figure 1, et qu'on ne s'intéresse qu'à des valeurs positives de z (dans la pratique z vaut environ 2, voir Fustier (5)), $\tilde{\lambda}$ sera un nombre flou.

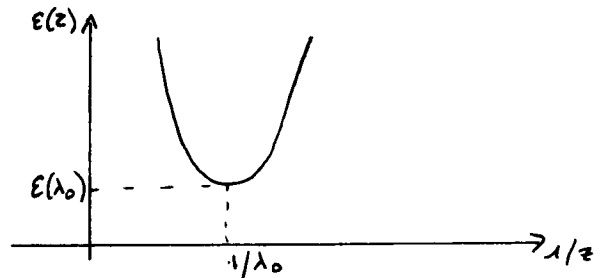


Figure 1

c'est-à-dire un sous-ensemble flou convexe et continu de \mathbb{R} . Dans ce cas \tilde{u}_{ik} sera aussi un nombre flou, de valeur moyenne (voir (2))

$$\bar{u} = \frac{m_k}{(t_{ik})^{\lambda_0}}$$

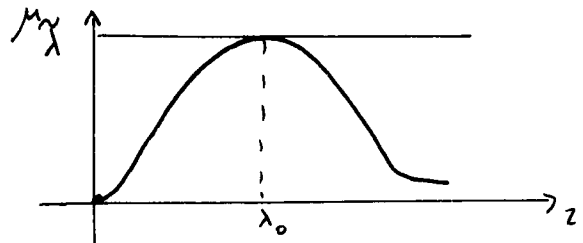
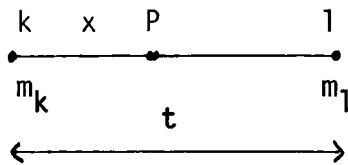


Figure 2

(c'est-à-dire $\mu_{\tilde{u}_{ik}}(\bar{u}) = 1$)

IV - FRONTIERE FLOUE INDUITE PAR UNE UTILITE FLOUE

On reprend ici le problème de la détermination de la zone d'influence d'un centre k compte tenu de la présence d'autres centres, par localisation de points de partage.



Le point de partage P entre les centres k et l se définit par l'égalité

$$\frac{m_k}{x^\lambda} = \frac{m_l}{(t-x)^\lambda}$$

où x est le temps pour aller de P à k .

Lorsque λ est flou le point de partage se définit encore par l'égalité

$$\frac{m_1}{(t-\tilde{x})^{\tilde{\lambda}}} = \frac{m_k}{\tilde{x}^{\tilde{\lambda}}} \quad (4)$$

où \tilde{x} est un sous-ensemble flou que l'on cherche à déterminer

\ominus est la soustraction de nombres flous définie comme ci-dessous, en appliquant le principe d'extension (Zadeh (13)).

Plus précisément, si \tilde{m} et \tilde{n} sont deux sous-ensembles flous de \mathbb{R} , $\tilde{m} \ominus \tilde{n}$ est défini par sa fonction d'appartenance

$$\mu_{\tilde{m} \ominus \tilde{n}}(z) = \sup_{a,b:z=a-b} \min(\mu_{\tilde{m}}(a), \mu_{\tilde{n}}(b)) \quad (\text{voir Dubois, Prade (2)})$$

L'interprétation de (4) nécessite quelques explications.

En effet étant donné une équation sur \mathbb{R} , il existe plusieurs façons non équivalentes et même non reliées de l'étendre à l'ensemble $\mathcal{F}(\mathbb{R})$ des parties floues de \mathbb{R} . Pour plus de détail à ce sujet voir Dubois, Prade (4).

La solution \tilde{x} de (4) est ici définie conformément au principe d'extension (Zadeh (13)):

$$\mu_{\tilde{x}}(x) = \sup_{z: \frac{m_1}{(t-x)^z} = \frac{m_k}{x^z}} \mu_{\tilde{\lambda}}(z)$$

c'est-à-dire: à toute valeur du temps x correspond un certain nombre de valeurs possibles du paramètre de résistance, avec des valeurs de possibilité $\mu_{\tilde{\lambda}}(\cdot)$. La valeur de possibilité de l'affirmation "le point de partage des deux centres est à la "distance" x de k " est justement la plus grande des possibilités pour que z existe, solution de

$$\frac{m_1}{(t-x)^z} = \frac{m_k}{x^z} \quad (5)$$

En fait, ici, puisqu'on ne s'intéresse qu'à des valeurs positives de z , l'équation ci-dessus n'a qu'une solution, i.e.

$$z = \frac{\text{Log}(m_k/m_1)}{\text{Log}((t-x)/x)} \quad \text{et} \quad \mu_{\tilde{x}}(x) = \mu_{\tilde{\lambda}} \left[\frac{\text{Log}(m_k/m_1)}{\text{Log}(\frac{t-x}{x})} \right]$$

Formellement, on pourra écrire: $\tilde{x} = t / (1 + (\frac{m_k}{m_1})^{1/\tilde{\lambda}})$

Exemple: Supposons que $\tilde{\lambda}$ ait une fonction d'appartenance dont l'allure est représentée ci-dessous, et que $m_k > m_1$

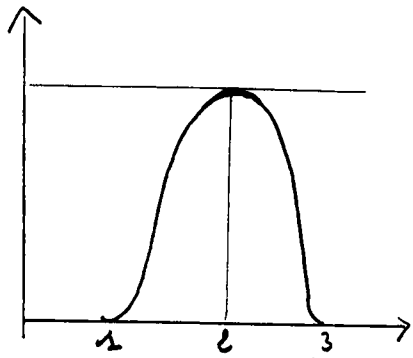


Figure 3

x	0	d/2	d
$\frac{d-x}{x}$	$+\infty$	1	0
$\frac{a^2}{\log \frac{d-x}{x}}$	0	$+\infty$	$-\infty$
$\mu_{\tilde{x}}(x)$	0	1	0

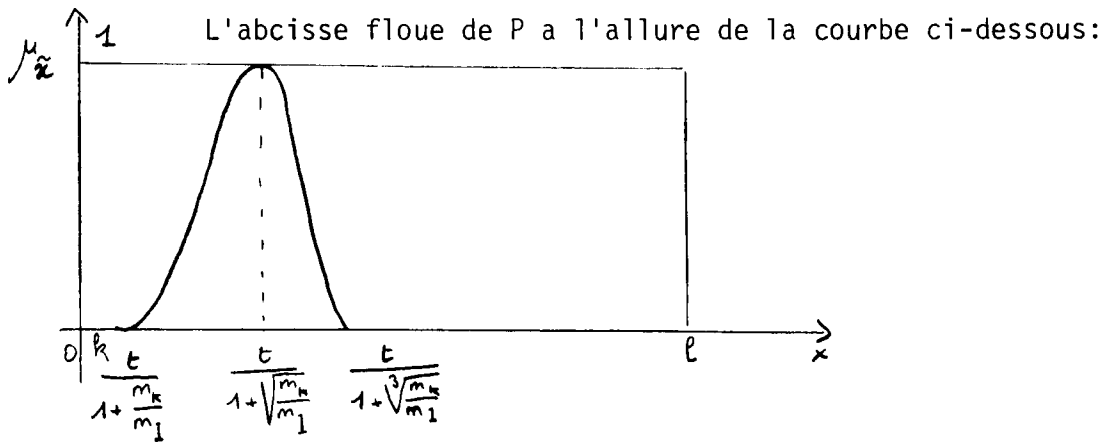


Figure 4 : Frontière floue entre zones d'influence

NB1: Lorsque les masses sont elles-mêmes floues, de fonction d'appartenance

$\mu_{\tilde{m}_k}$ et $\mu_{\tilde{m}_1}$ l'équation

$$\frac{\tilde{m}_1}{(t-x)^{\tilde{\lambda}}} = \frac{\tilde{m}_k}{(\tilde{x})^{\tilde{\lambda}}} \text{ a encore un sens et}$$

et $\mu_{\tilde{x}}(x) = \sup_{v,w,z} \min(\mu_{\tilde{m}_1}(v), \mu_{\tilde{m}_k}(w), \mu_{\tilde{\lambda}}(z))$ sous la contrainte

$$\frac{v}{(t-x)^z} = \frac{w}{x^z}$$

Le calcul de \tilde{x} est ici beaucoup moins évident. On peut encore écrire

$$\mu_{\tilde{x}}(x) = \sup_{x = \frac{t}{1 + (\frac{w}{v})^{1/z}}} \min(\mu_{\tilde{m}_1}(v), \mu_{\tilde{m}_k}(w), \mu_{\tilde{\lambda}}(z))$$

c'est-à-dire formellement: $\tilde{x} = \frac{t}{1 + (\frac{\tilde{m}_k}{\tilde{m}_1})^{1/\tilde{\lambda}}}$

Si le calcul pratique approché de \tilde{m}_k/\tilde{m}_1 ne pose aucun problème, pourvu qu'on adopte pour les nombres flous une représentation analytique convenable (voir Dubois, Prade (2),(3)), en revanche il n'existe pas de formule simple pour le calcul de la puissance floue d'un nombre flou. Il existe seulement un algorithme rapide (voir Dubois, Prade (3),(4)) plus général pour le calcul pratique de fonctions fuzzifiées.

NB 2: Quand l'utilité est floue, les zones floues d'attraction de chaque centre, au sens de II seront de type μ , c'est-à-dire des sous-ensembles flous à valeurs d'appartenance floues (voir par exemple Mizumoto, Tanaka (9)).

V - L'ATTRACTION MULTIFACTEURS

L'attraction d'un centre dépend en fait de plusieurs facteurs, et ce fait rend encore plus complexe la définition d'un indice numérique globalisant qui évalue l'utilité d'un centre. Soit J l'ensemble de ces facteurs, sauf la distance (qui selon Fustier (5) est discriminante et traitée à part).

A l'intérieur d'une classe de comportement on suppose qu'on a pu estimer l'importance de chaque facteur aux yeux des consommateurs, soit $w_j \in [0,1]$, $j \in J$. L'utilité relative à chaque facteur est

$$u_{ik}(j) = \frac{m_k(j)}{(t_{ik})} \quad i \in I, k \in K$$

Pour l'agrégation des facteurs, on trouve couramment deux attitudes:

. l'utilité globale est la somme pondérée $\sum_{j \in J} w_j u_{ik}(j) = u_{ik}$

. on sélectionne le facteur le plus important: $u_{ik} = u_{ik}(j^*)$

avec $w_{j^*} \geq w_j \quad \forall j$.

Cette dernière attitude suppose un comportement trop simple de l'utilisateur. L'approche par pondération linéaire est souvent un pis aller; c'est-à-dire qu'on la choisit chaque fois qu'on veut prendre en compte un peu mieux la complexité des phénomènes, sans forcément la valider. Elle permet des ajustements statistiques qui deviennent "le but essentiel qui relegue au second plan l'examen de la structure logique de la fonction" (P.Moran (10) cité par Fustier (5)).

Une autre approche classique, qui permet d'éviter une agrégation de quantités de natures disparates est celle de Pareto:

i préfère k à l si et seulement si $u_{ik}(j) \geq u_{il}(j) \quad \forall i \in J$.

Telle quelle cette approche ne prend pas en compte l'importance relative des

facteurs; de plus elle fournit souvent de nombreux éléments maximaux incompatibles, c'est-à-dire ici, de centres k tels que $\not\exists l$, i préfère l à k .

Pour pallier à ces inconvénients, on peut penser à une définition lexicographique de la préférence, dans laquelle les facteurs sont ordonnés en importance décroissante:

$$i \text{ préfère } k \text{ à } l \iff \exists j^* \in J \begin{cases} u_{ik}(j) = u_{il}(j) & \forall j < j^* \\ u_{ik}(j^*) \geq u_{il}(j^*) \end{cases}$$

On peut alors considérer qu'on accorde trop d'importance au 1er facteur. Une approche plus nuancée a été proposée par Zadeh (14). C'est une méthode linguistique destinée à réduire l'ensemble des éléments maximaux au sens de Pareto - dont on peut penser qu'il contient le centre préféré par le consommateur - en utilisant l'information floue qu'on connaît relativement au compromis entre les facteurs qui s'expriment dans un comportement donné de ce consommateur. Ces compromis sont parfois accessibles sous une forme linguistique et décrivent une relation de préférence floue. Dans le cas de deux facteurs, on aura par exemple:

" Si $u_{ik}(1)$ est plus grand que $u_{il}(1)$ ou (si $u_{ik}(1)$ est approximativement égal à $u_{il}(1)$ et $u_{ik}(2)$ est plus grand que $u_{il}(2)$), alors la préférence donnée à k sur l est moyenne".

"plus grand que", "approximativement égal" sont des relations floues sur R , "moyen" un élément d'une échelle de valeurs floues qui peut se représenter par un sous-ensemble flou de $[0,1]$ par exemple. Notant PG et EQ les relations floues ci-dessus introduites, et la valeur floue de préférence, la règle logique floue s'écrit:

$$(PG(u_k(1), u_l(1)) \vee (EQ(u_k(1), u_l(1)) \wedge PG(u_k(2), u_l(2))) \rightarrow \rho(x)$$

Cette règle correspond à une relation floue R sur $\mathbb{R}^4 \times [0,1]$:

$$\mu_R(u, v, w, y, x) = \min \left[\max \left[\mu_{PG}(u, v), \min \left[\mu_{EQ}(u, v), \mu_{PG}(w, y) \right] \right], \mu_\rho(x) \right]$$

en utilisant les opérateurs de la théorie des sous-ensembles flous et en traduisant l'implication " \rightarrow " par un "min" (d'autres traductions sont possibles et même plus fondées cf. Dubois, Prade (4) ch.1 partie III, mais l'emploi du "min" est très répandu dans la littérature).

Connaissant les valeurs (éventuellement floues) des utilités $\tilde{u}_{ik}(j)$, $\tilde{u}_{il}(j)$, $j=1,2$ on en déduit le degré de préférence flou de k sur l , $\tilde{\rho}(k,l)$ par une composition max-min:

$$\tilde{p}(k,l) = (\tilde{u}_{ik}(1) \times \tilde{u}_{il}(1) \times \tilde{u}_{ik}(2) \times \tilde{u}_{il}(2)) \circ R$$

où \times denote le produit cartésien de sous-ensembles flous (traduit par l'opérateur min)
 \circ est la composition maxmin des relations floues.

L'ensemble des degrés flous de préférence $\tilde{p}(k,l)$, $(k,l) \in K^2$ constitue une relation floue de préférence de type 2 sur l'ensemble des centres attractifs. Néanmoins, le passage d'une telle relation de préférence à un ordre total sur les centres est un problème qui reste à résoudre. On peut remarquer que cette approche tente bien de prendre en compte la "structure logique" de la fonction de choix entre les centres.

NB. Bien sûr, plusieurs règles similaires à celle décrite ci-dessus peuvent être combinées.

VI - INDICES DE SIMILARITE ENTRE SOUS-ENSEMBLES FLOUS

Un autre point de vue sur le problème de l'attraction multifacteur est celui proposé par Fustier (4),(5). On note A_i^k le sous-ensemble flou

$$A_i^k = \sum_{j \in J} w_j / p_{ik}(j) \quad (*)$$

où $p_{ik}(j)$ = utilité relative de k pour le consommateur i

Au sens du facteur j

w_j = poids du facteur j .

La zone d'attraction imprécise des centres k est alors définie comme

$$Z_k = \left\{ A_i^k / i \in I \right\}$$

C'est-à-dire qu'à chaque consommateur (=lieu de résidence) correspond un sous-ensemble flou de taux d'attraction. Pour définir des sous zones d'attraction (dont la frontière est équi-taux d'attraction) il faut regrouper des A_i ayant le même profil. Cette approche contraste avec celles de la pondération linéaire des utilités ou celle du facteur prépondérant évoquées au paragraphe précédent.

(*) Selon la notation de Zadeh $A = \sum_{x \in E} \mu_A(x) / x$ où E est le référentiel

Le regroupement des A_i peut s'effectuer en définissant un indice de similarité entre les A_i , qui mène à une relation floue de ressemblance (reflexive symétrique) sur Z_k .

De nombreux indices de similarité entre sous-ensembles non flous d'un même référentiel fini existent. On en peut trouver une liste dans Lerman (8). Notons X et Y deux sous-ensembles de E et $|X|$ le cardinal de X , $|Y|$ le cardinal de Y . Les indices de similarités habituellement utilisés

1 l'intersection $X \cap Y \rightarrow s_1(X, Y) = |X \cap Y| / |E|$

2 la différence symétrique

$$X \Delta Y \rightarrow s_2(X, Y) = 1 - \frac{|X \Delta Y|}{|E|}$$

3 intersection et unions $s_3(X, Y) = |X \cap Y| / |X \cup Y|$

4 Intersection et différence symétrique

$$s_4(X, Y) = |X \cap Y| / |X \Delta Y|$$

Quand X et Y sont flous, tous ces indices s'étendent, mais de façon non unique.

Le cardinal du sous-ensemble flou X de E se définit comme

$$|X| = \sum_{a \in E} \mu_X(a)$$

$|X|$ mesure le taux d'occupation de X dans E .

Dans le cas de sous-ensembles flous, on peut préférer mesurer la valeur de possibilité de l'affirmation " $\exists a \in X$ ", qui vaut:

$$\text{hgt}(X) = \max_{a \in E} \mu_X(a)$$

$\text{hgt}(X)$ est la "hauteur" de X et évalue dans quelle mesure X n'est pas vide, et correspond à une notion très affaiblie de cardinalité - triviale et sans intérêt si X n'est pas flou!

Enfin on peut définir naturellement le cardinal du sous-ensemble flou X comme l'entier flou $\tilde{c}(X) = \sum_{\alpha \in [0,1]} \alpha / |X_\alpha|$

où X_α dénote l' α -cut de X , ie $\{a \in E / \mu_X(a) \geq \alpha\}$

Cette définition s'interprète ainsi: la valeur de possibilité de l'affirmation " X a n éléments" est $\mu_{\tilde{c}(X)}(n) = \sup_{\alpha: |X_\alpha| = n} \alpha$

Dans la théorie classique de Zadeh, l'intersection de deux sous-ensembles flous X et Y se traduit à l'aide de l'opérateur "min", l'union par l'opérateur "max".

Quant à la différence symétrique on peut la définir de deux façons:

$$\nabla : \mu_{X \nabla Y}(z) = |\mu_X(z) - \mu_Y(z)|$$

qui correspond à la définition classique de l'égalité de sous-ensembles flous

$$X = Y \Leftrightarrow \mu_X(z) = \mu_Y(z)$$

$$\Delta : \mu_{X \Delta Y}(z) = \max \left[\min(\mu_A(x), 1 - \mu_B(x)), \min(1 - \mu_A(x), \mu_B(x)) \right]$$

qui est la traduction exacte de la définition classique de Δ :

$$X \Delta Y = (A \cap \bar{B}) \cup (B \cap \bar{A}) \quad (- \text{ désigne la complémentation) mais suppose}$$

une définition très affaiblie de l'égalité entre sous-ensembles flous (voir Dubois, Prade (4)).

Il y a donc de multiples façons de définir un indice de similarité entre sous-ensembles flous.

. Avec la cardinalité scalaire

$$\text{intersection} \quad s_1(X, Y) = \frac{1}{|E|} \sum_{a \in E} \min(\mu_X(a), \mu_Y(a))$$

$$\text{diff-sym.} \quad \nabla \quad s_2(X, Y) = 1 - \frac{1}{|E|} \sum_{a \in E} |\mu_X(a) - \mu_Y(a)|$$

(correspond à la distance de Hamming)

$$\Delta \quad s_2'(X, Y) = 1 - \frac{1}{|E|} \sum_{a \in E} \mu_{X \Delta Y}(a)$$

$$\text{intersection et union} \quad s_3(X, Y) = \frac{\sum_{a \in E} \min(\mu_X(a), \mu_Y(a))}{\sum_{a \in E} \max(\mu_X(a), \mu_Y(a))}$$

intersection et différence symétrique (2 indices s_4 et s_4')

On remarque que $s_2(X, Y) = s_3(X, Y) = 1$ ssi $X = Y$.

s_4 varie de 0 à $+\infty$; s_2' est associé à une définition affaiblie de " $X = Y$ " déjà mentionnée plus haut.

. Avec la cardinalité affaiblie (hgt)

Indices analogues où "sup" remplace \sum . On a encore dans ce cas $s_2(X, Y) = 1$ ssi $X = Y$ (faux pour s_3)

. Si on utilise la cardinalité floue, on obtient des indices de similarité flous; par exemple

$$\tilde{s}_1(X, Y) = \frac{1}{|E|} \tilde{c}(X \cap Y) = \frac{1}{|E|} \sum_{a \in E} \mu_{(X \cap Y)}(a)$$

$$\tilde{s}_3(X, Y) = \tilde{c}(X \cap Y) / \tilde{c}(X \cup Y)$$

Il s'agit ici d'une division de nombres flous qu'on définit conformément au principe d'extension (Zadeh (13)) On notera que la cardinalité floue est elle-même une application de ce principe.

Si le référentiel E est muni d'une métrique d , ie d est une application $E \rightarrow \mathbb{R}^+$ telle que:

$$\begin{aligned} \forall (x,y) \in E^2 \quad & d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y \\ & d(x,y) = d(y,x) \\ \forall (x,y,z) \in E^3 \quad & d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z) \end{aligned}$$

On peut construire une distance floue entre sous-ensembles flous de E , soit \tilde{d} en utilisant une fois de plus le principe d'extension (voir (4))

$$\begin{aligned} \forall (A,B) \in \mathfrak{F}(E) \\ \mu_{\tilde{d}(A,B)}(z) = \sup_{(x,y) \in E^2: z=d(x,y)} \min(\mu_A(x), \mu_B(y)) \end{aligned} \quad (6)$$

$\tilde{d}(A,A)$ est le diamètre flou de la tache A floue

en particulier $\mu_{\tilde{d}(A,A)}(0) = \text{hgt}(A)$. Si a est un point flou

($\exists ! a \in E, \mu_A(a) = 1$), $\tilde{d}(A,A)$ est un "zéro flou"

$$\tilde{d}(A,B) = \tilde{d}(B,A)$$

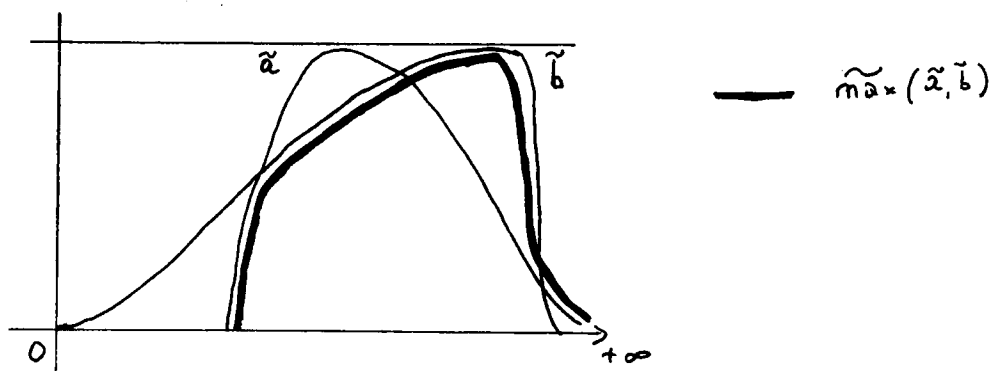
Les propriétés de \tilde{d} en matière d'inégalité triangulaire ne sont pas simples à définir. Il faut d'abord avoir résolu le problème: "que devient \leq quand on compare des nombres flous?" La solution de ce problème n'est pas unique. En particulier \leq ne peut pas devenir une inclusion de sous-ensembles flous.

On supposera ici qu'on généralise l'inégalité $a \leq b$ en $\tilde{\text{max}}(\tilde{a}, \tilde{b}) = \tilde{b}$

où $\tilde{\text{max}}$ est le "max" étendu, ie (voir Mizumoto Tanaka (9), Dubois, Prade (2), (3), (4))

$$\mu_{\tilde{\text{max}}(\tilde{a}, \tilde{b})}(z) = \sup_{z=\max(x,y)} \min(\mu_{\tilde{a}}(x), \mu_{\tilde{b}}(y))$$

Une figure explicite mieux l'effet de $\tilde{\text{max}}$ sur \tilde{a} et \tilde{b} .



NB. On peut vérifier que $\widetilde{\max}(\tilde{a}, \tilde{b}) = \tilde{b} \Leftrightarrow \widetilde{\min}(\tilde{a}, \tilde{b}) = \tilde{a} \quad \forall \tilde{a}, \tilde{b}$
 où $\widetilde{\min}$ est défini comme $\widetilde{\max}$ à partir de "min".

Un autre problème relatif à l'inégalité triangulaire floue c'est que le second membre peut avoir deux définitions non équivalentes. Il y a deux façons d'étendre $d(x,y) + d(y,z)$

- 1 - une extension directe par la composition max-min $\rightarrow \widetilde{d}(A,B,C)$
- 2 - étendre $d(x,y)$ en $\widetilde{d}(A,B)$, $d(y,z)$ en $\widetilde{d}(B,C)$ et faire la somme étendue des nombres flous $\widetilde{d}(A,B) \oplus \widetilde{d}(B,C)$.

La raison pour laquelle 1 et 2 ne sont pas équivalents n'est pas due au fait que l'on s'intéresse à des distances entre sous-ensembles flous mais simplement parce que ce sont des distances entre sous-ensembles.

Plaçons nous pour raisonner dans le cas d'ensembles non flous.

La formule (6) donne pour $d(A,B)$ l'intervalle

$$\left[\min_{(x,y) \in A \times B} d(x,y), \max_{(x,y) \in A \times B} d(x,y) \right] \quad \text{qu'on notera } [\underline{d}(A,B), \bar{d}(A,B)]$$

(en supposant les bornes atteintes).

Pour $d(x,y) + d(y,z)$ on obtient:

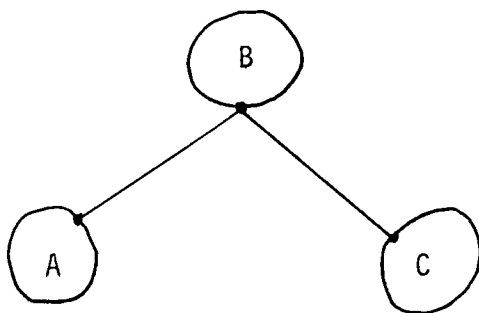
$$\text{méthode 1 : } d(A,B,C) = \left[\min_{(x,y,z) \in A \times B \times C} d(x,y) + d(y,z), \max_{(x,y,z) \in A \times B \times C} d(x,y) + d(y,z) \right]$$

$$\text{ie } d(A,B,C) = [\underline{d}(A,B,C), \bar{d}(A,B,C)]$$

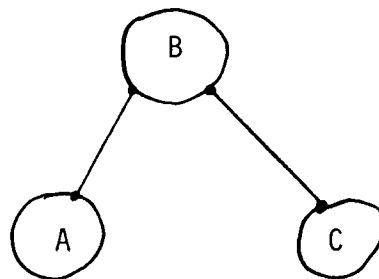
$$\begin{aligned} \text{méthode 2 : } \Delta(A,B,C) &= \left[\min_{(x,y,z,t) \in (A \times B \times C \times D)} d(x,y) + d(z,t), \max_{(x,y,z,t) \in (A \times B \times C \times D)} d(x,y) + d(z,t) \right] \\ &= [\underline{d}(A,B) + \underline{d}(B,C), \bar{d}(A,B) + \bar{d}(B,C)] \end{aligned}$$

$\underline{d}(A,B,C)$ = plus court chemin pour aller d'un point de A à un point de B en passant par C

$\underline{d}(A,B) + \underline{d}(B,C)$ = somme des courts plus chemins entre A et B, et B et C.



$\underline{d}(A,B,C)$



$\underline{d}(A,B) + \underline{d}(B,C)$

De façon évidente, on a :

$$\begin{aligned} \underline{d}(A,B,C) &\geq \underline{d}(A,B) + \underline{d}(B,C) \\ \bar{d}(A,B,C) &\leq \bar{d}(A,B) + \bar{d}(B,C) \end{aligned} \quad \text{donc } d(A,B,C) \subseteq \Delta(A,B,C)$$

ce qui positionne l'intervalle $d(A,B,C)$ dans l'intervalle $\Delta(A,B,C)$.

De plus on a :

$$\bullet \underline{d}(A,C) \leq \underline{d}(A,B,C)$$

$$\begin{aligned} \text{car si } \underline{d}(A,C) &= d(u_A, u_C) \quad u_A \in A, u_C \in C \\ \text{et } \underline{d}(A,B,C) &= d(u'_A, u'_B) + d(u'_B, u'_C) \quad (u'_A, u'_B, u'_C) \in A \times B \times C \\ \text{alors } \underline{d}(A,C) &= d(u_A, u_C) \leq d(u'_A, u'_C) \leq \underline{d}(A,B,C) \end{aligned}$$

$$\bullet \underline{d}(A,C) \text{ peut \u00eatre plus grand que } \underline{d}(A,B) + \underline{d}(B,C) = \underline{\Delta}(A,B,C)$$

Exemple



$$\begin{aligned} \underline{d}(A,B) &= 0 \\ \underline{d}(B,C) &= 0 \\ \underline{d}(A,C) &> 0 \end{aligned}$$

$$\bullet \bar{d}(A,C) \leq \bar{d}(A,B,C)$$

$$\text{car si } \bar{d}(A,B) = d(u_A, u_B), \bar{d}(A,B,C) = d(u'_A, u'_B) + d(u'_B, u'_C)$$

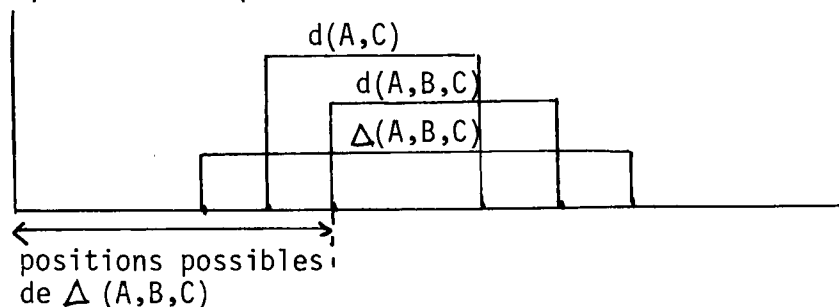
$$\text{alors } \bar{d}(A,B) \leq d(u_A, x_B) + d(x_B, u_C) \quad \forall x_B \in B$$

$$\text{et donc } \bar{d}(A,B) \leq \max_{x_B \in B} (d(u_A, x_B) + d(x_B, u_C))$$

$$\text{et } \bar{d}(A,B) \leq \max_{x_A, x_C, x_B \in A \times B \times C} (d(x_A, x_B) + d(x_B, x_C)) = \bar{d}(A,B,C)$$

$$\bullet \bar{d}(A,C) \leq \bar{\Delta}(A,B,C) \quad \text{\u00e9vident.}$$

Donc on a les positions respectives



L'op\u00e9rateur $\widetilde{\max}$ peut agir sur les intervalles et on a

$$\widetilde{\max} ([a,b], [c,d]) = [\max(a,b), \max(c,d)]$$

on a donc bien $\widetilde{\max}(d(A,C), d(A,B,C)) = d(A,B,C)$

mais pas forc\u00e9ment $\widetilde{\max}(d(A,C), \Delta(A,B,C)) = \Delta(A,B,C)$

En raisonnant sur les coupes de niveau α (α -cuts) on en déduit pour les sous-ensembles flous

$$\widetilde{\max} (\widetilde{d}(A,C), \widetilde{d}(A,B,C)) = \widetilde{d}(A,B,C)$$

(ce qui est une définition possible de l'inégalité triangulaire pour les distances floues). En revanche

$$\widetilde{\max} (\widetilde{d}(A,C), \widetilde{d}(A,B) \oplus \widetilde{d}(B,C)) \text{ est différent de } \widetilde{d}(A,B) \oplus \widetilde{d}(B,C)$$

Il reste beaucoup à faire dans l'étude des distances floues, notamment développer des techniques simples de représentation pour une manipulation pratique. La distance floue peut servir de mesure de dissimilarité entre sous-ensembles flous, et s'ajoute à la panoplie d'indices déjà existants.

CONCLUSION

Le problème de l'attraction des centres commerciaux est un problème de représentation du jugement (raisonné ou immédiat) selon plusieurs critères, lequel occupe une place centrale dans la modélisation des systèmes à composantes linéaires. Les modèles existant pèchent souvent par leur caractère simpliste, et ce n'est que récemment qu'on a essayé de saisir le problème réel dans sa complexité et son imprécision irréductible (par exemple Fustier ()). L'existence de cette imprécision suggère l'utilisation des sous-ensembles flous. Dans ce court exposé on a tenté de dégager quelques voies de recherche dans ce sens.

Un autre défaut des modèles existants est leur manque de fondement théorique. Ils sont souvent empiriques dans le mauvais sens du terme, c'est-à-dire ajustés en fonction des jeux de données existants, qui seuls valident les formules. Une approche théorique du jugement humain semble nécessaire, dans laquelle on tenterait d'identifier quels sont les divers types de jugement, et quels sont les opérateurs mathématiques qui les représentent. Une telle théorie aurait on peut le conjecturer, des retombées importantes en sciences humaines, économiques, aussi bien qu'en reconnaissance des formes, décision-making, intelligence artificielle.

BIBLIOGRAPHIE

- 1 - CHANG SSL. Applications of fuzzy set theory to economics. Kybernetes Vol.6, pp.203-207, 1977.
- 2 - DUBOIS D., PRADE H. Operations on fuzzy numbers. Int.J.Systems Science Vol.9, n°6, pp.613-626, 1978.
- 3 - DUBOIS D., PRADE H. Fuzzy real algebra: some results. Tech.Rep.TREE 78-13, Purdue University, 1978, partA. forthcoming in Int. J for fuzzy sets and systems.
- 4 - DUBOIS D., PRADE H. Fuzzy Sets and Systems. To be published Academic Press, 1979.
- 5 - FUSTIER B. L'attraction des points de ventes dans des espaces précis et imprécis. Document de Travail n°10, I.M.E., Dijon, 1975.
- 6 - FUSTIER B. Contribution à l'analyse spatiale de l'attraction imprécise. Document de Travail n°30, I.M.E., Dijon, 1978, présenté au Colloque International sur la théorie et les applications des sous-ensembles flous, Marseille, Sept.1978.
- 7 - HUFF D.L. A probabilistic analysis of shopping center trade areas. Land Economics Feb, 1963.
- 8 - LERMAN I.C. Les bases de la classification automatique. Coll. Programmation Gauthiers-Villars, 1970.
- 9 - MIZUMOTO M., TANAKA K. Some properties of fuzzy sets of type 2. Inf. and Cont. Vol.31, pp.312-340, 1976.
- 10 - MORAN P. L'analyse spatiale en science économique. Ed.Cujas, 1966.
- 11 - PONSARD C. Alea et flou. in Mélanges offerts à Henri Guitton. Dalloz-Sirey, 1977, pp.287-299.
- 12 - SUGENO M. Fuzzy measures and fuzzy integrals, a survey. in "Fuzzy automata and decision processes"(M.M.Gupta, G.N.Saridis,B.R.Gaines,eds) pp.89-102, North-Holland, 1977.
- 13 - ZADEH L.A. The concept of a linguistic variable and its application to approximate reasoning. Inf.Sci. Part.1, Vol.8, pp.199-249 Part.2, Vol.8, pp.301-357, Part.3, Vol.9, pp.43-80. 1975.
- 14 - ZADEH L.A. The linguistic approach and its application to decision analysis. In directions in large scale systems (Ho,Mitter Ed.) Plenum Press N.Y.1976.
- 15 - ZADEH L.A. Fuzzy sets as a basis for a theory of possibility. Int. J for Fuzzy Sets and Systems, Vol.1, n°1, pp.3-29, 1978.