



**HAL**  
open science

## Un parcours d'étude et de recherche pour la formation des professeurs sur le passage de l'arithmétique à l'algèbre

Tomás Ángel Sierra, Alicia Ruiz Olarría, Jean-Pierre Bourgade, Marie-Hélène  
Lécureux-Têtu

### ► To cite this version:

Tomás Ángel Sierra, Alicia Ruiz Olarría, Jean-Pierre Bourgade, Marie-Hélène Lécureux-Têtu. Un parcours d'étude et de recherche pour la formation des professeurs sur le passage de l'arithmétique à l'algèbre. 17e école d'été de didactique des mathématiques : Rôles et places de la didactique et des didacticiens des mathématiques dans la société et le système éducatif, Aug 2013, Nantes, France. hal-02190611

**HAL Id: hal-02190611**

**<https://hal.science/hal-02190611>**

Submitted on 22 Jul 2019

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Un parcours d'étude et de recherche pour la formation des professeurs sur le passage de l'arithmétique à l'algèbre

Tomás Ángel Sierra (Universidad Complutense de Madrid)

Alicia Ruiz Olarría (Universidad Autónoma de Madrid)

Jean-Pierre Bourgade (La prépa des INP, Institut National Polytechnique)

Marie-Hélène Lécureux-Têtu (Université Toulouse 2, IUFM)

## RESUME.

Le point de départ de cet atelier porte sur le renouvellement du rapport à l'algèbre dans l'enseignement secondaire : alors qu'on aborde généralement l'algèbre comme une arithmétique généralisée, une approche qui rende toute sa fonctionnalité à l'algèbre devrait au contraire mettre l'accent sur son rôle comme instrument de modélisation (intra ou extra-mathématique). La question de la diffusion de ce point de vue plus fonctionnel sur l'algèbre a reçu un certain nombre de réponses dont deux que nous étudierons plus particulièrement dans le cadre de cet atelier. Il s'agit d'un *parcours d'étude et de recherche* (PER) issu de l'étude de « jeux de mathé-magie » et d'un dispositif de formation spécifique dont l'objectif est de favoriser la diffusion auprès de la profession d'ingénieries didactiques du type de ce PER, les *parcours d'étude et de recherche pour la formation des professeurs* (PER-FP).

L'enseignement de l'algèbre a longtemps souffert d'un malentendu qui voulait que l'algèbre ne soit qu'une arithmétique généralisée, c'est-à-dire un « calcul avec des lettres » (Bolea, 2003), ce qui est à la fois l'origine et l'effet d'une péjoration culturelle de l'algèbre dans les sociétés occidentales contemporaines. La prise en compte des raisons d'être véritables de l'algèbre, dans une perspective écologiquement, est une condition nécessaire pour l'élaboration d'un enseignement fonctionnel de l'algèbre au collège (Chevallard et Bosch, 2012). Parmi d'autres points de vue sur cette question, on a récemment avancé (Ruiz-Munzón, 2010) que l'algèbre pouvait être considérée comme un instrument de modélisation et, à ce titre, faire l'objet d'un enseignement en collège relevant de pédagogie de l'enquête (Chevallard, 2012 ; Chevallard et Ladage, 2011). En proposant aux élèves d'étudier une question extra-mathématique portant sur des jeux de mathémagie, l'enseignant leur fournit l'occasion de mener un parcours d'étude et de recherche (PER) autonome au cours duquel ils élaborent une réponse à la question posée, notamment en construisant des techniques de type algébrique. La nécessité de l'approche algébrique pour l'étude de certains problèmes apparaît ainsi de façon naturelle dans le cadre d'une étude relativement libre. La constitution d'un tel dispositif d'enseignement repose sur une réflexion plus large sur l'algèbre considérée comme un instrument de modélisation (Ruiz-Munzón, 2010, Ruiz-Munzón, Bosch et Gascón, 2011) dont un des aboutissements est la construction d'un modèle praxéologique de l'algèbre : pris comme point de référence pour l'analyse d'autres modèles praxéologiques (le plus souvent implicites) de l'algèbre présents dans l'enseignement secondaire, il peut servir tant pour la recherche en didactique que pour l'ingénierie didactique, les deux activités se nourrissant mutuellement et dialectiquement. Le modèle praxéologique de référence (MPR) ainsi élaboré permet par exemple d'imaginer un scénario ouvert dont le point de départ (une question génératrice de l'étude) est choisi soigneusement en fonction des enjeux d'étude qui sont visés.

Le PER construit est donc un dispositif semi-ouvert où tout n'est pas prévu, mais où une enquête préliminaire menée par l'ingénieur didacticien permet d'anticiper au moins les grandes directions du parcours. Dans la mesure même où le PER n'est pas complètement ouvert, il permet d'assurer une transition relativement souple entre un paradigme de l'enseignement de type monumentaliste et un paradigme émergent où l'organisation de l'enseignement est centrée non plus sur des œuvres (mathématiques par exemple) figées qu'il

convient de « visiter » mais sur l'étude de questions vives (paradigme du questionnement du monde). Les PER semi-ouverts autorisent ainsi l'apparition de l'étude de questions relativement vives dans une autonomie élargie (majoration du *topos* de l'élève) tout en permettant de tenir compte de contraintes institutionnelles fortes (l'existence d'un programme d'enseignement qu'il convient de respecter) : la question génératrice du PER peut être calibrée pour que son étude permette la rencontre avec un certain nombre d'organisations mathématiques correspondant à des thèmes du programme (Matheron et Noirfalise, 2010).

En tant qu'ils permettent cette transition, les PER constituent une classe d'ingénieries particulièrement intéressante dont il conviendrait de s'assurer qu'elles puissent être développées largement dans la profession (émergente) de professeur. Un point d'appui important pour un tel objectif de *diffusion* se trouve dans les différents dispositifs de formation initiale des professeurs, et des didacticiens espagnols ont proposé que les PER puissent faire l'objet d'une diffusion plus large dans ce cadre, notamment au moyen de dispositifs inédits, les parcours d'étude et de recherche pour la formation des professeurs (PER-FP) expérimentés à l'université Complutense de Madrid (Sierra, 2006 ; Sierra et Nicolás, en prensa). L'objectif de l'atelier que nous avons proposé lors de la XVII<sup>e</sup> école d'été de l'ARDM était de mener un travail collectif de recherche en didactique autour de ces dispositifs à travers l'étude de la question suivante : « Comment faciliter la transition d'une vision de l'algèbre comme arithmétique généralisée à une vision de l'algèbre comme outil de modélisation ? » ( $Q_1$ ).

L'atelier a été conçu lui-même comme un atelier d'enquête au sens qu'Yves Chevallard donne à cette expression (Chevallard et Wozniak, 2013). Ainsi, partant de la question  $Q_1$  le groupe de chercheurs assistant à l'atelier a pu (et dû) constituer progressivement un *milieu* composé de la question initiale, mais aussi de questions dérivées dont certaines ont été proposées par les animateurs de l'atelier, et d'autres œuvres (notamment des réponses « estampillées », « toute faites » à certaines des questions dérivées). En particulier, les aides à l'étude (les animateurs de l'atelier) ont proposé au groupe de chercheurs d'étudier la question  $Q_1$  à travers une œuvre particulière : une réponse « estampillée » amenée par les animateurs et constituée par l'expérimentation d'un PER-FP dans une université espagnole dans le cadre de la formation initiale de professeurs de l'enseignement secondaire. Les participants à l'atelier ont ainsi pu étudier une proposition concrète donnée à travers un certain nombre de matériaux venus enrichir le milieu de l'enquête : en quoi cette proposition de réponse est-elle pertinente au vu de la question posée, ce dispositif particulier permet-il d'assurer la diffusion de praxéologies nécessaires à l'élaboration d'enseignements qui tiennent compte de ce que l'algèbre n'est pas qu'une arithmétique généralisée mais représente également un outil de modélisation fondamental ? L'étude de ces questions s'est notamment faite au moyen d'outils issus de la Théorie Anthropologique du Didactique (TAD) : l'analyse praxéologique du PER-FP (à travers un compte-rendu succinct fourni par les aides à l'étude) a permis en retour de faciliter une évaluation de cette réalisation particulière et donc d'élaborer des éléments de réponses à quelques-unes des questions posées. Bien évidemment, la tâche très complexe proposée dans le cadre de l'atelier ne saurait être épuisée en trois séances mais il a semblé essentiel de proposer aux chercheurs participant à l'atelier une expérience de recherche en didactique réelle. Expérience qui ne se réduisait donc pas à un travail complet sur un cas artificiel, mais représentait un moyen de faire découvrir notamment aux plus jeunes chercheurs certains outils d'analyse didactique dans leur contexte naturel d'utilisation – très conformément à l'approche écologique qui est au cœur de la TAD.

Dans la mesure où le travail proposé conduisait « naturellement » à l'élaboration de praxéologies d'analyse et contribuait ainsi à une diffusion des praxéologies d'analyse qui avaient servi (dans la phase d'analyse *a priori* et de conception de l'atelier) à sa propre élaboration, un usage réflexif de la didactique s'est trouvé au cœur du travail mené par les

animateurs, mais aussi par les participants à l'atelier. Il convient de donner toute sa place à cet usage dans la mesure où il permet peut-être de mieux comprendre la nécessité d'une science didactique au-delà des morcellements marqués par la prolifération *des* didactiques propres à chaque discipline.

### L'ALGEBRE COMME OUTIL DE MODELISATION

Dans l'enseignement des mathématiques au collège, l'algèbre est présentée de façon non fonctionnelle, pseudo-algorithmique (Chevallard, 1988; Schneider, 2012), ce qui entraîne – notamment – des difficultés lors du passage au lycée où, moyennant des ruptures de contrat didactiques non assumées, les usages du calcul algébriques sont radicalement renouvelés, même si la fonctionnalité que pourrait y trouver le calcul algébrique (on factorise « *pour* étudier le signe de la dérivée ») n'est qu'apparente puisque de nouveaux pseudo-algorithmes se substituent à d'autres, plus anciens.

Pour lutter avec efficacité contre cette situation aux effets désastreux, il est probablement indispensable de corriger ce qui en fait la spécificité : l'algèbre n'est perçue que comme un nouveau type de calcul, un champ nouveau où de nouveaux problèmes se posent (« factoriser », « développer ») dont on se doute qu'ils doivent bien remplir une fonction, mais dont l'exploration est toujours différée. Renversant la perspective, on peut s'attacher à revenir aux raisons d'être possibles de l'algèbre : on peut voir (Schneider, 2012) l'algèbre comme un instrument de classification utile pour gérer des problèmes de modélisation fonctionnelle, ou bien (Bolea, Bosch et Gascón, 2001), comme un instrument de modélisation des phénomènes arithmétiques. Ces deux points de vue ont en commun de permettre la conception de PER dans lesquels l'algèbre apparaît de manière fonctionnelle, au choix comme instrument de classification, simplification, systématisation ou comme outil permettant de prendre en charge un discours technologique sur des techniques arithmétiques.

Noemí Ruiz-Munzón (2010) a proposé un PER fondé sur un modèle praxéologique de référence dans lequel l'algèbre apparaît comme un outil au service d'un questionnement technologique sur l'arithmétique : partant de tours de mathémagie que l'on présente aux élèves, le PER trouve son origine dans des questions du type « Comment est-ce possible ? » ou bien, face à un tour qui rate, « Comment peut-on le faire marcher ? », etc. Là où une approche strictement arithmétique ne donne aucune prise satisfaisante à un travail technologique, l'algèbre s'avère un allié efficace en ce qu'elle permet de traiter simultanément tous les cas envisageables (par exemple tous les nombres que pourrait proposer au magicien un spectateur de son tour), mais aussi de prévoir l'issue du tour dans tous les cas, etc. Le PER, relativement guidé, est conçu dans une progressivité qui autorise l'introduction de degrés d'algébrisation de plus en plus élevés.

### QUESTIONS DE DIFFUSION...

Nous l'avons vu, pour rendre à l'algèbre toute sa fonctionnalité, il est important d'assurer en classe des conditions telles que l'algèbre émerge notamment comme un instrument de modélisation. La question de la diffusion, dans l'École, d'une telle vision de l'algèbre est importante : quelles sont les conditions et contraintes, au niveau de l'École, mais aussi de la société, qui permettrait d'assurer (ou au contraire, menaceraient) la diffusion de ce point de vue ? Le PER proposé par Noemí Ruiz-Munzón constitue une réponse partielle à cette question puisque l'algèbre y apparaît comme un instrument de modélisation permettant de rendre compte de tours de magie, d'en concevoir, d'améliorer des tours existants, etc. Cette réponse, à son tour, soulève la question de sa propre validité (« ces PER sont-ils en mesure d'assurer effectivement la diffusion du point de vue sur l'algèbre que nous évoquons ici ? ») mais aussi une question cruciale de diffusion : dans la mesure où ce type de propositions

permet d'assurer la diffusion dans l'institution scolaire de la vision de l'algèbre comme outil de modélisation, comment peut-on s'assurer de la bonne diffusion des dispositifs de type PER eux-mêmes, notamment dans un état de l'institution qui ne l'assure pas spontanément ? De multiples pistes pour l'étude de cette nouvelle question pourraient être envisagées, mais dans le cadre étroit de l'atelier nous avons pris la décision de soumettre aux participants une réponse « estampillée » qui a le mérite d'avoir pris au sérieux la question de la diffusion des PER dans la profession de professeur. Le dispositif des Parcours d'Étude et de Recherche pour la Formation des Professeurs (PER-FP) a une vocation double : en faisant vivre un PER aux étudiants-professeurs eux-mêmes, il cherche à garantir une certaine diffusion au sein de la profession de la vision de l'algèbre comme outil de modélisation ; par ailleurs, en soumettant aux étudiants-professeurs la tâche d'analyser le PER vécu dans le cadre d'un travail d'enquête qui lui-même s'apparente à un PER, il prétend donner aux étudiants-professeurs une formation sur l'analyse mathématique et didactique d'un PER et, secondairement, l'amélioration, voire la conception d'un tel PER. Ce deuxième aspect fait du dispositif PER-FP un instrument de diffusion au sein de la profession des praxéologies nécessaires à l'analyse, la conception et la mise en place de PER et entre donc dans le cadre de l'étude de la question que nous posons : les PER-FP sont structurés en quatre modules successifs : vivre un PER en position d'élève ; analyser un PER en position de didacticien ; concevoir un PER en position d'ingénieur didacticien ; expérimenter un PER en position de professeur. Ces parcours font vivre aux professeurs des processus d'étude fondés sur le nouveau paradigme du questionnement du monde et sur les principes épistémologiques qui le sous-tendent. D'autre part, et en réponse aux nécessités que dévoilent ces processus, ils devraient également contribuer à la construction de l'équipement praxéologique nécessaire pour les gérer non en tant qu'*étudiants*, mais en tant qu'*aides à l'étude*.

#### DEROULEMENT DE L'ATELIER

L'atelier s'est articulé, en trois séances, autour des tâches suivantes : analyser un PER mis en place au collège en Espagne (séance 1) ; analyser un PER-FP construit autour du PER précédent et réalisé dans une université madrilène (séances 2 et 3) ; évaluer les dispositifs précédents du point de vue de la question posée initialement (séance 3). L'atelier lui-même a été conçu, comme nous l'avons vu, de façon à mettre en œuvre une pédagogie de l'enquête pour les chercheurs – dans le but non exclusif de permettre à de jeunes chercheurs (ou à des chercheurs confirmés qui souhaiteraient aborder les techniques de la TAD dans le cadre de cet atelier) de s'approprier des instruments d'analyse dans un contexte où ils sont pertinents.

##### *Un atelier d'enquête*

L'atelier s'est développé sur trois séances en trois jours. La première séance est consacrée à la présentation de la question génératrice du travail d'enquête qui est au cœur de l'atelier :

$Q_1$  : « Comment faciliter la transition d'une vision de l'algèbre comme arithmétique généralisée à une vision de l'algèbre comme outil de modélisation ? »

L'atelier se veut un *atelier d'enquête* dont l'activité peut donc être modélisée dans les termes de la pédagogie de l'enquête proposé par Yves Chevallard. En particulier, l'organisation de l'atelier a été pensée par référence au *schéma herbartien* :

$$[S(X; Y; Q) \rightsquigarrow \{R_1^\diamond, R_2^\diamond, \dots, R_m^\diamond, O_{m+1}, O_{m+2}, \dots, O_n\}] \rightsquigarrow R^\heartsuit$$

Ce schéma précise le *modus operandi* de tout travail d'élaboration d'une réponse  $R^\heartsuit$  à une question  $Q$  qui se pose à un ensemble de personnes  $X$  qui vont œuvrer à l'étude de cette question avec le soutien d'*aides à l'étude*  $Y$  constituant ainsi un système didactique  $S(X; Y; Q)$ . Le collectif d'étude  $(X; Y)$  va progressivement constituer un *milieu*  $M$  pour l'étude de la

question  $Q$ . Ce milieu comportera des œuvres (au sens de la TAD) parmi lesquelles peuvent apparaître des réponses à la question  $Q$ , des réponses « déjà là », « toutes faites », présentes dans la société (et notamment dans des institutions où le collectif d'étude peut être amené à faire des incursions).

Dans le cadre de l'atelier, les aides à l'étude  $Y$  (animateurs de l'atelier) ont délibérément enrichi le milieu en présentant une réponse « estampillée »  $R_1^\diamond$  à la question  $Q_1$  : le PER proposé par Noemí Ruiz-Munzón (voir annexe 1) représente une réponse à la question posée et, en tant que telle, elle peut constituer le point de départ d'une partie du travail d'enquête sur la question  $Q_1$  (enquête qui ne saurait se limiter à ce que l'atelier aura permis de développer dans la mesure où la question posée pourrait conduire à elle seule à un programme de recherche en didactique très riche). L'étude de cette première réponse estampillée, considérée provisoirement (dans le cadre de l'atelier) comme valable (on ne procède donc pas à une *évaluation* systématique de cette réponse dans le cadre de l'atelier), conduit à poser une question *dérivée* : dans la mesure où  $R_1^\diamond$  est fondée sur l'utilisation d'un PER et dans la mesure où le fait même de fonder l'expérience sur ce dispositif didactique semble être une condition de validité de la réponse  $R_1^\diamond$  la question se pose ensuite de la possibilité de diffuser ce type de dispositif didactique dans la profession. On est alors amené à étudier la question dérivée :

$Q_2$  : « Comment faciliter la diffusion dans la profession des praxéologies didactiques nécessaires à la conception et à la mise en place des PER ? »

À nouveau, les aides à l'étude  $Y$  proposent d'enrichir le milieu de l'étude en proposant une réponse « estampillée »  $R_2^\diamond$  à la question  $Q_2$  : les PER-FP expérimentés à l'université *Complutense* de Madrid. L'étude de cette réponse conduit à nouveau à une nouvelle question dérivée :

$Q_3$  : « Dans quelle mesure les PER-FP permettent-ils une bonne diffusion des praxéologies didactiques nécessaires à l'utilisation de PER dans l'enseignement secondaire ? »

C'est finalement l'étude de cette question qui fera l'objet d'un travail approfondi dans le cadre de l'atelier.

Soulignons à ce point que, dans une visée à la fois formative et de contrôle réflexif, le schéma herbartien et les principes de la pédagogie de l'enquête ont été présentés aux participants à l'atelier qui avaient donc un moyen d'éprouver le modèle herbartien sur l'exemple particulier de l'atelier qu'ils étaient en train de vivre, tout en étant en position de l'utiliser également comme outil d'analyse des PER et PER-FP proposés à l'étude.

### *Déroulement de l'atelier*

La **première séance** est vouée à la présentation de la question génératrice  $Q_1$ , puis de la question dérivée  $Q_2$ . Si la proposition de PER donnée dans la réponse  $R_1^\diamond$  ne fait pas l'objet d'une évaluation complète dans le cadre de l'atelier, la première séance est néanmoins consacrée pour partie à une analyse praxéologique et didactique du PER afin de pouvoir éprouver en quoi cette proposition constitue bien une réponse adaptée (sinon parfaite : une évaluation complète serait requise pour porter un jugement définitif et dépasserait le cadre de l'atelier) à la question  $Q_1$ . Les animateurs de l'atelier proposent donc aux participants de mener une analyse praxéologique (étude des praxéologies enjeu de l'étude) et didactique (en termes de moments de l'étude) du PER *en ayant présente à l'esprit la question suivante* : « Est-ce que ce dispositif permet de faciliter la transition d'une vision de l'algèbre comme arithmétique généralisée à une vision de l'algèbre comme outil de modélisation ? »

Pour cela, les animateurs présentent le déroulement du PER aux participants (voir annexe 2).

Les animateurs exposent également la façon dont ce PER est utilisé dans un cadre de formation d'enseignants (au sein d'un PER-FP).

Les analyses développées dans le cadre de l'atelier ont été très variées et marquées par la spécificité de l'atelier qui accueillait aussi bien des chercheurs confirmés depuis longtemps engagés dans le courant de la TAD que des chercheurs débutants ou confirmés qui utilisaient les outils de la TAD pour la première fois.

La **deuxième séance** débute par une synthèse des propositions d'analyse praxéologique du PER expérimenté en 2°ESO. Un premier groupe de participants a produit lors de la première séance une analyse qui pointait le fait que le PER consacré aux jeux de mathémagie avait pour enjeu « [A1]<sup>1</sup> le changement de statut du signe égal qui est en place dès la première séance, donc qui commence à être une sortie de l'arithmétique » et qu'il donnait lieu à un « apprentissage de l'écriture algébrique, du sens algébrique, du traitement des expressions algébriques ».

Un deuxième groupe s'est attaché à dégager des organisations mathématiques ponctuelles dont l'une était articulée autour du type de tâches « deviner les trucs du magicien », une autre autour du type de tâches « simplifier des calculs en ligne », une troisième autour de « prouver que la technique en ligne symbolique fait bien le truc du magicien » qui contient en germe une dernière organisation mathématique centrée sur le type de tâches « comparer des programmes de calculs ».

Un premier niveau d'analyse de ces réponses fait apparaître une différence dans la portée qu'elles offrent dans une étude évaluative d'un corpus. Si le premier groupe de réponses est très pertinent (il y a bien changement de statut du signe égal, apprentissage de l'écriture algébrique, etc.), il ne comporte pas le degré de finesse que permet d'atteindre l'outil d'analyse praxéologique développé en TAD : les organisations mathématiques proposées par le deuxième groupe permettent de comprendre comment s'articule ce changement de sens (autour d'un enchaînement d'organisations mathématiques qui aboutissent à la technique de comparaison de programmes de calculs où, précisément, le signe égal trouve son nouveau « statut ») et où l'émergence du calcul algébrique trouve son origine dans le déroulement du PER. La première analyse ne permet pas, par exemple, de comprendre le rôle que joue la *modélisation* dans cette émergence, alors que le PER est précisément construit pour autoriser la construction de l'algèbre *comme outil de modélisation*.

Ceci étant, cette synthèse réalisée en début de séance par les intervenants est également l'occasion pour les animateurs de s'assurer de la bonne diffusion des outils d'analyse praxéologique. C'est donc à la fois un moment d'évaluation (de la maîtrise de ces outils par les participants, à travers leurs productions de la veille) et d'institutionnalisation des praxéologies d'analyse. Ainsi, une animatrice précise que la première organisation mathématique proposée, autour du type de tâches « deviner les trucs du magicien », n'est pas un enjeu de l'étude puisque « [A1] dix ans après on ne s'attend pas à ce que les élèves sachent deviner des trucs de magiciens, mais on s'attend à ce qu'ils sachent manipuler des équations, des programmes de calcul, des choses comme ça ». Donc on ne mettra pas cette organisation mathématique « [A1] dans les enjeux de l'étude », alors que la seconde organisation mathématique y trouve pleinement sa place (« [A1] ça sera bien par contre un enjeu de l'étude en ce sens-là qu'on aimerait que les élèves retiennent comment simplifier les calculs en ligne »). L'évaluation de la proposition de la troisième organisation mathématique est elle aussi intéressante en ce qu'elle montre que l'outil d'analyse praxéologique, bien employé, permet de voir des phénomènes didactiques imperceptibles sans cela. L'animatrice poursuit ainsi en affirmant que le type de tâches « prouver que la technique en ligne symbolique fait bien le truc du magicien » n'est « pas un type de tâches enjeu de l'étude, c'est un type de tâches coches ». La notion de tâche coche renvoie, en TAD, à une tâche dont l'étude n'est pas la finalité du travail d'enquête mais fournit l'occasion de rencontrer des praxéologies

<sup>1</sup> On désignera par A1, A2, ..., les animateurs de l'atelier et P1, P2, ..., les participants à l'atelier. Les retranscriptions sont réalisées à partir d'enregistrements des séances.

nécessaires à son étude (ainsi, les problèmes de répartition d'œufs dans des boîtes sont des tâches coches qui donnent lieu à l'étude de la division euclidienne), souvent au moyen d'un travail de modélisation intermédiaire – la tâche coche relevant souvent de situations du monde (le cas échéant, du monde extra-mathématique), son étude passe par une phase de modélisation pour autoriser une approche mathématique du problème. De fait, les animateurs proposent une analyse complémentaire de la praxéologie axée sur le type de tâches « comparer deux programmes de calcul ». Dans la mesure où les programmes de calcul sont l'objet transcendant dont des formulations peuvent être « rhétorique » (relevant de l'arithmétique) ou « algébrique », la comparaison de deux programmes de calculs peut se faire selon diverses voies (arithmétique ou algébrique, notamment). Néanmoins, le degré de complexité de la comparaison, conséquence du questionnement technologique qui est à l'origine du PER (« Pourquoi ça marche ? ») rend toute approche par l'arithmétique (comparaison des programmes de calcul de façon purement rhétorique) impossible. La tâche coche « deviner les trucs de magiciens », parce qu'elle n'est pas réalisable avec les outils courants dans l'institution où se trouvent les élèves à leur niveau d'étude, rend nécessaire l'invention d'une nouvelle approche qui passe par *l'écriture*. La construction d'un modèle mathématique des jeux de mathémagie, où le nombre à deviner est progressivement remplacé par un symbole (un carré, par exemple), puis par une lettre, constitue un type de tâches nouveau relevant d'une praxéologie *de modélisation*.

L'analyse praxéologique permet alors de mieux comprendre (et, en retour, de mieux concevoir) des séances d'enseignement : on voit ici qu'une tâche coche rend nécessaire l'élaboration d'une praxéologie de modélisation. De même, le type de tâches « comparer deux programmes de calculs » va donner lieu, outre un travail de modélisation, à une praxéologie de comparaison d'*expressions algébriques* (polynômiales du premier degré), cette praxéologie étant donc *nécessitée* elle aussi par la tâche coche. L'approche écologique en didactique conduit à percevoir ce type de situations comme analogue des chaînes trophiques : la praxéologie de modélisation, la praxéologie de comparaison d'expressions algébriques se nourrissent de la tâche coche qui en constitue donc une raison d'être puissante. Et la nécessité de comprendre (d'analyser) le PER expérimenté en 2°ESO à partir d'un corpus (tâche coche) nourrit des praxéologies d'analyse qui seules permettent de comprendre la fonction que jouent les jeux de mathémagie. En particulier, la notion de chaîne trophique permet de mieux comprendre la différence entre un PER comme celui proposé à l'étude et une organisation didactique classique qui aurait conduit à construire l'algèbre comme une arithmétique généralisée et à donner à titre d'exemple d'*application* de cet outil l'analyse des jeux de mathémagie : la motivation fonctionnelle de l'algèbre étant censurée dans ce type d'organisation didactique, on perd les moyens de comprendre « la déraisonnable efficacité des mathématiques »...

Enfin, un troisième groupe avait proposé non seulement une analyse praxéologique, mais aussi une analyse didactique partielle du PER en remarquant que les feuilles 1, 2, 3 et 4 du corpus donnaient lieu à des moments de travail de la technique pour des praxéologies déjà connues des élèves alors que les feuilles 5 et 6 sont l'occasion de développer un moment exploratoire pour un nouveau type de tâches et de favoriser l'émergence d'une technique pour ce type de tâches. Même si le corpus était très incomplet (pas de traces écrites d'élèves, l'expérience ayant eu lieu en catalogne et les traces n'ayant pas pu être traduites en espagnol ou en français), la simple donnée des feuilles d'exercices et de l'ordre de leur présentation aux élèves permet de donner à voir du didactique et une possible réalisation privilégiée de certains moments de l'étude. Là aussi, on voit les possibilités qu'ouvrent pour l'évaluation les techniques d'analyse en termes de moments de l'étude : on peut par exemple souhaiter que le moment exploratoire arrive plus tôt (moins d'exercices du type de ceux des feuilles 1, 2, 3, 4) ou de façon autonome (sans que les feuilles 5 et 6 ne soient proposées, le professeur laissant



l'initiative aux élèves de pousser plus loin leur étude du problème en leur laissant un *topos* qu'ils n'ont pas dans l'expérience étudiée), etc. Un dernier élément d'évaluation provient d'une remarque faite par une participante lors de la première séance : « [A2] ce [que cette participante] a souligné, c'est que le temps dévoué au moment de l'exploration de la praxéologie [de modélisation] était important. » La chronogenèse de la praxéologie de modélisation est réalisée de façon très progressive, donnant aux élèves la possibilité de s'approprier non seulement l'idée d'un calcul « avec des lettres », mais la nécessité même de faire apparaître des *paramètres* qu'on symbolise progressivement (d'abord au moyen d'un carré, puis au moyen d'une lettre). Allant dans le même sens, un des animateurs explique que le PER a été marqué par un certain nombre de moments d'institutionnalisation suite à des discussions entre les élèves et les professeurs engendrées par des calculs qui n'aboutissaient pas au même résultat pour tous les élèves, bien qu'ils utilisent tous le logiciel de calcul formel Wiris. C'est l'occasion pour le professeur d'institutionnaliser certains usages des parenthèses en lien avec les priorités opératoires, par exemple, l'institutionnalisation étant pleinement motivée par le déroulement même de l'étude.

Les éléments d'évaluation conduisent donc à accepter provisoirement comme valable la réponse « estampillée » que donne ce PER à la question  $Q_1$ . La suite de l'atelier sera alors consacrée à l'étude de la question dérivée  $Q_2$  : « Comment faciliter la diffusion dans la profession des praxéologies didactiques nécessaires à la conception et à la mise en place des PER ? » (puisque, précisément, l'évaluation précédente tend à accorder aux PER l'intérêt de constituer de bonnes ingénieries didactiques pour proposer des réponses à  $Q_1$ , il devient légitime de s'assurer de leur diffusion dans la profession). Les animateurs proposent alors aux participants de mener une analyse praxéologique (en vue de faire une évaluation) du PER-FP élaboré autour du PER précédent, ce PER-FP étant précisément conçu comme un instrument de diffusion des praxéologies de conception et d'analyse des PER. Un animateur se charge alors de présenter le déroulement du PER-FP tel qu'il a été expérimenté (voir annexe 3).

Parce que le travail proposé se situe à un niveau rarement pris pour objet en didactique, les animateurs proposent de distinguer trois institutions : celle de l'enseignement secondaire, où un professeur utilise des praxéologies didactiques pour transmettre des praxéologies mathématiques ; l'institution de l'institut de formation des professeurs, où un formateur utilise des praxéologies didactiques pour transmettre des praxéologies professionnelles de professeur ; l'institution de recherche en didactique (notamment l'atelier de l'école d'été de l'ARDM), où des chercheurs en didactique utilisent leurs praxéologies professionnelles de chercheur didacticien pour étudier les phénomènes de diffusion dans la première (lors de la première séance) et la deuxième (lors de cette séance) institutions. Les animateurs insistent sur la structure homologique entre les deux premières institutions tout en précisant bien les différences afin d'aider les participants à mieux orienter leur analyse : « [A2] votre but en l'occurrence ça va être d'étudier comment ceci se met en place dans le cas particulier de l'expérimentation qui a été faite à Madrid du PER-FP. C'est-à-dire "qu'est-ce qu'on voit apparaître comme praxéologies professionnelles dont le but du PER-FP est de les faire acquérir par les élèves professeurs, qu'est-ce qu'on voit apparaître comme types de tâches, comme techniques ? Ben là, c'est des types de tâches professionnels, c'est des techniques professionnelles, c'est des technologies professionnelles... Et qu'est-ce qu'on voit de didactique dans le compte rendu que [A1] va vous distribuer, qu'est-ce qu'on voit apparaître comme phénomènes didactiques, comme organisations didactiques pour la transmission de ces praxéologies-là auprès des élèves professeurs ? » Les participants travaillent ensuite par équipes à l'élaboration d'une réponse à ces questions.

La **troisième séance** a été consacrée à l'examen des propositions d'analyse praxéologique du PER-FP par les participants puis à l'étude de la question dérivée  $Q_3$  : « Le dispositif PER-FP permet-il de faciliter la diffusion dans la profession des praxéologies didactiques

nécessaires à la conception et à la mise en place des PER ? », qui *nécessite une évaluation* de la proposition PER-FP. La question posée le montre bien : c'est un travail d'évaluation de la réponse « estampillée » qui est proposé aux participants à l'atelier. Une première équipe a proposé une modélisation du problème de la diffusion des praxéologies d'élaboration des PER : « [P1] on s'est dit que conception et mise en place du PER en général ça implique [...] d'avoir une formation à la TAD, et [de s'appuyer sur une institution de diffusion]. On s'est dit qu'ici le dispositif c'était l'institut de formation des enseignants du second degré. [...] ». Suit ensuite une analyse de « deux conditions principales » permettant la diffusion de ces praxéologies : « [P2] la première condition c'était celle de l'homologie et on a dit que ce choix impliquait l'existence d'un PER algèbre réalisé et satisfaisant pour le formateur qui le présente ». L'objectif de faire acquérir par les étudiants professeurs un ensemble de praxéologies didactiques peut être atteint en leur donnant l'occasion de « vivre » un dispositif didactique relevant de ces praxéologies en position d'étudiant (homologie entre les praxéologies à acquérir et les praxéologies mises en œuvre dans la situation d'acquisition). Le PER algèbre préexistant constitue alors « un milieu pour le formateur mais aussi par la suite pour les formés ». « La deuxième condition c'était celle de l'introduction de problèmes pseudo-concrets ou arithmétiques en plus [...], à côté des jeux de mathémagie du PER algèbre » : les étudiants professeurs sont confrontés à deux types de situations, les jeux de mathémagie et des « problèmes pseudo-concrets » dont « [P2] il faut qu'ils soient de natures différentes pour que ce soit une condition favorable » à la prise de conscience du rôle technologique que peut jouer l'algèbre : les problèmes pseudo-concrets doivent pouvoir être résolus de manière arithmétique, sans recours à l'algèbre, alors que les questions d'ordre technologiques qui sont posées à propos des jeux de mathémagie ne peuvent être étudiées qu'au moyen d'outils de modélisation dont relève l'algèbre. « [P2] On se demandait, oui, ça nous a manqué, on ne sait pas s'ils sont véritablement, de manière épistémologique, différents, euh, de nature ».

Une autre équipe observe néanmoins que, pour les étudiants professeurs, « [P3] essayer de résoudre les problèmes de mathémagie sans utiliser l'algèbre a pu permettre de leur faire prendre conscience, justement, de la différence de nature de ces problèmes [de mathémagie] par rapport aux autres problèmes [pseudo-concrets] qui se résolvent de façon arithmétique facilement [...] et donc de prendre conscience de la différence entre ce que c'est que l'algèbre comme arithmétique généralisée et l'algèbre comme outil de modélisation. » La théorie de l'homologie est alors explicitée : « c'est cette posture d'élève qui les a obligés, la difficulté dans laquelle ils ont été mis qui les a obligés à prendre conscience de ça [...] et donc de transposer [...] ensuite quand ils seront professeurs, euh, retrouver cette technique de mise en... [...] enfin oui, de se heurter à quelque chose pour arriver à comprendre tout simplement [...] pour arriver à transposer cette méthode-là... » On voit aux hésitations la difficulté qu'il y a à expliciter des éléments théoriques qui (précisément parce qu'ils relèvent du niveau théorique des praxéologies engagées) relèvent le plus souvent de l'impensé du chercheur didacticien. L'homologie qui est pointée ici est sans doute celle qui se voit entre l'inconfort subi par les étudiants professeurs (qui ne comprennent pas, dans un premier temps, l'intérêt de la résolution par des outils purement arithmétiques des problèmes de mathématiques ou des problèmes « pseudo-concrets ») et qui agit comme une condition propitiatoire à l'apprentissage, et la situation d'inconfort (« se heurter ») à laquelle, à leur tour, ils soumettront leurs propres élèves dans la mesure où ils auront pris conscience du caractère propitiatoire de ces situations d'inconfort.

Cette analyse rejoint l'analyse didactique proposée par les animateurs de l'atelier : observant que « pendant les trois premières séances [du PER-FP, les étudiants professeurs] rencontrent le type de tâches *mais sans l'identifier* », ils ont proposé de voir là l'origine d'une tension très forte (agacement, ennui, etc.) chez les étudiants professeurs et dont rend bien

compte le corpus fourni. Le moment de la première rencontre et de l'identification du type de tâches est donc mené de façon incomplète puisque « ils sont mis en position d'analyser un corpus [type de tâches] mais ils ne savent pas, euh, que le type de tâches qu'on leur demande de réaliser c'est « analyser le corpus ». Ils n'en ont pas pris conscience. » On peut alors supposer que « ne pas identifier le type de tâches engendre justement cet agacement » chez les étudiants professeurs. Ce qui permet de comprendre un geste du formateur : « au début de la quatrième séance on relâche la tension avec une question cruciale qui est posée par le formateur à ce moment-là et qui est, euh, bon, quel est l'objectif de cette activité pour une classe de seconde ESO ? [...] On part de l'agacement et de la colère des élèves professeurs et on va rendre légitime le questionnement sous-jacent à cette colère. [...] On va institutionnaliser cette question, on va l'officialiser, on va la légitimer [...] ça permet de relâcher la tension et puis, euh, de légitimer le questionnement des élèves professeurs et donc une meilleure dévolution ».

Une autre équipe a mené le travail sur le terrain de l'évaluation de manière explicite. Constatant tout d'abord que « [P4] la question posée par le formateur [dans le cadre du PER-FP] avait un fort pouvoir générateur », cette équipe observe néanmoins que « l'enquête qui aurait pu avoir lieu est stoppée en fait tout de suite, puisque le *topos* qui aurait pu être laissé aux étudiants pour générer des [...] sous-questions ne leur est pas laissé puisque le formateur apporte tout de suite une réponse estampillée ». Le moment de l'exploration de la question est atrophié.

#### L'ÉVALUATION COMME NICHE POUR L'ANALYSE

Même si on ne le formule pas toujours en ces termes, le travail d'un enseignant – notamment dans la reprise de ses cours d'une année sur l'autre – est largement fondé sur un travail d'analyse et d'évaluation des séances (ou des séquences) qu'il a réalisées. Ainsi, tel enseignant décidera d'inverser l'ordre de présentation de deux notions liées parce qu'il a évalué que l'ordre choisi durant l'année en cours a conduit à des difficultés insurmontables, etc. La limite principale de ce type d'évaluations est qu'elles ne sont pas armées pour fournir mieux que des intuitions vagues des causes des phénomènes didactiques (souhaitables ou à éviter) : un empirisme de mauvais aloi peut laisser croire qu'une exploration par essais et erreurs conduira inévitablement à la découverte des praxéologies didactiques parfaites... ou au constat pessimiste que l'enseignant est entièrement voué aux techniques idiosyncratiques plus ou moins dépendantes de son charisme. Une évaluation qui se veut efficace doit s'outiller de techniques d'identification des causes ou raisons des phénomènes qu'elle observe. Ce n'est qu'en les ramenant à des causes didactiques que l'évaluation donne une prise sur les phénomènes didactiques qu'elle relève – et la recherche de ces causes ne peut se faire qu'au moyen de techniques d'analyse robustes qui dépassent précisément les explications circulaires auxquelles condamne l'empirisme naïf que nous évoquions (« ça n'a pas marché parce que ça n'a pas marché »). On voit se dessiner ici une piste supplémentaire pour un usage réflexif de la didactique : du point de vue de la problématique écologique en didactique, on pourrait dire que les praxéologies d'évaluation favorisent l'apparition de *niches* pour des praxéologies d'analyse. C'est ce point de vue qui a partiellement gouverné l'élaboration de l'atelier (et qui, de manière significative, est au cœur de l'analyse du corpus du PER-FP qui a été proposée dans le cadre de l'atelier) : on a cherché, dans l'organisation didactique de l'atelier, à mettre en avant la chaîne trophique qui s'articule entre l'évaluation et l'analyse – donnant ainsi à voir les véritables raisons d'être de l'analyse praxéologique qui ne saurait se réduire à une étape obligée, un peu académique, dans un travail respectable de didactique mais constitue bien, au contraire, un instrument au service de l'évaluation (entre autres) ; parce que toute institutionnalisation conduit à une *usure* des praxéologies, il est essentiel de rendre tout leur

éclat aux raisons d'être des praxéologies d'analyse qu'offre la TAD en les présentant de manière *fonctionnelle*, par exemple dans le cours d'un atelier donné lors d'une école d'été de didactique...

### UN ATELIER D'ANALYSE PRAXEOLOGIQUE

Un objectif de l'atelier a donc été d'évaluer dans quelle mesure le dispositif des PER-FP (tel qu'il se donne à voir dans la réalisation concrète menée à Madrid) permet la diffusion dans la profession de professeur de praxéologies utiles ou nécessaires à la conception et la mise en œuvre de PER. On le voit, la question génératrice de l'enquête conduit assez vite à des questions d'évaluation (du moment que le milieu constitué dans le déroulement de l'enquête recèle des propositions de réponses dont il convient d'évaluer la pertinence et la qualité). Comme dans tout travail d'enquête, les questions viennent sans que les moyens de les étudier ne soient donnés *a priori* : ici, le besoin d'évaluer la réponse pose à son tour [chaîne trophique ! On est sans arrêt en train de faire du méta...] des outils pour l'évaluation. Un questionnement assez naturel conduit à remarquer qu'une évaluation rationnelle d'un enseignement (ici, une formation pour enseignants) devrait s'articuler autour d'une comparaison entre les objectifs (conscients ou inconscients) qui sont au cœur de l'enseignement considéré et ce qui a « réellement » eu lieu dans le déroulement de l'enseignement. Cette analyse, si elle ne doit pas se limiter à un simple catalogue descriptif [illusion empiriste], nécessite également que soient construits des outils pour dégager les raisons (sinon les causes) de tel ou tel phénomène didactique (échec ou succès de la diffusion de telle ou telle technique enjeu de l'étude). Ceci impose alors la construction d'outils d'analyse des phénomènes didactiques.

Même si en matière de didactique comme ailleurs il n'est pas question d'imposer l'illusion qu'à un type de tâches ne puisse correspondre qu'une technique, les animateurs de l'atelier ont choisi de proposer aux participants de mener l'analyse du corpus proposé au moyen d'outils forgés dans le cadre de la TAD. De ce point de vue, on peut chercher à analyser une séance filmée ou observée, un corpus constitué de traces écrites, un compte rendu de séance, etc., en commençant par identifier l'enjeu de l'étude tel qu'il se dégage du corpus étudié d'une façon précise : quelles praxéologies constituent l'enjeu de l'étude ? L'analyse praxéologique constitue une technique d'analyse des corpus dans la mesure où on postule (avec la TAD) que toutes les actions humaines peuvent être modélisées en termes de praxéologies : toute action conduit à la réalisation de tâches d'un certain type (se laver les mains, aller au cinéma, résoudre une équation du second degré ou se gratter la tête) par la mise en œuvre d'une technique idoine dont on peut justifier la pertinence pour le type de tâche considéré (par le truchement d'un discours de justification – la *technologie* de la technique). La justification dépend bien-sûr de l'institution où apparaît la praxéologie (des questions d'hygiène fondamentales peuvent être au cœur de la justification de telle ou telle technique de lavage des mains dans une institution hospitalière, quand un discours beaucoup plus élémentaire suffira dans une institution comme la famille pour justifier auprès des enfants l'importance de telle ou telle technique) et l'impensé propre à l'institution – qui peut affleurer et se donner à voir ne serait-ce qu'en creux dans le discours technologique – constitue la théorie de la technique considérée. Partant, on peut ensuite considérer qu'un des objectifs fondamentaux de l'école est d'assurer la diffusion auprès d'un public d'élèves de certaines praxéologies : une façon essentielle de lire un corpus consiste alors à identifier les praxéologies qui sont l'enjeu de l'étude décrite dans le corpus. Une première évaluation peut être faite à propos de l'adéquation entre l'enjeu observé dans le corpus et les praxéologies visées dans l'institution d'enseignement considérée, mais il convient d'avoir à l'esprit que le corpus étudié peut ne représenter qu'une fraction d'un travail plus large dans lequel les

praxéologies visées « officiellement » (telles qu'elles pourraient éventuellement se dégager d'une étude des *programmes* s'il en existe dans l'institution considérée) sont étudiées plus précisément. En tout état de cause, il convient non seulement de dégager les praxéologies enjeu de l'étude mais également d'analyser dans quelle mesure, de quelle façon ces praxéologies sont étudiées par le collectif d'étude dans le corpus analysé. Par la mise en œuvre de praxéologies didactiques (de techniques notamment), l'aide (ou les aides) à l'étude se donnent les moyens d'assurer une certaine rencontre entre les étudiants (ceux qui étudient) et les praxéologies visées. La TAD postule que toute étude comporte une série de *moments* (moment de la première rencontre avec et de l'identification du type de tâches, moment de l'exploration du type de tâches, moment de l'émergence d'une technique, moment technologico-théorique, etc.) qui selon les déroulements concrets des séances d'étude vont être plus ou moins accentués : ainsi, dans un cours magistral classique, les moments privilégiés sont le moment de la première rencontre (mais l'identification du type de tâches peut être différée aux séances de travaux dirigés), le moment de la construction du bloc technologico-théorique et le moment de l'institutionnalisation. Le moment exploratoire et d'émergence de la technique est fortement minoré pendant les cours magistraux. À l'inverse, les activités d'étude et de recherche sont élaborées afin de permettre la réalisation de trois moments de l'étude régulièrement négligés dans les situations magistrales : le moment de la première rencontre avec le type de tâches et de l'identification du type de tâches (on peut rencontrer un type de tâches sans l'identifier, ce qui peut poser problème), le moment de l'exploration du type de tâches et d'émergence de la technique, et le moment de la construction du bloc technologico-théorique (Chevallard, 1999 ; Artaud, 2011). La notion de *moments de l'étude* permet ainsi d'étudier dans quelles mesure les praxéologies didactiques mises en œuvre ont permis (ou n'ont pas permis) d'assurer la réalisation de tel ou tel moment de l'étude dans le cadre de la séance observée. Parce qu'on peut considérer que la minoration de tel ou tel moment de l'étude (le moment de l'exploration du type de tâches par exemple) peut avoir des conséquences négatives sur l'apprentissage des praxéologies visées, l'analyse des séances en termes de moments de l'étude permet de se donner les moyens d'une évaluation rationnelle des praxéologies didactiques utilisées : on cherchera ainsi à établir que tel ou tel moment de l'étude est atrophié (ou hypertrophié) en raison de l'emploi par l'aide à l'étude de telle ou telle technique didactique, ce qui, en retour, donne une prise pour l'amélioration des praxéologies didactiques.

Notons au passage que, parce que le problème rencontré dans cet atelier ne concerne plus l'enseignement des mathématiques, mais la diffusion de praxéologies de diffusion des mathématiques, l'évaluation ne porte plus sur un problème de mathématiques, ni sur un problème de diffusion des mathématiques, mais sur un problème de diffusion de praxéologies de diffusion (des mathématiques). La science dont relève l'étude d'un tel problème n'est plus alors la didactique *des* mathématiques, mais, à la rigueur, la didactique *de* la didactique *des* mathématiques. Au risque d'une prolifération des champs disciplinaires et d'un glissement méta (Brousseau, 1998), on voit bien en ce cas précis la nécessité de développer une science des phénomènes de diffusion *en général* : seule la didactique est à même de proposer simultanément des outils pour l'analyse des phénomènes de diffusion de praxéologies de diffusion *des mathématiques*, ou *des langues vivantes*, ou *de l'EPS*, etc. On voit ainsi que le point aveugle que représente la formation des professeurs – et que de nombreux travaux en didactique essaient depuis longtemps d'éclaircir –, à la condition d'être pris pour objet d'une analyse didactique conséquente, est un des moyens de prendre conscience de l'existence de praxéologies d'analyse *indépendantes* de l'objet d'analyse – ce qui ne signifie pas qu'il ne faut pas les *spécifier* dans le cours de leur utilisation dans l'étude de tel ou tel objet. Ainsi, dans le cadre de cet atelier, la confrontation avec une question ne portant pas sur la didactique *des mathématiques*, mais sur la didactique *de la didactique des mathématiques* a permis de

mettre en relief la pertinence des outils d'analyse forgés dans le cadre de la TAD pour l'étude de phénomènes didactiques *qui ne relèvent pas de la didactique des mathématiques*. Cet atelier, en proposant de mener une analyse didactique d'un type d'enseignement qui fait rarement l'objet de ce type d'analyse, notamment parce qu'il est au contraire perçu comme le lieu de la diffusion de ces techniques d'analyse auprès de la profession de professeur, ce qui le retirerait par magie du champ de l'analyse didactique, permet de montrer la nécessité d'un outil d'analyse des phénomènes de diffusion qui transcende les domaines praxéologiques dont on étudie la diffusion. Ce point a été bien perçu par certains des participants à l'atelier. En particulier, l'analyse praxéologique du PER-FP a conduit à la prise de conscience (à travers l'ambiguïté de certaines notations utilisées par les participants et les animateurs) de la nécessité de distinguer plusieurs niveaux praxéologiques : « [P5] En fait il y a du méta, là. Donc euh la difficulté... [...] C'est ça qui est difficile, c'est dans le méta en fait. [...] [P4] C'est très difficile de rester à un niveau donné, mais... [...] [P6] On sait pas trop à quel niveau on se fixe. [...] [P4] ... le faire faire au professeur pour qu'il fasse faire, et... [...] où est-ce qu'on se place, est-ce qu'on regarde que le mathématique [...] ou est-ce qu'on regarde vraiment la, euh, une technique de formation, une tâche de formation ? [...] [P5] ...poupées gigognes [...] ». Comme le montre cet échange entre trois participants à l'atelier, l'analyse praxéologique doit se placer à un niveau « méta » dans le sens où elle doit prendre pour objet ce qui est d'ordinaire un instrument d'analyse : ce n'est qu'en retournant contre lui-même cet outil d'analyse praxéologique qu'on peut se donner les moyens de comprendre une stratégie didactique au service de l'enseignement de ces techniques d'analyse praxéologique. L'enjeu de l'étude étant (dans le PER-FP) constitué de praxéologies d'analyse praxéologique et didactique, l'analyse praxéologique de cet enjeu relève de la didactique de la didactique des mathématiques. À son tour, une analyse didactique du PER-FP (en termes de moments de l'étude, etc.) s'attache à étudier les conditions de diffusion de praxéologies d'analyse didactique. La posture réflexive n'est pas un « simple point d'honneur un peu vain, celui du penseur qui se voudrait à proprement parler incontournable et capable d'occuper un point de vue absolu », mais plutôt « une arme dans la lutte scientifique » dans la mesure où « nul ne peut forger des armes susceptibles d'être utilisées contre ses adversaires ou ses concurrents sans s'exposer à ce que ces armes soient retournées contre lui, par ceux-ci ou par d'autres, et ainsi de suite à l'infini », si bien que « les chercheurs engagés dans la concurrence seront amenés à progresser collectivement vers la réflexivité qui leur sera imposée par les effets de l'objectivation mutuelle et non par un simple retour sur elle-même de leur subjectivité. » (Bourdieu, 1995). Cet usage de la réflexivité comme outil dans la conquête d'une scientificité toujours à construire, en particulier pour une science jeune, est ici entièrement *nécessité* par le travail d'enquête qui offre donc les conditions d'une approche écologique de la réflexivité en didactique – et on comprendra aisément l'importance de cette approche dans le cadre d'une école d'été.

Pour illustrer un peu mieux l'importance de l'approche réflexive en didactique, on peut remarquer que le travail proposé dans le cadre de l'atelier porte en lui la nécessité d'un usage « méta » des outils de la didactique. De même que l'enseignant (ou le système d'enseignement) peut être conduit à construire des outils pour permettre l'enseignement de praxéologies, outils qui, à leur tour, risquent fort de l'amener à élaborer de nouveaux outils pour permettre la compréhension par les élèves des premiers outils (cas des « patates » qui, à l'origine simple outil d'aide à l'apprentissage de la théorie des ensemble, deviennent à leur tour l'objet d'un enseignement, (Brousseau, 2009), on peut imaginer que le didacticien, ayant forgé des outils d'analyse pour les situations d'enseignement des mathématiques se trouve conduit à diffuser ces outils auprès d'un public de futurs enseignants de mathématiques et doive, pour assurer au mieux cette diffusion, se munir d'outils d'analyse des outils d'analyse des mathématiques qu'il souhaite diffuser. Dans une étape supplémentaire, le didacticien se

voit demander de mener la formation d'une équipe de formateurs devant permettre de s'assurer que les formateurs acquerront des outils permettant de diffuser auprès de futurs enseignants les outils d'analyse des mathématiques qu'il a élaborés. À ce stade, le didacticien se doit de forger des outils d'analyse des outils d'analyse des outils d'analyse des mathématiques. Il n'y a aucune raison de s'arrêter ici : des collègues didacticiens peuvent en venir à demander au didacticien concepteur de ces outils de leur transmettre les techniques qu'il a élaborées et le voici donc confronté à la nécessité de pousser un cran plus loin l'élaboration d'outils d'analyse. Parce que chaque niveau de diffusion dans cette situation fictive (mais qu'on pourra reconnaître sous diverses déclinaisons dans les institutions consacrées à la formation des enseignants) relève d'un niveau praxéologique (et même d'une discipline) différent, il y a un risque d'inflation théorique : certains outils d'analyse vont être forgés, tout un vocabulaire produit, etc., pour répondre à des questions de diffusion dont on ne veut voir que la spécificité et dont on refuse de voir la part de généricité qu'elles recèlent. À l'inverse, une science *du* didactique, en prenant pour objet les phénomènes de diffusion *en général* (et non les phénomènes de diffusion *des* mathématiques, ni même les phénomènes de diffusion *des* praxéologies de diffusion *des* mathématiques) permet seule d'éviter un glissement méta particulièrement préjudiciable (notamment parce qu'il conduirait à un éclatement du champ de la didactique en autant de communautés entre lesquelles l'inter-intellection serait problématique). L'objet de l'atelier, qui se situe dans un contexte tout à fait semblable à celui de la fiction que nous venons d'évoquer, peut alors devenir un objet d'étude pour une science du didactique qui se donne les moyens techniques d'analyser *tous* les niveaux praxéologiques que l'on rencontre dans cette fiction : analyse praxéologique des mathématiques à enseigner, des praxéologies didactiques à diffuser auprès des enseignants, et même des outils praxéologiques à diffuser auprès des chercheurs en didactique qui souhaiteraient s'engager dans un travail d'analyse des praxéologies de diffusion des praxéologies de diffusion des mathématiques. C'est une des forces de la notion de praxéologie de n'être spécifique d'aucun champ disciplinaire – et ce du fait même de sa conception qui s'est faite *contre* l'idée de discipline (Chevallard, 2007).

### CONCLUSION PROVISOIRE

Tout travail de recherche porte en lui une fermeture possible et une ouverture inévitable. Le travail d'enquête mené dans le cadre de l'atelier, l'étude de la question  $Q_1$  (« Comment faciliter la transition d'une vision de l'algèbre comme arithmétique généralisée à une vision de l'algèbre comme outil de modélisation ? ») et en particulier l'analyse didactique du dispositif PER-FP comme élément de réponse à cette question marquent une étape dans le travail mené et à mener sur cette question complexe. Mais l'étude d'une question particulière est toujours grosse d'implications possibles sur la façon même de procéder à l'enquête et le dispositif didactique que nous avons mis en place dans le cadre de l'école d'été doit lui-même être considéré comme un élément de réponse à la question  $Q_1$  et analysé comme tel. En ce qu'il a permis la réalisation d'une analyse collective et de procéder à une évaluation collective d'une réponse particulière à la question  $Q_1$ , l'atelier pourrait (et devrait) à son tour faire l'objet d'une analyse didactique. Les outils qui s'élaborent dans le cadre de la recherche en didactique sont des acquis de la science didactique qui, comme tels, doivent être diffusés dans la profession des chercheurs en didactique ; l'atelier que nous avons proposé a permis l'existence, le temps de trois séances (et au-delà, de trois journées, grâce à l'enthousiasme et l'implication des participants) d'un système didactique  $S(X, Y, \heartsuit)$ , où  $X$  désigne l'ensemble des participants,  $Y$  les animateurs de l'atelier et  $\heartsuit$  représente l'enjeu de l'étude, c'est-à-dire la question  $Q_1$ . Ce système didactique, à travers l'étude de la question  $Q_1$  a permis d'assurer la diffusion de certaines praxéologies (d'analyse, d'évaluation, etc.). La question se pose alors

de la qualité de cette diffusion : quelles praxéologies étaient des enjeux d'étude visés par les animateurs de l'atelier ? Quelles organisations didactiques ont-ils mis en place pour en assurer la diffusion ? Cette diffusion a-t-elle été efficace ? etc. Le fait même de pouvoir poser ces questions dans ces termes montre l'existence d'un équipement praxéologique qui permet d'en débiter l'étude (recherche des types de tâches – analyser un corpus, etc. – des techniques, technologies, théories, etc., analyse en termes de moments de l'étude, en termes des dialectiques de l'étude, etc.) et qui ne relève pas de la didactique des mathématiques puisque les praxéologies dont on étudie ici la diffusion dans le cadre de l'atelier sont des praxéologies de didacticien et non des praxéologies mathématiques. À tout prendre, elles relèveraient donc de la didactique *de* la didactique, c'est-à-dire, tout simplement, de *la* didactique ; avec des notations introduites récemment par Yves Chevallard, on découvre ici un résultat fondamental de la science didactique, ou plutôt un postulat théorique qui ne cesse de se renforcer en favorisant l'émergence de ses conditions de validité :  $\partial_{\vec{\delta}} = \vec{\delta}$ . La didactique *de la didactique* n'est autre que *la* didactique et l'existence de celle-ci préserve précisément de toute régression à l'infini qui conduirait à la création d'une didactique de la didactique de la didactique de l'algèbre (permettant l'étude d'un atelier dont l'objectif est d'étudier un dispositif didactique – le PER-FP – dont l'objectif est d'étudier la diffusion de praxéologies algébriques).

Les outils de la science didactique suffisent à l'élaboration d'un questionnement spécifique concernant le domaine étudié, ce qui ne signifie pas bien sûr que les questions soient toujours les mêmes, ni que les outils pour y répondre ne doivent pas être réélaborés à chaque fois : mais alors ce n'est pas la didactique *d'un domaine* qui s'en trouve enrichie, c'est *la* didactique. C'est précisément en cela que l'étude de l'atelier représente un enjeu intéressant : l'étude des phénomènes de diffusion des praxéologies professionnelles des chercheurs didacticiens est la condition de l'émergence d'une pratique *réflexive* de la didactique sans laquelle le postulat que nous évoquons plus haut ne saurait gagner le statut de réalité observable.

## RÉFÉRENCES

- Bolea, P. (2003). *El proceso de algebrización de organizaciones matemáticas escolares*. Monografía del Seminario Matemático García de Galdeano, 29. Departamento de Matemáticas. Universidad de Zaragoza. <http://www.atd-tad.org/documentos/bolea-p-2003-el-proceso-de-algebrizacion-de-organizaciones-matematicas-escolares/>
- Artaud, M. (2011). Les moments de l'étude : un point d'arrêt de la diffusion ? Dans Bosch, M., Gascón, J., Ruiz Olarria, A., Artaud, M., Bronner, A., Chevallard, Y., Cirade, G., Ladage, C. & Larguier, M. (Eds.), *Un panorama de la TAD* (pp. 141-162). CRM Documents, vol. 10. Bellaterra (Barcelona): Centre de Recerca Matemàtica.
- Bolea, P., Bosch, M., Gascón, J. (2001), La transposición didáctica de organizaciones matemáticas en proceso de algebrización. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 21(3), pp. 247-304.
- Bourdieu, P. (1995). Sur les rapports entre la sociologie et l'histoire en Allemagne et en France. In: *Actes de la recherche en sciences sociales*. Vol. 106-107, mars 1995. Histoire sociale des sciences sociales. pp. 108-122. [http://www.persee.fr/web/revues/home/prescript/article/arss\\_0335-5322\\_1995\\_num\\_106\\_1\\_3141](http://www.persee.fr/web/revues/home/prescript/article/arss_0335-5322_1995_num_106_1_3141)
- Brousseau G. (1998) "La théorie des situations didactiques". Recueil de textes de Didactique des mathématiques 1970-1990" présentés par M. Cooper et N. Balacheff, Rosamund Sutherland et Virginia Waefield. Grenoble : La pensée sauvage.
- Brousseau G. (2009). L'erreur en mathématiques du point de vue didactique. *Tangente Education* n° 7 Janvier 2009, pp. 4-7.
- Chevallard Y. (1988). *Notes sur la question de l'échec scolaire*, Publication n°13 de l'IREM d'Aix-Marseille
- Chevallard, Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en didactique des mathématiques*, 19(2), pp. 221-266. :
- Chevallard, Y. (2007). Passé et présent de la TAD. Dans L. Ruiz-Higueras, A. Estepa, & F. Javier García (Ed.), *Sociedad, Escuela y Matemáticas. Aportaciones de la Teoría Antropológica de la Didáctica*, Universidad de Jaén, 2007, pp. 705-746
- Chevallard, Y. (2012). *Des programmes, oui. Mais pour quoi faire ? Vers une réforme fondamentale de l'enseignement*. <http://educmath.ens-lyon.fr/Educmath/dossier-manifestations/conference-nationale/contributions/conference-nationale-chevallard>



- Chevallard, Y. (2012). Teaching mathematics in tomorrow's society: a case for an oncoming counterparadigm. [http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/RL\\_Chevallard.pdf](http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/RL_Chevallard.pdf)
- Chevallard, Y., Bosch, M. (2012). L'algèbre entre effacement et réaffirmation. Aspects critiques de l'offre scolaire d'algèbre. In L. Coulange, J.-P. Drouhard, J.-L. Dorier, A. Robert (coord.) Enseignement de l'algèbre élémentaire. Bilan et perspectives. Recherches en Didactique des Mathématiques, special issue (pp. 19-39).
- Chevallard, Y. et Ladage, C. (2011). Clinique et ingénierie de l'enquête codisciplinaire. Un atelier « Enquêtes sur Internet » au collège. En M. Bosch, J. Gascón, A. Ruiz Olarría, M. Artaud, A. Bronner, Y. Chevallard, G. Cirade, C. Ladage y M. Larguier (Eds.), *Un panorama de la TAD* (pp. 807-830). CRM Documents, vol. 10. Bellaterra (Barcelona): Centre de Recerca Matemàtica.
- Chevallard, Y. et Wozniak, F. (2013). Le calcul proportionnel et le symbole : enquête sur une oeuvre mathématique méconnue. Dans Bronner A. et al. (Éds.), *Questions vives en didactique des mathématiques : problèmes de la profession d'enseignant, rôle du langage*, (pp. 421-446). Éditions La Pensée Sauvage, version électronique.
- Matheron, Y. et Noirfalise R. (2010). Une recherche de la Commission inter-IREM (CII) didactique soutenue par l'INRP : « Dynamiser l'étude des mathématiques dans l'enseignement secondaire (collège et lycée) par la mise en place d'AER et de PER ». Dans Bronner, A., Larguier, M., Artaud, M., Bosch, M., Chevallard, Y., Cirade, G. & Ladage, C. (Éds), *Diffuser les mathématiques (et les autres savoirs) comme outils de connaissance et d'action* (pp. 633-654).
- Ruiz-Munzón, N. (2010). La introducción del álgebra elemental y su desarrollo hacia la modelización funcional (Tesis doctoral). Universitat Autònoma de Barcelona.
- Ruiz-Munzón, N., Bosch, M., Gascón, J. (2011). Un modelo epistemológico de referencia del algebra como instrumento de modelización. En M. Bosch, J. Gascón, A. Ruiz Olarría, M. Artaud, A. Bronner, Y. Chevallard, G. Cirade, C. Ladage y M. Larguier (Eds.), *Un panorama de la TAD* (pp. 743-765). CRM Documents, vol. 10. Bellaterra (Barcelona): Centre de Recerca Matemàtica.
- Schneider, M. (2012). Quelle fonctionnalité pour l'algèbre au niveau de l'enseignement secondaire ? La piste de la modélisation fonctionnelle. Dans Conférence nationale sur l'enseignement des mathématiques à l'école primaire et au collège. <http://educmath.ens-lyon.fr/Educmath/dossier-manifestations/conference-nationale/contributions/conference-nationale--schneider>
- Sierra, T. Á. (2006). Lo matemático en el diseño y análisis de organizaciones didácticas. Los sistemas de numeración y la medida de magnitudes. Tesis doctoral. Universidad Complutense de Madrid.
- Sierra, T.Á. y Nicolás, P. (en prensa). Metodología de los REI-FP en el caso de los Sistemas de Numeración para futuros maestros de primaria y profesores de secundaria, IV Congreso Internacional sobre la Teoría Antropológica de lo Didáctico, Toulouse (Francia), 21-26 abril 2013.

## ANNEXE 1

## ANNEXE 2

## LE DEROULEMENT DU PER

Le PER que nous décrivons dans les lignes qui suivent a été mis en place dans une institution publique d'enseignement, auprès d'élèves de 2° ESO (Educación Secundaria Obligatoria, éducation secondaire obligatoire du système scolaire espagnol), âgés de 14 à 15 ans. Pour plus de détails sur cette expérience, on peut se reporter au volume 2 de la thèse de Noemí Ruiz-Munzón (Anexo B4, pp. CIX-CXXVIII).

Il s'agit de l'un des trois parcours d'étude et de recherche réalisés dans cette institution par le même enseignant. Noemí Ruiz-Munzón n'a cependant pu assister (en tant qu'observatrice) aux séances que pour l'une des classes.

### 1. *Le Déroulement du PER*

#### *1<sup>re</sup> séance [feuille n° 1]*

Le professeur fait de la magie : il propose deux ou trois jeux et, à chaque fois, devine les nombres pensés à partir des nombres calculés par les élèves.

Les élèves doivent expliquer comment le professeur trouve les différents résultats.

Le professeur distribue la **feuille 1** aux élèves et leur demande de tester chacun des « trucs » avec différents nombres. Commence alors un travail d'écriture des opérations réalisées.

Au bout d'un moment, le professeur donne l'indication suivante :

Écrivez les opérations « pas à pas », en utilisant le signe « = » de façon légitime dans les calculs successifs.

Le professeur suggère ensuite :

Si vous écrivez les calculs (mais ne les effectuez pas...) en « une seule ligne », cela vous aidera à expliquer le « truc ».

Au cours de cette session, les élèves ont constaté que les trucs sont valables et en sont venus à savoir pourquoi le « truc » n°3 fonctionne bien.

Le professeur donne comme travail personnel à réaliser à la maison de chercher d'autres « trucs ».

#### *2<sup>e</sup> séance*

En salle informatique, avec le logiciel de calcul formel *Wiris* (les séances en salle informatique se font en demi-groupe), les élèves font un travail relatif à l'écriture en « une seule ligne » :

La nécessité d'utiliser les parenthèses pour tenir compte de la hiérarchie des opérations émerge progressivement.

En effet, les élèves éprouvent le besoin d'utiliser des parenthèses : sans les utiliser, on ne peut pas rendre compte de l'efficacité des « trucs »

Le professeur donne comme travail personnel d'écrire en ligne les « trucs ».

#### *3<sup>e</sup> séance [feuilles n° 1 et 2]*

Travail de **simplification** des programmes de calcul

Une discussion s'engage sur les parenthèses.

Nécessité de ne pas « opérer » avec le nombre pensé pour deviner le truc : on commence par encadrer le nombre, puis on efface le nombre pour laisser un symbole carré vide en lieu et place d'un nombre particulier.

Les élèves ont conclu qu'effacer le numéro pensé peut être utile pour justifier l'efficacité d'un « truc » donné pour n'importe quel nombre. Les élèves, avec l'accord du professeur, introduisent un symbole tenant lieu de « variable » (à ce stade, la notion de variable est encore en émergence).

Le professeur donne comme travail personnel les exercices n°4 de la feuille 1 et n°2 de la feuille 2.

*4<sup>e</sup> séance [feuilles n° 1 et 2]*

Un travail exhaustif est mené autour de deux exercices ; on observe certaines difficultés en lien avec la distributivité, le maniement du symbole carré (qui représente un nombre quelconque) et, surtout, avec les nombres négatifs.

Le travail personnel donné par le professeur porte sur deux exercices.

(La séance a été difficile. Le professeur inventera d'autres jeux avec des nombres plus simples pour faciliter la réalisation de la séance avec les autres groupes.)

*5<sup>e</sup> séance (avec le logiciel Wiris) [feuille n° 3].*

Les élèves commencent à travailler des exercices « à la main » en utilisant différentes techniques et avec des nombres particuliers. Une mise en commun leur permet de vérifier qu'ils ont choisi des nombres différents et que le tour réussit pour chacun de ces nombres.

Comment est-ce possible ? Pour le comprendre, les élèves utiliseront Wiris. Le logiciel impose la nécessité de remplacer le symbole (Wiris ne connaît pas le symbole carré utilisé par les élèves) par une lettre. Chaque élève choisit la sienne.

Les élèves utilisent généralement correctement les parenthèses, mais ils en mettent plus que nécessaire. La classe va alors mener un travail sur ce point (mettre suffisamment de parenthèses, mais pas trop).

Nécessité de changer le symbole par une lettre (choisie par les élèves).

- Travail de simplification.
- Discussion sur la **preuve** : il n'est pas suffisant de traiter quelques cas ; comment être certain d'avoir considéré tous les cas ; etc.

*6<sup>e</sup> séance (sans le logiciel) [feuille n° 3]*

On continue en travaillant les exercices :

Il y a des étudiants qui utilisent des nombres concrets, la plupart utilisent un carré ou une lettre.

On travaille sur la distributivité des opérations, l'écriture en ligne (certains élèves ne se sentent pas en sécurité et continuent d'écrire « étape par étape »).

Il est question de savoir si  $3 \cdot x$  est égal à  $x \cdot 3$ .

Pour la prochaine séance, les élèves doivent inventer des tours de magie.

*7<sup>e</sup>, 8<sup>e</sup>, et 9<sup>e</sup> séances*

Le professeur propose une sorte de jeu : il répartit les élèves en six groupes et chaque groupe choisit deux jeux parmi ceux qu'ils ont préparés. Un groupe obtient un point à chaque fois qu'il parvient à expliquer le tour proposé par un autre groupe ou si aucun groupe ne parvient à expliquer son propre tour.

Certains des jeux demeurent impossibles à expliquer (ils nécessitent l'introduction de deux inconnues ; néanmoins, certains groupes, sans aide, ont utilisé un carré et une lettre comme symboles) tandis que d'autres sont expliqués sans difficulté.

Un groupe propose un jeu qu'aucun de ses membres n'est capable d'expliquer. Expliquer certains tours requiert beaucoup de calculs et les élèves se sont sentis un peu dépassés.

Tous les groupes utilisent le symbole carré pour indiquer le nombre prévu.

On travaille sur la distributivité des opérations, les calculs légitimes avec le symbole, la simplification, etc.

La travail donné par le professeur (à faire à la maison) consiste à écrire tous les jeux de la feuille n° 3 en ligne et à dire lesquels reviennent au même et lesquels sont différents (en utilisant un carré ou une lettre). Les élèves doivent aussi écrire en ligne chaque jeu réalisé en classe et simplifier cette écriture en ligne.

*10<sup>e</sup> séance*

Correction des exercices (pas d'observateur pour cette séance).

*11<sup>e</sup> séance [feuille n° 4]*

On commence les exercices de la feuille 4 (il n'y a pas d'observateur pour cette séance).

À partir de la 12<sup>e</sup> séance, les élèves ont commencé à travailler à une nouvelle technique : la marche arrière.

Exemple :

j'ai additionné 10 au double du nombre que j'ai pensé et le résultat obtenu a été de 50. **À quel nombre avais-je pensé ?**

$$2 \cdot x + 10 = 50$$

On peut « revenir en arrière » :

La dernière chose que j'ai faite est d'ajouter 10, donc il faut soustraire 10 à 50 :

$$2 \cdot x = 40$$

Ici, la dernière chose que j'ai faite est de multiplier par 2 le nombre prévu, il faut donc diviser 40 par 2 :  $x = 20$ .

*12<sup>e</sup> séance [feuille n° 5]*

Un travail important est fait pour appliquer correctement les règles pour « revenir en arrière ». Il tourne autour de la simplification, la hiérarchie des opérations, la commutativité, etc., ce qui n'est pas évident pour les élèves quand ils commencent à effectuer les opérations inverses (technique qu'ils appellent spontanément « revenir en arrière »).

Enfin, les élèves arrivent à l'expression simplifiée  $ax + b = c$  et ils peuvent alors facilement « revenir en arrière ».

*13<sup>e</sup> et 14<sup>e</sup> séances*

Résolution d'équations dans le cas général :  $ax + b = cx + d$  (il n'y a pas d'observateur pour cette séance).

## ANNEXE 3

## DEROULEMENT DU PER-FP

Nous présentons ici, brièvement, une partie du PER-FP expérimenté dans le cadre du Master de formation des professeurs de mathématiques du secondaire de l'Université Complutense de Madrid pendant l'année scolaire 2012-13, dans une discipline intitulée « Apprentissage et enseignement des mathématiques » de 10 crédits ECTS (66 séances de 90 minutes en tout). Pour la première fois, on abordait la question du « Passage de l'arithmétique à l'algèbre » avec un groupe de 19 étudiants organisés en 5 groupes de travail d'entre 3 et 5 personnes pendant 15 séances de 90 minutes (4 séances par semaine).

## Séance 1

Le formateur a posé ce qui peut être considéré comme la question génératrice du PER-FP :

*Q* : *Comment réaliser le passage de l'arithmétique à l'algèbre au collège ?*

Cette question est abordée par l'intermédiaire de l'énoncé :

Un groupe de 18 amis mangent ensemble et au moment de payer l'addition certains d'entre eux n'ont pas d'argent. Le reste paye 13 € de plus de ce qu'ils devaient. Si le total de l'addition était 1170 €, combien d'amis n'avaient pas d'argent ?

Les élèves professeurs commencent par utiliser une technique de résolution algébrique.

Le formateur demande alors une résolution « sans les x ».

Cette tâche permet au formateur d'introduire un critère pour définir un problème arithmétique.

À la fin de la séance, le formateur distribue les feuilles des « jeux de mathémagie » en proposant à la promotion de résoudre des questions du type : « Comment expliquer le truc du magicien ? Comment construire de nouveaux jeux ? »

## Séances 2 et 3

On propose à chaque groupe d'étudiants de « vivre en position d'élève » le PER sur les jeux de mathémagie. Le formateur explique que le PER a été expérimenté avec des élèves de 2<sup>o</sup> ESO pour commencer l'étude de l'algèbre.

Les élèves professeurs commencent par la résolution des problèmes de mathémagie en groupe. La résolution est généralement de type algébrique.

Le formateur doit rappeler que la résolution doit être de type arithmétique puisque les élèves ne disposent pas de l'outil algébrique. Il présente le logiciel *Wiris* (<http://www.wiris.net/demo/wiris/fr/index.html>) qui a été utilisé dans le PER.

À la fin de la séance, les étudiants ont fini par s'impatienter et se demander où cela conduisait.

## Séance 4

Les étudiants reprennent les énoncés en cherchant l'objectif des jeux de mathémagie pour les élèves de 2<sup>e</sup> ESO.

À la demande des étudiants, le formateur reprend la distinction arithmétique-algébrique, en posant le problème :

*Nous avons trois nombres dont la somme est 164. Le deuxième est 14 unités plus grand que le premier et le troisième est la somme des deux premiers. Quels sont ces trois nombres ?*

Un travail est réalisé sur les différentes techniques de résolution de ce problème. Le formateur demande ce que signifie « utiliser l'algèbre comme instrument de modélisation ». Il montre ensuite un diaporama sur l'algèbre comme instrument de modélisation.

## Séance 5

Les jeux de mathémagie sont repris maintenant à partir de la question :

*Quels types de tâches apparaissent et quelles techniques emploie-t-on pour les résoudre ? Quand surgit le besoin d'utiliser des parenthèses et de convenir d'une hiérarchie pour les opérations ?*

La classe discute la possibilité de faire une classification du type de jeux. Le formateur présente une classification à la fin de la séance.

## Séance 6

Cette séance est consacrée à finir l'analyse et à trouver la différence entre les deux types de techniques : les techniques arithmétiques et algébriques.

## Séances 7 à 10

Analyse de manuels de 1<sup>o</sup> ESO et 2<sup>o</sup> ESO (prévu en travail hors classe).

Cette analyse s'appuie aussi sur une présentation du modèle épistémologique de référence (MER) de l'algèbre. Cette présentation est faite par le formateur. Pendant la présentation du MER, le formateur propose différentes tâches afin de faire émerger les techniques qui apparaissent dans les différentes étapes du processus d'algébrisation. L'objectif du travail est de faire voir aux étudiants que l'algèbre élémentaire ne se réduit pas à la résolution d'équations mais peut se concevoir comme un outil de modélisation.

Séance 11

Cette séance a été consacrée à étudier la question suivante : Dans le processus d'étude vécu en position d'élèves, comment se réalise le passage de l'arithmétique à l'algèbre ?

Les élèves-professeurs commencent à rédiger un rapport sur ce qu'ils ont vécu. Le formateur leur a distribué un document pour les aider.

Séance 12

La rédaction du rapport fait émerger de nouvelles questions :

*Comment peut-on modifier les énoncés de problèmes résolubles arithmétiquement pour qu'ils soient résolubles seulement moyennant l'usage de l'algèbre*

*Comment peut-on modifier l'énoncé de l'un de problèmes abordé dans les étapes d'algébrisation pour qu'il puisse se résoudre aussi par l'arithmétique ?*

Séances 13 à 15

Rédaction du rapport

Travail sur les questions issues de la séance 12. Analyse des organisations mathématiques dans les manuels scolaires.

Le formateur fournit un document qui donne des questions pour aider à la rédaction.