



HAL
open science

L'explication de la construction de l'astrolabe par Ptolémée (II e siècle) et par al-Farghānī (IX e siècle) : un essai de comparaison

Philippe Abgrall

► To cite this version:

Philippe Abgrall. L'explication de la construction de l'astrolabe par Ptolémée (II e siècle) et par al-Farghānī (IX e siècle) : un essai de comparaison. 2022. hal-03576540

HAL Id: hal-03576540

<https://hal.science/hal-03576540>

Preprint submitted on 16 Feb 2022

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

L'explication de la construction de l'astrolabe par Ptolémée (II^e siècle) et par al-Farghānī (IX^e siècle) : un essai de comparaison

Ph. Abgrall

Centre Gilles Gaston Granger (UMR 7304 – CNRS / AMU)
Marseille - Aix en Provence

Parmi les études sur l'astrolabe que l'on rencontre dans les travaux anciens, il faut distinguer ceux qui décrivent l'instrument avec plus ou moins de détails, ceux qui en expliquent l'usage et ceux qui traitent de sa construction (ou de son art).

C'est à cette dernière classe d'études que nous allons nous intéresser, en nous attachant à deux traités bien connus mais encore trop peu exploités. Le premier est le traité sur *Le Planisphère* de Ptolémée¹ et le second est le traité sur l'astrolabe connu sous le titre *al-Kāmil* écrit par al-Farghānī².

Nous avons travaillé sur des textes déjà édités, traduits en anglais, mais trop peu exploités depuis la parution de ces éditions à partir desquelles nous avons effectué notre propre traduction en français. Si le texte d'al-Farghānī s'est présenté en bon état par les manuscrits, celui de Ptolémée, perdu en grec, a été retrouvé dans une traduction arabe datant du Xe siècle ayant probablement subi des altérations. Nous reviendrons sur ce dernier point.

Pourquoi comparer ces deux traités, distants de sept siècles, qui ne présentent de point commun que par leur sujet et encore ?³

Avant tout parce qu'il nous apparaît que les deux auteurs sont partis de la même idée : expliquer comment l'instrument constitué comme l'astrolabe a pu être construit. L'un comme l'autre ont eu connaissance de cet instrument qui représente la surface de la sphère céleste dans un plan, déjà fait, et ont cherché l'explication géométrique de cette construction. L'un comme l'autre ont compris l'importance des cercles définis à partir de l'équateur pour cette construction, les parallèles et les méridiens, et l'un comme l'autre se sont attachés à expliquer la division de l'écliptique dans cette aplanissement de la sphère, en vue, notamment, de placer les étoiles fixes sur l'araignée.

Concernant leurs sources explicites, les deux auteurs se sont appuyés sur l'*Almageste*, l'ouvrage qui fait autorité en matière d'astronomie mathématique, qui a imposé le style des calculs et permis l'usage des cordes.⁴

Pour Ptolémée, cela indique simplement qu'il a rédigé *Le Planisphère* après l'*Almageste* et il consacre une grande partie de celui-là à retrouver, grâce à l'astrolabe, les valeurs des ascensions des signes qu'il avait établi dans celui-ci.

¹Ce texte a été édité, traduit en anglais et commenté, voir Sidoli et Berggren, 2007.

²Ce texte a été édité, traduit en anglais et commenté, voir Lorch, 2005.

³Les deux traités n'ont pas de relation historique directe, puisque P. Kunitzsch a montré que le traité du *Planisphère* a été traduit au début du X^e siècle, en tout cas après la mort d'al-Farghānī. Voir P. Kunitzsch, "Fragments of Ptolemy's *Planisphaerium* in an Early Latin Translation", *Centaurus*, 1993, 36, p. 97-99, "The Second Arabic Manuscript of Ptolemy's *Planisphaerium*", *Zeitschrift für Geschichte der Arabisch-Islamischen Wissenschaften*, 1994, 9, p. 84-86 et "The Role of Al-Andalus in the transmission of Ptolemy's *Planisphaerium* and *Almagest*", *Zeitschrift für Geschichte der Arabisch-Islamischen Wissenschaften*, 1995, 10, p. 152.

⁴Qui sont devenues les sinus chez al-Farghānī.

La situation est différente pour al-Farghānī. Il renvoie à l'*Almageste* lorsqu'il emploie le théorème dit de Ménélaüs aujourd'hui, que Ptolémée a exposé et démontré dans ce traité, notamment pour déterminer les coordonnées équatoriales d'un astre à partir de ses coordonnées écliptiques.

Partir d'un astrolabe déjà construit

Les deux savants se sont trouvés face à un instrument réalisé. Si la chose est explicite chez al-Farghānī⁵ c'est par une analyse plus approfondie qu'elle devient claire chez Ptolémée. Ce dernier considère les cercles comme déjà tracés sur le plan et analyse leur disposition pour retrouver la correspondance avec la géométrie de la sphère.

Ils cherchent tous deux à expliquer la configuration de l'astrolabe, et débutent, chacun, par des propositions géométriques sur lesquelles leur explication peut s'appuyer. Ptolémée raisonne toujours dans le plan et son explication repose sur des démonstrations de l'effet, il part du résultat, de la disposition des cercles dans le plan, et montre qu'elle ne contredit pas ce que l'on sait de la disposition des cercles sur la sphère.⁶ Alors qu'al-Farghānī, comme il l'affirme explicitement, cherche à démontrer la cause de la disposition des cercles dans le plan de l'astrolabe. C'est en puisant à la source de la théorie des coniques qu'il a pu fonder celle de l'astrolabe, ou plus exactement de la projection qui est à la base de sa conception : la projection stéréographique.⁷

Cette projection est aujourd'hui classée parmi les projections azimutales, autrement dit on projette directement la surface de la sphère sur un plan. Dans le cas de la projection stéréographique, le point de perspective est l'extrémité du diamètre de la sphère, perpendiculaire au plan de projection.

Dans le cas de l'astrolabe, la dépendance à l'égard du mouvement de la sphère céleste nécessite que le pôle soit sur l'axe de rotation, donc au pôle nord ou au pôle sud de cette sphère⁸. Dans les différentes études anciennes auxquelles nous avons eu accès, on distingue celles où la sphère est représentée sur son plan équatorial, et celles où le plan choisi est le plan tangent à la sphère au point diamétralement opposé du pôle choisi comme point de perspective (Figures 1 et 2). Mais ce fait ne change rien du point de vue mathématique.⁹

⁵On trouve dans l'introduction, à propos des anciens savants astronomes : "Nous avons vu qu'ils ont construits l'instrument qui s'appelle l'astrolabe, qui est étalé à plat, sans caractère commun avec la sphère"(ma traduction, texte arabe : Lorch, p. 22, l. 11.

⁶En fait, la version arabe du texte de Ptolémée pose problème. Si pendant les quinze premiers paragraphes, l'auteur raisonne effectivement dans le plan de l'astrolabe, ne faisant jamais intervenir de relation géométrique directe entre la sphère et ce dernier, à partir du §16 et dans le dernier quart du texte, le style change au moment où il explique comment tracer un cercle parallèle à l'écliptique sur le tympan de l'astrolabe. Il fait alors directement intervenir dans la figure du plan de l'astrolabe la coupe de la sphère dans le plan du colure des solstices, en considérant explicitement ce qu'il appelle "le pôle caché", autrement dit le pôle sud.

⁷L'ouvrage d'al-Farghānī est le premier qui contient la démonstration de la propriété fondamentale de la projection stéréographique selon laquelle tous les cercles à la surface de la sphère ne passant pas par le pôle de projection se projettent selon des cercles, et tous ceux qui passent par le pôle se projettent selon des droites. Ce fait est bien connu depuis la publication du début de son texte (voir Sergeyeva et Karpova, 1972). Mais personne n'en a fait une analyse approfondie et une comparaison avec le texte de Ptolémée, concernant les fondements de la conception de l'astrolabe. Tout cela est détaillé dans Abgrall, 2015.

⁸L'astrolabe le plus utilisé était celui que l'on obtient en prenant le pôle sud comme point de perspective car ainsi l'hémisphère septentrional est entièrement représenté sur le plan à l'intérieur du cercle représentant l'équateur.

⁹En effet, quel que soit le plan perpendiculaire à l'axe, la représentation sera la même, à une homothétie près. On trouve des traces de ce résultat chez deux auteurs. D'une part, dans son *Traité sur l'art de l'astrolabe par la démonstration* rédigé probablement dans la seconde moitié du X^e siècle, al-Qūhī démontre la propriété fondamentale de la projection stéréographique, à savoir que le projeté de tout cercle inscrit à la surface de la sphère est un cercle dans le plan, dans le cas d'un plan quelconque coupant la sphère perpendiculairement à son axe (voir Rashed, 1993 p. 193-5, repris en anglais dans Rashed, 2005, p. 882-885). Mais toute la suite de son étude fait penser qu'il considère le plan de l'astrolabe comme le plan de l'équateur rabattu dans le plan méridien (voir Abgrall, 2000, p. 31, p. 36 n. 102 et p. 37 n. 106). D'autre part dans les

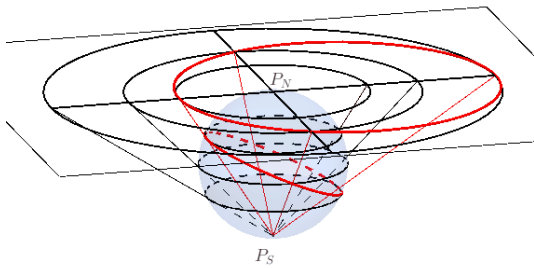


Figure 1: Projection de l'équateur, des deux tropiques et de l'écliptique sur le plan tangent à la sphère au pôle nord

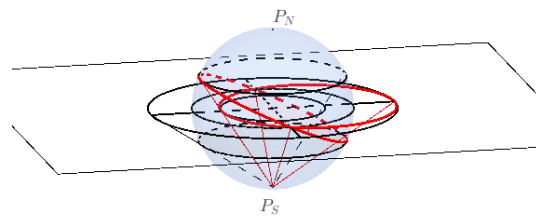


Figure 2: Projection de l'équateur, des deux tropiques et de l'écliptique sur le plan équatorial de la sphère

Chez Ptolémée, cette projection n'est pas explicitée mathématiquement et le plan dans lequel la sphère est représentée correspond au plan équatorial. Chez al-Farghānī, le plan de l'astrolabe est le plan tangent, qui lui permet de démontrer plus facilement la proposition des sections contraires du cône.

Au début de chacun de leurs traités, les deux auteurs précisent explicitement que le centre du tympan est le pôle nord. Tous les deux considèrent le bord de l'astrolabe comme point de départ pour déterminer les mesures des rayons des cercles tracés, à commencer par l'équateur. Ptolémée parle d'un cercle parallèle à l'équateur sans jamais préciser lequel, quand al-Farghānī annonce dès le début qu'il s'agit du tropique du Capricorne.

En outre, ayant posé que l'équateur est le cercle $ABCD$ du plan, Ptolémée énonce : « il est clair qu'il convient de tracer les cercles parallèles à l'équateur qui déclinent vers le nord de l'équateur, à l'intérieur du cercle $ABCD$, quant aux cercles parallèles qui déclinent vers le sud, ils doivent être tracés à l'extérieur de lui. »¹⁰ Quant à al-Farghānī il le dit autrement : « D'une manière générale je dis que si je suppose qu'un cercle sur [le pourtour] du tympan de l'un des degrés de la sphère, parallèle à l'équateur, alors tout ce qui est situé entre le pôle nord et le parallèle de ce degré sur la sphère céleste, se trouvera sur le tympan de l'astrolabe et tout ce qui est entre le cercle de ce degré et le pôle sud, ne se trouvera pas sur le tympan de l'astrolabe. »¹¹

Le rôle des cercles parallèles à l'équateur et des méridiens

Ptolémée comme al-Farghānī s'appuient sur les cercles définis par l'équateur sur la sphère, parallèles et méridiens. Ces cercles jouent effectivement un rôle fondamental dans la projection stéréographique de la sphère, puisque les parallèles à l'équateur deviennent des cercles concentriques et les méridiens, des droites passant par le centre¹².

travaux d'Ibn al-Šalāḥ, actif pendant la première moitié du XII^e siècle. Ce savant est l'auteur d'un traité sur la projection de la surface de la sphère sur lequel R. Lorch a attiré l'attention des historiens des sciences par son article paru dans l'ouvrage en hommage à P. Kunitzsch ("Ibn al-Šalāḥ's Treatise on Projection : a Preliminary Survey", in *Sic itur ad astra – Studien zur Geschichte der Mathematik und Naturwissenschaften*, M. Folkerts und R. Lorch (eds.), Wiesbaden, 2000, p. 401-408). R. Lorch signale notamment qu'au début de la deuxième partie de ce traité, Ibn al-Šalāḥ traite de l'équivalence des plans parallèles au plan tangent, en particulier le plan de l'équateur, dans l'usage de la projection (p. 404). R. Lorch donne ensuite la traduction anglaise d'un extrait de la fin de la première partie du traité en l'accompagnant d'une figure représentant, dans le plan du colure des solstices, la projection de la sphère sur le plan tangent.

¹⁰Ma traduction, texte arabe : Sidoli et Berggren, p. 55, l. 18-20.

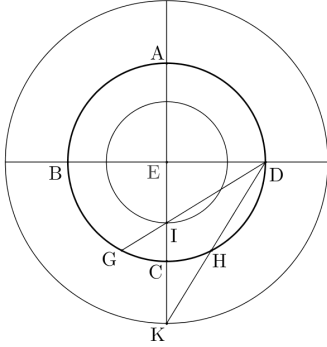
¹¹Ma traduction, texte arabe : Lorch, p. 22, l. 11.

¹²Ces familles de cercles donneront plus tard les coordonnées polaires.

Mais les deux savants les emploient différemment, en raison de leurs méthodes distinctes.

Ptolémée fonde son explication sur deux postulats et un théorème.

Le premier postulat porte sur les paires de cercles parallèles à l'équateur de déclinaison opposée, configuration que l'on retrouve tout au long de son traité.



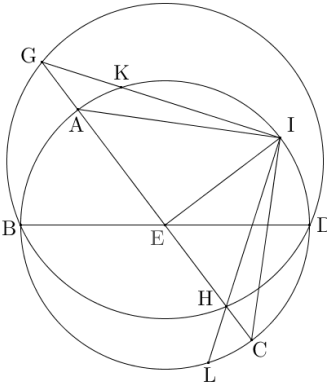
Traçant un cercle $(ABCD)$ qu'il pose comme l'équateur, cercle dont le centre est le pôle nord (E) , et deux diamètres perpendiculaires de ce cercle, AC et BD , il découpe sur ce cercle de part et d'autre de C , deux arcs égaux \widehat{CG} et \widehat{CH} , mène les droites DIG et DHK , où I et K sont les intersections des droites DG et DH avec le diamètre prolongé AC et trace les cercles de centre E , passant respectivement par I et K .

Il affirme sans démonstration que ces deux cercles sont les correspondants de deux des cercles qui sont sur la sphère solide, de part et d'autre de l'équateur et à la même distance. C'est nous qui appelons ce résultat le premier postulat, Ptolémée ne l'énonce pas comme tel.

À cela, il faut ajouter un second postulat, par lequel Ptolémée pose les méridiens comme des droites¹³, ainsi sont les deux diamètres AC et BD de l'équateur.

Ces paires de cercles et ces droites, lui servent également à caractériser les *points diamétralement opposés en puissance*. Par cette expression, il désigne les points qui correspondent à des points diamétralement opposés sur la sphère, mais qui ne le sont pas en réalité dans le plan pour le cercle tracé.¹⁴

Il démontre alors le théorème suivant.



Considérant de nouveau l'équateur $ABCD$, mais aussi l'écliptique $GBHD$ coupant l'équateur au deux points B et D diamétralement opposés¹⁵, faisant passer par E une droite quelconque $GAEHC$, à la place d'un méridien, il affirme que les points G et H sont des points diamétralement opposés en puissance du cercle $GBHD$.

Pour démontrer cela, il construit le point I , par la perpendiculaire à AC issue de E , puis mène les droites IA , IC , GKI et IHL et démontre que $\widehat{KA} = \widehat{CL}$.¹⁶

Ptolémée se ramène ainsi à la configuration précédente, le point I jouant le rôle du point D précédent et l'arc AK étant construit symétriquement à CH , et peut conclure, par son premier postulat, que les cercles de centre E passant respectivement par G et H sont des parallèles à l'équateur de déclinaison

¹³Il dit plus exactement qu'il a "utilisé des droites à la place des méridiens" (texte arabe : Sidoli et Berggren, p. 55, l. 9). Il précisera plus loin que ces droites passent par le pôle E .

¹⁴« Tous les horizons [...] divisent non seulement l'équateur en deux moitiés, mais ils divisent également en puissance l'écliptique en deux moitiés. Je veux dire qu'ils passent également par des parties qui sont, en puissance, les correspondantes de parties diamétralement opposées sur la sphère solide. » (ma traduction, texte arabe : Sidoli et Berggren, p. 57, l. 51-53.)

¹⁵Il a démontré ce résultat précédemment. Voir Abgrall, 2015, p. 143-146.

¹⁶Cela tient au fait que l'angle \widehat{GIL} étant droit, puisque par la puissance du point E par rapport au cercle $GBHD$, $GE \times EH = BE \times ED = EI^2$, ainsi que l'angle \widehat{AIC} , alors $\widehat{KIA} = \widehat{HIC}$.

opposée, donc les points de la sphère représentés par G et H sont diamétralement opposés sur elle et GEH est un diamètre **en puissance** de l'écliptique tracé sur le plan.

Ptolémée ne définit pas explicitement le plan de l'astrolabe¹⁷, il s'agit probablement du plan de l'instrument existant, et c'est l'équateur qui joue le rôle principal, comme si ce cercle était lui-même sur l'instrument, d'où l'idée que tout se situe dans son plan.

Contrairement à lui, al-Farghānī définit explicitement et précisément le plan de l'astrolabe comme un cercle dont le centre est le pôle nord.¹⁸ Il démontre que les méridiens y prennent la forme de droites passant par le centre, le pôle nord, et que les cercles parallèles à l'équateur y prennent la forme de cercles concentriques, centrés au pôle nord.

Sa démonstration est projective, et repose sur la deuxième proposition initiale, qu'il nomme lui-même "la proposition du cône"¹⁹, et sur la définition de la surface conique, comme nous l'avons déjà expliqué en détail.²⁰

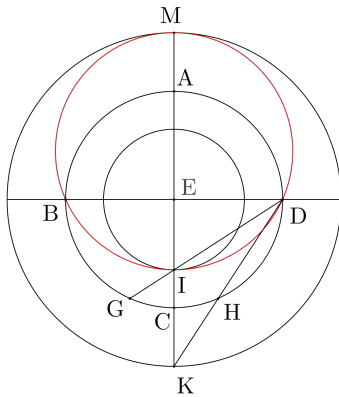
Pour lui, un cercle parallèle à l'équateur sur la sphère, représente la course d'un point de la sphère animée par son mouvement d'est en ouest.²¹

Les deux auteurs calculent les rayons de ces cercles parallèles pour déterminer les rayons et la position du centre des autres cercles de l'astrolabe. Ptolémée le fait pour les tropiques, afin de tracer l'écliptique, et pour les cercles parallèles de déclinaison 54° et -54° , pour tracer l'horizon de Rhodes ($\varphi = 36$). Al-Farghānī est plus systématique, il construit une table des rayons pour tous les cercles parallèles, espacés de degré en degré par rapport à l'équateur.

Le tracé de l'écliptique, son centre, son rayon

Au moment de le tracer effectivement sur l'astrolabe, les deux auteurs déterminent le rayon de l'écliptique et la position de son centre, à partir des cercles parallèles à l'équateur auxquels il est tangent, autrement dit les deux tropiques. Mais avant cela, chacun donne sa méthode et la justification de celle-ci.

Ptolémée le fait dans la première proposition évoquée précédemment à propos du premier postulat.



Après avoir énoncé ce postulat, et tracé les deux cercles parallèles à l'équateur passant respectivement par les points I et K , il trace le cercle de diamètre IM , où M est le point diamétralement opposé à K . Ce cercle a pour centre le milieu de IM et il est tangent aux deux parallèles. Ptolémée affirme alors simplement que ce cercle divise le cercle $ABCD$ en deux moitiés, à savoir qu'il passe par les points B et D .

Et c'est cette affirmation qu'il démontre en établissant que l'angle \widehat{MDI} est droit.

¹⁷À un seul endroit du texte, on trouve explicitement qu'il s'agit du plan de l'équateur, à la fin de son texte, §19.

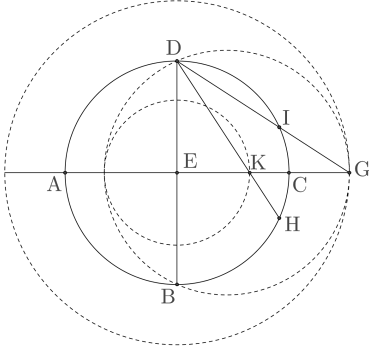
¹⁸Il se place dans un méridien $ABCD$ de centre E , le centre de la sphère, pose B comme le pôle sud et D comme le pôle nord, imagine un plan tangent au cercle méridien en D (il est sous-entendu que ce plan est en fait tangent à la sphère, selon la deuxième des propositions initiales), et mène dans ce plan la droite GDH . Il appelle plan de l'astrolabe, le cercle tracé à partir du centre D et à la distance DH , perpendiculairement au plan du méridien. Il ne précise pas ce qu'est cette distance à ce moment-là du texte, mais on comprend ensuite qu'il s'agit du rayon du cercle qui borde l'instrument.

¹⁹Voir texte arabe, Lorch, 2005, p. 36, l. 62. Cette proposition est la deuxième du premier chapitre, qui est l'équivalente de la proposition des sections contraires que l'on trouve dans les *Coniques* d'Apollonius. Voir Abgrall, 2015, p. 156-157, notamment les notes 56 et 60 p. 157.

²⁰Voir Abgrall, 2015, p. 153-155

²¹Il rappelle en introduction les deux mouvements premiers (texte arabe, Lorch, 2005, p. 22, l. 7-8).

Il détermine ensuite le rayon de l'écliptique dans le plan de l'astrolabe.



Puisque $\widehat{CJ} = \widehat{CH}$ alors $\widehat{BI} + \widehat{BH} = 180^\circ$

donc $\widehat{BDI} = 90^\circ - \widehat{BDH}$

ce qui implique la similitude des triangles DEK et DGE et

la proportion $\frac{EG}{ED} = \frac{ED}{EK}$

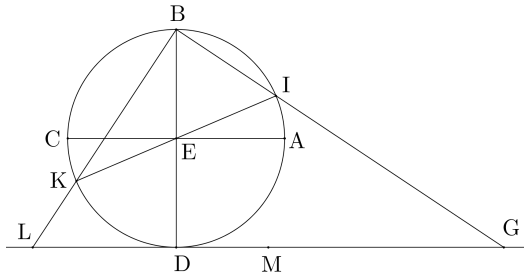
mais $\frac{EG}{ED} = \frac{\widehat{EDG}}{\widehat{EGD}} = \frac{BI}{BH}$

Connaissant les arcs $\widehat{BI} = 90^\circ + \varepsilon$ et $\widehat{BH} = 90^\circ - \varepsilon$, il en déduit les cordes BI et BH d'où le rapport, qui l'amène, connaissant $ED = 60^p$ à EG d'une part, et à EK d'autre part.

Et le diamètre de l'écliptique n'est autre que $EG + EK$.

Par sa méthode projective, al-Farghānī considère la surface conique qui entoure le cône dont la base est le cercle de l'écliptique sur la sphère et le sommet, le pôle sud. Il **applique** la proposition du cône au cas de l'instrument pour expliquer comment ce cercle prend forme sur le plan de l'astrolabe. J'insiste sur le verbe **appliquer**, le problème est d'appliquer au cas de l'instrument la situation du cône pour les cercles bien définis que l'on veut tracer et d'en donner les propriétés géométriques par rapport aux caractéristiques de l'astrolabe (plan et limité par un cercle).

Pour cela, il fait explicitement intervenir la définition de la surface conique, sous une forme identique à celle que l'on trouve au tout début des *Coniques* d'Apollonius.



Al-Farghānī pose $\widehat{AI} = \varepsilon$. Cela fait que I est la position du début du Capricorne. Il mène ensuite le diamètre IEK , la droite BK jusqu'au plan qu'elle coupe en L et affirme que GL est le diamètre de l'écliptique (sur le tympan) et que le milieu M de GL est son centre.

Sa démonstration repose de nouveau sur la définition de la surface conique, à partir du cône (de sommet B , mais il ne le précise pas) de base le cercle de la sphère de diamètre IK .

il ne fait jamais référence explicite aux propositions du ch. 1, mais les utilise.

Il prolonge la surface conique pour affirmer que son intersection avec le plan tangent à la sphère est le cercle de diamètre GL (en ajoutant : et de centre M , ce qui n'est pas vraiment nécessaire), ce qu'il justifie en fixant le point B et en faisant tourner BG autour de l'écliptique sur la sphère jusqu'à ce qu'elle revienne à sa position.

Il précise que les points I et K de la sphère se situeront aux points G et L du tympan, et ajoute que puisque l'écliptique dans la sphère n'est pas parallèle au cercle du tympan, le centre de l'écliptique ne sera pas au centre du tympan (référence implicite à la prop. 3 du ch. 1).

Connaissant l'arc \widehat{DI} , il connaît l'arc \widehat{BI} et en déduit KI

Il faut déterminer BK (le sinus verse)

et il vient alors DG en fonction de DB , posé d'abord 120^p (référence à l'*Almageste*), par une proportion

Puis al-Farghānī ramène tout cela à $DG = 30^p$

En utilisant la table, le calcul du diamètre (et de ce fait la position du centre) d'un cercle de l'astrolabe devient très simple.

Si IK est le diamètre de l'écliptique (ou de tout autre grand cercle), alors il suffit d'ajouter le rayon DL de la course du point K au rayon DG de la course du point I pour obtenir la valeur du diamètre LG .

la division de l'écliptique

Ptolémée emploie les cercles parallèles à l'équateur qui passent par les débuts des signes, il doit donc déterminer la déclinaison de ces cercles et calculer leurs rayons. La division se fait par le tracé sur le plan de l'astrolabe.

Al-Farghānī, quant à lui, emploie les ascensions droites des degrés de l'écliptique.

Il ne donne aucun détail du calcul de ses ascensions droites, renvoyant simplement à un «*comme nous l'avons toujours fait*». Veut-il dire «*comme l'a fait Ptolémée*»? Toujours est-il que la table (2) qu'il établie au ch.4 présente les ascensions droites des degrés de l'écliptique de 0° à 90° , de degré en degré²².

Il suffit ensuite de traduire ces valeurs des ascensions droites par des points placés sur le limbe (pourtour du tropique du Capricorne) et de tracer les droites joignant le centre du tympan à ces points (les méridiens), qui couperont l'écliptique en des points représentant les degrés de ce cercle.

Comment placer un astre sur l'astrolabe

Si Ptolémée évoque ce problème, en disant qu'il faut se référer à l'équateur pour pouvoir placer un astre sur l'araignée (autrement dit déterminer les coordonnées équatoriales), il n'y a pas de description de sa méthode dans le texte qui nous est parvenu en arabe. On peut juste lire au dernier paragraphe (§20) de son traité : «*il est nécessaire que nous puissions, dans les positions que l'on a trouvées par rapport à l'équateur, placer les astres sans tracer tous les cercles, mais seulement à l'aide d'une règle divisée selon les rapports des cercles parallèles à l'équateur et par une division de l'équateur lui-même. Quant aux positions que l'on a trouvées par rapport à l'écliptique, cela n'est pas possible étant donné qu'il est nécessaire de tracer tous les cercles, ou le plus grand nombre, pour déduire par là les positions des astres qui doivent y être placés.*»²³

Al-Farghānī en arrive à un sujet central de son livre en décrivant la manière de placer un astre dans le plan de l'astrolabe. Il affirme que l'on a besoin, pour cela, de connaître deux paramètres :

1. «*la distance de l'astre au cercle de l'équateur, sur le grand cercle passant par l'astre et par les deux pôles de l'équateur*», autrement dit la *déclinaison* δ_A de l'astre ;
2. «*le degré de l'écliptique qui passe avec l'astre au milieu du ciel*», autrement dit le degré de passage P qui est le point de l'écliptique dont l'ascension droite est celle de l'astre, $\alpha_P = \alpha_A$ ²⁴.

Il ajoute qu'il est possible de tracer les cercles qui se coupent aux deux pôles de l'écliptique et qui donnent les points de même longitude écliptique (sous-entendu de placer l'astre sur l'un de ces cercles en connaissant sa longitude λ_A), mais selon lui, on ne peut pas utiliser la latitude écliptique β_A , car cela impose de découper les premiers cercles (ceux de longitude égale) ce qui est très difficile. *Pour le moment, je ne comprends pas cet argument, car il est possible de tracer les cercles parallèles à l'écliptique, comme il le fera pour tout horizon, et ces cercles sont d'égale latitude, ou alors je n'ai pas compris la latitude.*

²²Dans l'*Almageste*, Ptolémée les donne de 10° en 10° (livre I ch. 13, p. 62-63 de la traduction de Halma).

²³Ma traduction, texte arabe : Sidoli et Berggren, p. 81, l. 516-520.

²⁴Que veut-il dire par «déterminer le degré de passage»? Cela revient à calculer son ascension droite. Mais ensuite, il utilise le degré de passage directement sur le plan de l'astrolabe, puisque l'écliptique est déjà divisée en degrés (ch3§3).

Mais pour lui, les deux premiers paramètres (la déclinaison δ_A de l'astre et le degré de passage P) sont nécessaires : « C'est en déterminant la distance d'un astre à l'équateur et son degré de passage sur l'écliptique que nous connaissons véritablement la position de l'astre sur l'astrolabe. »

Al-Farghānī commence par considérer deux situations particulières, celles où le degré de l'astre est confondu avec son degré de passage. Cela se produit lorsque :

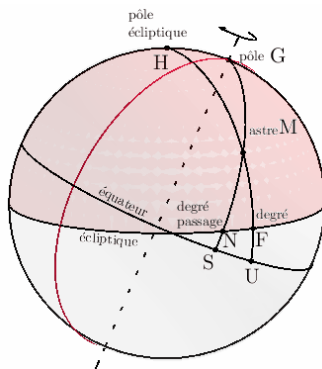
1. l'astre est dans la région de (=sur) l'écliptique
2. l'astre est en dehors de l'écliptique mais sur le colure des solstices

Dans le premier cas, dit-il, la distance de l'astre à l'équateur est la déclinaison de son degré et il passe en même temps que lui au milieu du ciel ; dans le second cas, sa distance à l'équateur s'obtient en additionnant ou en soustrayant sa latitude et la déclinaison de son degré, et l'astre passe encore au milieu du ciel en même temps que son degré.

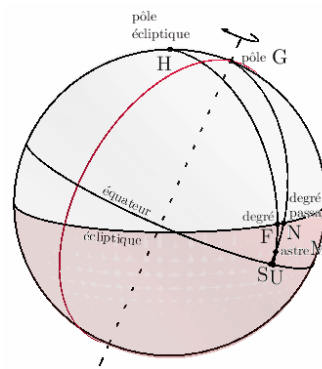
Si l'astre n'est dans aucune de ces deux situations, al-Farghānī dit qu'alors sa distance et son degré de passage varient.²⁵

Il commence par distinguer quatre cas, selon la position de l'astre sur l'un des quatre quarts de la sphère délimités par l'écliptique et par le colure des solstices, en étudiant l'ordre de passage au milieu du ciel de l'astre et de son degré, autrement dit, la position relative de son degré et de son degré de passage sur l'écliptique, par rapport au premier mouvement.

1. 2.



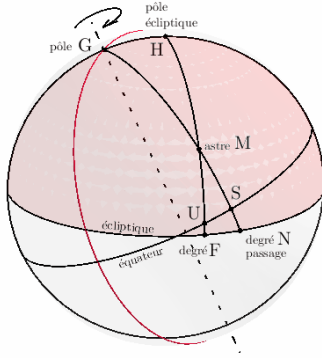
si l'astre M se trouve dans le quart de sphère intersection de l'hémisphère délimité par le colure des solstices et contenant le point vernal E (il dit « entre le début du Capricorne et le début du Cancer ») et de l'hémisphère délimité par l'écliptique et contenant le pôle nord (« sa latitude est septentrionale »), alors **il passe avant son degré P (F sur la fig.) au milieu du ciel.**



si l'astre M se trouve dans le quart de sphère intersection de l'hémisphère délimité par le colure des solstices et contenant le point vernal E et de l'hémisphère délimité par l'écliptique et contenant le pôle sud (« il est méridional »), alors **il passe après son degré P (F sur la fig.) au milieu du ciel.**

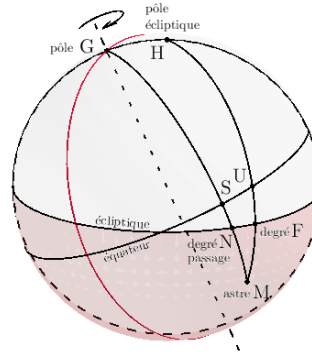
²⁵Il veut dire qu'il doit les calculer autrement, ce n'est pas aussi simple

3.



si l'astre M se trouve dans le quart de sphère intersection de l'hémisphère délimité par le colure des solstices et contenant le point équinoxial d'automne (il dit « entre le début du Cancer et le début du Capricorne ») et de l'hémisphère délimité par l'écliptique et contenant le pôle nord, alors **il passe après son degré P (F sur la fig.) au milieu du ciel.**

4.



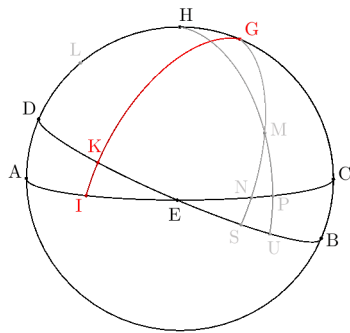
si l'astre M se trouve dans le quart de sphère intersection de l'hémisphère délimité par le colure des solstices et contenant le point équinoxial d'automne et de l'hémisphère délimité par l'écliptique et contenant le pôle sud, alors **il passe avant son degré P (F sur la fig.) au milieu du ciel.**

Il en vient ensuite à « démontrer la cause » de ce qu'il vient d'affirmer, et se réfère explicitement à la méthode de Ptolémée décrite dans l'*Almageste* pour déterminer les deux éléments nécessaires : la distance d'un astre à l'équateur et son degré de passage.

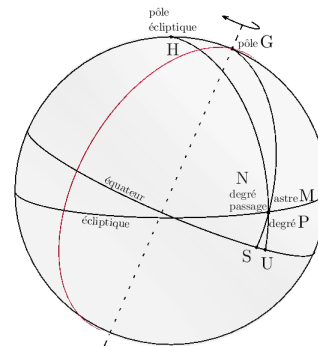
Il commence par construire la figure de la sphère (solide) entourée par le colure des solstices $ABCD$, en plaçant l'équateur DEB et son pôle nord G , et l'écliptique AEC et son pôle septentrional H .

Il précise que le point A représente le début du Capricorne et le point C , celui du Cancer.

Premier cas



la figure d'al-Farghānī



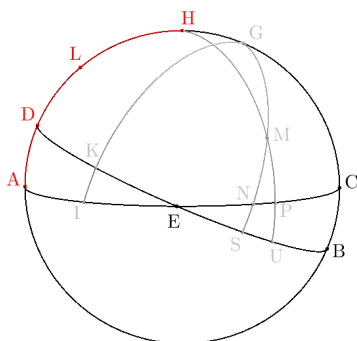
la figure issue du cas général

Si l'astre est en I sur l'écliptique (en M sur la figure de droite), il trace l'arc \widehat{IK} de méridien (grand cercle passant par G) alors cet arc est la déclinaison de son degré,²⁶ c'est donc également sa distance à

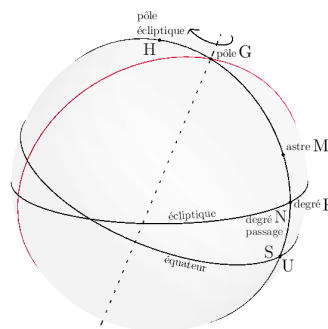
²⁶Al-Farghānī emploie le mot *déclinaison* (ou *inclinaison*, ميل) en arabe, quand il parle d'un degré de l'écliptique, sinon

l'équateur.²⁷ Al-Farghānī ajoute que l'astre passe au milieu du ciel en même temps que le point I .²⁸

Deuxième cas



la figure d'al-Farghānī



la figure issue du cas général

Si l'astre ne se trouve pas sur l'écliptique, mais qu'il est en L « sur le méridien »,²⁹ alors sa distance à l'équateur est l'arc \widehat{LD} . Ici, lorsqu'il est vers le nord, cet arc est la différence entre la latitude de l'astre, \widehat{AL} , et la déclinaison du point solsticial d'hiver A , \widehat{AD} . Al-Farghānī ajoute que si l'astre est vers le sud, par rapport à l'écliptique, alors sa distance à l'équateur est la somme de la déclinaison du Capricorne et de sa latitude.³⁰ De plus, où qu'il soit sur le cercle $ABCD$, l'astre passe au milieu du ciel en même temps que son degré.³¹

Il affirme, encore une fois sans justification, qu'alors sa distance à l'équateur s'obtient en additionnant sa latitude (écliptique) et la déclinaison de son degré si « elles sont toutes deux du même côté », ou en les soustrayant dans le cas contraire. De plus, il passe au milieu du ciel en même temps que son degré, puisque nous avons dit que son degré et son degré de passage sont confondus.

Cas général

Cette fois l'astre n'est ni sur l'écliptique, ni sur le colure des solstices.

pour l'astre il parle toujours de *distance à l'équateur*.

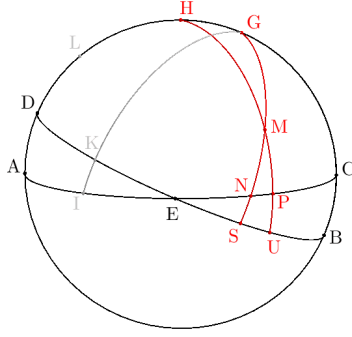
²⁷Puisque les deux points sont confondus, $M = N$.

²⁸En effet, dans ce cas l'astre est confondu avec son degré de passage, $M = P$.

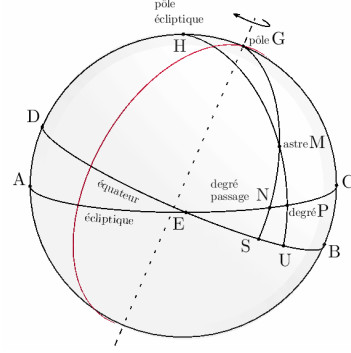
²⁹Il s'agit ici du méridien qui passe par les pôles des deux cercles, autrement dit *le colure des solstices*.

³⁰L'auteur est ici incomplet, il veut juste signaler que plusieurs situations se présentent en fonction de la position relative de l'astre M , sur le colure des solstices, par rapport à l'écliptique, et qu'il faudra parfois soustraire, parfois additionner. Dans tous les cas, le degré de l'astre P est soit en A , soit en C , l'un des deux points solsticiaux. Mais il faut distinguer quatre cas lorsque l'astre est septentrional. Si M est sur l'arc \widehat{AD} , $\delta = \varepsilon - \beta$, si M est sur l'arc \widehat{DH} , $\delta = \beta - \varepsilon$, si M est sur l'arc \widehat{HG} , $\delta = 180^\circ - (\beta + \varepsilon)$ et si M est sur l'arc \widehat{GC} , $\delta = \varepsilon + \beta$. Symétriquement, nous trouverons les mêmes cas lorsque l'astre est méridional.

³¹En effet, si l'astre M est sur le colure des solstices, les cercles qui passent par M et respectivement par H et par G sont confondus, ainsi son degré P et son degré de passage N sont confondus.



la figure d'al-Farghānī



la figure issue du cas général

Il pose l'astre en M , n'importe où, et construit son degré P (« la position de l'astre sur l'écliptique ») à partir de l'arc de grand cercle \widehat{HU} ,³² et son degré de passage N (« le degré du cercle de l'écliptique qui atteint avec lui le méridien »), par l'arc de grand cercle \widehat{GS} .

La latitude de l'astre est $\beta = \widehat{MP}$ (« sa distance à la bande de l'écliptique »), sa déclinaison est $\delta = \widehat{MS}$ (« sa distance au cercle de l'équateur »). Al-Farghānī note à cet endroit que $\widehat{MS} < \widehat{MU}$ parce que $\widehat{MSU} = 90^\circ$ et que $\widehat{MUS} < 90^\circ$.³³

Il applique, sous l'autorité de Ptolémée, le théorème que l'on attribue aujourd'hui à Ménélaüs, pour

affirmer $\frac{\sin \widehat{HB}}{\sin \widehat{BG}} = \frac{\sin \widehat{HU}}{\sin \widehat{UM}} \cdot \frac{\sin \widehat{MS}}{\sin \widehat{SG}}$ (dans le quadrilatère $HBSM$).

L'auteur relève les données : $\widehat{GB} = \widehat{GS} = \widehat{HP} = 90^\circ$, $\widehat{HB} = 90^\circ + \varepsilon = 113^\circ 33'$. Il ajoute que \widehat{PU} est connu par les déclinaisons, puisque \widehat{PC} sur l'écliptique est connu et que c'est le coascendant dans la sphère droite de \widehat{BU} . Ainsi, en lisant l'arc \widehat{PC} à la place des ascensions droites on trouve \widehat{BU} en face d'où \widehat{PU} par les déclinaisons.³⁴

Al-Farghānī conclut à la connaissance de $\widehat{MS} = \delta$ puisqu'à partir de \widehat{PU} et de $\widehat{MP} = \beta$, on trouve \widehat{HU} et \widehat{UM} ,³⁵ donc on connaît cinq des six arcs dans la relation des rapports de sinus.

Al-Farghānī donne un exemple pour expliciter les calculs de cette démarche.

Il considère le cas de l'étoile Capella.³⁶

L'auteur donne sa longitude sous la forme $5^\circ 20'$ des Gémeaux.³⁷ Il en déduit tout de suite que

³²Il appelle U « sa position sur l'équateur ».

³³Ce résultat est l'équivalent de la proposition des *Éléments*, 19, I (*à vérifier*), appliquée à un triangle sphérique. *Voir si c'est dans Théodose*.

³⁴En fait ici, le rôle de l'écliptique et de l'équateur est inversé. À partir de la connaissance de \widehat{PC} , qui est le coascendant de \widehat{BU} dans la sphère droite, par une lecture inverse de la table des ascensions droites, on obtient \widehat{BU} , puis \widehat{PU} qui est la déclinaison (inclinaison) de U .

³⁵ $\widehat{HU} = \widehat{HP} + \widehat{PU} = 90^\circ + \widehat{PU}$ et $\widehat{UM} = \widehat{MP} + \widehat{PU} = \beta + \widehat{UP}$.

³⁶En arabe, *العَيُوق*, c'est l'étoile la plus visible de la constellation du Cocher (α Aurigae). Lorch (table 3, p. 126-7, ligne 8), Vafea sa thèse (F. Vafea, *Les traités d'al-Şūfī sur l'astrolabe*, Thèse de doctorat, Université Paris 7 - Denis Diderot, 2006) (p. 319, 516, ligne 9 du tableau).

³⁷Il précise que cette valeur a été obtenue à partir des observations effectuée en 225 de l'ère de Yazdegerd. Cette date correspond à 856-857 de l'ère chrétienne. Sur Stellarium, en remontant à cette date, on obtient $\lambda = 65^\circ 54'$, ce qui fait $34'$ de plus, mais la mesure est très proche. On obtient également $\beta = 22^\circ 51'$ quand al-Farghānī donne dans sa table 3 (p.126) la valeur $22^\circ 50'$.

$\widehat{AP} = 155^\circ 20'$ et par lecture inverse de la table des ascensions de la sphère droite,³⁸ il obtient l'arc d'équateur coascendant $\widehat{DU} = 157^\circ 13'$.³⁹ Il en tire alors la valeur de l'arc $\widehat{EU} = 67^\circ 13'$.⁴⁰ Al-Farghānī en déduit directement la valeur de la déclinaison $\widehat{PU} = 21^\circ 37'$, en entrant dans la table dit-il.⁴¹ Il poursuit par le calcul de $\widehat{HU} = 90^\circ + PU = 111^\circ 37'$

D'autre part, il calcule $\widehat{UP} + \widehat{PM} = 21^\circ 37' + \beta = 21^\circ 37' + 22^\circ 50'$ et obtient $\widehat{UM} = 44^\circ 27'$.

Il va ensuite déterminer $\text{Sin } \widehat{MS}$, qui lui donnera \widehat{MS} cherché, par lecture inverse de la table des cordes ou une autre table de sinus.

En partant de la relation obtenue plus haut (Ménélaüs), il va calculer $\frac{\text{Sin } \widehat{HB} \times \text{Sin } \widehat{UM}}{\text{Sin } \widehat{HU}}$ qui sera égal à

$\text{Sin } \widehat{MS}$ puisque $\frac{\text{ce resultat}}{\text{Sin } \widehat{BG}} = \frac{\text{Sin } \widehat{MS}}{\text{Sin } \widehat{SG}}$ en concluant par le fait que $\text{Sin } \widehat{GB} = \text{Sin } \widehat{SG}$ car ces deux arcs sont des quarts de cercle. Il lui reste donc à calculer les trois sinus.

$\text{Sin } \widehat{BH} = 55^p 10''$ car $\text{Sin } \widehat{BH} = \text{Sin } \widehat{DH}$ et c'est le même calcul que pour $\text{Sin } \widehat{IB}$ du ch. 3 §1,⁴² $\text{Sin } \widehat{MU} = 42^p 1' 1''$ ⁴³ et $\text{Sin } \widehat{UH} = 55^p 46' 49''$.⁴⁴

Le calcul donne : $\frac{\text{Sin } \widehat{HB} \times \text{Sin } \widehat{UM}}{\text{Sin } \widehat{HU}} = 41^p 25' 53'' = \text{Sin } \widehat{MS}$.⁴⁵

L'auteur en déduit la valeur de l'arc $\widehat{SM} = 43^d 40'$ "à peu près". C'est la distance de Capella à l'équateur, du côté du nord.

Al-Farghānī poursuit par la détermination du degré de passage de l'étoile qu'il cherche à placer sur l'araignée.

Il emploie de nouveau une forme du théorème de Ménélaüs (pris chez Ptolémée) :

$$\frac{\text{Sin } \widehat{GH}}{\text{Sin } \widehat{HB}} = \frac{\text{Sin } \widehat{GM}}{\text{Sin } \widehat{MS}} \cdot \frac{\text{Sin } \widehat{SU}}{\text{Sin } \widehat{UB}} \text{ (toujours dans le quadrilatère } HBSM).$$

Des six arcs, seul \widehat{SU} n'est pas connu. Pour le trouver, l'auteur procède au calcul suivant :

³⁸Rappelons que les rôles des deux cercles, écliptique et équateur ont été inversés.

³⁹Al-Farghānī ne se sert visiblement pas de la table des ascensions droite qu'il a établi auparavant (table 2) dont Lorch rappelle que Charette a trouvé qu'il avait utilisé la valeur de $\varepsilon = 23^\circ 51'$ de Ptolémée, et non celle de son époque $\varepsilon = 23^\circ 33'$. Il utilise une table des ascensions qui ont pour origine le point D . Lorch signale qu'al-Battani, plus tard, a employé ce genre de table.

⁴⁰Comme le dit Lorch dans son commentaire (p. 416 n. 20) on obtient par interpolation cette valeur de $\widehat{EU} = 67^\circ 13'$, pris en degrés de l'écliptique, ce que l'auteur nomme « degrés d'égalité », directement à partir de la valeur de $\widehat{EP} = 65^\circ 20'$, prise dans la colonne des ascensions droites, donc par lecture inverse de la table 2. On trouve le même résultat par un calcul direct $\tan \lambda = \frac{\tan \alpha}{\cos \varepsilon}$ (voir le classeur CalculCapella.xlsx, troisième feuille, dans le dossier "Reconstitution tables"). Mais tout cela avec la valeur de l'obliquité de Ptolémée, $\varepsilon = 23^\circ 51' 20''$. Mais ce n'est pas ce que fait al-Farghānī puisqu'il détermine d'abord \widehat{DU} directement (lecture inverse d'une table) de \widehat{AP} (voir note précédente).

⁴¹On ne sait pas de quelle table il s'agit. En reprenant les calculs (voir le classeur CalculCapella.xlsx, troisième feuille, dans le dossier "Reconstitution tables"), cette valeur s'obtient en faisant le calcul de l'ascension droite d'un arc de $67^\circ 13'$ mais avec la valeur de l'obliquité $\varepsilon = 23^\circ 33'$?? Lorch le note p. 416, n. 21.

⁴²Al-Farghānī ne dit rien de la source de ces sinus. Est-ce la table des cordes de Ptolémée ? Est-ce une table établie juste avant lui ? Lorch dit que...

⁴³Voir la reconstitution du calcul à partir de la table des cordes de Ptolémée (fichier "Calcul_Sinus_AlFarghani.xlsx"). Ça marche, on trouve $42^p 1' 1,3''$.

⁴⁴Voir encore la reconstitution du calcul à partir de la table des cordes de Ptolémée (fichier "Calcul_Sinus_AlFarghani.xlsx"). On trouve $55^p 46' 47,83''$, donc une différence de 1,17".

⁴⁵Le calcul a été reconstitué dans le fichier "Calcul_Sinus_AlFarghani.xlsx". On trouve $41^p 25' 52,6''$ donc ça marche.

$$\frac{\frac{\widehat{\text{Sin GH}} \times \widehat{\text{Sin SM}}}{\widehat{\text{Sin MG}}} \times \widehat{\text{Sin BU}}}{\widehat{\text{Sin HB}}} = 60 \cdot \frac{\frac{\sin \varepsilon \times \sin(43^\circ 40')}{\sin(90^\circ - 43^\circ 40')} \times \sin(90^\circ - 67^\circ 13')}{\sin(113^\circ 33')} = 9^p 39' 59''.^{46}$$

Et finalement $\widehat{US} = 9^d 16' 16''$.

Il reste à le soustraire de l'arc \widehat{DU} pour trouver $\widehat{DS} = 147^d 56' 44''$, puis on en tire par lecture inverse de la table des ascensions droites l'arc d'écliptique $\widehat{AN} = 150^d 12''$.

Al-Farghānī conclut que le point N (degré de passage de Capella) se trouve à $12''$ des Gémeaux.

Il poursuit ce paragraphe en formulant la règle générale du calcul de ces deux paramètres, distance à l'équateur et degré de passage d'une étoile, à partir de ses coordonnées écliptiques.

1. Pour connaître la distance de l'étoile à l'équateur (δ) :

on calcule le premier sinus, $S_1 = 60 \cdot \sin(90^\circ - \varepsilon)$.⁴⁷

Puis si l'on note λ la longitude de l'étoile, comptée à partir du début du Capricorne⁴⁸, on détermine l'angle a dont λ l'ascension droite par une lecture inverse de la table des ascensions⁴⁹. On détermine ensuite l'inclinaison i de $a - 90^\circ$ par la table des inclinaisons.⁵⁰

Notons β la latitude de l'étoile,⁵¹ on calcule alors le deuxième sinus, $S_2 = 60 \cdot \sin(i - \beta)$ si l'étoile est entre les deux cercles (équateur et écliptique) ou $S_2 = 60 \cdot \sin(i + \beta)$ si l'étoile n'est pas entre les deux cercles (équateur et écliptique) et qu'elle se situe du même côté de l'équateur que son degré (P) ou $S_2 = 60 \cdot \sin(\beta - i)$ si l'étoile et son degré (P) sont de part et d'autre de l'équateur.⁵²

On calcule encore le troisième sinus, $S_3 = 60 \cdot \sin(90^\circ - i)$.⁵³

Il ne reste plus qu'à calculer $\delta = \arcsin\left(\frac{1}{60} \cdot \frac{S_1 \times S_2}{S_3}\right)$.⁵⁴

2. Pour connaître le degré de passage de l'étoile :

on reprend le premier sinus du calcul précédent, $S_1 = 60 \cdot \sin(90^\circ - \varepsilon)$.

On calcule le deuxième sinus, $S_2 = 60 \cdot \sin(\varepsilon)$.⁵⁵

On calcule le troisième sinus, $S_3 = 60 \cdot \sin(\delta)$.⁵⁶

On calcule le quatrième sinus, $S_4 = 60 \cdot \sin(90^\circ - \delta)$.⁵⁷

On calcule le cinquième sinus, $S_5 = 60 \cdot \sin a$.⁵⁸

Pour connaître \widehat{US} , il suffit de calculer $\arcsin\left(\frac{1}{60} \cdot \frac{S_2 \times S_3 \times S_5}{S_4 \times S_1}\right)$.

⁴⁶Voir encore la reconstitution du calcul à partir de la table des cordes de Ptolémée. On trouve $9^p 39' 58,41''$, ce qui colle tout à fait.

⁴⁷ $S_1 = \widehat{\text{Sin DH}} = \widehat{\text{Sin BH}}$ sur la figure.

⁴⁸ \widehat{AP} sur la figure.

⁴⁹ \widehat{DU} sur la figure.

⁵⁰ \widehat{PU} sur la figure.

⁵¹ \widehat{MP} sur la figure.

⁵² $S_2 = \widehat{\text{Sin MU}}$ sur la figure.

⁵³ $S_3 = \widehat{\text{Sin HU}} = \widehat{\text{Sin (HP + PU)}} = \widehat{\text{Sin (}\frac{1}{4}\text{ cercle + PU)}} = \widehat{\text{Sin (}\frac{1}{4}\text{ cercle - PU)}}$ sur la figure.

⁵⁴ \widehat{MS} sur la figure.

⁵⁵ $S_2 = \widehat{\text{Sin GH}}$ sur la figure.

⁵⁶ $S_3 = \widehat{\text{Sin MS}}$ sur la figure.

⁵⁷ $S_3 = \widehat{\text{Sin MS}}$ sur la figure.

⁵⁸ $S_5 = \widehat{\text{Sin DU}} = \widehat{\text{Sin BU}}$ sur la figure.

Pour obtenir \widehat{DS} , al-Farghānī distingue quatre cas de position de l'étoile relativement à l'équateur et au colure des solstices et selon le quart de sphère sur lequel elle se situe, il faudra soit ajouter \widehat{US} à \widehat{DU} , soit l'en ôter. En effet, cela revient à distinguer si S est sur \widehat{DU} ou si U est sur \widehat{DS} . Ainsi, lorsque l'étoile se situe sur l'hémisphère délimité par le colure des solstices contenant le point équinoxial d'automne et au nord de l'équateur ou sur l'autre hémisphère et au sud de l'équateur, $\widehat{DS} = \widehat{DU} + \widehat{US}$ et dans les deux autres cas, $\widehat{DS} = \widehat{DU} - \widehat{US}$.

la projection des azimuts

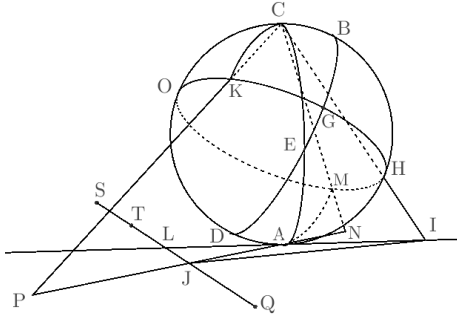
La grande nouveauté dans le traité d'al-Farghānī est le traitement des cercles azimuts.

Ptolémée évoque, dans le *Planisphère*, le tracé des cercles représentant les cercles perpendiculaires à l'écliptique sur l'astrolabe, en construisant géométriquement l'un des pôles de l'écliptique sur le plan, et en affirmant brièvement qu'il suffit de tracer les cercles qui passent par ce pôle et par deux points opposés.

Le problème du tracé des azimuts vient du fait que le plan médiateur du cône perpendiculaire à sa base **n'est plus** le plan du méridien, comme c'était le cas pour tous les autres cercles. Cela signifie que les centres des cercles sur l'astrolabe ne sont plus sur la ligne méridienne.

Al-Farghānī construit, au ch2, les deux pôles de l'écliptique sur l'astrolabe et montre que le premier azimut passe également par les deux points d'intersection de l'horizon et de l'équateur, et que tous les autres azimuts ont leur centre sur la droite perpendiculaire à la ligne méridienne passant par le centre du premier azimut.

Au ch3, il calcule les rayons des cercles azimuts dans le plan de l'astrolabe.

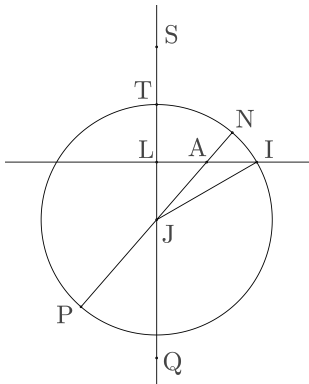


BED , horizon, CEA horizon de la sphère droite (méridien qui passe par les points d'intersection de l'horizon et de l'équateur), OGH azimut sur la sphère, dont la valeur est donnée par l'arc \widehat{EG} où E est le lever du Bélier (le point Est de l'horizon).

H zénith, et I son correspondant sur l'astrolabe
 L centre du premier azimut sur le tympan, droite QS , droite des centres des azimuts sur le tympan.

On construit l'arc \widehat{CK} perpendiculairement au cercle azimut de la sphère (OGH) et \widehat{AM} également.
puis les droites CK et CM qui coupent le tympan

respectivement en P et N



Les points C , K , A et M sont sur un même (grand) cercle de la sphère (les arcs \widehat{CK} et \widehat{AM} sont perpendiculaires à un même grand cercle et les points C et A sont diamétralement opposés)

alors les droites PA et CM se coupent en N car tous les points sont coplanaires

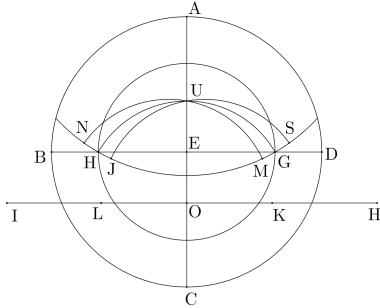
De plus dans la surface conique de sommet C et passant par le cercle OGH , CK est la plus courte et CM la plus longue des droites qui joignent le sommet à la base (c'est ainsi qu'al-Farghānī désigne le plan média-

teur du cône qui est perpendiculaire à sa base), il en déduit que NP est le diamètre du cercle azimut sur le tympan (en renvoyant à la proposition du cône).

Donc le centre de ce cercle est le point J et T est l'un des points de la droite des centres par lequel passe ce cercle.

Il emploie la règle des quatre quantités (forme dérivée du théorème de Ménélaus) pour obtenir la valeur des arcs \widehat{AK} et \widehat{AM} en fonction de ce qu'il connaît (la latitude et l'arc \widehat{BG}) et de là les valeurs de AN et AP (rayon des courses des points M et K , donc celle du rayon du cercle azimut sur le tympan).

La position du centre J sera donnée par JL (connaissant $JI = r$ et LI rayon du premier azimut) (ou plutôt LT lorsque LJ est trop petit).



Mais il ne s'arrête pas là, au Ch5 il décrit effectivement comment tracer le cercle à partir d'un compas.

on retrouve la proposition du cône, ou plus exactement le raisonnement pour déterminer la position d'un diamètre de l'azimut (par la détermination du plan passant par l'axe et perpendiculaire à la base. Al-Farghānī ne dit pas cela, il vérifie que le plan contient la plus petite et la plus grande génératrices).

Le livre d'al-Farghānī a transformé les études sur l'astrolabe, et à partir de lui certains ont approfondi l'étude générale de la construction de l'astrolabe (al-Sufi, ...) d'autres ont poursuivi l'étude théorique des projections (al-Quhi, al-Saghani,)

Son auteur est reconnu avant tout comme un astronome, mais sa maîtrise de certains fondements de la théorie des coniques, telle qu'on la trouve dans le traité d'Apollonius, fait de lui également un mathématicien. Sans doute proche des plus grands qui exerçaient à Bagdad au milieu du 9e siècle

La nouveauté vient d'une parfaite connaissance des sources classiques, ici l'*Almageste*, de ses méthodes et de ses résultats, et de l'introduction du concept de surface conique qui lui permet de formaliser le concept de projection. C'est peut-être là un point d'origine de la rencontre de la théorie des coniques et du problème, ancien, de la construction de l'astrolabe qui trouve un nouveau développement dans le traité d'al-Farghānī.

De nombreuses questions demeurent concernant notamment la tradition que le traité du *Planisphere* a pu engendrer dans les études sur la description de l'astrolabe.

Bibliographie

Abgrall, 2000 : P. Abgrall, “La géométrie de l’astrolabe au Xe siècle”, *Arabic Sciences and Philosophy*, 10.2, 2000, p.

Abgrall, 2015 : P. Abgrall, “Les débuts de la projection stéréographique : conception et principes”, *Arabic Sciences and Philosophy*, 25.2, 2015, p. 135-166

Lorch, 2000 : R. Lorch, “Ibn al-Ṣalāḥ’s Treatise on Projection : a Preliminary Survey”, in *Sic itur ad astra – Studien zur Geschichte der Mathematik und Naturwissenschaften*, M. Folkerts und R. Lorch (eds.), Wiesbaden, 2000, p. 401-408

Lorch, 2005 : R. Lorch, *Al-Farghānī, On the Astrolabe*, Arabic Text Edited with Translation and Commentary, F. Steiner Verlag, Stuttgart, 2005.

Neugebauer, 1949 : O. Neugebauer, “The Early History of the Astrolabe”, *Isis*, 40.3, 1949, p. 240-256.

Rashed, 1993 : R. Rashed, *Géométrie et Dioptrique au Xe siècle - Ibn Sahl, al-Qūhī et Ibn al-Haytham*, Paris, 1993

Rashed, 2005 : R. Rashed, *Geometry and Dioptrics in classical Islam*, Londres, 2005

Sidoli et Berggren, 2007 : N. Sidoli et J. L. Berggren, “The Arabic Version of Ptolemy’s Planisphere or Flattening the Surface of the Sphere : Text, Translation, Commentary”, *SCIAMUS*, 8, 2007, p. 37-139.

Sergeyeva et Karpova, 1972 : N. D. Sergeyeva, L. M. Karpova, “Al-Farghānī’s Proof of the Basic Theorem of Stereographic Projection”, Appendix 3 in R. B. Thomson, *Jordanus de Nemore and the mathematics of astrolabes : De Plana Spera*, Toronto, 1978 p. 210-217 (trad. anglaise de l’article original en russe, paru dans *Voprosy Istorii Estestvoznania i Tekniki*, 3.40, 1972, p. 50-53)