



VARIETE DES MODES D'UTILISATION DES TU DANS LES TEXTES MATHEMATIQUES DES SONG ET DES YUAN

Karine Chemla

► To cite this version:

Karine Chemla. VARIETE DES MODES D'UTILISATION DES TU DANS LES TEXTES MATHEMATIQUES DES SONG ET DES YUAN. 2002. halshs-00000103

HAL Id: halshs-00000103

<https://shs.hal.science/halshs-00000103>

Preprint submitted on 17 Dec 2002

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

European and North American Exchanges
in East Asian Studies Conference

Paris, September 3-5, 2001

“ De l’image à l’action : la dynamique des représentations visuelles
dans la culture intellectuelle et religieuse de la Chine ”

“From Image to Action: The Dynamics of Visual Representation
in Chinese Intellectual and Religious Culture”

**“ VARIETE DES MODES D’UTILISATION DES *TU* DANS LES TEXTES MATHEMATIQUES
DES SONG ET DES YUAN ”**

Karine CHEMLA
REHSEIS (CNRS & Université Paris 7)

First draft. Please do not quote without the author’s permission.

**NB : le texte suppose la consultation d’un nombre important de figures qui ne sont pas
reproduites ici. Elles seront projetées lors de l’exposé**

Si le fait d’utiliser des figures constitue sans doute un universel de l’activité mathématique, les pratiques concrètes dont elles ont fait l’objet au sein de communautés de travail distinctes présentent, elles, des variations¹. Plusieurs critères se proposent à qui souhaite analyser ces différences : on peut ainsi mettre au jour des oppositions en ce qui concerne la réalisation matérielle de ces figures, leur teneur, les conceptions que les praticiens en ont formées ou les lectures qu’ils en ont faites, les opérations qu’ils leur ont appliquées ou encore les usages auxquels ils les ont soumises. Nous verrons ici comment ces critères permettent de caractériser les *tu* singuliers que les mathématiciens chinois ont produits entre les Han et l’époque Song-Yuan.

Avant d’entrer dans le vif du sujet, je souhaiterais cependant indiquer les deux ordres de préoccupation, solidaires l’un de l’autre, dans lesquels s’inscrit mon intérêt pour les *tu* que les

¹ Cette affirmation tient compte de ce que des traditions mathématiques entières —il suffit de penser à la descendance de Lagrange ou au courant boubakiste— ont préconisé une pratique de la discipline qui élimine les figures. Se proposer un tel objectif, c’est avoir développé une conception de la figure. Par ailleurs, exiger que les publications soient purgées de figures n’implique pas qu’on s’interdise d’y recourir dans des moments moins publics de la pratique mathématique. Nombre d’auditeurs des cours de Claude Chevalley ont appris à leurs dépens la signification de cette distinction.

textes mathématiques de la Chine ancienne donnent à voir ou auxquels ils renvoient. Leur explicitation me permettra de distinguer deux niveaux dans l'examen des *tu*.

L'étude des auxiliaires visuels dont des mathématiciens se sont servis relève, pour une part, de la description des pratiques concrètes (dessiner, calculer, rédiger) mises au point en Chine ancienne pour mener des recherches sur des sujets mathématiques. Reconstituer plus généralement le cadre matériel de leur travail, c'est se doter de moyens pour sonder les relations qui ont pu unir des éléments constitutifs de ces pratiques concrètes aux concepts et aux résultats produits. Pour ce premier plan, les *tu*, ce sont alors les objets sur lesquels on opère.

Mais le terme de *tu* désigne également les figures que les ouvrages mobilisent et articulent au discours selon des modalités qui varient, elles aussi, avec les communautés de travail, les programmes dans lesquels elles sont engagées, aussi bien qu'avec les techniques concrètes disponibles pour la production d'écrits. En ce sens, la recherche sur ces *tu* relève à mes yeux, pour une autre part, d'une histoire de l'écrit scientifique en tant que tel, laquelle explorerait cette pratique matérielle spécifique qu'est la manufacture d'un écrit².

Les auxiliaires visuels qu'a pu mobiliser l'activité mathématique ne nous sont, pour le contexte de la Chine ancienne, accessibles que par le biais des ouvrages qui sont parvenus jusqu'à nous. C'est dire combien les deux ordres de préoccupation que j'ai distingués sont concrètement liés. Il s'avèrera cependant utile, par la suite, de garder à l'esprit la possible dissociation, dans le concret de la pratique, entre auxiliaires visuels en tant que support du travail et figures telles qu'on les trouve reproduites dans un texte.

Le sujet sur lequel je souhaiterais plus spécifiquement me pencher ici tire son origine d'une constatation : si les ouvrages réunis au cours de la dynastie Tang sous le titre de *Dix canons de mathématiques*, lesquels constituent les textes les plus anciens transmis par la tradition écrite, attestent d'une pratique singulière des auxiliaires visuels³, celle-ci apparaît, sous les Song, avoir subi une mutation. Corrélativement, le visage des textes mathématiques eux-mêmes s'est transformé sous le rapport des *tu*, quoique de manière non uniforme. Mon but sera donc ici, à titre exploratoire, de dégager la nature de ces transformations, en tentant de saisir tout à la fois les continuités avec les pratiques anciennes aussi bien que les ruptures, et d'identifier des facteurs qui pourraient rendre compte de la diversité des nouvelles formes de texte.

Mutation de l'écrit mathématique : la transformation des *tu*

Les deux chapitres sur les mathématiques de la *Grande encyclopédie de l'ère Yongle* (*Yongle dadian*, 1403-1408) qui ont échappé aux désastres du temps (n° 16343 et 16344) nous fournissent une première perspective d'où contempler l'évolution de l'allure des textes mathématiques, dans la mesure où ils nous offrent une vue synoptique sur un ensemble d'ouvrages produits en Chine depuis les Han. En effet, les écrits retenus, au lieu d'être insérés comme tels dans l'encyclopédie, sont éclatés en morceaux qui seront distribués dans les chapitres

² Voir Chemla 1995 & 1996. J'explore ces axes de recherche dans le contexte du séminaire " histoire des sciences, histoire du texte ", qui vise à étudier la manière dont des communautés de travail aux prises avec des questions singulières élaborent des textes pour mener et communiquer leur recherche. Dans ce contexte, les figures mathématiques se sont révélées constituer un sujet d'étude particulièrement fécond, sur lequel le séminaire s'est depuis 1996 pour beaucoup concentré. Je tiens à remercier les auditeurs et les conférenciers de m'avoir permis de mûrir ma réflexion sur le sujet.

³ J'ai touché par plusieurs biais à ce sujet dans quelques articles (Chemla 1994, 1995, 1996, 1997), et me propose d'y revenir pour un traitement plus systématique dans une publication ultérieure.

thématiques, regroupés par sujets et selon un ordre pour l'essentiel chronologique. En parcourant le chapitre 16343, "Multiplications des différents, divisions par les identiques", nous survolons un ensemble de problèmes provenant du canon Han *Les neuf chapitres sur les procédures mathématiques* (*Jiuzhang suanshu*), puis un extrait du *Canon mathématique de Xiahou Yang* (8^e siècle)⁴ —figures 1.a—c. L'ensemble, entièrement discursif, est soudain interrompu par une figure géométrique (figure 2) : nous avons atteint un ouvrage de Yang Hui des Song du Sud, *Choix de méthodes mathématiques étonnantes dans la foulée des anciens*, (*Xugu zhaiqi suanfa*, 1275). Il en va de même par la suite. Après des pages de développements prélevés sur le canon Han, puis sur le *Canon mathématique de Sunzi* (*Sunzi suanjing*, ca. 400), et autres textes plus tardifs, l'interruption du propos par des figures signale à nouveau un texte des Song du Sud, les *Écrits sur les mathématiques en neuf chapitres* (*Shushu jiuzhang*, 1247) de Qin Jiushao⁵. Il s'agit ici d'une *suite de configurations de calcul*, qui donnent à voir l'état de la surface à calculer sur laquelle les nombres sont représentés avec des baguettes (figures 3.a—b). Relevons que chaque nombre est accompagné de mentions et que les reproductions de ces configurations figurent dans la bande supérieure du texte et surmontent l'énoncé des opérations rendant compte de leur évolution.

Le même phénomène se reproduit dans le chapitre suivant, qui couvre le champ du quatrième des *Neuf chapitres* (c'est désormais ainsi que j'abrègerai le titre du canon Han) : toutes les figures proviennent de textes Song, tandis que les écrits antérieurs, les canons aussi bien que leurs commentaires Wei-Jin et Tang, se présentent, selon ce témoignage du début du 15^e siècle, comme du pur discours. Ces éléments non discursifs sont, en l'occurrence, tirés du commentaire du même Yang Hui au Canon Han, lequel s'intitule *Explications détaillées des Neuf chapitres sur les méthodes mathématiques* (*Xiangjie jiuzhang suanfa*), et reprend sans doute partiellement un commentaire des Song du Nord par Jia Xian⁶. On y relève un *tableau*, placé au-dessus de l'algorithme dont il rend compte —le célèbre triangle dit "de Pascal", ici associé au nom de Jia Xian (figure 4.a)— ; une *figure illustrant la correction d'un algorithme* d'extraction de racine carrée, et qui porte un titre la désignant explicitement comme *tu* : "figure de la racine carrée (*pingfangtu*)" (figure 4.b) ; enfin une *série de tu*, intitulée "Figures de l'extraction de la racine carrée par addition et multiplication (*zengcheng kai pingfang tu*)", donnant à voir la suite des configurations de nombres à travers lesquelles passe l'exécution d'une extraction de racine selon ladite méthode sur la surface à calculer⁷ (figure 4.c). En commentant le dernier titre, Yang Hui éprouve le besoin d'explicitier la fonction qu'ont pour lui ces *tu* : "Exposer l'ensemble des diviseurs à l'aide de figures permet de savoir comment utiliser (la méthode)". On notera que, si ce dernier ensemble partage des traits communs avec la suite de configurations analogues que nous avons rencontrée plus haut comme attribuée à Qin Jiushao, leurs mises en page aussi bien que la conception des mentions accompagnant les nombres présentent cependant des différences. Il semble donc que si les *tu* font irruption dans les textes mathématiques Song et y prennent les physionomies les plus diverses, l'usage n'en soit pas normalisé sur tous les plans. Nous reviendrons sur ce point plus tard.

⁴ Sur la datation de cet ouvrage, qui appartient par erreur à la version reçue des *Dix canons de mathématiques*, voir Qian 1963.

⁵ Ces deux figures se trouvent respectivement dans *Yongle dadian*, chapitre 16343, p. 3b et , 17b—18a&b.

⁶ Guo 1988.

⁷ Respectivement, *Yongle dadian*, chapitre 16344, p. 6a, 8a, 8b—9a. On notera que l'ensemble de ces configurations est parfaitement exact à une erreur près : un nombre a été omis dans le troisième tableau de la page 8b. Ceci nous donne une indication de la fiabilité de la copie.

Faut-il nous arrêter à la conclusion que nous inspire la consultation de ce témoin du 15^e siècle et affirmer que, si les textes mathématiques antérieurs aux Song sont du pur discours, les ouvrages produits à partir du 11^e siècle seraient émaillés des figures les plus diverses ? Il convient en fait de nuancer la thèse.

Des écrits antérieurs aux Song, il nous reste pour l'essentiel la collection composée sous les Tang : les *Dix canons de mathématiques* (*Suanjing shishu*), dont le parcours précédent nous a amenés à croiser quelques ouvrages⁸. Pour ce qui est des “ canons ” à proprement parler, la situation paraît claire : non seulement les éditions parvenues ne contiennent pas d'illustration, mais les textes mêmes ne font à proprement parler aucune référence à des *tu*⁹. Le seul élément non discursif qu'ils évoquent est un instrument de calcul, extérieur au texte de l'ouvrage : il s'agit de la surface où les nombres sont représentés avec des baguettes et sur laquelle les calculs s'exécutent. Les canons décrivent, de façon de plus en plus précise avec le temps, les manières dont il convient d'y disposer les nombres pour pouvoir appliquer un algorithme¹⁰.

Les premières mentions de *tu* se rencontrent en fait dans les commentaires à deux de ces canons, comme si les *tu* s'introduisaient dans les écrits mathématiques par le contexte de l'exégèse. C'est ainsi que les commentaires de Liu Hui (3^e siècle) aux *Neuf chapitres* et ceux de Zhao Shuang au *Gnomon des Zhou* renvoient explicitement à des *tu* de même qu'ils font référence à leur matérialité et aux opérations qu'ils leur appliquent. Cependant des *tu* concrets de Liu Hui, il ne reste aucune trace matérielle autre, et ce depuis au moins les Song du Sud, si l'on en croit le témoignage de Bao Huanzhi qui réalise en 1213 une édition des *Dix canons de mathématiques*¹¹. Ceci semble expliquer que le *Yongle dadian* n'en comporte aucun. Quant aux *tu* de Zhao Shuang, si l'on excepte ce qu'il en dit lui-même, nous avons à leur sujet un autre type de témoignage, puisque l'édition de Bao Huanzhi en 1213 en représente une série, à laquelle le texte de Zhao Shuang renvoie (figure 5.a-b). À supposer, comme je le propose, que l'allure des *tu* mute en mathématiques avec les Song, il convient de se méfier de la représentation que propose une édition réalisée sous les Song du Sud d'un texte antérieur. La prudence s'impose d'autant plus que l'essentiel des figures sont fausses¹². Il se pourrait bien qu'on ait donc affaire à une transposition de *tu* antérieurs sous la forme que ces auxiliaires ont prise sous les Song. S'il en est ainsi, on peut tout de même attendre de ces figures qu'elles donnent des indications précieuses sur la matérialité des objets qu'elles représentent. Nous y reviendrons également.

⁸ Je ne tiens pas compte ici du manuscrit trouvé dans une tombe scellée à la fin du 2^e siècle avant notre ère et récemment publié (le *Suanshushu*), dans la mesure où, à première vue, il ne semble pas comporter de référence à des *tu*. Je ne tiendrai pas compte non plus des manuscrits mathématiques de Dunhuang : le seul élément non discursif qu'ils contiennent se compose d'une table d'aires.

⁹ Le seul canon pour lequel cette affirmation requiert une discussion est le canon astronomico-mathématique des Han *Gnomon des Zhou* (*Zhoubi*), sur ce point, voir C. Cullen 1996, pp. 69 sq. et 184. Je propose de se fier sur ce point au témoignage du commentaire du 3^e siècle Zhao Shuang, lorsque dans sa préface il écrit : “ J'ai fabriqué des *tu* en m'appuyant sur le canon (*yi jing wei tu*) ”.

¹⁰ Chemla 1996.

¹¹ Dans sa postface aux *Neuf chapitres* qui a survécu grâce à la citation qu'en fait Yang Hui dans le *Xiangjie jiuzhang suanfa* (*Yijiatang congshu*, p. 5b), Bao Huanzhi précise que, si les *tu* de Liu Hui existaient selon lui sous les Tang, ils ont disparu au temps de son édition. Il importe de préciser qu'en 1084, sous les Song du Nord, le Département de la Bibliothèque impériale (*mishusheng*) avait déjà fait graver les *Dix canons de mathématiques*, et qu'il semble que cette impression ait été la base du travail de Bao Huanzhi sur *Les neuf chapitres* et sur *Le gnomon des Zhou*.

¹² Les reconstitutions que propose l'éditeur moderne Qian Baocong, 1963, présentent le gros défaut de modifier radicalement l'allure de ces figures, éliminant ainsi toutes les indications matérielles qu'elles procurent sur les *tu* antérieurs. Elles représentent ainsi un témoignage de la manière dont un éditeur ultérieur peut radicalement transformer la nature des documents sous l'influence des pratiques des figures qui lui sont contemporaines.

Si l'on se fie donc plutôt aux références que font aux *tu* les textes, eux contemporains, des commentateurs, on constate deux faits.

Tout d'abord, les *tu* ne constituent pas le seul auxiliaire visuel dont Liu Hui fait usage en géométrie : en fait, c'est *uniquement* pour les situations dans le plan que ce commentateur des *Neuf chapitres*, de même d'ailleurs que Zhao Shuang, renvoie à des *tu*. Mais, dès qu'on traite de géométrie dans l'espace, Liu Hui et les commentateurs ultérieurs des *Neuf chapitres* utilisent exclusivement des blocs (*qi*). Dans les deux cas, ces auxiliaires visuels remplissent les mêmes fonctions de donner à voir une forme, voire une configuration, ou bien d'étayer un raisonnement

Par ailleurs, si l'on considère les opérations que décrivent les commentateurs en général sur les *tu*, on est gagné par l'impression qu'il s'agit également d'*objets matériels* : formes découpées, dans du papier nous dit Liu Hui¹³, coloriées, assemblées ou superposées, disséquées et réarrangées. Ce relevé d'opérations rencontre peut-être encore mieux qu'il n'y paraît ce qu'en dit Liu Hui dans sa préface : “ quand il y avait à disséquer/analyser (*jie*) des corps (*ti*), je me suis servi de figures (*tu*) ”. Les figures attribuées par l'édition Song à Zhao Shuang concorde également avec cette hypothèse, puisqu'on peut y voir la représentation de formes découpées dans du papier quadrillé et superposées. La thèse, que je ne développerai pas ici, c'est donc que les auxiliaires visuels auxquels renvoient les commentateurs sont *dans tous les cas* des objets matériels aux dimensions standardisées —formes découpées dans un papier quadrillé pour le plan, blocs pour l'espace— et qu'ils font l'objet, dans le contexte des démonstrations que formulent les exégètes, des mêmes pratiques, désignées par le même terme de “ vérifier ” *yan*¹⁴. C'est ainsi que je rends compte du fait que le commentaire des *Neuf chapitres* se soit transmis aussi bien sans les *tu* que sans les blocs ou les baguettes : tous ces objets appartenaient à l'environnement matériel de l'activité mathématique sans pour autant avoir été intégrés, sous aucune forme que ce soit, aux textes. En ce sens, ce que donne à voir le *Yongle dadian* est bien significatif.

Les textes Song présentent alors effectivement, sous ce rapport, un net contraste avec les écrits précédents. Si l'on ne tient pas compte des commentaires antérieurs qui circulent encore, les ouvrages Song-Yuan ne semblent plus faire référence aux blocs. En revanche, les textes eux-mêmes, et non plus les seuls commentaires, abondent en *tu* les plus variés, qui représentent des figures géométriques aussi bien que des états de la table à calculer : ce qui jadis était pratiques matérielles à côté du texte laisse désormais une trace dans la constitution de l'écrit. En parcourant les *Ecrits sur les mathématiques en neuf chapitres* de Qin Jiushao ou les diverses œuvres de Yang Hui (1261—1275), nous pourrions saisir plus concrètement le changement de sens aussi bien que d'extension du terme *tu* dans les ouvrages Song¹⁵.

C'est en effet en les désignant de *tu* que Qin Jiushao insère dans son texte une suite d'états de la surface à calculer au cours de la résolution d'un problème (*Shushu jiuzhang*, *Yijiatang congshu*, chapitre 5, p. 3-4, figure 6). Les “ Figures de l'extraction de la racine quatrième avec

¹³ Dans le commentaire au problème sur le cercle inscrit à un triangle rectangle (chapitre 9), on lit : “ On peut tracer/peindre (*hua*) ceci sur un petit papier (*zhi*), découper (*fencai*) le (long des lignes) de rencontre droites et obliques (des zones de couleur pour les séparer les unes des autres)... ”.

¹⁴ Chemla 1997. Nous retrouverons ci-dessous cette pratique et ce terme, puisqu'ils sont toujours en usage chez certains auteurs des Song. C'est alors que nous en évoquerons le sens.

¹⁵ Je m'appuie ici, pour ce qui est du *Shushu jiuzhang* de Qin Jiushao (1247) et du *Xiangjie jiuzhang suanfa* de Yang Hui (1261) sur les éditions du *Yijiatang congshu* (1842), que l'on trouve reproduites dans la *Collection complète des écrits classiques chinois de science et de technologie* (*Zhongguo kexue jishu dianji tonghui*), Série : Mathématiques, vol. 1. Pour le *Yang Hui suanfa* (1275), nous disposons d'une impression xylographique coréenne de 1433, ainsi que d'autres témoins. Voir plus loin les remarques sur les questions de philologie.

positifs et négatifs (*zhengfu kai sanchengfang tu*) ” (résolution d’une équation quatrième) sont semblables, dans leur facture, aux configurations de nombres que rapportait de son ouvrage le *Yongle dadian*. Elles présentent les mêmes similarités et les mêmes contrastes avec les figures que, pour le même sujet, l’encyclopédie du 15^e siècle attribuait à Yang Hui. On constate donc que le terme de *tu* n’est plus cantonné à désigner les auxiliaires visuels de la géométrie plane, comme c’était le cas chez les commentateurs, mais qu’il va même jusqu’à renvoyer à des représentations de la surface à calculer.

Pour ce qui est de la géométrie plane, les *tu* peuvent illustrer les formes fondamentales, comme c’était auparavant le cas (figure 7), mais ils peuvent également donner à voir une figure géométrique composite, résumant l’essence de la situation décrite par l’énoncé d’un problème (*Shushu jiuzhang*, *ibid.*, chap. 5, p. 13a-14b, figure 8). Dans cette fonction, les *tu* s’écartent parfois du schématisme géométrique pour inscrire une situation mathématique au sein d’un environnement concret (*Shushu jiuzhang*, *ibid.*, chap. 8, p. 21, figure ; *xiangjie jiuzhang suanfa*, *Yijiatang congshu*, p. 55, p. 48, figures 10.a—b). En outre, les sujets des *tu* de la géométrie plane se diversifient aussi, on y trouve par exemple des représentations de séries (*Shushu jiuzhang*, *op.cit.*, chapitre 15, p. 14, figures 11a, mais également b&c). Les *tu* peuvent également donner à voir des configurations “ magiques ” (figure 12), des tableaux de nombres, des tableaux de formules (*Yang Hui suanfa & Xiangjie jiuzhang suanfa*, figure 13), des figures tabulant des données (*Shushu jiuzhang*, *op. cit.*, chap. 4, p. 2-3, figure 14). Enfin, c’est maintenant aussi à des *tu* qu’incombe la charge de représenter les situations et formes de la géométrie dans l’espace (par exemple, *Shushu jiuzhang*, *op. cit.*, chap. 13, p. 3, figure 15).

Si nous récapitulons, le terme de *tu* a connu une mutation de sens puisqu’il ne désigne plus les seuls auxiliaires de la géométrie plane, mais très généralement une figuration insérée dans le texte. De plus, la teneur de ces *tu* s’est éminemment diversifiée, dans la mesure où c’est désormais à cet unique élément qu’il revient de prendre en charge tous les aspects non discursifs du texte mathématique. Or il se trouve que cette mutation ne semble pas s’opérer de la même manière selon les textes mathématiques des Song les plus anciens que nous pouvons consulter.

Face à ce faisceau de faits, plusieurs questions se posent à nous. Nous aurons à nous demander selon quelles modalités variées ces figures furent insérées dans le texte mathématique. De plus, il nous faudra comprendre, tant pour ce qui est de la figuration que pour ce qui est des opérations, en quelle mesure ces représentations introduites dans l’écrit héritent des pratiques matérielles passées (ou également contemporaines ?) et de quelle manière elles s’en éloignent.

Un problème philologique

Il est impossible d’aborder ces questions sans examiner au préalable de manière critique la capacité des sources dont nous disposons à nous fournir des réponses. Nous avons déjà croisé, chemin faisant, plusieurs problèmes de cet ordre, que je reprends ici.

Pour parler des *tu* antérieurs aux Song, nous possédons, outre les témoignages verbaux des commentateurs, des représentations d’une édition du 13^e siècle dont nous pouvons, comme nous l’avons vu, questionner la fiabilité. Les éditions critiques modernes, quant à elles, ne tiennent aucun compte des indices que fournit cette édition de 1213 sur la matérialité des *tu* anciens et modernisent carrément l’allure des figures. On sait que les figures sont en règle générale le parent pauvre des travaux philologiques.

Si nous nous tournons maintenant vers les ouvrages mathématiques des Song, de quels témoins disposons-nous ? A notre connaissance, les impressions xylographiques des textes que nous avons évoqués —tous ceux dont nous parlons ont été imprimés, semble-t-il, à l'exception de la somme de Qin Jiushao— n'ont pas été conservées. Par ailleurs, aucun de ces ouvrages n'a à ce jour été l'objet d'une édition critique réalisée selon des critères contemporains. Dans quelle mesure pouvons-nous donc nous fier aux témoins existants pour traiter des diverses utilisations des *tu* dans les textes mathématiques des Song et des Yuan ? La question se pose même en des termes plus aigus pour le cas précis de cet article : je n'ai pu avoir accès, pour sa préparation, qu'à un sous-ensemble des témoins. Il me paraît donc utile de montrer, par un examen rapide des éditions que j'ai pu consulter, pourquoi je considère disposer de témoignages suffisamment fiables, du moins pour les questions que j'aborderai. Si tel est le cas, on peut donc plus généralement espérer que les éditions existantes nous fournissent des indices relativement sûrs pour consolider les quelques hypothèses que j'avancerai sur les transformations que la période Song-Yuan a expérimentées en matière de *tu* pour ce qui est des mathématiques. Mais, on le comprendra, la consultation de ces autres témoins s'avère encore nécessaire pour étayer cet aspect de mon argumentation.

Esquissons donc ici rapidement les raisons qui me semblent garantir que les éditions consultées offrent un témoignage sur lequel je peux dans un premier temps m'appuyer. Elles nécessitent un développement philologique quelque peu technique, et le lecteur qui souhaite se dispenser de ce pan de l'argument peut sans doute se reporter directement à la section suivante.

Pour ce qui est du *Shushu jiuzhang* (1247)¹⁶, la transmission du texte a reposé sur deux familles de témoins dont les éditions des 18^e et 19^e siècles dépendent de manière différente. D'un côté, plus d'un siècle et demi après sa composition, l'ouvrage fut incorporé, dans le *Yongle dadian*, et, nous l'avons vu, quelques traces en ont subsisté dans les chapitres qui ont survécu. C'est sur la base de la copie qu'il en fit à partir de cette même encyclopédie que Dai Zhen prépara l'édition critique qui sera publiée dans le *Siku quanshu*.

D'un autre côté, une seconde famille de manuscrits, indépendante selon U. Libbrecht, découle de la copie que put achever en 1617 un bibliophile Ming, Zhao Qimei (1563-1624), d'une copie réalisée peu auparavant d'un exemplaire que le *Wenyuange* conservait. Ce manuscrit est la base principale de l'édition, entamée par Shen Qinpei et achevée par son disciple Song Jingchang, que Yu Songnian publie en 1842 dans le *Yijiatang congshu*. En appendice, Song Jingchang publie une *Collection de notes (Zhaji)* où il rassemble ses remarques éditoriales, rapporte des divergences entre les témoins ou les notes de travaux critiques antérieurs. Outre ces documents, que j'ai pu consulter, il reste en Chine trois autres manuscrits postérieurs au 18^e siècle, qu'il sera nécessaire de compulser pour confirmer mes conclusions. Cependant, il est dès à présent possible d'émettre quelques remarques.

Tout d'abord, la comparaison entre les *tu* conservés du *Yongle dadian* et les figures correspondantes de l'édition du *Yijiatang congshu* montre une grande conformité de représentations. La confrontation ne peut en fait concerner que les *tu* qui retranscrivent des suites d'états de la surface à calculer : les dispositions sont quasiment identiques dans les deux documents. Que l'on compare les deux versions du problème 5 du chapitre 16 (*Yijiatang congshu*, p. 14bsq. et *Yongle dadian*, chapitre 16343, p. 14asq.) ou du problème 4 du chapitre XVIII (*Yijiatang congshu*, p. 14-18 et *Yongle dadian*, chapitre 16343, p. 17-18), la conclusion

¹⁶ Voir U. Libbrecht, 1973, chapitre 4, ainsi que la notice par He Shaogeng dans Guo (éd.), 1993, vol. 1, pp. 436-7.

s'impose¹⁷. Certes l'écriture des nombres eux-mêmes ne suit pas le même système—dans le *Yongle dadian*, les chiffres de Qin sont donnés pour identiques à ceux qu'utilisaient en son temps les mathématiciens de la Chine du Nord—, mais la mise en page des calculs et l'esprit, la disposition des légendes sont essentiellement les mêmes, par-delà de légères variations dans le texte lui-même. L'identité des figures semble donc indiquer, dans les deux cas, une copie fidèle, sur ce plan, des documents sur la base desquels le travail s'est effectué, —deux lignes de textes différentes, rappelons-le, lesquelles devaient également concorder en la matière. Seule une différence se manifeste, sur laquelle nous reviendrons ci-dessous.

Si nous nous appuyons maintenant sur les notes de Song Jingchang lui-même pour évaluer son respect des figures des documents qu'il a sous les yeux, plusieurs indices nous montrent qu'il semble ne pas opérer sans quelque précaution. Au chapitre 10 (*Yijiatang congshu*, p. 8a-b), il reproduit une configuration de nombres que Qin Jiushao qualifie de configuration en "aile d'oie sauvage (*yanchi*)"¹⁸. Il relève en note (*Zhaji*, chap. 3, p. 42a) que l'exemplaire du *Siku* lie certains nombres de la configuration par des pointillés, ce qui rend l'objet plus évident — et fait aussi, accessoirement, apparaître le tracé de l'aile—, mais Song se contente de reproduire la variante de la figure en note, conformément à cet ajout, sans transformer pour autant à son tour le texte dans l'édition. Pourtant sur ce point, il n'est pas impossible que ce soit bien en suivant le *Yongle dadian* que le *Siku* trace ces lignes : la seule différence que nous évoquons plus haut entre les configurations du *Yijiatang congshu* et celle du *Yongle*, relative au problème 5 du chapitre 16, consiste en ce que, à la différence de l'édition du 19^e siècle, la version du *Yongle* relie, mais par des traits pleins, certains nombres de la figure. Il semble y avoir eu, entre les témoins, une variante, sans doute systématique, dans les représentations des configurations de nombres, et l'édition de Song Jingchang semble donc bien opter, en matière de figures, pour la fidélité la plus grande au manuscrit qui se trouve au fondement du travail critique.

Il arrive par ailleurs à Song Jingchang, dans les notes en annexe de son édition, de mentionner un problème dans une figure du *Shushu jiuzhang* telle qu'elle lui est transmise par son témoin. Ainsi, pour le problème 3 du chapitre 8, il note à propos du *tu*¹⁹ : " Pour ce qui est de la figure (*tu*) du (problème) 'regarder au loin le camp de section circulaire de l'ennemi', le texte original (*yuanben*) dessine également à droite de l'œil de l'homme la forme du fleuve (laquelle se trouve déjà à gauche, ndt), ici on l'a supprimée ". C'est dire qu'il signale les modifications qu'il apporte, et les motive par une analyse de la relation entre figure et énoncé du problème lui-même. C'est également dire que la représentation du fleuve fait bien partie de la figure telle que la lui transmet son témoin et n'est pas un ajout de l'éditeur²⁰. Toujours au chapitre 8, le problème 5 (*Yijiatang congshu*, p. 22) ne comporte, selon les documents disponibles, pas de figure. Song Jingchang note (*Zhaji*, chap. 3, p. 33) : " le (*Siku*) *guanben* a une figure (*tu*) pour cette procédure, mais ce texte n'en a pas, il s'agit probablement d'une erreur par omission. J'y supplée ci-

¹⁷ Le troisième problème commun aux deux témoins ne comporte pas de *tu*.

¹⁸ Remarquons que la configuration de nombres est située à cheval sur les deux pages qui constituent une feuille, ce qui se reproduit souvent dans le *Yijiatang congshu*, mais pas dans le *Yongle dadian*.

¹⁹ *Zhaji*, chap. 3, p. 31a. La figure de l'édition se trouve dans *Yijiatang congshu*, chap. 8, p. 11, et est également représentée à cheval sur deux pages.

²⁰ La figure du problème 3 du chapitre 6 (*Yijiatang congshu*, p.16) est également l'objet d'une longue discussion (*Zhaji*, chapitre 3, p. 10b-11a).

après... ”. Et sur ces entrefaites, il propose un dessin conforme au témoignage du *Siku quanshu*. C’est donc dire qu’il n’ajoute pas indûment de figure à son édition du texte²¹.

Sur ce point, une autre remarque permet de préciser les choses : les figures que trace Song Jingchang en annexe, pour les besoins de son propre commentaire, présentent des allures différentes de celles de l’édition à proprement parler (voir par exemple, *Shushu jiuzhang zhaji*, chap. 3, p. 23). L’un des indices les plus importants en est qu’il nomme les points, conformément à un usage qui s’est imposé en Chine après la traduction massive de livres d’Occident, depuis le 17^e siècle. Par contraste, on constate donc que les figures de son édition, aussi bien que celle qu’il trace pour le problème 5 du chapitre 8, ne sont pas modernisées et suivent donc sans doute les modèles de ses témoins.

En conclusion, pour ce qui concerne les *tu* du *Shushu jiuzhang*, l’édition de Song Jingchang paraît révéler une grande fidélité aux figures qu’il avait sous les yeux et elle semble donc nous avoir conservé les traits principaux du manuscrit du début du 17^e siècle sur lequel il fonde son travail. Or ce document semble, selon Yu Songnian qui a comparé les diverses sources, représenter un excellent témoin, lequel consiste, rappelons-le, en une copie d’une copie d’un document conservé au *Wenyuange* et de filiation indépendante du *Yongle dadian*. Pour sa part, les traces des illustrations du *Shushu jiuzhang* que nous conserve cette dernière encyclopédie du début du 15^e siècle concordent parfaitement avec ce que nous en savons par l’autre famille de sources. Nous pouvons donc raisonnablement espérer que les figures reproduites dans le *Yijiatang congshu*, aussi bien que celles du *Yongle dadian*, partagent l’essentiel de leurs traits structuraux avec celles des manuscrits de Qin Jiushao.

La situation des sources sur lesquelles repose notre connaissance des *Explications détaillées des Neuf chapitres sur les méthodes mathématiques* (*Xiangjie jiuzhang suanfa*, 1261) de l’autre mathématicien des Song du Sud dont les textes nous sont parvenus, Yang Hui, est pour partie similaire à ce que nous venons de détailler pour le cas de Qin Jiushao²², mais nous verrons qu’elles conduisent à des conclusions moins sûres, sauf à mobiliser un tout autre témoin. Tout d’abord, les chapitres du *Yongle dadian* qui ont survécu gardent, comme nous l’avons vu, des traces de l’ouvrage : une partie des commentaires aux chapitres 3 et 4. Cependant, le livre n’a pas été retenu pour être inclus dans le *Siku quanshu*. Par ailleurs, d’autres parties du livre nous sont préservées de nouveau grâce à l’édition qu’en fit Song Jingchang et qui fut publiée également en 1842 dans le *Yijiatang congshu*. Mais le manuscrit qui lui sert de base, également partiel, consistait, selon l’analyse de Guo Shuchun, en une copie passablement négligée de passages du *Yongle dadian*. S’il en est ainsi, tous nos témoins dépendent donc de l’encyclopédie du début du 15^e siècle, et nous n’avons aucune trace antérieure. Trois points méritent cependant d’être soulignés.

Tout d’abord, notre examen du cas de Qin Jiushao semble indiquer la fidélité tant du *Yongle dadian* que de Song Jingchang à leurs sources en matière de figures. Un élément vient étayer ce point pour ce qui concerne l’encyclopédie : justement alors qu’il reproduit un passage des *Explications détaillées*, le copiste laisse une colonne vide, en y inscrivant : “ vide dans le texte original ”. Ce détail signale, me semble-t-il, le respect de la mise en page qui a ici présidé à la production du *Yongle dadian*. On peut également donner des preuves du soin de Song Jingchang à respecter, ici aussi, son témoin. Alors qu’il en reproduit la figure (*xiangjie jiuzhang*

²¹ La même situation se reproduit pour le premier problème du chapitre 7. Là la note de Song précise le témoignage : “ Selon le *Guanben*, le *Yongle dadian* a la figure du paysage à l’avant. Dans ce texte, elle est omise, j’y supplée ci-après ” (*Zhaji*, chap. 3, p. 21-2).

²² Sur ce point, voir Guo Shuchun, 1990, p. 108, et Guo in Guo (éd.), 1993, p. 947.

suanfa, *Yijiatang congshu*, p. 50b), il commente en note : “ Dans ce dessin, la verticale devrait être plus courte que l’horizontale, mais ici c’est l’horizontale qui est plus courte. Ce n’est pas le cas ”. C’est dire la fidélité de Song à ses sources. Il n’en reste pas moins que le doute subsiste sur la fiabilité des illustrations telles que transmises par le manuscrit sur lequel Song a fondé son travail.

Or, second point, un autre témoignage, sans doute indépendant, nous vient par un biais entièrement différent, et il permettrait, si cela se confirmait, de garantir l’ancienneté relative d’un certain type de figures. Comme le notait Yan Dunjie (1966, p. 152), la *Somme des Neuf chapitres sur les méthodes mathématiques et des problèmes analogues* (*Jiuzhang suanshu bilei daquan*) de Wu Jing (1450) construit la trame de son ouvrage sur les énoncés de problèmes tels qu’il les trouve dans les *Explications détaillées*. L’édition originale de cet ouvrage a disparu, mais Tian Yinong (1993, (éd.), vol. 2) reproduit l’édition de 1488 que réalise un descendant. Or si l’on confronte les figures de ce témoin avec les illustrations que proposent soit l’encyclopédie *Yongle*, soit le *Yijiatang congshu*, à nouveau on constate une très grande similarité, du moins pour ce qui est des figures planes ou des tableaux de nombres — la reproduction du triangle “ de Pascal ” est quasiment identique à ce que donne à voir le *Yongle dadian*. En revanche, toutes les représentations de configurations de nombres avec des baguettes telles qu’elles pouvaient se présenter sur la surface à calculer ont disparu. Il est possible que ce trait ait à voir avec le fait que cet instrument de calcul entre à l’époque en désuétude. Cependant cette absence éveille un écho inattendu : on note que la partie des *Explications détaillées* que Song Jingchang prépare pour le *Yijiatang congshu* ne comporte aucune représentation de cette sorte non plus, par contraste avec le *Yongle dadian* ainsi qu’avec les autres ouvrages de Yang Hui qu’il édite. Au contraire, la mise en page des calculs relatifs aux systèmes d’équations linéaires que contiennent les *Explications détaillées* du *Yijiatang congshu* est plus proche de ce que montre cette impression de l’ouvrage de Wu Jing. Se pourrait-il que le témoin sur lequel Song a fondé son travail ait un rapport avec les documents sur la base desquels Wu Jing a opéré ? Cette hypothèse aurait deux conséquences. D’une part, les documents qui comportent des représentations de la surface à calculer telle qu’elle était encore utilisée au 13^e siècle pourraient remonter à des sources plus anciennes. D’autre part, le témoin sur lequel travaillait Song Jingchang pourrait ne pas être dépendant de la *Grande encyclopédie de l’ère Yongle*. Si les deux témoins jettent des perspectives distinctes sur le texte, nous ne remontons cependant toujours pas, pour les *Explications détaillées*, au-delà du 15^e siècle, sauf peut-être pour ce qui est du “ triangle de Jia Xian ”.

Un dernier argument semble cependant étayer l’hypothèse d’une ancienneté certaine d’un autre sous-ensemble de ces illustrations : nous venons d’y faire allusion, les figures conservées dans le *Yongle dadian*, que nous avons mentionnées plus haut, sont conformes à celles que recèlent les autres ouvrages de Yang Hui lorsqu’il traite des mêmes sujets. Or comme nous le verrons maintenant, les témoins sont en ce cas plus anciens et plus nombreux. Avant de nous pencher sur ces autres textes de Yang Hui, il nous faut cependant soulever une question. Les *Explications détaillées* reprennent entre autres, nous l’avons mentionné, le commentaire aux *Neuf chapitres* que Jia Xian rédige sans doute dans la première partie du 11^e siècle. Lesquelles des figures des *Explications détaillées* remontent-elles à Jia Xian ? Il faudra tenter de revenir sur la question.

Examinons pour l’heure la situation des trois textes de Yang Hui qui furent réunis et gravés sous le titre de *Méthodes mathématiques de Yang Hui* (*Yang Hui suanfa*) : *L’alpha et l’oméga des variations de la multiplication et de la division* (*Chengchu tongbian benmo*, 1274), *Méthodes rapides de multiplication et de division pour (régler) les aires de champs et des*

problèmes analogues, (*Tianmu bilei chengchu jiefu*, 1275), *Sélection de méthodes mathématiques étonnantes dans la foulée des anciens* (*Xugu zhaiqi suanfa*, 1275)²³. L'édition de l'ensemble la plus ancienne conservée provient de la réimpression, en 1433 en Corée, d'une impression xylographique réalisée en Chine en 1378. Des trois exemplaires qui se trouvent au Japon, j'ai pu consulter la reproduction de celle du Naikaku Bunko qui se trouve incluse dans la collection de Tian (éd., 1993)²⁴.

La nature des autres documents par lesquels le recueil nous est parvenu ne fait pas l'unanimité, je me contenterai ici de présenter les deux thèses en présence, sans pouvoir à l'heure actuelle trancher. Selon la présentation qu'en donnent Tian Yinong ainsi que Gao Honglin et Li Xiaojuan, l'ensemble fut imprimé sous les Song, et si cette version semble perdue, à la fin des Ming, le *Jiguge* en possédait une copie réalisée par calque. Selon Yan Dunjie en revanche (1966, p. 158), le manuscrit que possédait la bibliothèque fondée par Mao Jin n'était probablement qu'une copie du reprint coréen. Quoi qu'il en soit, c'est sur une copie provenant de ce document que Song Jingchang réalisera une édition de l'ouvrage, qui sera encore une fois publiée dans le *Yijiatang congshu*. Il y manque le premier chapitre du dernier traité, *Sélection de méthodes mathématiques étonnantes dans la foulée des anciens*²⁵. Il va de soi que selon la thèse relative à l'origine du manuscrit qui sera accréditée, la confrontation entre la version coréenne de 1433 et l'édition de Song Jingchang n'aura pas la même valeur pour ce qui est d'attester l'ancienneté des figures.

La comparaison entre les deux familles de témoins donne à voir que la transmission n'a pas été de qualité uniforme pour chacun des trois ouvrages. C'est *L'alpha et l'oméga des variations de la multiplication et de la division* pour lequel les versions du reprint de 1433 et du *Yijiatang congshu* sont les plus proches, pratiquement identiques même, selon la conclusion de Tian Yinong. La comparaison entre les deux documents montre une fois de plus que le travail éditorial de Song Jingchang a dû rester au plus près de ses sources. C'est ce dont témoignent en particulier les configurations de nombres représentés avec baguettes qui présentent la même figure dans les deux versions.

Pour ce qui est des *Méthodes rapides de multiplication et de division pour (régler) les aires de champs et des problèmes analogues*, la version du *Yijiatang congshu* semble passablement détériorée ; en particulier, plusieurs pages sont omises. Le fait que, selon l'analyse de Tian Yinong, un passage central du texte comporte des erreurs pourrait faire espérer que ce témoin appartient à une famille textuelle différente de celle de l'impression Ming. La confrontation pourrait ainsi permettre d'émettre des conclusions sur un stade encore plus ancien

²³ Voir à leur sujet la notice de Gao Honglin et Li Xiaojuan, dans Guo (éd.), 1993, pp. 1045-6, ou la notice dans Tian (éd.), 1993, p. 853-4, ainsi que Lam, 1977, Introduction, pp. XV-XVII.

²⁴ Le statut de la version conservée à la bibliothèque de Pékin, qui semble être celle qui se trouve reproduite dans Guo (éd.) 1993, ne me paraît pas claire. L'encart que le document porte au même endroit que l'édition coréenne comporte également le même texte (p. 1048), à savoir qu'il s'agit d'une réimpression de l'édition de 1378. Cette version est entachée de nombreuses fautes qui sont corrigées par des annotations marginales, semble-t-il sur la base de cette dernière. Il semble en fait s'agir d'une copie de celle-ci. Les figures de la réimpression coréenne et de cette copie sont pour l'essentiel identiques, mais présentent des variations instables de réalisation : là où, comme nous y reviendrons, la réimpression coréenne marque certaines aires par une couleur noire, la version de la bibliothèque de Pékin distingue les mêmes surfaces soit par une couleur, soit par un tracé de frontière double, soit ne les marquent pas.

²⁵ Ce n'est que ce dernier traité qui sera en revanche reproduit, en entier, dans le *Zhibuzuzhai congshu* de 1798, sans que les sources de ce travail me soient claires. Tian (éd.), 1993, reproduit l'ensemble de ces documents et trace en introduction les grandes lignes d'une comparaison sur laquelle je m'appuie.

du texte. Selon les cas, on peut espérer avoir soit un témoignage sur les figures qui remonterait à la fin du 14^e siècle, soit deux éclairages distincts, assez anciens et concordants, ce qui nous rapprocherait des figures de Yang Hui lui-même. Nous laissons ce point en attente pour une étude ultérieure. Quoiqu'il en soit, la comparaison des figures communes révèle, elle, une fois de plus une grande similarité d'allure : la situation dans la page, l'insertion dans le texte, la réalisation de la figure, tous ces éléments sont pour l'essentiel identiques.²⁶

Rappelons que, dans son chapitre 2, l'ouvrage cite de larges extraits d'un livre antérieur : *Discussion sur la source des mathématiques anciennes (Yigu genyuan)* d'un érudit ayant probablement vécu entre la fin du Xe siècle et le début du XIe siècle, Liu Yi²⁷. Il s'agit donc là sans doute d'un contemporain de Jia Xian, dont Yang Hui suit le commentaire des *Neuf chapitres* dans son autre ouvrage évoqué précédemment. Là encore, les figures qui accompagnent cette partie du texte qu'on peut attribuer à Liu Yi sont pour l'essentiel semblables dans tous les témoins : on est donc en droit d'espérer qu'elles conservent les principaux traits structuraux des figures de Yang Hui. Mais ici également, comme plus haut à propos de Jia Xian, on peut ici se demander si ce type de *tu* ne remonterait pas, par-delà Yang Hui, au livre de Liu Yi et au XIe siècle. Dans cet ordre d'idées, il est intéressant de constater que certaines d'entre elles présentent également de fortes similitudes avec les figures relatives au même sujet que le *Yongle dadian* cite des *Explications détaillées* et dont le rapport à Jia Xian demande à être éclairci. Récapitulons ici les quelques éléments qui rapprochent ces deux situations : voici donc deux ensembles de figures semblables, portant sur un même sujet, mais appartenant à des ouvrages différents, ouvrages par ailleurs dont l'histoire textuelle est radicalement distincte comme nous venons de le voir. Ces faits semblent plaider déjà pour leur ancienneté. Or la même question se pose à leur sujet : ces deux ensembles de figures ne remonteraient-ils pas au XIe siècle ? Leurs similitudes n'en sont que plus intéressantes.

Laissons pour l'instant ce point en l'état, nous aurons l'occasion d'y revenir plus loin. Et esquissons rapidement la situation du dernier ouvrage de l'ensemble : *Sélection de méthodes mathématiques étonnantes dans la foulée des anciens*. Le texte en est lacunaire et corrompu dans le *Yijiatang congshu*. En revanche, s'il est plus complet dans le *Zhibuzuzhai congshu* (1798), l'ordre semble en être bouleversé. Ce fait semble accréditer la thèse, avancée par Yan Dunjie (1966, p. 158-9), selon laquelle cette dernière édition aurait été réalisée sur la base d'une copie effectuée sur le *Yongle dadian*. Mais les ressemblances relâchées entre les figures interdisent de les utiliser dans notre argumentation.

Le traitement des questions que j'ai soulevées relativement aux *tu* m'amènera à confronter ces ouvrages produits au temps des Song du Sud, et qui citent parfois, nous l'avons vu, des textes antérieurs des Song du Nord, avec les textes contemporains produits dans la Chine du nord qui ont survécu. Je préciserai donc également les éditions que j'ai pu consulter des deux ouvrages de Li Ye : *Reflets des mesures du cercle sur la mer (Ceyuan haijing, 1248)* et le *Déploiement des*

²⁶ Un point mérite d'être mentionné : alors que de manière générale, le *Yijiatang congshu* prend les mêmes options que le reprint Ming de 1433, en particulier qu'il colorie en noir certaines aires dans des diagrammes, pour certaines figures de la partie centrale du dernier chapitre, il s'écarte de ce mode de marquage pour retenir un des modes alternatifs que l'on retrouve pour les mêmes diagrammes dans le manuscrit conservé à la bibliothèque de Pékin : le tracé double de la frontière (*Yijiatang congshu*, chapitre 3, p. 11b). De fait toute la fin de ce chapitre montre une grande conformité, dans la réalisation des figures, entre ces deux témoins. Il faut tempérer cette remarque en ajoutant que dans les dernières pages, toutes ces éditions reviennent au mode de marquage des aires constamment utilisé dans le reprint Ming, et qu'ainsi les dernières figures sont identiques dans tous ces témoins.

²⁷ C'est la conclusion à laquelle arrive Te, 1990. Sur son ouvrage, voir également A. Horiuchi, 2000.

pièces d'aires pour la (Collection) augmentant les (connaissances) anciennes (*Yigu yanduan*, 1259), en vue de discuter de la confiance qu'il convient de leur accorder pour ce qui est des figures. Composés à des moments distincts, ces deux ouvrages semblent avoir connu une première impression presque simultanée en 1282.

Le *Ceyuan haijing* est réédité en 1287, mais ces deux premières impressions sont aujourd'hui perdues. L'ouvrage est l'objet d'une édition en vue de son inclusion dans le *Siku quanshu* en 1784, laquelle est réalisée sur la base d'un manuscrit que possédait la famille de Li Huang²⁸. L'édition qui deviendra la plus courante et sur laquelle se fondent les reproductions ultérieures est produite par Li Rui (1797), et Bao Tongbo la publiera dans le *Zhibuzuzhai congshu* en 1798. Elle repose sur deux témoins : une copie de l'édition du *Siku quanshu* qu'a réalisée Ruan Yuan ainsi qu'un manuscrit, semble-t-il indépendant, aujourd'hui conservé à la bibliothèque de Pékin, et pour lequel Mei Rongzhao propose le *terminus ante quem* de 1381. Pour ce qui est des figures, l'édition reproduite dans le *Zhibuzuzhai congshu* est conforme au manuscrit conservé à la bibliothèque de Pékin, que j'ai pu consulter. Leur relative ancienneté semble donc garantie.

Cette concordance semble témoigner de la fidélité de Li Rui aux sources dans ses éditions critiques. Celle-ci se manifeste par un autre biais, et tout particulièrement en ce qui concerne les figures, dans son travail sur l'autre ouvrage de Li Ye, le *Yigu yanduan*. L'édition critique qu'il en prépare et qui s'appuie également sur la version insérée dans le *Siku quanshu* (1786), elle-même basée sur le *Yongle dadian*, sera comme dans le précédent cas publiée dans le *Zhibuzuzhai congshu* (1798). Je relèverai quelques-unes de ses notes éditoriales relatives aux figures, qui me paraissent caractériser au mieux son soin à reproduire les matériaux tels qu'il les a sous les yeux. Le premier indice nous est offert par le problème 39 (chap. 2, p. 29b). Li Rui se convainc de ce que la figure fournie pour éclairer la résolution du problème comporte deux rectangles laissés vierges, alors qu'ils devraient être marqués du caractère *cong*. Certes, si l'on considère l'ensemble des diagrammes analogues de l'ouvrage, il a sans doute raison. Mais l'important n'est pas là. Ce qui est intéressant, c'est la manière dont il gère la situation en vue de l'édition : pour avoir rajouté les deux caractères sur la figure, il introduit une note éditoriale décrivant la modification. Un phénomène analogue se reproduit au problème 53 (chapitre 3, p. 22a) : il transforme ce que la figure originale représentait comme carré en rectangle, et ajoute une note pour signaler la modification dont il "espère qu'elle rende (la situation) simple et claire". Ailleurs encore (problème 54, chapitre 3, p. 24a), il lui semble que la figure devrait indiquer, par le caractère "rouge", les aires que le texte désigne de la sorte. Sans doute moins sûr d'avoir raison en ce cas, il se contente de signaler son doute en note, sans pratiquer l'ajout. En revanche, lorsque plus loin (problème 57, chapitre 3, p. 31b), la figure correspondante d'un problème marque —fait rare dans l'ensemble de ces figures— certaines aires par le caractère *hong* "rouge", Li Rui souligne dans une note que le texte, à cet endroit, annonce la marque et que la figure la pratique, probablement en écho à sa remarque précédente. Le soin qu'il met à rester fidèle aux matériaux, et que ces notes trahissent, me semble garantir que les figures de son édition du *Yigu yanduan* restent au plus près de ce qu'il a sous les yeux.

Une des notes éditoriales de Li Rui nous apporte également un témoignage intéressant sur un autre élément graphique que comportent l'ensemble de ces sources : la représentation des nombres positifs et négatifs. Sur ce point, il a modifié le texte du *Yigu yanduan* par rapport aux documents qu'il consulte. À ce qu'il nous dit, "le texte original ne distinguait pas positif et

²⁸ Sur l'histoire du texte du *Ceyuan haijing*, voir Mei Rongzhao, 1966, p. 110-1.

négatif pour les expressions formées avec des baguettes ». Il rapporte alors le témoignage du *Mengxi bitan* de Shen Gua, selon lequel on utilisait des baguettes rouges et noires pour opposer ces deux types de nombres, ce après quoi les autres preuves qu’il avance nous intéressent dans la mesure où elles reviennent à la matérialité des documents consultables au 18^e siècle : “ Dans les figures de l’extraction de racine au chapitre 4 du *Shuxue jiuzhang* (c’est ainsi qu’il nomme le *Shushu jiuzhang*) de Qin Daogu (Jiushao), les nombres représentés avec des baguettes négatifs sont dessinés en noir, et les positifs le sont en rouge, ce qui correspond à l’explication de Liu Hui que les nombres représentés avec des baguettes positifs étaient en rouge et les négatifs en noir. On sait qu’à l’époque les expressions formées avec des baguettes devaient également être distinguées par des tracés soit en rouge soit en noir, mais cela a disparu au fil des copies successives. ” Et là, Li Rui apporte un autre témoignage : “ Ici, je me suis appuyé sur l’exemple du *Ceyuan haijing* et j’ai marqué tous les nombres négatifs par un trait en oblique pour que les positions des nombres soient faciles à distinguer ”. Ce témoignage est ici encore conforme à ce que montre le manuscrit conservé à la bibliothèque de Pékin, sur lequel, rappelons-le, Li Rui a travaillé.

À en juger par l’histoire du texte, l’édition du *Yigu yanduan* publiée dans le *Zhibuzuzhai congshu* ne nous permet pas de remonter au-delà du *Yongle dadian*. Certes les méthodes de travail de Li Rui, la reproduction semble-t-il fidèle des figures par la *Grande encyclopédie de l’ère Yongle* semblent en faire des relais fiables. Mais que dire des figures originales de Li Ye ? Sur ce point, à nouveau, une comparaison avec un autre ouvrage nous offrira une garantie supplémentaire de la foi qu’on peut accorder aux témoignages de ces éditions, de même qu’elle nous ramènera une fois de plus à la même question. En effet, les figures qui nous sont parvenues du *Yigu yanduan* présentent de grandes similarités avec certains des *tu* du *Tianmu bilei chengchu jiefu*, de Yang Hui. Certains problèmes sont en fait communs aux deux ouvrages. Or ils sont accompagnés par des *figures structurellement semblables* —nous en donnerons un exemple ci-dessous. Et, une fois de plus, l’histoire de la transmission de ces textes est assez différente et implique suffisamment de maillons dont nous avons éprouvé la fiabilité pour que l’on puisse poser l’hypothèse que cette similarité remonte au XIII^e siècle.

Mais il y a plus. Les figures que contiennent les éditions anciennes du *Yigu yanduan* sont profondément différentes de l’unique diagramme que recèle son autre ouvrage. Or, selon le témoignage de Li Ye dans sa préface, son ouvrage repose sur un livre intitulé *Collection augmentant les (connaissances) anciennes (Yiguji)* qu’on pense pouvoir attribuer à un certain Jiang Zhou et faire remonter²⁹ à avant 1080. Pour la troisième fois, un ensemble de figures, partiellement toujours le même en fait —nous préciserons ce point par la suite—, nous ramènent au 11^e siècle. Faut-il en déduire que ces figures de Li Ye, ou la pratique de ces figures dont son livre témoigne, remontent au 11^e siècle ? Encore une fois, il faudra revenir à la question.

Au terme de ce parcours, nous mesurons de quelle manière nous pouvons, avec une relative certitude, nous appuyer sur nos témoins pour analyser la manière dont les *tu* ont été utilisés de diverses manières par différents mathématiciens des Song, les plus anciens dont les textes nous soient parvenus.

Les *tu* des Song et des Yuan : Ruptures et continuités

Nous l’avons vu, les *tu* que nous rencontrons dans les ouvrages du 13^e siècle intègrent au texte un ensemble d’illustrations qui renvoient à ce qui fut sans doute jadis des objets matériels

²⁹ Voir Xu, 1990 et A. Horiuchi, 2000.

différents. Nous examinerons donc tour à tour les modalités d'insertion des représentations de ces divers supports de l'activité mathématiques. En réalité, nous nous concentrerons sur les configurations de nombres sur la surface à calculer, puis sur les figures de la géométrie plane. En effet, un seul de nos auteurs utilise des *tu* pour donner à voir des situations en trois dimensions. Il s'agit de Qin Jiushao, qui n'utilise ces figures qu'aux fins d'illustrer les problèmes, nous y reviendrons brièvement.

Les diverses insertions de la surface à calculer dans les textes

En commençant par les représentations de configurations sur la surface à calculer, nous rencontrons l'un des premiers facteurs qui rendent compte de la diversité des textes au regard des *tu* : l'opposition géographique Nord/Sud. En effet, Qin Jiushao comme Yang Hui, deux auteurs des Song du Sud, donnent à voir les suites d'états de la surface au cours de l'exécution d'un algorithme sous la forme effective de *tu*, auxquels il leur arrive régulièrement de donner des titres comme nous l'avons vu (figure 6). Certes de légères différences de mises en page distinguent ces deux auteurs. Qin Jiushao consacre toujours un espace vertical entier pour y figurer un état, différents états superposés, voire une colonne de la surface à calculer (chap. 17, problème 1, p. 2 sq.). Les nombres y sont accompagnés de mentions et, parfois, surmontent, telle une légende, l'énoncé des étapes de calcul qui leur correspondent. Quant à Yang Hui, si, comme Qin Jiushao, il entoure les nombres de mentions, et place, sous la configuration, le texte des prescriptions de calcul qui lui correspondent, que ce soit dans les *Explications détaillées (Yongle dadian)* ou dans le *Yang Hui suanfa* (reprint coréen³⁰ de 1433, p. 942), les représentations des configurations de nombres avec baguettes forment, chez lui, des illustrations en général situées dans la moitié supérieure de la page, à moins que deux tels *tu* ne soient superposés et occupent en ce cas toute une zone verticale de la page. Mais, par-delà ces légères différences, Qin Jiushao et Yang Hui se rejoignent surtout en ceci que, dans leur texte, la retranscription d'un état de la surface à calculer figure toujours comme une *illustration* à laquelle le texte renvoie comme telle.

Par contraste, les représentations prélevées sur la surface à calculer que Li Ye insère dans ses textes pour figurer des équations ou des polynômes ne sont *pas* conçues comme des *tu*, et d'ailleurs, par opposition à d'autres figures que son texte comporte, il n'y *renvoie jamais par ce terme*. Corrélativement ces éléments graphiques sont intégrés au discours comme des mots, et ceci en deux sens : ils interviennent comme n'importe quel vocable dans la syntaxe des phrases et leur tracé s'inscrit dans l'espace de la colonne en continuité avec le discours (voir figure 16)³¹.

On pourra m'objecter que la raison en est simplement que ces éléments graphiques jouent des rôles différents dans les textes : Qin et Yang utilisent les *tu* pour donner à voir l'exécution d'un algorithme sur la surface, tandis que Li Ye ne fait que donner les résultats de calculs. À cela, je répondrai par deux points.

D'une part, Li Ye introduit en fait, pour noter les systèmes d'équations linéaires, un autre graphisme, qui n'a toujours pas le statut d'un *tu* (*Ceyuan haijing, Zhibuzuzhai congshu*, chap. 12, p. 11, figure 17). Cette représentation s'inspire, tout en la transposant, de la mise en page traditionnelle que décrivent déjà *Les neuf chapitres* pour disposer les nombres sur la surface à calculer et résoudre les équations. Et, en ce cas, Li Ye conduit la résolution du système sur la base de cette représentation. Or, même si l'on a ici affaire à deux formes distinctes d'intégration de mises en page de la surface à calculer dans le texte, ce graphisme présente les mêmes

³⁰ Je cite cette édition par le biais de sa reproduction dans Tian (éd.), 1993.

³¹ Voir K. Chemla, 1996.

propriétés que celui des équations et des polynômes de s'insérer dans l'espace de la colonne et dans la syntaxe des énoncés. Et, pour la même question mathématique, Qin Jiushao recourra, lui, à des *tu*³². Cette gestion par Li Ye des diverses notations inspirées des représentations des configurations sur la table à calculer présente donc une réelle stabilité, en opposition à ce que donnent à voir sur ce plan les publications de la Chine du Sud.

D'autre part, l'usage par Qin Jiushao de ces *tu* ne me semble pas se limiter à *illustrer* la menée des algorithmes sur la surface à calculer. On est gagné par l'impression, à voir les pages de telles figures qu'il aligne, qu'il s'agit pour lui d'une véritable pratique écrite des mathématiques. Mais ce point appelle une étude approfondie de ces figures que je ne peux développer dans le contexte de cet article.

Quoi qu'il en soit, malgré l'opposition, sur ce plan, entre l'écriture émaillée de graphismes du Nord et le texte-mosaïque de discours et d'illustrations du Sud, ces représentations transposées de la surface à calculer sont toutes en continuité avec les pratiques de disposition et d'exécution des calculs sur cet instrument³³. Comment rendre compte alors, d'un point de vue historique, de cette opposition entre les manières de gérer l'insertion, dans les textes, des configurations de nombres formés à l'aide de baguettes ? Renvoie-t-elle à deux manières de faire qui se sont développées l'une indépendamment de l'autre, ou l'une représente-t-elle un développement de l'autre ? Je laisserai également ce point ouvert, pour me tourner à présent vers les divers usages que ces textes du 13^e siècle font des figures de géométrie plane.

Les tu en géométrie

Les figures auxquelles les commentateurs des classiques renvoient se composent à première vue de deux sous-ensembles, nous y avons fait allusion plus haut. Certaines illustrent une forme sur laquelle porte un problème ou un développement. C'est le cas de la référence que fait Liu Hui à un *tu* qui représente le rectangle, en ouverture des *Neuf chapitres*, ou de l'insertion, par Zhao Shuang, des figures du cercle inscrit dans le carré et du carré inscrit dans le cercle. D'autres figures, en revanche, servent de support à des démonstrations de la correction d'algorithmes, nous en verrons bientôt certains traits.

Cette distinction nous permet déjà de constater une nouvelle opposition, transverse à la précédente, dans la manière dont nos auteurs du 13^e siècle reprennent ces deux types de figures. En effet, par contraste à Li Ye et à Yang Hui, Qin Jiushao ne fait usage, pour ce qui concerne les formes géométriques, que de *tu* du premier type. Certes, il les emploie de la manière la plus large qui soit, puisque, nous l'avons vu, il représente toutes sortes de nouvelles formes ou les sujets des problèmes les plus variés. En particulier, il est le seul de nos auteurs à figurer ainsi les problèmes qui se posent en géométrie de l'espace, recourant donc, pour la première fois semble-t-il, au même mode de représentation pour le plan et l'espace. Cependant, il se cantonne à n'utiliser les *tu* qu'à titre d'illustration.

Li Ye et Yang Hui vont, en revanche eux, reprendre par plusieurs biais des *tu* du type de ceux que les commentateurs du 3^e siècle ont introduits dans le contexte de l'argumentation. Et, afin de mieux saisir certaines ruptures aussi bien que certaines continuités dans cette reprise, il convient d'introduire ici quelques éléments relatifs à la pratique matérielle de ces *tu* telle qu'on

³² Voir l'exemple, déjà cité, du problème 1 du chapitre 17 (*Yijiatang congshu*, chap. 17, p. 2 sq.), et l'explication qu'en donne U. Libbrecht, 1973, p. 153-162.

³³ Je renvoie sur ces questions à Chemla 1996. Je ne discute pas ici des inversions de notations par rapport aux usages traditionnels de la surface à calculer, dans la mesure où l'on peut argumenter qu'elles représentent en fait une conception autre de la continuité avec les pratiques anciennes.

peut l'appréhender par la lecture des commentaires ou par l'examen des représentations qui en ont été imprimées en 1213.

Un premier fait relatif à ces anciens *tu* retient l'attention : lorsqu'ils interviennent dans un raisonnement, le commentateur distingue, dans les formes, des zones différentes et les désigne régulièrement par le fait de leur affecter des *couleurs* distinctes, le plus souvent, pour les aires, jaune (*huang*), bleu-vert (*qing*) et vermillon (*zhu*) (figure 18)³⁴. C'est ainsi qu'au cours de son commentaire sur l'aire du segment de cercle, Liu Hui appuie son raisonnement sur le fait d'opposer, dans une forme inscrite au cercle, une zone centrale jaune à quatre zones périphériques, deux vermillon et deux bleu-vert. Ou qu'il explicite le sens des opérations de l'algorithme d'extraction de racine carrée en découpant le carré dont l'aire correspond au nombre donné en zones auxquelles il affecte des couleurs différentes. Zhao Shuang fait, lui aussi, usage de couleurs de la même manière dans le texte de son commentaire. Le fait que cette pratique soit commune aux deux commentateurs semble indiquer qu'elle devait être bien établie. Or les figures qui sont attribuées à Zhao Shuang par l'édition de 1213 du *Zhoubi* font écho à cet usage, puisqu'elles affectent, à l'aide de leurs noms, soit sur la figure, soit dans la légende, des couleurs aux différentes composantes du *tu* (figure 19).

Un autre aspect de ces figures de 1213 retient l'attention : l'usage de ce qui semble bien être un papier quadrillé, dont le carré élémentaire définit l'unité de longueur comme de surface. En l'occurrence, les dimensions sont choisies de telle sorte que les figures correspondent à un triangle rectangle de dimensions 3, 4, 5 unités —un exemple canonique. Or l'hypothèse que les figures pourraient avoir été systématiquement de dimensions particulières et s'être composées de carrés unitaires concorde avec divers indices glanés dans les commentaires de Liu Hui et de Li Chunfeng aux *Neuf chapitres*. Tout d'abord, le commentaire de Li Chunfeng au premier problème du canon, portant sur le rectangle, renvoie à la découpe de la forme, longitudinalement ou transversalement, en bandes qui correspondent bien à des suites de carrés unitaires. La conception de la surface comme constituée de carrés élémentaires lui permet de mettre en relation le calcul de l'aire avec l'opération arithmétique de multiplication. Par ailleurs, le commentaire de Liu Hui fait régulièrement allusion à des figures qui auraient des dimensions déterminées, de l'ordre du *chi*. Ne faut-il pas voir là la référence à des figures concrètes dont les dimensions permettent d'interpréter numériquement les opérations prescrites, des figures semblables à celles que montre l'édition de 1213 ? En ce sens, l'usage en serait comparable à celui des blocs de dimensions déterminées (également de l'ordre du *chi*) dans l'espace ou aux exemples que constituent des problèmes³⁵.

Sur ce point, un nouvel indice permet d'aller plus loin. Une autre des figures fausses attribuées à Zhao Shuang (figure 20) porte des marques différentes qui sont du plus grand intérêt : les carrés unitaires qui composent une aire donnée y sont, chacun, marqués par le même caractère, prélevé sur la série des troncés célestes. L'extension de la surface en question est ainsi indiquée par la répétition du caractère sur la figure, et son aire se mesure, en carrés unitaires, par le nombre de fois que ledit caractère apparaît. La marque renvoie donc probablement, une fois de plus, à une lecture de la valeur d'une aire sur la base d'une figure dont les dimensions sont particulières. Le texte réfère le lecteur à ladite surface par une expression qui allie le caractère en question et le nom d'une couleur, qui ne figure pas sur le *tu* tel que le donne l'édition de 1213. Ainsi l'aire dite *Jia jaune* se repérait sans doute à l'aide des caractères *jia* sur la figure, peut-être

³⁴ Sur l'usage de ces couleurs, voir Chemla 1994.

³⁵ Ce point est développé dans Chemla 1997.

portait-elle également la couleur jaune. En effet, tandis que le caractère indiquait probablement la valeur de l'aire, la couleur est utilisée par le commentaire pour désigner des aires égales : les deux surfaces que Zhao Shuang dit jaunes (*Jia jaune* et *Yi jaune*) en les donnant pour égales étaient-elles aussi signalées à l'oeil sur le *tu* ? On peut le supposer. Sur la figure, deux aires jaunes, deux aires bleu-vert sont tour à tour distinguées, et la démonstration fonctionne en s'appuyant sur l'égalité de deux paires d'aires pour déduire l'égalité d'une troisième paire. Le raisonnement repose donc, ici aussi, sur la décomposition du dessin en des surfaces marquées, colorées.

Or l'on rencontre également des surfaces désignées par un tronc céleste et une couleur dans le commentaire de Liu Hui à l'extraction de la racine carrée : faut-il en déduire qu'outre porter des coloris, les aires en question étaient marquées par le caractère du tronc céleste autant de fois qu'elles comportaient de carrés unitaires, à la manière de ce que l'édition de 1213 des figures de Zhao Shuang laisse voir ? En d'autres termes, faut-il en déduire qu'on a là aussi affaire à une technique matérielle de travail des *tu* qui était largement partagée ? Une observation semble abonder dans ce sens. En effet, dans l'aire dont on cherche le côté, en vue d'extraire une racine, le jaune marque la suite des carrés des chiffres successifs de la racine, tandis que bleu-vert ou vermillon colorient une suite des rectangles nécessaires à la menée des opérations. Or, seules les aires jaunes sont également désignées à l'aide de troncs célestes. Et, de fait, c'est bien sur elles qu'on peut souhaiter lire les valeurs des chiffres successifs de la racine. On peut donc supposer que les caractères des troncs célestes y étaient inscrits comme chez Zhao Shuang et y permettaient le même type de lecture. Mais cet exemple nous donne une autre information intéressante sur l'emploi des couleurs. Si, ici, Liu Hui renvoie, comme Zhao Shuang, à plusieurs aires de même coloris, l'usage qu'il fait de cette ressource n'est pas le même : le jaune ne distingue pas là des aires égales, mais des surfaces qui jouent le même rôle dans le calcul. Nous avons donc ici la preuve qu'une même pratique matérielle a pu être ouverte à plusieurs types d'utilisation.

Quoi qu'il en soit, les mêmes marques matérielles, couleurs et troncs célestes, sont utilisées par nos deux commentateurs du 3^e siècle. Or il est remarquable que ces marques affectent toutes deux *les aires, jamais les côtés*. Il en va d'ailleurs de même pour les blocs, où les couleurs sont également utilisées pour repérer les volumes. Ceci renvoie pour moi à un point clef, qui oppose ces figures chinoises à celles que l'on rencontre par exemple dans les *Eléments* d'Euclide : les pleins, surfaces ou volumes, y sont premiers, et corrélativement, ce sont eux qui sont marqués. Nous verrons que ce trait perdure dans les *tu* qui en découlent chez Li Ye et Yang Hui.

Il est donc logique que ce soit également sur les aires que portent les opérations du travail mathématique. Ainsi, sur les bases des couleurs ou des marques, elles seront analysées, comparées, disséquées, recomposées : c'est ce que donne à voir par exemple la démonstration de la correction des algorithmes pour calculer le côté d'un carré ou d'un cercle inscrit dans un triangle rectangle. Et le rectangle joue un rôle fondamental dans ce contexte, de même que, dans l'espace, le parallélépipède.

De tout cela, donc, pas de trace graphique chez Qin Jiushao. Nous n'avons ni figure qui serait impliquée dans une argumentation, ni *tu* dont les pièces constitutives porteraient des marques, ce qui souligne, par la négative, le lien entre ces deux ordres de phénomène. C'est chez Yang Hui en fait que nous retrouvons l'empreinte la plus forte de cette tradition, sous la forme des *tu* insérés dans les pages de ses oeuvres. Que ce soit dans les *Explications détaillées* ou dans le recueil de ses ouvrages plus tardifs, les *Méthodes mathématiques de Yang Hui*, nous

découvrons, dans le contexte de démonstrations, des formes représentées comme si elles étaient découpées dans du papier quadrillé, et des opérations basées soit sur un découpage, soit sur une analyse qui s'appuie sur un coloriage.

Prenons l'exemple de la démonstration de la correction du calcul donné pour déterminer l'aire d'un triangle, telle qu'on la trouve dans le *Tianmu bilei chengchu jiefu* (reprint coréen, p. 938, figure 21). En quatre figures, Yang Hui esquisse trois démonstrations, qui correspondent chacune à un énoncé différent de la procédure. Deux d'entre elles donnent à voir l'aire d'un rectangle formé par découpe du triangle et recombinaison de ses morceaux. La troisième inscrit le triangle dans un rectangle de même largeur, mais dont la longueur est égale à sa hauteur, puis fait apparaître en cases noires sur quadrillage blanc, le complément du triangle dans ce rectangle.

On trouve également, dans les *Explications détaillées*, une démonstration qui recourt à des formes pavées de carrés unitaires, coloriés, et qui s'inscrit dans une continuité parfaite avec les pratiques des commentateurs anciens. Considérons en effet la figure que Yang Hui propose pour éclairer l'algorithme déterminant le côté d'un carré inscrit à un triangle rectangle donné (*Yijiatang congshu*, p. 59, figure 22). Il s'agit d'un rectangle de 6 carrés sur la largeur et 8 carrés sur la longueur. Une diagonale le coupe en deux exemplaires du triangle sur lequel porte le problème, et un coloriage explicite une dissection de l'aire sur laquelle la démonstration, différente de celles de Liu Hui, peut s'appuyer : deux petits triangles et un rectangle intérieurs y apparaissent en cases noires sur quadrillage blanc, alors que trois autres formes analogues restent en cases blanches sur quadrillage noir³⁶. Le point clef ici, c'est que pour donner à voir son raisonnement, Yang Hui a formulé le problème avec de nouvelles données, et que ce sont ces nouvelles dimensions que le *tu* de la démonstration figure. On peut ici mesurer la continuité avec ce que nous évoquions des pratiques des commentateurs, lorsque Yang Hui explique : “ Pour le carré inscrit au centre de la base (soit le carré inscrit dans un triangle rectangle, ndt), dans le problème précédent la base (du triangle) valant 5 tandis que sa hauteur vaut 12, la réponse donne un côté du carré inscrit de 3 *bu* 9/17 de *bu*. Il est donc difficile de vérifier sa figure (*yan qi tu*) ”. En effet, non seulement Yang Hui témoigne de la survivance d'une pratique ancienne de démonstration, qui mettait en oeuvre des auxiliaires visuels aux dimensions particulières. Mais de plus, il reprend, pour la désigner, le terme technique de *yan* que Liu Hui lui réservait. De même qu'au troisième siècle, il ne s'agit pas tant, à mon sens, de “ vérifier ” a posteriori les calculs que de pouvoir s'appuyer sur des valeurs toutes entières pour maîtriser la nature des transformations d'aires qui entrent en jeu dans le raisonnement. Ici Yang Hui semble s'appuyer sur les carrés unitaires pour exhiber comment une partie de l'aire du rectangle peut se recomposer, se transformer en d'autres termes, de sorte à faire voir la raison sous-jacente à l'algorithme à démontrer³⁷.

Nous avons donc ici les traces d'une continuité manifeste avec les *tu* antérieurs. Mais le phénomène qui me paraît le plus intéressant, dans ce contexte, concerne la pratique nouvelle de tels *tu*, du développement de laquelle témoignent tout à la fois le *Yigu yanduan* de Li Ye et le *Tianmu bilei chengchu jiefu* de Yang Hui. En effet, comme nous allons le voir maintenant, les mêmes techniques matérielles, sans doute définitivement transposées sur le papier, vont évoluer vers une manière inédite de travailler avec les figures dans le contexte d'une discipline alors en pleine mutation : l'établissement par la géométrie d'équations algébriques pour la résolution de

³⁶ Voir également, la reproduction de l'édition de 1488 du *Jiuzhang suanfa bilei daquan*, dans Tian (éd.), 1993, vol. 2, p. 1975.

³⁷ C'est, à mon sens, une telle pratique que recouvre le choix par Li Ye d'un exemple numérique quasiment unique pour son *Ceyuan haijing*, voir Chemla 1995.

problèmes³⁸. C'est donc ici, non pas la géographie, mais le fait d'oeuvrer dans un même domaine mathématique qui rend compte de ce que Li Ye et Yang Hui partagent, à la différence de Qin Jiushao, une pratique similaire et inédite de *tu*. Et si leurs écrits en témoignent, c'est que ces figures sont désormais partie prenante du texte lui-même.

Repartons des *Explications détaillées* de Yang Hui pour y trouver deux des racines de ce développement dans le corpus canonique et esquisser comment s'y dessinent les premiers contours de cette discipline, qui recouvre calcul des aires, problèmes de triangles rectangles et algorithmes d'extraction de racine. Etant donné le sujet de cet article, nous limiterons notre survol à l'évocation des figures.

Dans les pages de l'ouvrage que nous a conservées le *Yongle dadian*, Yang Hui insère, en relation avec l'algorithme d'extraction de racine, comme nous l'avons déjà vu, deux types de *tu*. Le *pingfangtu*, “ figure de la racine carrée ”, rend compte de la signification des quantités calculées par l'algorithme d'extraction sur la base d'une valeur particulière. Sa structure présente une forte corrélation avec le diagramme auquel le commentaire de Liu Hui fait référence quand il vise à établir la correction de la procédure d'extraction de racine décrite par *Les neuf chapitres* — un diagramme que nous avons évoqué ci-dessus. Cependant, d'un point de vue matériel, le *pingfangtu* rapporté par Yang Hui ne comporte aucune mention de couleur ou d'un tronc céleste quelconque. De plus, le carré prend dans ce contexte une signification renouvelée puisqu'il sert à l'interprétation d'un nouvel algorithme d'extraction attribué au commentateur du 11^e siècle, Jia Xian. C'est ce que laissent voir les annotations inscrites dans les diverses pièces en lesquelles le carré est découpé : elles en décrivent les dimensions, la valeur de leur aire, précisent le terme qui leur correspond dans l'algorithme, voire les opérations qui les ont produites. Par contraste, mais toujours en relation avec le nouvel algorithme, les “ Figures de l'extraction de la racine carrée par addition et multiplication (*zengcheng kaipingfang tu*) ” montrent l'évolution des calculs sur la surface à calculer. Ces deux types de *tu* constituent un premier ensemble des figures que l'on rencontre plus généralement en relation avec les équations sous les Song.

Sur un autre plan, dès *Les neuf chapitres*, un mode d'approche des équations algébriques se dessine en Chine ancienne, qui constituera le cadre fondamental dans lequel les recherches sur le sujet se développeront jusqu'au 13^e siècle : les équations sont introduites et traitées comme des opérations dépendant de l'extraction de racine. C'est un problème relatif au triangle rectangle dans le contexte duquel ce développement s'amorce, et dans le commentaire de Yang Hui, nous trouvons une fois de plus les autres types de figures qui accompagnent le développement de l'approche des équations sous les Song (chapitre 9, *Yijiatang songshu*, p. 64). Pour la première fois, nous rencontrons des désignations générales pour renvoyer au *type* de chaque figure. Tout d'abord, la “ figure du problème (*titu*) ” illustre la situation décrite par l'énoncé, et donne à voir les données graphiquement (figure 23, haut). C'est le *tu* comme illustration du problème que nous avons rencontré aussi bien chez Qin Jiushao que dans le *Yigu yanduan* de Li Ye. Par opposition à cette première représentation, Yang Hui insère une “ figure de la méthode (*fatu*) ” (figure 23, bas). Elle donne en fait à voir la surface rectangulaire sur la description de laquelle le commentaire de Liu Hui s'achève : d'une part, le raisonnement du commentateur détermine son aire sur la base des données de l'énoncé, et, d'autre part, il montre comment elle se décompose en un carré de côté l'inconnue et un rectangle attenant dont la longueur égale l'inconnue et dont la largeur, ou “ diviseur adjoint (*congfa*) ”, est également déterminée. C'est la “ figure ” que prend

³⁸ A. Horiuchi, 2000, étudie cette branche des mathématiques, et je reprendrai l'un des deux exemples sur lesquels elle développe son argumentation.

ici l'équation quadratique : l'aire globale correspond à son terme constant, et tracer le dessin équivaut à écrire que cette valeur est égale au carré, qui représente le terme en x^2 , et au rectangle, qui incarne le terme en x . Tant l'algorithme de résolution que cette figure ancrent cet objet mathématique dans l'extraction de racine. Comme A. Horiuchi (2000, p. 242-3) l'a relevé, ce *tu* participe de l'équation et servira de support fondamental dans la recherche qui se poursuit à son sujet. D'un côté, la résolution d'un problème à l'aide d'une équation vise à produire une figure de cette famille pour établir l'équation dont l'inconnue est solution. De l'autre, déterminer la racine de l'équation, c'est travailler sur l'aire de ce rectangle à l'image de ce que montre le *pingfangtu*, “figure de la racine carrée”.

Toute cette constellation de figures, rencontrées dans le commentaire de Yang Hui aux *Neuf chapitres*, se retrouve mobilisée dans le traitement des équations que Liu Yi donne au 11^e siècle, si l'on en croit du moins le témoignage du *Tianmu bilei chengchu jiefu* (reprint coréen de 1433, p. 942 sq.). Elles y sont le support d'un ensemble de transformations et d'extensions puisqu'en particulier, c'est par leur biais que Liu Yi expose les modalités de résolution des équations quadratiques les plus générales. En raison de l'objectif qui est le mien, je me concentrerai ici sur les développements relatifs aux figures produites en amont, au cours de la phase de recherche de l'équation, dans la mesure où c'est là que nous rencontrerons les *tu* d'un nouveau type que le texte de Yang Hui a en commun avec le *Yigu yanduan* de Li Ye. Il arrive à Yang Hui d'y renvoyer par l'appellation générale de “figure de déploiement des pièces (*yanduantu*)”, qui correspond tant au titre de l'ouvrage de Li Ye qu'à l'une des méthodes systématiques qui y est mise en oeuvre.

Pour mettre en évidence des continuités et des ruptures que ces figures présentent avec des pratique anciennes, je me pencherai sur un problème commun à Yang Hui et à Li Ye³⁹. L'essence de la méthode remonte à Liu Hui. L'objectif en consiste à mettre en forme une aire que l'on peut déterminer à l'aide de deux types de morceaux : des carrés qui ont pour côté l'inconnue et des rectangles dont l'un des côtés est déterminé, et l'autre vaut aussi l'inconnu.

Les deux figures que Yang Hui trace dans ce contexte frappent immédiatement : les aires y sont quadrillées par des carrés unitaires, dont une partie reste en blanc tandis que les autres sont coloriés en noirs. Nous retrouvons donc deux pratiques anciennes sur les figures. Les dimensions du quadrillage renvoient aux données du problème, il s'agit donc d'un usage conforme à celui que nous avons décrit à propos du carré inscrit dans un triangle rectangle. En revanche la technique du coloriage est, elle, reprise à d'autres fins. Dans la “figure de déploiement des pièces (*yanduantu*)” (figure 24), Yang Hui part d'une aire connue, à ceci près qu'il garde dans sa manche un carré de côté l'inconnue. Il exhibe comment cette aire peut être mise en forme de sorte à être décomposée en rectangles d'aire connue, d'une part, en rectangles dont seul un côté est déterminé d'autre part, l'autre côté étant égal à l'inconnue cherchée. Le noir marque les rectangles d'aire connue, les autres restent en quadrillage blanc. La figure montre également des pièces “vides”, qui donnent son sens à la figure globale, mais n'interviennent pas dans sa valeur. “Ce qui est en noir”, commente la légende, “est retranché de l'aire”. En soustrayant les morceaux d'aire connue d'une aire globale elle-même déterminée, on a donc mis une surface, que l'on est en mesure d'évaluer, sous la forme d'un ensemble de rectangles, tous marqués par un quadrillage blanc et qui partagent l'inconnue comme longueur. Une dernière mise en forme et

³⁹ On le trouvera dans le *Tianmu bilei chengchu jiefu*, p. 947. C'est par ailleurs le problème 11 du *Yigu yanduan* (*Zhibuzu zhai congshu*, chapitre 1, p. 23-24). Pour les aspects mathématiques, le lecteur est renvoyé à A. Horiuchi, 2000, pp. 249-251.

l'on dispose d'un rectangle dont l'un des côtés est déterminé, l'autre égal à l'inconnue, et dont l'aire est connue. Aurait-on écrit une équivalence qui permet d'exhiber l'inconnue ? C'est compter sans le carré que depuis le début l'auteur garde dans sa manche, et qui doit encore pris en compte dans la balance. Le second *tu*, “ Figure de l'extraction de l'aire (*kaijitu*) ” (figure 24), le restitue, en noir, tandis que le rectangle qui vient d'être formé reste composé de carrés blancs et lui est accolé. Le tout compose, sous la forme d'un grand rectangle, l'aire connue qui a été déterminée, à condition de lire de manière adéquate les couleurs. Elles prennent ici le même sens, quoiqu'elles s'appliquent à d'autres types de pièces : “ Ce qui est en noir, c'est le carré à soustraire, ce qui est en blanc, c'est le côté qu'on adjoint ”. L'aire connue correspond donc à l'aire du rectangle blanc, à laquelle on *soustrait* celle du carré en noir⁴⁰. La figure de l'équation est formée, conformément aux représentations passées : son tracé équivaut à l'énoncé d'une égalité. Mais la reprise de la technique traditionnelle de la couleur, investie de nouvelles significations, permet à cette représentation traditionnelle d'aller bien au-delà du cadre premier de sa mise au point.

On retrouve, dans le *Yigu yanduan*, pour le même problème une figure analogue au “ *tu* du déploiement des pièces d'aires ”, à quelques variantes près (figure 25). Pour nous concentrer sur les techniques de représentation, nous relèverons que le quadrillage des surfaces a disparu, et, qu'en lieu et place des couleurs, l'auteur inscrit désormais des caractères dans les diverses pièces qui composent l'aire globale. Certains renvoient aux opérations que les couleurs désignaient chez Yang Hui : les rectangles d'aire connue à retrancher de l'aire globale portent le caractère “ soustraire ”. D'autres indiquent la fonction que les pièces restantes rempliront dans l'équation : le caractère “ adjoint ” renvoie à ceux de ces rectangles qui entreront dans la composition du terme en x . Remarquons, enfin, qu'il n'est pas impossible que certaines pièces aient naguère été colorées : on se rappelle les remarques de Li Rui à propos du caractère “ rouge (*hong*) ” en rapport avec certaines des figures.

Récapitulons ce que cette nouvelle pratique des figures nous apprend. Tout d'abord, les points communs que présentent sous ce rapport les ouvrages de Li Ye et de Yang Hui semblent indiquer qu'il se définit, probablement à partir du 11^e siècle et dans le contexte d'une discipline donnée, un mode de travail des figures qui perdurera un certain temps. Cette pratique hérite par certains biais de techniques anciennes, attestées dans les démonstrations des commentaires aux canons Han : découpe des aires et transformation, recombinaison des morceaux, marquage des éléments d'aires. Mais elle implique ces techniques dans de nouvelles opérations et investit les marques de nouvelles significations, ouvrant ainsi la voie au développement d'un véritable calcul algébrique graphique.

Nous aurions ainsi, avec ces modes de travail mathématique sur les figures, une illustration de certaines des formes de continuité qui signalent une tradition aussi bien que des ruptures qui ne manquent pas d'y advenir, sous les effets conjoints du développement des recherches et des changements dans les techniques de production de l'écrit⁴¹. C'est, en

⁴⁰ Certaines figures que Yang Hui trace en rapport avec de nouvelles procédures, dans les *Explications détaillées*, font également usage de l'opposition blanc/noir de la même manière (*Yijiatang congshu*, p. 54).

⁴¹ L'exemple développé montre des formes de continuité dans l'usage de figures à caractère démonstratif, depuis les commentaires du 3^e siècle jusqu'aux auteurs de la période Song-Yuan. D'autres continuités se manifestent qui mettent en évidence que l'opposition illustration/figure démonstrative n'est pas absolue. C'est ce que montre l'exemple du *tu* sur lequel repose le *Ceyuan haijing*, dont le principe remonte à l'une des démonstrations de Liu Hui. Nous ne pouvons développer cet exemple plus avant. Voir Chemla 1995. Son importance est de manifester, depuis

conclusion, ainsi que l'on peut relire l'ensemble des faits que nous avons discuté. On peut y avoir une tradition, définie par le corpus canonique et les pratiques matérielles qui l'entourent, donner naissance à plusieurs formes de traditions de travail mathématique et de production de l'écrit. Certaines se définissent par la géographie, d'autres par le contexte d'une discipline. Toutes puisent aux mêmes racines et innovent dans la continuité.

Bibliographie

K. Chemla 1993. "Li Ye *Ce Yuan Hai Jing* de jiegou ji qi dui shuxue zhishi de biao shi", ("Structure de textes et expression de connaissances mathématiques dans le *Ceyuan haijing* de Li Ye"), *Shuxueshi yanjiu wenji* (Recueil d'articles de recherche sur l'histoire des mathématiques), 5, p. 123-142

K. Chemla, 1994. "De la signification mathématique de marqueurs de couleurs dans le commentaire de Liu Hui", in Alain Peyraube, Irène Tamba et Alain Lucas (sous la direction de), *Linguistique et Asie Orientale. Mélanges en hommage à Alexis Rygaloff*, *Cahiers de Linguistique — Asie Orientale*, 23, p. 61-76.

K. Chemla, 1995. "What is the content of this book? A plea for developing history of science and history of text conjointly", *Philosophy and the History of Science: a Taiwanese Journal*, 4, n° 2, p. 1-46.

K. Chemla, 1996. "Positions et changements en mathématiques à partir de textes chinois des dynasties Han à Song-Yuan. Quelques remarques", *Extrême-Orient, Extrême-Occident*, 18, p. 115-47.

K. Chemla, 1997. "Qu'est-ce qu'un problème dans la tradition mathématique de la Chine ancienne ?", *Extrême-Orient, Extrême-Occident*, 19, p. 91-126.

Cullen, Christopher, 1996. *Astronomy and mathematics in ancient China: the Zhou bi suan jing*, Needham Research Institute Studies, 1, Cambridge University Press, 242 p.

Guo Shuchun, 1988. "Première exploration des *Procédures détaillées du Canon de l'Empereur Jaune des neuf chapitres sur les mathématiques*. Tentative d'analyse de la structure des *Explications détaillées des Neuf chapitres sur les méthodes mathématiques* " ("Jia Xian Huangdi jiu zhang suanjing xicao chu tan. Xiangjie jiuzhang suanfa jiegou shixi"), *Ziran Kexueshi Yanjiu*, 7, n°4, p. 328-34

Guo Shuchun, 1990. *Hui jiao Jiu zhang suanshu* (*Collation des Neuf chapitres sur les procédures mathématiques*), Liaoning jiaoyu chubanshe.

une autre perspective, que les figures sont lues comme assemblages de pièces d'aires et non comme configurations de segments.

Guo Shuchun (éd.), 1993. *Collection complète des écrits classiques chinois de science et de technologie (Zhongguo kexue jishu dianji tonghui)*, Série : Mathématiques, 5 volumes, Henan jiaoyu chubanshe.

Horiuchi, Annick, 2000. “La notion de *yanduan*: quelques réflexions sur les méthodes “algébriques” de résolution de problèmes en Chine aux X^e et XI^e siècles”, *Oriens-Occidens*, 3, 2000, pp. 235-258.

Lam Lay Yong, 1977. *A Critical Study of the Yang Hui Suan Fa : A Thirteenth Century Mathematical Treatise*, Singapore University Press.

Libbrecht, Ulrich, 1973. *Chinese Mathematics in the Thirteenth Century : The Shu-shu-chiu-chang of Ch'in Chiu-shao*, MIT Press.

Mei Rongzhao 1966. "Li Ye et ses écrits mathématiques (*Li Ye ji qi shuxue zhuzuo*) ", in Qian Baocong & al. (eds.), 1966, pp. 104-48.

Qian Baocong, 1963. *Dix canons de mathématiques (Suanjing shi shu)*, Zhonghua shuju, 2 volumes.

Qian Baocong & al. (éds.), 1966. *Recueil d'articles sur l'histoire des mathématiques pendant les dynasties Song-Yuan (Song Yuan Shuxueshi Lunwenji)*, Beijing, kexue chubanshe.

Te Gusi, 1990. “Liu Yi et son ouvrage perdu *Discussion sur la source des mathématiques anciennes*” (*Liu Yi ji qi yizhu Yigu genyuan*), *Recueil d'articles de recherche sur l'histoire des mathématiques (Shuxueshi yanjiu wenji)*, 1, pp. 56-63

Tian Yinong (éd.), 1993. *Collection des mathématiques des générations passées de la Chine (Zhongguo lidai suanxue jicheng)*, Shandong renmin chubanshe, 3 volumes.

Xu Yibao, 1990. “ Reconstitution et analyse de la *Collection augmentant les (connaissances) anciennes (dui Yiguji de fuyuan yu yanjiu)*”, *Recueil d'articles de recherche sur l'histoire des mathématiques (Shuxueshi yanjiu wenji)*, 1, pp. 64-73.

Yan Dunjie, 1966. “ Examen des ouvrages mathématiques de Yang Hui de la dynastie des Song (Song Yang Hui suanshu kao), in [Qian et al. (éds.)], 1966, pp. 149-165.