

L'objectivité géométrique élémentaire, ou les façons de traquer l'oubli

à Imre Tóth

Jean Dhombres

La géométrie comme prévention d'amnésie

Afin de comprendre ce qu'un modèle apporte à une théorie, et ce qu'il comporte de théorie aussi bien, dans *Laws and Symmetry* Bas C. van Fraassen fournit l'exemple d'une axiomatique réduite à laquelle il offre une réalisation¹. Je le reprends intégralement tant il a l'avantage de la simplicité, mais je n'aurais pas de scrupule à en détourner l'utilisation afin d'aborder les formes géométriques prévenant l'oubli.

1° Etant données deux lignes quelconques, il existe au plus un point qui appartienne à ces deux lignes.

2° Etant donnés deux points quelconques, il existe une ligne et une seule passant par ces deux points.

3° Sur toute ligne, il y a au moins deux points.

Pour réaliser cette axiomatique est alors imaginé l'*Espace des sept points* dont une représentation est donnée sur la figure 1 : les points A, B, C, D, E, F et G sont les sept seuls nommés sur un triangle équilatéral et son cercle inscrit. Il faut comprendre, affaire de sémantique et objet précis de l'invention de cet Espace, que les lignes dont parlent les axiomes sont aussi bien entendues comme droites que comme cercles, et donc que D et B par exemple satisfont bien à 2°. Pour la réalisation d'un modèle par les objets de la géométrie euclidienne, simplement affectés d'une indistinction (droite et cercle), la contrainte que fournit l'axiome 2° consiste à identifier la ligne joignant D et B au cercle entier, et pas seulement à un arc.

¹Bas C. van Fraassen, *Lois et symétrie*, trad. française de C. Chevalley, Mathesis, Vrin, 1994, p. 337.

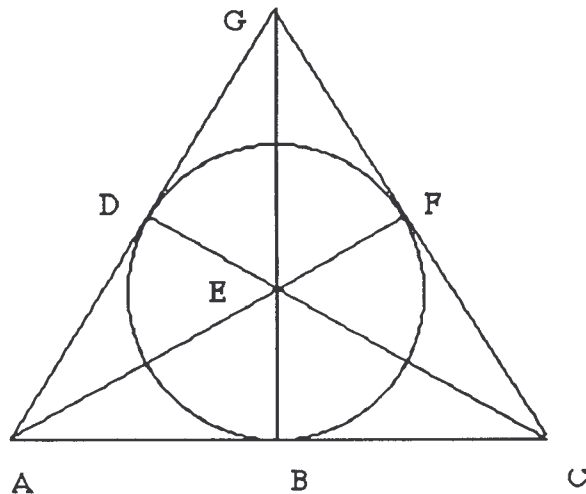


Figure 1

Van Fraassen intervient alors comme philosophe des sciences pour indiquer que la structure du triangle et de son cercle inscrit repéré par sept points, quoique finie, peut être *plongée* dans l'espace euclidien. Donc, ajoute-t-il, est isomorphe à une partie de ce dernier. Il l'entend comme base de la réalité, ce que nous lui accordons d'emblée. Et c'est dans ce plongement qu'il voit la relation essentielle entre un modèle et la théorie lorsque celle-ci est empiriquement adéquate. La réalisation d'un modèle n'est-elle pas la seule procédure qui permette d'atteindre un sens auquel le seul énoncé des trois axiomes ne peut accéder à lui seul ! Par ailleurs, sans autre effort de la logique, la réalisation d'un modèle garantit la cohérence des trois axiomes, le fait qu'ils ne soient pas contradictoires.

L'intérêt épistémologique de ce rustre d'Espace des sept points est à mes yeux le fait qu'il travaille un oubli. Oubli nécessaire des trois autres points d'intersection du cercle et des droites DC, BG, et FA. Car à les nommer, donc à passer de sept à dix points, le modèle serait *ipso facto* affligé de la plaie dirimante d'une contradiction. L'axiome 1° n'est plus satisfait : la droite DC coupe le cercle en deux points. Autrement dit, à s'enrichir de données réalistes ou euclidiennes, le modèle devient brutalement faux.

L'oubli, s'il représente une décision logique, est-il géométriquement possible ? Autre façon de le dire, la fausseté du modèle peut-elle être mise en perspective ? Van Fraassen affirme que le modèle des sept points pourrait être construit avec des fils de fer : le constructeur n'aurait pu manquer de sentir, au bout de ses doigts, le contact du fil joignant D et C et de celui, circulaire, joignant D et B ; par souci d'exhaustion, il aurait ainsi éprouvé la nécessité de nommer ces jonctions. Bref, l'oubli des trois points est impossible s'il y a matérialisation. Sans construire à la main, l'on peut aussi construire par l'esprit dans l'espace, et associer ainsi aux trois axiomes une géométrie, ce que les mots points et lignes imposent d'ailleurs à l'imagination. Selon le geste même de Descartes, l'on sait alors que des lignes (algébriques) ne se coupent qu'en un seul point à

condition de ne disposer que de lignes droites². Subsumer droite et cercle sous le seul mot de ligne implique une contradiction dans la mesure où simultanément l'on restreint *a priori* le nombre de points ; de sorte que celle-ci éclate lorsque l'on énonce les trois points oubliés de la figure, c'est-à-dire que l'on prend en compte des nécessaires intersections génériques en deux points d'un cercle et d'une droite³.

La géométrie a bien révélé tout à la fois la cohérence des trois axiomes, c'est l'effet du modèle avec points alignés ou encore cocycliques, et la vanité du modèle triangulaire des sept points. C'est à l'immédiateté de la constatation de cette dernière que je veux m'arrêter ; c'est sur l'impérieuse dénomination des points oubliés que je veux porter l'attention.

Toute la gloire de la géométrie dans la pensée occidentale tient peut-être à sa capacité à dire d'un discours ce que celui-ci a oublié, et à faire surgir la connaissance cachée que ce discours comporte. Une fois recouverte, on qualifiera peut-être cette connaissance mise à jour comme un présupposé de l'évidence, ou comme une vue anthropomorphique, mais il aura fallu alors que le discours soit transcrit *more geometrico*. L'avantage de l'*Ordine geometrico* synthétique que Spinoza adopte pour son Ethique est-il autre que celui de la sécurité d'un inventaire exhaustif de la pensée ? C'est aussi ce que manifeste Descartes en célébrant la synthèse qui permet de voir intégralement, c'est-à-dire sans omission, comment les conséquences sont contenues dans les antécédents. L'auteur de la *Géométrie* fait à cette occasion un reproche de vanité, par oubli possible, à l'analyse, pourtant "vraie voie par laquelle une chose a été méthodiquement inventée" : "car si on laisse échapper, sans y prendre garde, la moindre des choses qu'elle propose, la nécessité de ses conclusions ne paraîtra point"⁴. Sans évoquer le monde philosophique, il suffit de constater que la géométrie se repère, historiquement, comme cette connaissance capable de déceler ses trous de mémoire. Ce qu'on a corrigé d'Euclide au cours des âges, ce sont les manques de sa construction. Il a été comblé, non pas renié. Bien des auteurs ont, à notre siècle, cousu les *Grundlagen der Geometrie* de Hilbert qui clôt le siècle précédent, aux *Eléments* qui remontent au troisième siècle avant Jésus-Christ.

M'intéressent dès lors les procédures adoptées par les géomètres afin d'empêcher l'oubli de quoi que ce soit qui puisse compter, et ce sont plus précisément encore les traces matérielles de ce mouvement de recouvrement que je traque. Quelles sont les marques de l'objectivité en géométrie, entendue ici pour le besoin d'une analyse moins

²On peut certes adopter une seule droite, ou un seul cercle, et y faire figurer deux points au moins. De ce fait, on rend inutilisable l'axiome 1° ; ce qui n'est pas gênant du point de vue de la logique, mais transforme la théorie en bavardage.

³Il serait possible de contraindre cette contradiction dans l'énoncé même des axiomes en leur ajoutant qu'il y a au moins deux lignes, à la façon dont l'axiome 3° a imposé qu'il y ait au moins deux points (ce qui évitait l'insignifiance d'un modèle réduit à une ligne quelconque et à un seul point).

⁴R. Descartes, Réponses aux secondes objections, éd. F. Alquié, *Œuvres philosophiques*, t. II, p. 582.

comme connaissance du réel que comme connaissance fermée sur ses procédures, ses résultats et jusqu'à ses interprétations du réel ?

Dans une telle quête, la figure peut jouer un rôle majeur, ou plus précisément l'articulation entre la figure et le texte démonstratif.

Ce que mémorise le théorème dit de Pythagore

Le plus sûr est de commencer par le théorème en question, c'est-à-dire son énoncé et sa démonstration au livre I des *Eléments* d'Euclide⁵, proposition 47. Il m'a semblé utile de donner une sorte de commentaire de structure de ce théorème dans une colonne qui apparaît à gauche, car la forme canonique d'une démonstration participe de cette bataille contre l'oubli : s'il manque une étape, le repère de ce manque sera en effet automatique.

Énoncé de la proposition
(protase)

*Dans les triangles rectangles,
le carré décrit sur le côté
sous-tendant l'angle droit est
égal aux carrés sur les côtés
contenant l'angle droit.*

Exposition : instanciation de
la donnée, repérée par des
lettres (ecthèse).

Soit le triangle rectangle ABC
ayant l'angle BAC droit.

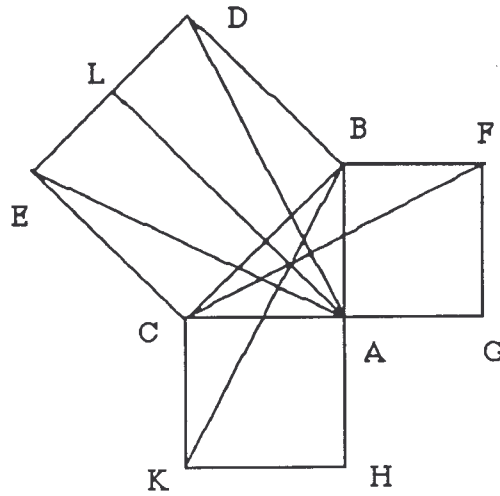
Détermination : instanciation
de l'objet de la recherche
(diorisme).

Je dis que la carré sur BC est
égal aux carrés sur BA, AC.

⁵A été adoptée la traduction qu'en donne B. Vitrac, et j'ai éliminé jusqu'aux précautions de l'érudition pour tenir un texte : *Les Eléments d'Euclide*, PUF, t. 1, Paris.

Figure (schema)

Les lettres de l'exposition et de la détermination sont inscrites, aussi bien que les lignes ou points requis par la construction. La figure est un tout livré à la contemplation (theoria). La position de la figure dans le texte est variable selon les manuscrits ou les imprimeurs : on ne connaît pas les préceptes d'Euclide à ce sujet, ni ne dispose de ses figures.



Construction (kataskeu) : la construction fait appel à des propositions antérieures (Prop. 46 ou 31), dûment signalées, ou à des "demandes" (Dem. 1).

Élément déterminant de la preuve, AL n'est pas présentée comme hauteur, mais comme parallèle aux côtés verticaux du carré sur l'hypoténuse

En effet d'une part que le carré BDEC soit décrit sur BC, d'autre part les carrés GB, HC sur BA, AC (Prop. 46) et que par le point A, soit menée AL, parallèle à l'une quelconque des BD, CE (Prop. 31). Et que AD, FC soient jointes (Dem. 1).

Démonstration (apodexis)

1ère Partie : Egalité de triangles.

La démonstration est menée en parallèle entre la partie gauche de la figure par rapport à AL et la partie droite.

Puisque chacun des angles sous BAC, BAG est droit, alors relativement à une certaine droite : BA, et en un point qui est sur elle : A, les deux droites AC, AG, non placées du même côté, font des angles adjacents égaux à deux droits. Donc CA est en alignement avec AG (Prop. 14). Alors pour la même raison BA est aussi en alignement avec AH.

Et puisque l'angle sous DBC est égal à celui sous FBA car chacun est droit (Dem. 4), que celui sous ABC soit ajouté de part et d'autre : celui sous DBA tout entier est donc égal à celui sous FBC tout entier (Notion Commune 2).

Et puisque, d'une part DB est égale à BC, d'autre part FB à BA, alors les deux DB, BA sont égales aux deux FB, BC, chacune à chacune et l'angle sous DBA est égal à celui sous FBC. La base AD est donc égale à la base FC, et le triangle ADB égal au triangle FBC (Prop. 4).

2ème Partie : Egalité d'aires.

Pour un rectangle, Euclide utilise l'expression de figure oblongue. Le parallélogramme ne fait pas l'objet d'une définition spécifique au livre I. Parler de double d'une aire triangulaire évite d'avoir à mentionner le point intersection X de AL et BC , qui donnerait l'égalité des aires des triangles ABD et XBD .

3ème Partie : Argument de symétrie dans le raisonnement, mais non symétrie au sens géométrique.

4ème Partie : Récapitulation de la démonstration.

Et le parallélogramme BL est double du triangle ABD , car ils ont la même base BD , et sont dans les mêmes parallèles : BD, AL , (Prop. 41). D'autre part le carré GB est double du triangle FBC , car, de nouveau, ils ont la même base FB , et sont dans les mêmes parallèles : FB, GC . Or les doubles de choses égales sont égaux entre eux. Donc le parallélogramme BL est égal au carré GB (Notion Commune 1).

Alors semblablement, AE et BK étant jointes, il sera démontré aussi que le parallélogramme CL est égal au carré HC .

Donc le carré $BDEC$ tout entier est égal aux deux carrés GB, HC , et, d'une part $BDEC$ est le carré qui a été décrit sur BC , d'autre part GB et HC sont les carrés sur BA, AC . Donc le carré sur le côté BC est égal aux carrés sur les côtés BA, AC .

Conclusion (symperasma) :
Elle retourne à la proposition,
sans spécification littérale.
C'est une confirmation.

Donc, dans les triangles
rectangles, le carré sur le côté
sous-tendant l'angle droit est
égal aux carrés sur les côtés
contenant l'angle droit. Ce
qu'il fallait démontrer.

C'est sur la figure que j'entends fixer l'attention, en gardant en tête le fait général qu'elle est capitalisation des notations et des constructions, et donc qu'elle efface les étapes minutieusement suivies par le texte. On remarque alors la sélectivité de ce lieu de mémoire : tous les points déterminés comme des intersections de droites tracées sur la figure ne reçoivent pas de nom. Il y a présence d'un réseau indéfini au centre même de la figure du théorème de Pythagore, mais le regard pas plus que le raisonnement ne cherchent à déterminer si certains points d'intersection sont de deux droites ou de trois, voire plus encore : ce n'est pas l'objectif, et on n'y reviendra même pas une fois achevée la preuve. Parmi toutes les lettres qui interviennent en mémoire de preuve se distingue très nettement la lettre L. Par sa position d'abord, c'est-à-dire lorsque seul un regard global est jeté sur la figure, indépendamment de la lecture même du texte : c'est en effet la seule lettre qui ne désigne pas le sommet d'un carré. Ce sont donc, nommés dans l'énoncé même du théorème, ces trois carrés qui imposent toutes les autres lettres : ils constituent seulement le donné. La lecture de la démonstration confirme que la droite AL est le pivot de la démonstration, et ce en un double sens.

-D'abord parce que cette droite sert de symétrie : c'est une symétrie de raisonnement (ce qui se passe à droite étant analogue à ce qui se passe à gauche, comme le prouve ce que nous avons détaché comme troisième partie de la preuve, et cette symétrie parcourt tout le texte), mais ce n'est pas une symétrie au sens des images de la géométrie (main droite, main gauche). Cette distinction que l'œil perçoit dans la figure aussi bien que l'esprit qui lit la preuve permet l'oubli de ce qui se passe effectivement pour l'intersection de toutes ces droites tracées en vue d'établir des égalités d'aires ou de triangles.

-Ensuite parce que d'emblée, la première construction une fois posé le donné, celle de la droite AL, analyse en deux rectangles le carré construit sur l'hypoténuse : compte tenu de l'énoncé du théorème, un énoncé d'addition ou de synthèse, cette résolution pointe la finalité de la preuve. Il est ainsi indiqué ce qu'il va falloir prouver : chacun des rectangles construit est égal au carré correspondant construit sur chacun des côtés du triangle. La droite AL empêche l'oubli.

Une toute autre démonstration du théorème⁶ nous convaincra du rôle joué par cette droite issue du sommet de l'angle droit et orthogonale à l'hypoténuse, si du moins c'est ainsi que l'on voit la droite AL, ce que n'impose pas le dessin à lui seul, et d'ailleurs le texte euclidien l'associe au côté vertical du carré sur l'hypoténuse. La nouvelle figure à étudier se trouve déjà dans des textes indiens de l'école d'Aryabhata et elle peut se déduire

⁶ Il existe beaucoup de démonstrations du théorème de Pythagore. En 1907, un mathématicien américain, E.S. Loomis, en a dénombré plusieurs centaines, les classant par genre : preuves algébriques (relations linéaires), preuves géométriques (comparaison d'aires), preuves vectorielles et preuves dynamiques. Le livre a été édité en 1927, et reproduit en seconde édition en 1940, puis en 1972 par The National Council of Teachers of Mathematics. Il a l'inconvénient de ne respecter aucun contexte historique, et d'omettre même les sources explicites. C'est un extraordinaire herbier dont les étiquettes auraient disparu.

encore comme cas particulier d'une proposition de Pappus dans la *Collection mathématique*. Je ne serai pas plus précis car je ne cherche pas ici l'histoire, mais la trace d'une commune explication, la preuve qu'un même signe décompose le carré en indiquant l'action à suivre. Volontairement, je mêle à la manifestation de la preuve ce qui me paraît nécessaire d'ajouter comme commentaire.

Sur les côtés du triangle rectangle en A, on construit les carrés ABDE et ACFG comme chez Euclide. Les côtés DE et FG prolongés se rencontrent en H. Joignant H et A on prolonge jusqu'au point K sur BC. Le signalement de la droite pivot, et elle le reste, ne se fait pas en relation directe avec le carré sur l'hypoténuse comme chez Euclide. L'action de la preuve réside ici dans la construction de ce carré. On mène en effet BL et CM parallèles à HK et on joint L et M. Grâce à deux parallélismes, ABLH est un parallélogramme, de même que ACMH. Par conséquent $LB = MC$ et ces deux côtés sont parallèles. Donc LBCM est un parallélogramme. C'est de fait un rectangle puisque l'angle LBC est égal à la somme des angles LBA (égal à BAK) et ABC (égal à KAC), donc l'angle LBC vaut l'angle BAC qui est droit. C'est même un carré, comme on le déduit de l'égalité des triangles rectangles DBL et ABC qui résulte des égalités $AB = DB$ et $AC = DL$ (car $DL = DH - LH = DH - BA = BG - BA = AG = AC$). Voilà donc exhibé le carré sur l'hypoténuse.

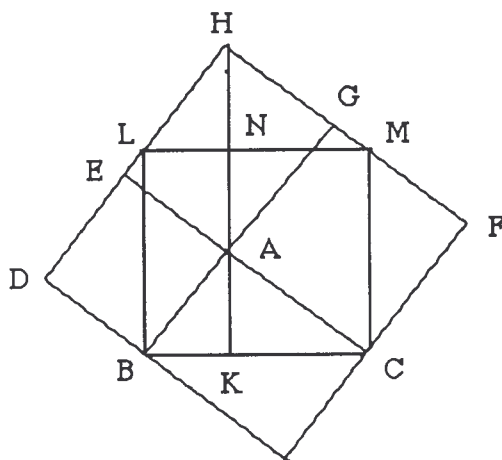


Figure 2

Le reste de la preuve ressemble alors à la démonstration euclidienne, la droite AK divisant toujours en deux rectangles le carré. Le rectangle LBKN a le même aire que le parallélogramme LBAH, qui a la même aire que le carré DBAE. De la même façon, par la même symétrie de raisonnement que chez Euclide, les parallélogrammes NKCM et ACFG ont la même aire. Finalement l'aire du carré sur BC est la somme des aires des carrés sur AB et AC.

Dans les deux textes démonstratifs, c'est une droite construite et nommée qui est organisatrice de preuve. Mais si elle fait mémoire du but à atteindre chez Euclide, tel n'est

pas le cas dans la procédure écrite de l'autre exemple, et à lire les mots le lecteur peut oublier le but. La prolixité des constructions est telle que l'on peut même être tenté de poursuivre telle ou telle propriété des triangles ou quadrilatères évoqués, par exemple les quatre triangles DBL, LHM, MFC et le dernier de base CB dont le sommet n'a pas été nommé. Cette absence de dénomination est un oubli. Un oubli volontaire et qui participe en quelque sorte de la preuve : il ne faut pas voir le carré qui enserme le tout, mais seulement le carré intérieur, celui que divise la droite construite. Il n'empêche, le lecteur de la figure a bien perçu tout le reste : il dispose d'une configuration riche dont il lui faut énumérer les relations et celle de Pythagore apparaît presque mesquine. Pourquoi faudrait-il la privilégier ? Si un texte de géométrie est description du réel des configurations, comment décider de le terminer ? Le cas euclidien évoqué fait oublier tout ce qui ne concourt pas à l'objectif de la preuve.

Une critique de Hegel, ou l'ambition de la mémoire totale

Cette conclusion, qui revient à décrire le classicisme mathématique, peut entraîner une critique puriste. Hegel est particulièrement incisif dans sa *Phénoménologie de l'esprit* lorsqu'il explique à propos de la démonstration du théorème de Pythagore qu'elle n'atteindrait pas la signification qui permettrait d'en faire un moment du résultat. :

En tant que résultat, le théorème est bien un théorème reconnu comme un théorème vrai ; mais cette circonstance surajoutée ne concerne pas son contenu, elle concerne seulement sa relation au sujet connaissant ; le mouvement de la démonstration mathématique n'appartient pas au contenu de l'objet, mais est une opération extérieure à la chose⁷.

Le triangle, objet selon Hegel du théorème, ne reste pas visible tout au long de l'acte démonstratif, "ses parties sont converties en éléments d'autres figures que la construction fait naître en lui" et il y a donc faute d'homogénéité à faire intervenir des rectangles, ces "pièces qui appartenaient à d'autres totalités". La difficulté que soulève Hegel, et ceci indépendamment de la conséquence philosophique qu'il en tire⁸, est surtout une difficulté de mémoire, l'impossibilité qu'il se trouve à isoler dans la preuve un point de départ mémorisable, c'est-à-dire qui soit en adéquation avec l'objectif :

Ainsi la démonstration suit une voie qui commence en un point quelconque sans qu'on sache encore le rapport de ce commencement au résultat qui doit en sortir. Le cours de la démonstration comporte telles déterminations et tels rapports, et en écarte d'autres sans qu'on

⁷C.F. Hegel, *La Phénoménologie de l'esprit*, trad. J. Hyppolite, Aubier Montaigne, Paris, préface, p. 36.

⁸A la façon dont le philosophe extrait de la mathématique un moment de la démonstration ou de l'énonciation, je n'essaie pas plus de relier le reproche hégélien à son acte philosophique qu'il explique pourtant dans la même expression "la décomposition du triangle rectangle en est aussi la négation ; on devrait le nommer une fausseté du contenu au même titre que dans le mouvement du concept la disparition des pensées tenues pour fixes" (*op. cit.*, p. 37).

puisse se rendre compte immédiatement selon quelle nécessité cela a lieu ; une finalité extérieure régit un tel mouvement⁹

Si nous avons précisément perçu l'effort d'oubli et de mémoire de la démonstration euclidienne, c'est que nous l'avons isolée ; nous en avons fait un tout. La perspective change si l'on cherche, par exemple, à déterminer ce qu'il y a de triangle rectangle dans le théorème de Pythagore et dans la démonstration proposée. Le savoir que représente ce théorème qualifie quel objet ? Des présentations toutes différentes montrent alors la variété des réponses possibles, sans qu'il soit nécessaire de changer un mot à l'énoncé même. J'adopte ainsi la démonstration donnée dans un *Cours complet de Mathématiques pures* dû L.B. Francœur, dans sa 3e édition en 1828¹⁰. Dès le départ apparaît la droite divisant la figure, mais la division cette fois n'agit plus sur un carré, et d'ailleurs dans cette présentation le théorème n'est pas énoncé à l'avance : il est conséquence de l'analyse qui est faite du triangle rectangle.

"Soit un triangle ABC rectangle en A ; si l'on abaisse sur l'hypoténuse BC la perpendiculaire AD, les deux triangles partiels ABD, ADC seront semblables entre eux, et à ABC. Car l'angle B est commun aux triangles ABD et ABC ; outre l'angle droit, en D pour l'un, et en A pour l'autre : il suit donc de là que l'angle C est égal à BAD, $C = \alpha$ ". Comme chez Euclide, la symétrie de raisonnement est avancée pour exprimer ce qui se passe à droite de AD. "De même C est commun aux triangles ADC et ABC, outre l'angle droit ; ainsi $\beta = B$ ".

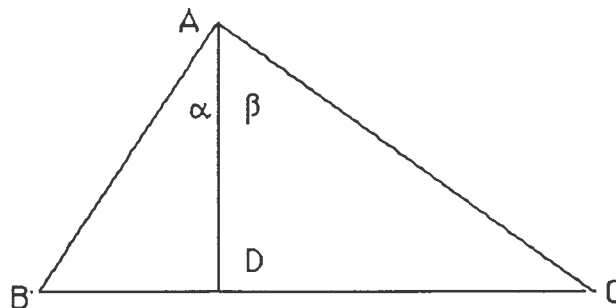


Figure 3

Signe d'une pédagogie, la démonstration est redoublée : "Les triangles ABD et ADC ont d'ailleurs les côtés perpendiculaires". L'auteur poursuit en utilisant un tout autre langage, celui des calculs de proportions. "En formant des proportions avec les côtés homologues, on trouve que,

1°/ La perpendiculaire AD est moyenne proportionnelle entre les deux segments de l'hypoténuse BC.

⁹op. cit. , p. 38.

¹⁰pp. 256-257.

Car les triangles ABD et ADC donnent $\frac{BD}{AD} = \frac{AD}{DC}$, d'où $AD^2 = BD \times DC$.

2°/ Chaque côté AB de l'angle droit est moyen proportionnel entre l'hypoténuse entière BC et le segment BD correspondant.

Car les triangles ABD, ABC donnent $\frac{BD}{AB} = \frac{AB}{BC}$, ou $AB^2 = BD \times BC$;

ADC et ABC donnent $AC^2 = DC \times BC$.

3°/ Le carré de l'hypoténuse BC est au carré d'un des côtés BA de l'angle droit, comme l'hypoténuse BC est au segment BD correspondant à ce côté.

Cela suit de l'équivalence $AB^2 = BD \times BC$, divisée par BC^2 , puisqu'on a $\frac{AB^2}{BC^2} = \frac{BD}{BC}$.

4°/ Le carré de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des deux autres côtés. En effet, ajoutant les équations.

$$AB^2 = BD \times BC,$$

$$AC^2 = DC \times BC,$$

on trouve

$$AB^2 + AC^2 = BC(BD + DC) = BC^2.$$

Désignant par a, b, c les côtés opposés respectivement aux angles A, B, C, a étant l'hypoténuse, on a :

$$a^2 = b^2 + c^2$$

Cette proposition, la 47e d'Euclide, et la plus importante de toute la Géométrie, apprend à trouver la longueur de l'un des côtés de tout triangle rectangle, connaissant les deux autres".

Ainsi, c'est subrepticement que cette "importante" proposition fait son apparition dans le texte de Francœur : elle est comme un savoir révélé au terme d'une procédure régulière qui ne pouvait qu'apporter une relation, mais peut-être une autre relation que celle sur les carrés des côtés du triangle rectangle. Ce n'est en tout cas pas la démonstration de la proposition 47 du livre I d'Euclide qui est ici suivie. L'esprit est celui d'une autre démonstration euclidienne, celle qui survient au livre VI des *Eléments* à la proposition 31. Elle s'énonce de façon très générale :

Dans les triangles rectangles, la figure sur le côté sous-tendant l'angle droit est égale aux figures sur les côtés contenant l'angle droit, semblables et semblablement décrits.

A disparu dans l'énoncé tout privilège accordé aux carrés. C'est la similitude qui est le "caractère causal" comme le dit Bachelard, qui précise qu'ainsi est découverte la "cause rationnelle" du théorème. Il se passionne au point de reprendre son discours en termes platoniciens :

Sur les carrés, on ne voit pas la portée de la pythagoricité, la hiérarchie de l'idée pythagoricienne. Sur le fond de la caverne, sur le tableau noir, on ne voit que l'ombre d'une

grande vérité intelligible. Le carré n'est qu'un accident, c'est la similitude, « idée abstraite », qui donne la loi : la forme abstraite porte la pleine lumière¹¹.

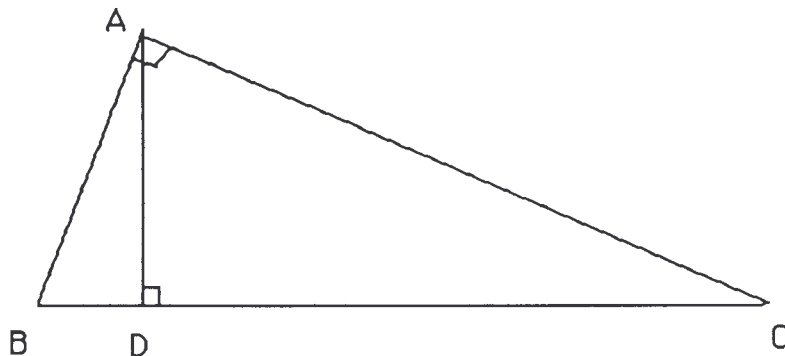


Figure 4

Si la démonstration de la proposition 31 confirme le jeu de la similitude, il n'en reste pas moins que la construction de la droite AD est le déclencheur de la preuve. Il suffit certes de voir que les triangles rectangles BDA, ADC et BAC sont semblables. En particulier que valent les proportions qui se déduisent aisément d'une bonne énumération des sommets homologues :

$$\frac{BD}{BA} = \frac{BA}{BC},$$

Est ainsi énoncé le fait que le côté BA est moyenne proportionnelle entre le "petit côté" BD et l'hypoténuse BC.

$$\frac{BD}{BC} = \left(\frac{BA}{BC}\right)^2,$$

Par ailleurs, des figures semblables construites sur BD et BA ont la même aire : tel est l'effet quant aux aires d'un résultat de similitude démontré précisément au livre VI. Ce que l'écriture moderne indique en notant F_{BD} l'aire d'une figure construite sur BD, et semblablement les autres figures semblables construites sur les autres côtés,

$$\left(\frac{BA}{BC}\right)^2 = \frac{F_{BA}}{F_{BC}}.$$

La liaison des résultats acquis procure la proportion,

$$\frac{BD}{BC} = \frac{F_{BA}}{F_{BC}}.$$

Par la symétrie du raisonnement, ou l'indifférenciation de la considération des deux côtés de l'angle droit, on a aussi bien

$$\frac{DC}{BC} = \frac{F_{AC}}{F_{BC}}.$$

¹¹ G. Bachelard, *Le rationalisme appliqué*, Paris, PUF, 1949, p. 94.

Donc, en additionnant ces proportions "réduites au même dénominateur", et tenant compte du fait que sur l'hypoténuse du grand triangle rectangle se lit la somme, $BD + DC = BC$, on déduit de cette addition de longueurs, "l'addition" générale ou synthèse des figures

$$F_{DA} + F_{AC} = F_{BC}.$$

Dès lors, le théorème de Pythagore peut provenir de la seule contemplation de la figure 4, une fois compris le rôle des figures semblables, c'est-à-dire la pythagoricité au sens de Bachelard. Il suffit de renfermer ces figures annexes à l'intérieur du triangle, individualisant sur BC, le triangle BAC, sur AB le triangle BDA et sur AC le triangle ADC. Tous semblables et, comme le montre la figure, évidemment liés par une somme quant à leurs aires.

$$\text{Aire (Tr BDA)} + \text{Aire (Tr ADC)} = \text{Aire (Tr ABC)}.$$

Puisque les aires sont proportionnelles au carré des longueurs sur lesquelles elles sont construites, cette addition des aires donne aussitôt l'addition pythagoricienne des carrés.

$$AC^2 + AB^2 = CB^2$$

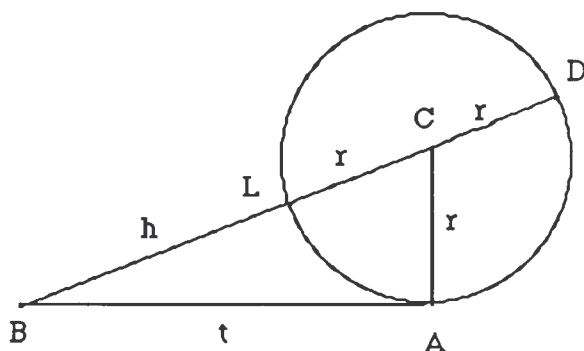
Bachelard conclut de cette vision - on aura perçu le rôle de la figure interprétée - que le théorème de Pythagore perd son "privilège historique", au profit d'un "privilège épistémologique". Car, dit-il vient l'histoire scientifique telle qu'elle aurait dû être.

Il faut beaucoup de pensées -et de pensées en ordre- pour voir que le triangle rectangle pourvu de sa hauteur n'est autre que le germe replié de la pythagoricité, le germe de l'auto-pythagoricité la plus pure et la plus complète.

Voilà bien la preuve dont Hegel rêvait, le triangle rectangle étant le seul objet apparent qui sert à sa propre décomposition. La droite AD est encore organisatrice de preuve, mais à condition de lire avec en tête le schéma de la similitude. Comment celui-ci peut-il figurer sur la figure ? Comment celle-ci peut-elle être en adéquation de sens à son objet. La droite AD divise bien le triangle rectangle de départ, mais il faut interpréter, ou dit autrement calculer, le passage des aires aux côtés. Concrètement, et il serait facile de le montrer en utilisant de façon systématique les manuels, la mémoire de la similitude tient au seul tracé de la hauteur AD dans la figure, sans prolongation. Celle-ci sert à découper un carré et ne peut que faire référence à la preuve de la proposition 47 du livre I des *Éléments* ; faute de division en deux parties à identifier, la prolongation n'aurait aucun sens pour des figures semblables sur les trois côtés qui ne soient pas des carrés. C'est donc l'oubli de la prolongation qui oriente la preuve ; je ne crois pas que l'on gagne quelque chose à dire, positivement, que c'est la mémoire d'une hauteur limitée au seul triangle.

Eclairons par une autre démonstration encore du théorème de Pythagore, une démonstration pour laquelle la hauteur a totalement disparu. C'est celle que

l'*Encyclopédie* de Diderot et d'Alembert choisit à son article hypoténuse, localisation quelque peu surprenante pour le théorème¹².



Le triangle rectangle porte un cercle, dont le centre est l'un des sommets, et le rayon le côté correspondant, de sorte que l'autre côté est une tangente au cercle. La propriété métrique mise en service est celle de la puissance du cercle¹³, en l'occurrence $BL \times BD = BA^2$. L'écriture avec $BC = h$ pour l'hypoténuse, et r pour le rayon du cercle, donne

$$(h+r)(h-r) = t^2,$$

qui se lit aussitôt comme $h^2 = t^2 + r^2$. Voilà donc une forme du théorème de Pythagore dans laquelle la hauteur issue de l'angle droit ne joue aucun rôle : la figure en portant trace des lettres désignant des longueurs indique le but recherché, une relation entre r , h et t . Aucune indication, signe de mémoire, ne vient privilégier la nature de cette relation, dont l'existence est assurée par la possibilité même de dessiner la figure. Son obtention est affaire de patience et d'énumération de toutes les formules¹⁴.

Mémoire d'une preuve, oubli de sa trace

La seconde démonstration euclidienne du théorème de Pythagore, celle du livre VI où jouent les figures semblables, ne fait pas mention de la première du livre I. Cela peut paraître surprenant, et même scandaleux dans la mesure où le résultat de la seconde généralise celui de la première. Des variantes ont donc été proposées et les manuscrits par lesquels le texte d'Euclide nous a été transmis adoptent tous une démonstration alternative à celle de la proposition 31 du livre VI, démonstration dûment fournie par l'éditeur moderne du texte grec, travaillant avec toute l'érudition de la tradition philologique germanique. Ladite preuve met à égalité le premier théorème de Pythagore et la similitude. C'est par cette dernière que l'on écrit les deux proportions :

¹²L'article est signé de l'abbé de la Chapelle.

¹³ La propriété d'invariance de la puissance du cercle, indépendamment de la sécante adoptée, se démontre facilement à partir du théorème de Pythagore. Inverser les rôles, et démontrer Pythagore par la puissance, c'est montrer la mathématique comme lieu d'équivalences, sans objets primitifs.

¹⁴Dans sa *Géométrie de position*, en 1803, Lazare Carnot poussera ce point de vue à son extrémité en fournissant pour chaque configuration des tableaux de propriétés/rerelations.

$$\frac{BC^2}{BA^2} = \frac{F_{BC}}{F_{BA}} \quad \text{et} \quad \frac{BC^2}{AC^2} = \frac{F_{BC}}{F_{AC}}.$$

La relation du livre I intervient pour fournir :

$$BC^2 = BA^2 + AC^2.$$

Donc, se déduit "l'addition" des figures générales :

$$F_{BC} = F_{BA} + F_{AC}.$$

A bien voir, si figure il doit y avoir pour cette démonstration, il n'y a besoin que de celle représentant le triangle rectangle, et la dénomination de ses trois sommets permettant l'identification de l'hypoténuse. De fait, la majorité des éditions d'Euclide ne donne pas une nouvelle figure et sert donc à nouveau celle de la démonstration par similitude. Celle qui comporte précisément la hauteur restreinte au seul triangle. Cette mémoire est une gêne, ni indicatrice de preuve, ni rappel d'une démonstration antérieure puisque le premier théorème de Pythagore exigeait la hauteur prolongée. Et cette gêne fait alors prendre conscience du changement de statut accordé à ce premier théorème de Pythagore : il ne porte plus les carrés comme figures géométriques, mais la relation des carrés $BC^2 = BA^2 + AC^2$. C'est l'universalité de cette relation qui justifie la diversité des figures, carrés, pentagones, ou autres du nouveau théorème. Ces figures ne sont que des illustrations possibles de la relation ; parce qu'elle est quantitative, par fonction elle ne peut plus être lue comme une géométrie.

Mon propos n'est pas d'entrer dans le débat de savoir si la nouvelle "pythagoricité" dont la nature est quasiment algébrique est aussi euclidienne que la "pythagoricité" très délimitée par Bachelard. C'est un beau débat pour les effets duquel la philologie doit venir à la rescousse de l'interprète, selon le travail typique de l'œuvre d'histoire des mathématiques. C'est un débat passionnant, pour lequel il y a aussi bien passion, avec le refus ou la volonté d'inscrire une algèbre dans la pensée ancienne. On ne niera certes pas qu'il y ait un style algébrique, et même un style analytique, mais la question est d'en faire remonter la création à Euclide. Pour la mémoire que nous traquons, la question du "premier qui" est cependant secondaire : il s'agissait de parcourir une trace.

Reprendrons-nous alors tout ce qui précède pour lui conférer la cohérence académique des citations précises, des chronologies, et constituer ainsi un savoir sur le savoir matérialisé de géométrie. Ou bien choisirons-nous d'aller de l'avant en montrant comment ont évolué les signes matériels de l'oubli et de la mémoire dans les géométries axiomatisées du XX^e siècle ? Ne serait-il pas préférable d'adopter d'abord la même attitude pour l'algèbre, c'est-à-dire traquer ce qui dans les notations et leur disposition permet l'organisation des preuves. Indubitablement, et pour toutes ces recherches, on sera confronté à la difficulté d'avoir à dire la postérité d'une preuve, d'un résultat, d'un style.

J'ai pu en faire voir la nécessité en choisissant une démonstration aussi élémentaire que celle du théorème dit de Pythagore où se conjuguent l'oubli et la mémoire.