



La théorie des erreurs et son application à la reconstruction des tracés perspectifs

Dominique Raynaud

► To cite this version:

Dominique Raynaud. La théorie des erreurs et son application à la reconstruction des tracés perspectifs. L'Oeuvre et l'artiste à l'épreuve de la perspective, Sep 2002, Rome, Italie. pp.411-430. halshs-00006244

HAL Id: halshs-00006244

<https://shs.hal.science/halshs-00006244>

Submitted on 26 Nov 2005

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

La théorie des erreurs et son application à la reconstruction des tracés perspectifs

Dominique Raynaud¹

Résumé. La contribution se propose de réduire le nombre d'épures perspectives qui peuvent être tirées d'une même oeuvre picturale lorsque les opérateurs suivent des méthodes empiriques. Les erreurs de reconstruction sont réductibles par des méthodes rationnelles, qui consistent d'une part à suivre un protocole de travail rigoureux, d'autre part à procéder à un calcul d'erreur permettant le choix d'un minimum. À titre d'illustration, cette méthode est appliquée à une fresque padouane du XIV^e siècle de Giusto de' Menabuoi qui présente deux points de fuite centraux définis avec une erreur faible (ce qui réfute au passage l'hypothèse selon laquelle les peintres du XIV^e siècle n'auraient pas utilisé de points de fuite).

Mots-clefs. Perspective, reconstruction, métrologie, erreur systématique, erreur aléatoire, correction.

La question des erreurs de reconstruction des tracés perspectifs, à laquelle est consacrée cette communication, est peu traitée dans la littérature. Elle mérite pourtant attention car on ne saurait tirer de conclusions valides sur l'usage des méthodes perspectives qu'en tenant compte des erreurs de l'opérateur.

Voici le plan que je suivrai : je dirai tout d'abord quelques mots des écarts observables dans la reconstruction des tracés. Je rappellerai ensuite les principes de la théorie des erreurs, appliquée au cas de la reconstruction des tracés perspectifs. Je proposerai enfin une méthodologie de travail, illustrée par la reconstruction d'une fresque padouane de Giusto de' Menabuoi.

Précisions importantes : a) cet exposé est limité à la recherche du point de fuite² : on devrait en extrapoler les résultats au tracé du raccourci ; b) bien qu'il m'ait semblé utile de traiter en détail le cas des reconstructions indirectes, la méthode proposée doit être appliquée

¹ Dominique Raynaud, Université Pierre-Mendès-France (Grenoble) et Laboratoire d'architecturologie et de recherches épistémologiques sur l'architecture (Paris), dominique.raynaud@upmf-grenoble.fr.

² Les termes de « fuyantes », « point de fuite », « point de distance », « horizon », etc. seront utilisés ici en tant qu'ils permettent d'indexer commodément les figures. Il ne faut donc leur prêter aucune *fonction sémantique*. On sait, par exemple, que le mot « point de fuite » n'a pris de sens qu'à partir de Jacopo Barozzi da Vignola.

sans distinction aux reconstructions directes (faites *in situ*) et aux reconstructions indirectes (qui utilisent des techniques de reproduction) ; c) certains principes connus, ou aisément accessibles, sur l'origine des erreurs seront laissés sans discussion. Ainsi, chacun doit savoir que, toute opération, mécanique ou humaine, étant source d'erreurs, l'opérateur doit réduire le nombre d'intermédiaires entre l'oeuvre et l'épure réalisée.

1. Le problème des erreurs de reconstruction

1.1. Importance du problème

On constate souvent des écarts importants de tracé en comparant plusieurs reconstructions d'une même perspective. *Cela signifie que toute reconstruction est opérateur-dépendante.* Prenons par exemple *Le Miracle de l'hostie profanée* de Paolo Uccello, une peinture sur bois datant de 1468 ca. (Urbino, Galleria Nazionale delle Marche), et rapprochons trois reconstructions de la scène de *L'Holocauste* (Sindona et Rossi 1970, Kemp 1990, Raynaud 1998b, cf. *Planche 1*).

1° Sindona admet l'existence d'un point de fuite unique ; les deux autres opérateurs, une zone de convergence plus approximative des fuyantes ;

2° Kemp admet un faisceau de diagonales créant un point de distance Z sur l'horizon (indice d'une méthode de réduction correcte) ; Sindona admet l'existence d'une diagonale de vérification ; le troisième opérateur, un réseau perspectif concave (indiquant une réduction fausse).

Nous sommes ici au coeur du problème. Le fait que divers opérateurs puissent tirer des conclusions différentes, sinon contradictoires, à partir d'une même oeuvre est un indice que le problème de l'erreur en perspective n'a jamais suscité l'attention qu'il mérite.

En premier lieu, certains opérateurs examinent la perspective à partir de l'oeuvre définitive, d'autres l'étudient à partir de l'épure préparatoire, visible aux incisions pratiquées dans le support. En second lieu, les opérateurs travaillent à des échelles différentes. La solution pour réduire le désaccord semble naturellement de privilégier un travail d'inspection des traces matérielles à l'échelle grandeur, mais cette option n'efface pas toutes les difficultés. Ainsi par exemple :

1° Les fuyantes qui convergent vers les points de fuite V_1 , V_2 , V_3 , n'ont finalement pas été utilisées par Paolo Uccello. Le tracé préparatoire n'interférant pas avec le tracé définitif, il est aisé de conclure que l'artiste a abandonné son idée de départ. Le problème est plus complexe quand le tracé définitif interfère avec l'épure préparatoire. Rien ne permet de dire alors s'il faut privilégier l'examen du tracé initial ou du tracé définitif. L'écart entre les deux étapes se laisse interpréter en des sens opposés : l'artiste peut avoir suivi le tracé préparatoire

sans rigueur (ce qui donne plus d'importance au tracé initial) ; il peut avoir corrigé volontairement l'épure préparatoire (ce qui donne plus de poids au tracé définitif). En l'absence de documents — et chacun sait que cette partie du travail est fort mal documentée — il est difficile de départager ces hypothèses.

2° Dans le cas examiné, la convergence parfaite des diagonales au point Z semble indiquer une réduction exacte. Toutefois, un examen plus attentif permet de démentir ce diagnostic. On observe, *Planche 1.2*, que les deux diagonales de gauche ne passent pas par tous les angles des carreaux. Dans ces conditions, la régularité de la perspective de *L'Holocauste* est une projection de l'opérateur³.

Cette communication n'aura pas d'autre but que de réduire les sources de désaccord entre tous les opérateurs sur une base rationnelle. Cela me donnera l'occasion de revenir sur le statut de l'erreur en perspective examiné ailleurs (Raynaud 1998a, 1998b) et d'explicitier la procédure permettant d'en réduire les effets.

1.2. Métrologie et théorie des erreurs

En métrologie, et dans toutes les sciences dans lesquelles on procède à des mesures, *on nomme erreur la différence entre la valeur d'une mesure et la valeur théorique (ou vraie valeur) que l'on obtiendrait avec des instruments de mesure et un opérateur parfaits*. L'idée centrale de la théorie des erreurs est que l'opérateur, quels que soient ses efforts, ne peut jamais parvenir à un résultat idéal. L'erreur est inséparable de toute appréciation d'une grandeur physique car aucune mesure, même la plus soigneuse, n'a une précision infinie. L'opérateur doit intégrer l'erreur à son raisonnement.

Notons la vraie valeur x_0 et la valeur approchée x . Une mesure idéale serait $x = x_0$. Le dispositif de mesure étant imparfait et l'opérateur pouvant introduire un terme perturbateur, il s'ensuit que $x \neq x_0$. Si l'on veut obtenir un résultat précis, on doit procéder à plusieurs mesures qui donneront les valeurs $x_1, x_2, \dots, x_n$. On indiquera le résultat par une valeur unique : $x \pm \Delta x$, le terme Δx , nommé *incertitude*, encadrant l'erreur de mesure. Il existe deux grands types d'erreur.

³ Les techniques photogrammétriques, réputées pour leur fidélité, n'exemptent pas davantage l'opérateur de tenir compte des erreurs de construction. On notera par exemple que certaines reconstructions de la *Trinité* de Masaccio, qui utilisent des techniques photogrammétriques et informatiques très sophistiquées, concluent à l'exactitude de la perspective alors que l'oeuvre laisse apparaître à la fois des erreurs accidentelles de tracé et des erreurs touchant aux principes perspectifs suivis par Masaccio (pour une synthèse récente, cf. Raynaud, 2003b).

L'*erreur aléatoire* (ou accidentelle) est celle qui ne tient pas au programme de mesure mais à son exécution défectueuse. Les erreurs aléatoires, qui sont généralement imputables à l'opérateur, se reconnaissent à ce qu'elles se produisent indistinctement dans les deux sens : elles occasionnent une dispersion des résultats autour d'une valeur moyenne. L'erreur aléatoire peut être contenue en réitérant la mesure. Dans une série de mesures, et en l'absence d'erreur systématique, la moyenne arithmétique des différents résultats de la mesure est appelée *valeur la plus probable* $\bar{x}$. Une estimation de la dispersion autour de la valeur centrale est donnée par l'*écart moyen* e ou, le plus souvent, par l'*écart type* σ . Les fréquences f_i satisfaisant la relation $\sum_i f_i = 1$, on a :

$$\bar{x} = \sum_i f_i x_i \quad e = \sum_i f_i |x_i - \bar{x}| \quad \sigma = \sum_i f_i (x_i - \bar{x})^2$$

Un des résultats bien connus de la théorie des erreurs est que, si l'on porte sur un graphique, en abscisses la valeur des résultats, en ordonnées le nombre de résultats compris dans un intervalle de valeurs, on obtient une distribution normale de Laplace-Gauss. La valeur la plus probable $\bar{x}$ est l'abscisse du sommet de la cloche. L'erreur est généralement assimilée à $\Delta x = \pm 2\sigma$, car 95 % des valeurs sont comprises dans l'intervalle $(\bar{x} - 2\sigma, \bar{x} + 2\sigma)$ (*Planche 2.1*).

L'*erreur systématique* est celle qui provient d'une cause permanente, liée à la méthode utilisée ou au réglage défectueux des instruments de mesure. Les erreurs systématiques se reconnaissent à ce qu'elles se produisent toujours dans le même sens. Au contraire de l'erreur aléatoire, qui peut être éliminée par répétition, l'erreur systématique subsiste dans les mesures les plus soigneuses. La seule stratégie pour la réduire consiste à retourner ou à inverser tout ce qui peut l'être dans le montage expérimental.

On appelle *exactitude* une combinaison de justesse et de précision. La *précision* se définit par rapport à l'erreur aléatoire : elle indique une faible dispersion des mesures autour de la valeur centrale. La *justesse* est définie par rapport à l'erreur systématique : elle exprime le degré auquel les résultats ne sont pas biaisés.

2. Protocole de travail

Beaucoup d'*erreurs extrinsèques* peuvent être évitées si l'opérateur travaille dans des conditions rigoureuses qui doivent être ajustées aux techniques de reconstruction utilisées.

J'étudierai ici le cas, relativement défavorable, d'une reconstruction perspective à la règle⁴. Plutôt que de décrire une à une les erreurs liées à ce contexte opératoire, je supposerai que l'opérateur procède dans des conditions idéales qui seront exposées sous forme de protocole de travail.

2.1. Correction des erreurs aléatoires

1° Si l'opérateur utilise une reproduction photographique, il pensera à contrôler l'absence d'*aberration chromatique*⁵ et d' *aberrations géométriques* . Ces dernières sont classées en cinq types selon les coefficients intervenant dans l'expression de l'écart à l'optique de Gauss⁶. Le coefficient proportionnel à ρ_0^3 caractérise l'aberration de sphéricité ⁷.

⁴ Les reconstructions informatiques, très en vogue aujourd'hui, effacent certaines erreurs extrinsèques, mais en font surgir de nouvelles (pixelisation de l'image). Par ailleurs, ce nouveau contexte opératoire ne change rien au problème des erreurs intrinsèques qui restent entièrement dépendantes du jugement de l'opérateur.

⁵ L' *aberration chromatique* se produit en lumière blanche (non-monochromatique) : les radiations bleues, qui sont plus réfringibles, convergent davantage que les radiations rouges en provoquant un étalement du point focal sur l'axe optique. On note alors une dispersion de la lumière sur le bord des objets. Cette aberration est corrigée par une combinaison de verres crown et flint (système achromatique).

⁶ Un système optique est *rigoureusement stigmatique* s'il transforme un faisceau homocentrique en un autre (les centres sont des points conjugués). Du point de vue pratique, la condition de stigmatisme rigoureux ne présente guère d'intérêt. Il suffit que le système optique transforme un point-objet en une tache de diamètre inférieur à la limite de résolution du récepteur. C'est pourquoi on peut utiliser des dioptries sphériques répondant à la condition de stigmatisme approché. L'approximation de Gauss est l'ensemble des conditions permettant d'obtenir une image de bonne qualité : un système est approximativement stigmatique s'il reçoit des rayons incidents paraxiaux, peu éloignés de, et peu inclinés sur l'axe optique. L'écart à l'optique de Gauss s'écrit comme une somme de nombres complexes où interviennent r_0 (distance de l'objet à l'axe optique) et ρ_0 (angle du rayon incident par rapport à l'axe optique).

⁷ L' *aberration de sphéricité* varie comme le cube de l'angle du rayon incident par rapport à l'axe ; elle se manifeste lorsque le faisceau incident est très ouvert. Les rayons marginaux convergent davantage que les rayons centraux en produisant une caustique au niveau du foyer. En avant du point de convergence des rayons paraxiaux, l'image d'un point-objet est rendue par un cercle centré (projection de la nappe tangentielle et de la nappe sagittale de la caustique sur le plan image). L'aberration sphérique est réduite par l'utilisation de doublets associant une lentille convergente et une lentille divergente.

Les deux coefficients linéaires en r_0 et quadratiques en ρ_0 traduisent l'aberration de coma⁸. Les deux coefficients quadratiques en r_0 et linéaires en ρ_0 caractérisent quant à eux respectivement l'astigmatisme⁹ et la courbure de champ¹⁰. Enfin, le coefficient en r_0^3 représente la distorsion¹¹.

2° L'opérateur procédera à la reconstruction sur un plan de travail recevant un éclairage nominal $E \geq 1500$ lux¹².

3° Il réduira les ombres et évitera les sources de contraste, de réflexion et d'éblouissement dans la zone de travail.

4° Il utilisera de préférence un film plastique comme feuille de report, l'opacité des calques végétaux entraînant une dispersion du tracé autour de la vraie valeur.

5° Il fixera rigidement la feuille de report au matériel étudié, et ne laissera pas la main

⁸ La *coma* se manifeste quand l'objet est distant de l'axe optique et les rayons incidents très inclinés sur l'axe.

Elle est la somme de deux facteurs qui sont phénoménologiquement associés parce qu'ils opèrent dans le même plan image. Un point-objet est rendu par une tache en forme de goutte ou de comète (d'où le nom de cette aberration).

⁹ L'*astigmatisme* apparaît lorsque les rayons incidents sont inclinés sur l'axe et l'objet très éloigné de l'axe optique. La convergence des rayons n'est alors plus ponctuelle : elle se fait sur deux segments perpendiculaires (focale sagittale et focale tangentielle) séparés par la distance d'astigmatisme. Selon la position du plan image, un point-objet sera rendu par une tache elliptique plus ou moins prononcée.

¹⁰ La *courbure de champ* intervient dans les mêmes conditions que l'astigmatisme. Elle signifie que l'image géométrique d'un objet plan est une surface courbe qui ne coïncide avec le plan focal qu'au point d'intersection de l'axe optique. En ce cas, la partie centrale de l'image est nette, la zone marginale est floue.

¹¹ La *distorsion* affecte l'image gaussienne d'une quantité proportionnelle au cube de la distance de l'objet à l'axe optique. Elle dépend de la taille apparente de l'objet. Cette aberration peut être mise en évidence en interposant un diaphragme sur l'axe optique. On observe alors une courbure des droites tangentielles de l'objet : distorsion négative « en barillet » lorsque le diaphragme est placé en avant de la lentille ; distorsion positive « en coussinet » quand il est placé en arrière de la lentille. Cette aberration est corrigée par les objectifs rectilinéaires, composés d'un jeu de lentilles disposées de part et d'autre du plan du diaphragme.

¹² Un niveau d'éclairage insuffisant peut être une source d'erreur importante. Chacun sait que seuls les cônes, qui fonctionnent en vision photopique, permettent la vision des détails. En ambiance photopique, un éclairage fort produit le myosis et par conséquent l'utilisation restrictive des cellules rétinienne fovéales : l'acuité est alors favorisée. Parallèlement, le myosis opère une réduction de champ qui élimine l'aberration sphérique.

au contact de la feuille¹³.

2.2. Correction des erreurs systématiques

1° Avant de procéder à la reconstruction, l'opérateur vérifiera la planéité du plan de travail et la rectitude de la règle.

2° Il travaillera sur plan horizontal pour éviter les effets de la pesanteur¹⁴.

3° Il veillera à ne pas utiliser de photocopie¹⁵.

4° Lors du tracé, l'opérateur maintiendra l'axe de vision perpendiculaire au plan de travail et à la règle¹⁶.

5° Il maintiendra le stylo perpendiculaire à la feuille de report.

6° Les fuyantes seront toujours tracées de l'arête visible de l'objet vers le point de fuite¹⁷.

¹³ La main est en effet une source de chaleur et d'humidité susceptible de modifier la géométrie de la feuille de report durant la reconstruction.

¹⁴ Le travail sur plan incliné induit une tendance à la chute du point de fuite, par suite du poids propre de la règle. Ce facteur d'erreur est d'autant plus sensible que la règle est de grandes dimensions et que le plan de travail est vertical. Cette erreur limite par exemple les possibilités de reconstruction d'une fresque *in situ*. L'étude expérimentale est à même d'appuyer la recommandation selon laquelle la reconstruction doit se faire à l'horizontale. Supposons (*Planche 2.2*) que l'opérateur doive prolonger un segment AB (arête visible de l'objet) jusqu'en F (point de fuite) à l'aide d'une règle de 600 g (tare uniformément répartie) et d'un stylo d'épaisseur normalisée $e = 0,20$ mm. Soit $AB = 40$ mm, $AF = 1000$ mm. Déterminons la position de F , l'alignement étant réalisé par la méthode de l'égal liseré clair (*cf. infra*, 3.1.1), le point F étant tracé « en aveugle » et la règle retirée entre chaque détermination. En procédant à deux séries de mesures sur plan horizontal (1) puis sur plan incliné à 45° (2), on note que les résultats de la première série suivent une loi normale centrée (1), alors que ceux de la deuxième série adoptent une distribution bimodale (2) : un groupe important de valeurs subit l'effet de la pesanteur, l'autre groupe résulte selon toute vraisemblance de la compensation tonique de la gravité (*Planche 2.3*).

¹⁵ L'usage de photocopieurs doit être prohibé, car le système d'entraînement de la feuille peut occasionner une dilatation du tracé dans le sens de roulement et des déformations. L'opérateur veillera au moins à tester la géométrie du photocopieur en introduisant une page sur laquelle sont tracés une diagonale et un grand carré. Il vérifiera sur la copie que les côtés du carré sont égaux (*vs.* dilatation) et que la diagonale est rendue par une droite (*vs.* déformation).

¹⁶ Sans quoi se produit l'erreur de parallaxe.

¹⁷ Si l'opérateur trace une fuyante en partant du point de fuite, il suit un ordre déductif qui risque d'accentuer sans raison la cohérence du tracé perspectif.

3. Réduction des erreurs simples

Même si l'opérateur suit un protocole de travail idéal, le tracé est affecté par certaines erreurs. Ce sont les *erreurs intrinsèques* que l'opérateur ne peut en aucune manière éviter — quelle que soit la méthode utilisée — mais qu'il peut s'efforcer de minimiser.

3.1. Erreurs systématiques

1. *Le tracé à la règle* induit une erreur spécifique : l'épaisseur du stylo normalisé provoque un décalage du trait par rapport à l'alignement optique qui est pris sur le bord de la règle. Le tracé n'a donc pour propriété que de conserver le parallélisme. Cette erreur est par ailleurs dépendante de la méthode suivie. La première méthode consiste à recouvrir le trait de l'oeuvre par la règle puis à translater celle-ci de manière à dégager le plus petit liseré constant dans l'épaisseur du trait (*méthode de l'égal liseré sombre*) ; l'autre à positionner la règle sous le trait puis à ajuster le plus petit liseré constant entre le trait et la règle (*méthode de l'égal liseré clair*) (Planche 2.4). Dans les deux cas, la largeur du liseré l dépend du pouvoir séparateur de l'oeil — qui est de l'ordre de 0,075 mm (*cf. infra*, 3.2.2).

2. *L'épaisseur du trait de stylo* provoque un empatement du tracé qui peut entraîner une méprise sur la convergence des droites en un point de fuite. Dans la méthode de l'égal liseré clair, l'épaisseur du trait n'influe pas sur la qualité de l'alignement mais seulement sur le décalage entre l'alignement optique et le trait de reconstruction. On gagnera donc en précision en utilisant un stylo aussi fin que possible. Le problème ne se présente toutefois que dans des conditions exceptionnelles (oeuvre de très grandes dimensions ou stylo très épais). En pratique, un stylo d'épaisseur normalisée $0,10 \text{ mm} \leq e \leq 0,20 \text{ mm}$ suffit à faire une reconstruction acceptable.

3. *Calcul de l'erreur systématique.* Notons ici η l'erreur systématique, e l'épaisseur du trait normalisé, ϕ l'épaisseur du tube du stylo ($\phi > e$), e' l'épaisseur du trait sur l'oeuvre. On a les relations suivantes :

$$(1) \quad \eta_1 = \frac{(e' + \phi)}{2} - l \quad (2) \quad \eta_2 = \frac{(e' - \phi)}{2} + l$$

Pour un dispositif de reconstruction courant ($e' = 0,15 \text{ mm}$, $\phi = 0,25 \text{ mm}$, $l = 0,075 \text{ mm}$), l'erreur systématique vaut : $\eta_1 = 0,125 \text{ mm}$, $\eta_2 = 0,025 \text{ mm}$. *Par conséquent, il faut suivre la méthode de l'égal liseré clair qui occasionne une erreur systématique moins importante.*

3.2. Erreurs aléatoires

L'échelle de l'oeuvre examinée est un facteur d'erreur. C'est évident pour les petits clichés dont les détails sont difficilement discernables. Mais c'est vrai aussi des oeuvres de grandes dimensions qui obligent à manipuler un matériel encombrant à l'origine d'erreurs spécifiques, liées au poids des instruments (*cf. supra*, 2.2.2) ou au fait que l'opérateur ne peut pas simultanément contrôler l'alignement optique en deux points éloignés. Contrairement à une idée répandue, le travail à l'échelle grandeur n'élimine pas le problème de l'erreur. S'il doit utiliser une reproduction, l'opérateur calculera le taux de réduction de l'oeuvre et l'intégrera à son raisonnement. L'épaisseur du stylo et celle du trait *in situ* doivent être proportionnés. Supposons que l'oeuvre soit une fresque dont le trait a une épaisseur moyenne $e' = 2,5$ mm et que le stylo ait une épaisseur $e = 0,20$ mm : on acceptera un taux de réduction si le trait de reconstruction est plus fin que celui de l'oeuvre $K < e'/e$, soit $K < 12,5$. Réciproquement, si l'on dispose d'un cliché au taux $K = 15$, on choisira un stylo d'épaisseur $e < e'/K$, soit $e = 0,15$ mm, pour répondre aux mêmes exigences.

2. Un autre facteur d'erreur important est le *déficit d'acuité visuelle*. Tout opérateur devrait connaître ses capacités visuelles avant d'entreprendre une reconstruction. Pour un sujet normal emmétrope¹⁸, l'acuité est en moyenne de 1' d'arc. Elle peut être mesurée au moyen d'un optotype dont le choix est délicat car plusieurs facteurs sont à l'origine de sa variation¹⁹. La reconstruction mettant en jeu des parallèles, on utilisera de préférence un optotype Vernier horizontal²⁰. La distance à laquelle les horizontales sont séparées doit être estimée en ambiance photopique et sans trou sténopéique (*Planche 3.1*).

¹⁸ Nous raisonnons notamment dans le cas d'un sujet ne souffrant pas d'astigmatisme, source d'erreur importante puisque les tracés perspectifs exigent constamment la manipulation de droites d'inclinaison variée. Dans le cas d'un astigmatisme régulier, la cornée ne présente pas des méridiens de rayon de courbure identique et la perception n'est nette que pour une direction donnée des droites frontales. Cette direction est mesurée au cadran de Green, sur lequel l'astigmate ne perçoit nettement que le méridien correspondant à la focale la plus proche de la surface rétinienne.

¹⁹ Les facteurs de variation de l'acuité sont à la fois extrinsèques et intrinsèques. L'acuité augmente avec la luminance pour atteindre un pallier vers +1,4 millilamberts ; avec le contraste test-fond ; quand la distance de présentation du test diminue, car la puissance de l'oeil augmente lors de l'accommodation ; pour les radiations jaunes et rouges ; pour des lignes verticales plutôt qu'horizontales. L'acuité augmente dans la fovéa ; avec le myosis, qui limite l'aberration de sphéricité ; avec la vision binoculaire ; elle diminue avec l'âge.

²⁰ La mire de Foucault donne de meilleurs scores, car il est plus facile de discriminer plusieurs lignes simultanément.

Dans mon cas personnel, dix expériences successives ont donné, pour un intervalle $d = 1,5$ mm, une distance moyenne de séparation égale à $D = 594$ cm. Il s'ensuit que : $\alpha \approx \tan \alpha = d/D \approx 52''$ d'arc. Pour un tracé dans lequel les yeux sont placés à 30 cm de la feuille de report, cela équivaut à une séparation de lignes distantes de 0,075 mm, ce qui fixe la valeur l du liseré²¹.

3. *Calcul de l'erreur aléatoire.* L'estimation de l'erreur aléatoire étant délicate, on procédera de préférence en comparant la valeur théorique et la valeur expérimentale de l'erreur. On peut utiliser le montage suivant. Supposons que l'opérateur prolonge le segment $AB = 40$ mm jusqu'en F , tel que $AF = 1000$ mm, le point F étant tracé en aveugle. Plusieurs mesures sont à même de conduire à une estimation de l'erreur commise au niveau du point F sur la droite D (Planche 2.2).

Déterminons tout d'abord la valeur théorique de l'erreur selon la méthode de l'égal liseré clair. Le liseré l étant calculée à partir du pouvoir séparateur de l'oeil on peut l'assimiler à un *minimum separabile* : l'oeil n'est pas en mesure de distinguer un liseré plus fin. Mais comme, dans le contrôle du parallélisme, l'oeil passe insensiblement d'un point à l'autre du segment AB , il est raisonnable d'admettre que l'erreur maximale affecte les extrema A et B (Planche 3.2).

En ce cas, la valeur théorique de l'erreur de reconstruction dépend seulement de la taille du liseré l et du rapport de la partie visible de la fuyante AB à la fuyante complète AF . Les erreurs angulaires α et métrique ε sont données par les relations :

$$\alpha = \pm \tan^{-1}(l/AB) \quad \varepsilon = \pm AF \tan \alpha = l \frac{AF}{AB}$$

Pour $AB = 40$ mm et $AF = 1000$ mm, on a : $\alpha = 6'27''$ d'arc, $\varepsilon = \pm 1,87$ mm.

Déterminons ensuite la valeur expérimentale de l'erreur. Cette valeur peut être fixée à partir d'une cinquantaine de mesures selon le protocole décrit. Si l'on reporte les mesures du point F sur un histogramme, elles suivent une loi normale (Planche 3.3). Ajustons à cet histogramme (à gauche) la distribution normale centrée réduite (à droite). On en tire, par simple changement d'échelle ($0,95$ mm = 1 unité centrale réduite), la valeur de l'erreur aléatoire : $\Delta x = \pm 2\sigma = \pm 1,9$ mm.

Cette valeur est une excellente approximation de la valeur théorique précédemment

²¹ Il s'agit d'une estimation par excès : en vision rapprochée, la puissance de l'oeil augmente légèrement à cause de l'accommodation, qui résulte de l'augmentation de courbure du cristallin (relâchement de la zonule et du sac capsulaire) et de l'augmentation de l'indice de réfraction (mouvement centripète des micelles cristalliniennes). L'image rétinienne s'agrandirait d'un cinquième environ à une distance de présentation de 25 cm.

indiquée, ce qui démontre la concordance des estimations de l'erreur théorique et de l'erreur expérimentale dans l'application de la méthode de l'égal liseré clair.

La différence la plus sensible entre la situation classique des sciences physiques et celle de la reconstruction d'une perspective, est que, dans la construction d'une épure, *l'opérateur ne procède jamais qu'à un seul tracé*. Dans le pire des cas, le point de fuite peut être affecté d'une déviation maximale à gauche ou à droite. C'est pourquoi on doit prendre une marge d'erreur supplémentaire en doublant l'erreur de reconstruction par rapport à celle qui résulte d'une série de mesures²². On a donc :

$$\Delta x = \pm 2l \frac{AF}{AB}$$

La conclusion à laquelle on parvient est donc que, pour un opérateur suivant un protocole de travail rigoureux, ayant une bonne acuité visuelle, travaillant à petite échelle avec un stylo fin selon la méthode de l'égal liseré clair, pour $AB = 40$ mm et $AF = 1000$ mm, l'erreur systématique est égale à $\eta = +0,025$ mm ; l'erreur aléatoire à $\varepsilon = \pm 1,87$ mm. L'erreur systématique est donc négligeable. *Il s'ensuit que le principal facteur d'erreur est la déviation angulaire, c'est-à-dire le défaut d'appréciation du parallélisme. N'étant pas fonction des dimensions de l'oeuvre, l'erreur affecte aussi bien les épures faites à partir de reproductions réduites que celles réalisées grandeur nature.*

4. Réduction des erreurs combinées

Lorsque l'opérateur construit une perspective, il ne manipule jamais une seule fuyante mais plusieurs. Apparaissent alors des erreurs combinées dont il faut également tenir compte.

4.1. Erreur causée par l'angle des fuyantes

Lorsqu'on recherche le point de concours de deux fuyantes, les erreurs aléatoires $\varepsilon, \varepsilon'$ qui leur sont liées définissent un quadrilatère d'erreur dans le plan du tableau. Comme $\varepsilon, \varepsilon'$ sont petits devant la longueur des fuyantes AF , on admettra que $ad \approx cb$; $ca \approx bd$. Le

²² Cette valeur s'approche d'une autre estimation de l'erreur (Raynaud, 1998a) dont je rappelle le principe. Dans l'expérience de détermination du point F , on peut, en utilisant un stylo d'épaisseur normalisée e , tracer vers F toute fuyante recouvrant en totalité le segment AB . L'erreur est alors $\varepsilon = \pm e AF/AB$. Cette valeur est plus élevée que la valeur expérimentale ($e = \pm 5,0$ mm $> \Delta x = \pm 1,9$ mm), mais comme celle-ci doit être doublée dans une épure ($2\Delta x = \pm 3,8$ mm), on peut indifféremment retenir l'une ou l'autre de ces estimations.

quadrilatère d'erreur est alors assimilable à un parallélogramme dont on peut déterminer la longueur des côtés et des diagonales (*Planche 3.4*).

$$\begin{aligned} \text{côtés :} \quad ca \approx bd &\approx \frac{\varepsilon}{\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right)} & ad \approx cb &\approx \frac{\varepsilon'}{\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right)} \\ \text{diagonales :} \quad ab &\approx \frac{\sqrt{\varepsilon^2 + \varepsilon'^2 - 2\varepsilon\varepsilon' \cos(\pi - \alpha)}}{\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right)} & cd &\approx \frac{\sqrt{\varepsilon^2 + \varepsilon'^2 - 2\varepsilon\varepsilon' \cos(\alpha)}}{\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right)} \end{aligned}$$

La longueur des diagonales du quadrilatère d'erreur variant en fonction de l'angle des fuyantes, l'opérateur doit minimiser cette erreur combinée. Il est aisé de voir que si l'on fait varier l'angle α , le minimum est atteint pour des fuyantes perpendiculaires (*Planche 3.4*).

Le problème revient en effet à rechercher les minima de ab et de cd . Lorsque $\alpha = \pi/2$, le dénominateur est égal à l'unité et le terme en cosinus du numérateur s'annule. Les diagonales s'égalisent :

$$ab \approx cd \approx \sqrt{\varepsilon^2 + \varepsilon'^2}$$

Il s'ensuit que la détermination du point de fuite F — placé au centre du polygone d'erreur — est d'autant plus précise que l'angle formé par les deux fuyantes s'approche de l'angle droit. Comme l'opérateur ne peut pas intervenir sur cet angle, il réduira l'erreur en choisissant, deux à deux, des fuyantes formant un angle s'approchant de l'angle droit.

4.2. Erreur causée par la longueur des fuyantes

Il existe une autre source d'erreur combinée, qui dépend de la longueur des arêtes visibles en fonction desquelles on reconstruit la fuyante. Considérons l'erreur théorique :

$$\Delta x = \pm 2l \frac{AF}{AB}$$

L'erreur varie en fonction directe du rapport AF/AB (en fonction inverse de AB/AF). En construisant une épure, l'opérateur doit régulièrement savoir si une nouvelle fuyante passe dans le polygone d'erreur d'un point de fuite connu. Or, s'il commence la construction par des fuyantes à petit rapport AB/AF , il faussera l'ensemble de l'épure par ce choix initial. Il s'ensuit que la détermination du point de fuite F sera d'autant plus précise que les premières fuyantes choisies offriront un grand rapport. D'où le principe consistant à classer toutes les fuyantes en fonction du rapport AB/AF et à construire l'épure en suivant ce classement ordinal.

4.3. Méthodologie du tracé

De l'étude des erreurs simples et des erreurs combinées, on tire maintenant une procédure de construction dont les règles sont conçues afin de minimiser les erreurs de tracé. L'épure se fait en deux temps : une phase de mesure et de calcul d'erreur, une phase de construction de l'épure.

Épure préparatoire (mesures)

- 1° tracer les parties visibles $AB\dots$ des fuyantes,
- 2° déterminer approximativement le ou les points de fuite éventuels,
- 3° calculer le rapport $AB/AF\dots$ pour chaque ligne de fuite,
- 4° classer toutes les fuyantes selon ce rapport : $A_1B_1 / A_1F, A_2B_2 / A_2F, \dots$
- 5° calculer, pour chaque fuyante, l'erreur aléatoire au niveau du point de fuite F .

Épure définitive (tracé)

- 6° choisir la fuyante n° 1 (en tête du classement des rapports AB/AF),
- 7° prendre la fuyante la mieux classée dont l'angle avec la fuyante n°1 s'approche de 90° ,
- 8° déterminer le point de concours F_1 de ces deux fuyantes,
- 9° choisir la fuyante n°2. Si elle passe par le point F_1 à l'erreur près, joindre la fuyante n° 2 à F_1 ; dans le cas contraire, appliquer les règles 7-8 pour obtenir un point de fuite F_2 ,
- 10° choisir la fuyante n° 3 : appliquer la règle 9, et ainsi de suite.

4.4. Exemple

J'illustrerai maintenant ces principes en les appliquant à l'étude d'une fresque peinte vers 1370 sur la paroi nord du Palazzo della Ragione de Padoue par Giusto de' Menabuoi. *Le Saint sur le trône* (110×126 cm) étant connu par un cliché ayant un coefficient de réduction $K = 7$ (Bozzolato 1992, planche LXII), on peut utiliser un stylo d'épaisseur normalisée $e = 0,20$ mm représentant un trait de 1,4 mm *in situ*.

Sur l'épure préparatoire, on représente les arêtes visibles des objets et le prolongement des fuyantes jusqu'aux points de fuite hypothétiques F et F' (*Planche 4.1*). Le classement des fuyantes se déduit des rapports AB/AF et de l'erreur ε commise au niveau du point de fuite (*Tableau 1*).

On déduit alors de ce classement l'ordre optimal de reconstruction de l'épure (*Tableau 2*). Ainsi, les fuyantes 1 et 10, qui font un angle de 115° , permettent de déterminer le point de fuite F' avec une erreur combinée de 1,01 mm (diagonale du quadrilatère d'erreur cd). De même, les fuyantes 2 et 6, qui font un angle de 117° , conduisent à la détermination d'un second point de fuite F avec une erreur combinée de 0,64 mm. Ces valeurs fixent les erreurs maximales de tracé de la perspective.

Fuyante	AB / AF	ε (mm)
1	0,250	0,30
2	0,223	0,34
3	0,200	0,37
4	0,184	0,41
5	0,144	0,52
6	0,139	0,54
7	0,126	0,59
8	0,124	0,60
9	0,111	0,67
10	0,100	0,75
11	0,067	1,12
12	0,065	1,15

Tableau 1. Classement des fuyantes et erreur aléatoire

Fuyantes	pt. fuite	angle α	cd (mm)
(1, 10)	det. F'	115°	1,01
(2, 6)	det. F	117°	0,64
(3)	F'	132°	$0,37 < 1,01$
(4)	F	133°	$0,41 < 0,64$
(5)	F	114°	$0,52 < 0,64$
(7)	F'	112°	$0,59 < 1,01$
(8)	F	125°	$0,60 < 0,64$
(9)	F'	123°	$0,67 < 1,01$
(11)	F'	180°	$1,12 > 1,01^*$
(12)	F	180°	$1,15 > 0,64^\dagger$

Tableau 2. Ordre de reconstruction de l'épure perspective

* admis en raison de l'alignement 10F'11 ; † admis en raison de l'alignement 6F12

L'opérateur mentionnera systématiquement l'erreur qui affecte l'épure perspective. On dira par exemple que l'épure du *Saint sur le trône* est obtenue avec une erreur de 1,01 mm (sur les fuyantes de gauche) et de 0,64 mm (sur les fuyantes de droite), représentant ca. 7 mm et 4 mm au niveau des points de fuite *in situ*.

L'épure perspective définitive du *Saint sur le trône* de Giusto de' Menabuoi (*Planche 4.2*) montre, à l'erreur près, la convergence régulière des droites de bout en deux « points de fuite » dont l'interprétation pose des problèmes spécifiques qui sortent du cadre de cette communication. Je me contenterai donc de quelques remarques :

1° Cette construction est une « perspective centrale » — et non une « perspective bifocale »²³ (Parronchi 1964). Les points de concours des fuyantes du trône sont en effet des « points de fuite centraux », sans rapport avec les points de fuite latéraux d'une perspective bifocale. Des arguments ont été avancés pour rattacher les oeuvres de ce type à une application qualitative des principes de la vision binoculaire²⁴ (Raynaud 1998a, 2003a).

2° Si l'on utilise l'épure géométrique pour localiser les points de fuite *in situ*, on remarque qu'ils coïncident avec le coeur des marguerites sculptées sur le panneau de fond de la cathèdre. Cela interroge les conclusions d'un article assez connu d'Andrés de Mesa Gisbert (1989), dans lequel il tente de montrer que les peintres du XIV^e siècle auraient construit les fuyantes à partir de rapports de proportionnalité rendant l'usage du point de fuite totalement inutile. Mais en ce cas, pourquoi le point de fuite théorique coïnciderait-il avec un point

²³ Expliqués en termes contemporains : les deux points de fuite d'une perspective bifocale résultent du fait que l'objet présente une arête verticale parallèle au tableau, au lieu de présenter une face parallèle au tableau comme c'est le cas dans une perspective centrale. La face antérieure du trône étant parallèle au tableau, il est facile de voir que la fresque de Giusto de' Menabuoi est une perspective centrale.

²⁴ L'hypothèse selon laquelle il aurait existé des perspectives inspirées par les principes de la vision binoculaire (Parronchi 1964) reprend donc consistance, mais d'une façon radicalement différente de celle envisagée par l'historien de l'art florentin. *Primo*, l'assimilation de la perspective bifocale aux principes de la vision binoculaire est sans fondement quoiqu'elle ait été régulièrement avancée par Parronchi qui parle ainsi des « deux points de distance tirés du schéma de la vision binoculaire » (1974, 215). Il n'existe aucun rapport entre vision binoculaire et perspective bifocale : les conditions de la vision binoculaire produisent la diplopie, c'est-à-dire l'apparition de deux quasi-images non correspondantes et, par suite, de deux points de fuite centraux ; elles ne sont pas à même d'expliquer que l'objet présente une arête verticale au tableau, seule situation susceptible de provoquer l'apparition de deux points de fuite latéraux (y compris lorsque la perspective est vue d'un seul oeil). *Secundo*, Parronchi accorde un rôle central à la mobilité horizontale des yeux, qui appuierait la mise en place de la perspective bifocale, parce que les yeux peuvent regarder dans des directions différentes (?) (1974, 216). Il n'est nullement besoin de recourir à cet argument pour étayer l'application de la vision binoculaire. La diplopie apparaît, en absence de mouvement, chaque fois que les deux yeux regardent des objets répartis en profondeur. Si les yeux fixent un objet du premier plan, ceux de l'arrière plan sont dédoublés (diplopie homonyme) ; si au contraire ils fixent un objet de l'arrière plan, ceux du premier plan sont dédoublés (diplopie croisée). Les oeuvres examinées, comme le *Saint sur le trône* de Giusto de' Menabuoi, se rattachent au cas de la diplopie homonyme. Les yeux du spectateur fixant la tête du Saint au premier plan, le cadre architectural apparaît dédoublé et les fuyantes convergent alors en deux points distincts *F* et *F'*.

précisément défini du décor architectural²⁵ ?

Quel que soit le fondement de cette fresque de Giusto de' Menabuoi, la méthode de reconstruction qui vient d'être présentée est à même de modifier notre rapport à la question de l'erreur en perspective.

1° Ce développement permet de saisir la raison pour laquelle on a pu identifier autant de perspectives justes dans l'histoire de l'art occidental : si l'opérateur ne tient pas compte de l'erreur, son tracé est susceptible d'être forcé pour être rapporté à un schéma géométrique connu. *L'analyse d'un corpus d'oeuvres de la Renaissance montre que les peintres, loin d'avoir suivi une procédure fixe — la dite « costruzione legittima » —, ont adopté diverses règles de construction* (Raynaud 1998b, 72-120).

2° Il convient au-delà de s'interroger sur l'intérêt d'une représentation empirique des irrégularités de tracé, solution parfois adoptée par les opérateurs en guise de leur bonne foi. Les reconstructions perspectives qui procèdent de la sorte — et qui transcrivent graphiquement la convergence approximative des droites de bout vers une « zone de fuite », par exemple — jettent inmanquablement le doute sur toutes les épures qui présenteraient une certaine régularité. Pour qui connaît le fondement de la théorie des erreurs, la régularité d'une épure construite selon les règles exposées ici n'a rien de choquant. *Il est préférable d'obtenir un tracé régulier affecté d'un calcul d'erreur, plutôt qu'une épure perspective simulant des erreurs que l'opérateur ne connaît pas. L'avantage de la méthodologie proposée est qu'elle élimine toute rhétorique de l'erreur.*

Références

- Y. Beers, *Introduction to the theory of errors*, Cambridge, 1953.
- P. R. Bevington, *Data reduction and error analysis for the physical sciences*, New York, 1969.
- G. Bozzolato, *Il Palazzo della ragione a Padova*, Roma, 1992.
- M. Kemp, *The science of art. Optical themes in Western art from Brunelleschi to Seurat*, New Haven, 1990.
- Y. Legrand, *Optique physiologique*, 3 tomes, Paris, 1952-1956.
- A. de Mesa Gisbert, El “fantasma” del punto de fuga en los estudios sobre la sistematización geométrica de la pintura del siglo XIV, *D'Art*, 1989, 15, p. 29-50.
- J. Molk, *Encyclopédie des sciences mathématiques pures et appliquées*, tome 1, vol. 4 : *Calcul des probabilités, théorie des erreurs*, Sceaux, 1993 [1904-1916].
- A. Parronchi, *Studi sulla dolce prospettiva*, Milano, 1964.

²⁵ On notera que *La Sainte assise*, fresque peinte au-dessus de la deuxième porte du mur nord du Palazzo della Ragione, présente la même disposition : les deux points de fuite tombent également en deux points remarquables. Il ne s'agit donc pas d'une construction fortuite.

- A. Parronchi, Prospettiva e pittura in Leon Battista Alberti, *Convegno internazionale indetto nel V Centenario di Leon Battista Alberti* (Roma-Mantova-Firenze, 25-29 aprile 1972), Roma, 1974, p. 213-232.
- J.-P. Pérez, *Optique. Fondements et applications*, Paris, 2000.
- D. Raynaud, Perspective curviligne et vision binoculaire, *Sciences et Techniques en Perspective*, 1998a, 2, p. 3-23.
- D. Raynaud, *L'Hypothèse d'Oxford. Essai sur les origines de la perspective*, Paris, 1998b.
- D. Raynaud, Ibn al-Haytham sur la vision binoculaire : un précurseur de l'optique physiologique, *Arabic Sciences and Philosophy*, 2003a, 13, p. 79-100.
- D. Raynaud, Linear perspective in Masaccio Trinity's fresco : demonstration or self-persuasion ? *Nuncius*, 2003b, 17 (1), p. 331-344.
- H. Saraux et B. Biais, *Physiologie oculaire*, Paris, 1983.
- E. Sindona et P. A. Rossi, Una conferma uccellesca, *L'Arte*, 1970, 3 (9), p. 66-107.
- J. Surrel, *Optique instrumentale, optique de Fourier*, Paris, 1996.

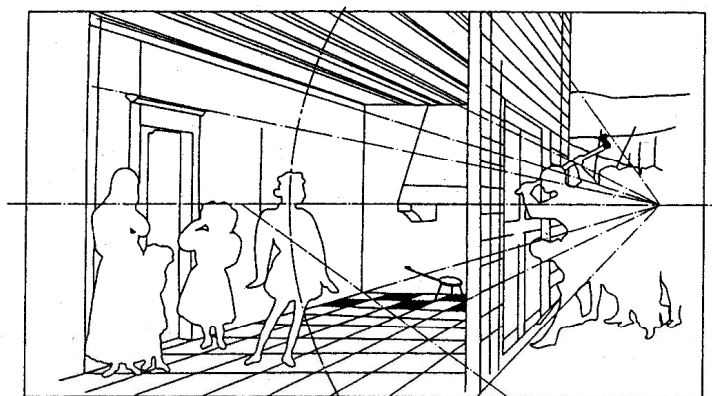


Fig. 1.1

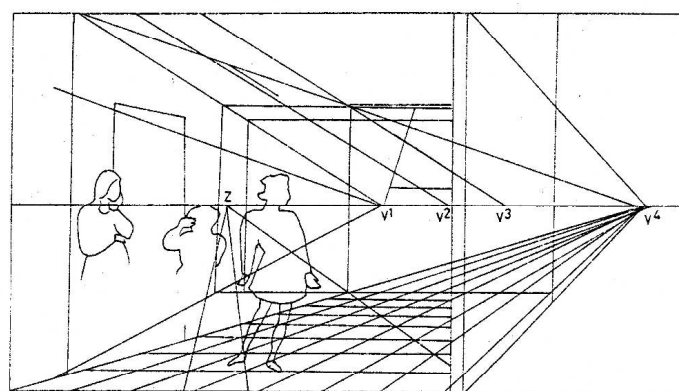


Fig. 1.2

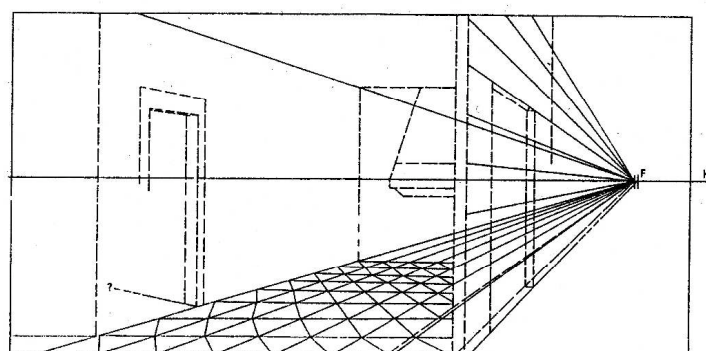


Fig. 1.3

Fig. 1.1. Uccello, *L'Holocauste* (Sindona et Rossi, 1970)

Fig. 1.2. Uccello, *L'Holocauste* (Kemp, 1990)

Fig. 1.3. Uccello, *L'Holocauste* (Raynaud, 1998)

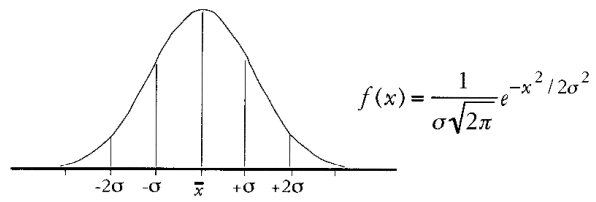


Fig. 2.1

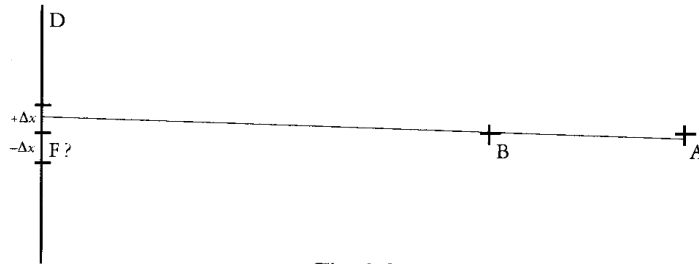


Fig. 2.2

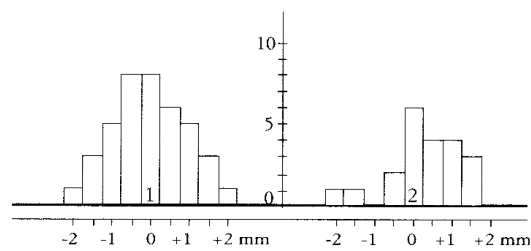


Fig. 2.3

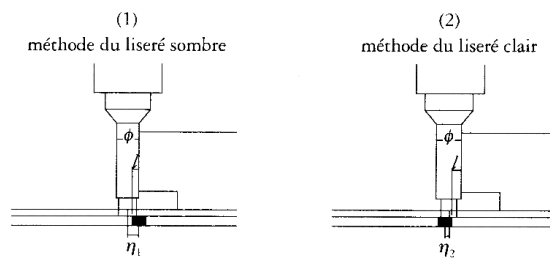


Fig. 2.4

Fig. 2.1. Distribution normale centrée et estimation de l'erreur

Fig. 2.2. Dispositif expérimental de détermination du point F

Fig. 2.3. Distribution du point F dans deux séries de mesures

Fig. 2.4. Différence entre les deux méthodes de tracé

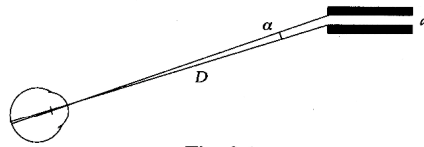


Fig. 3.1

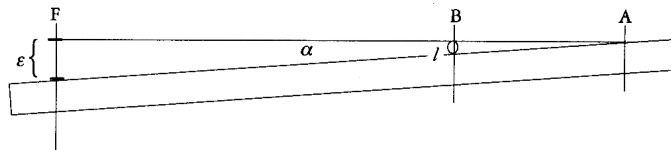


Fig. 3.2

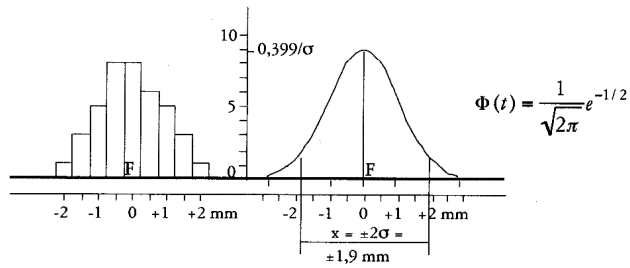


Fig. 3.3

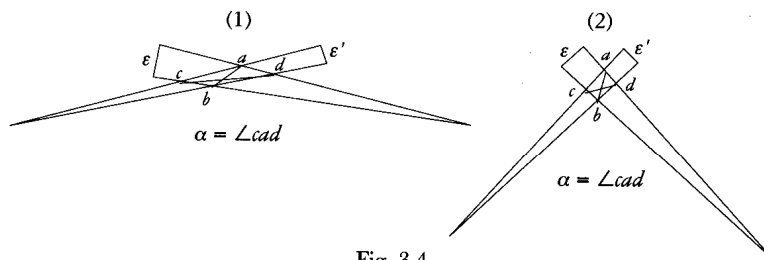


Fig. 3.4

Fig. 3.1. Test d'acuité Vernier

Fig. 3.2. Erreur théorique dans la détermination du point F

Fig. 3.3. Erreur expérimentale dans la détermination du point F

Fig. 3.4. Variation de l'erreur en fonction de l'angle des fuyantes

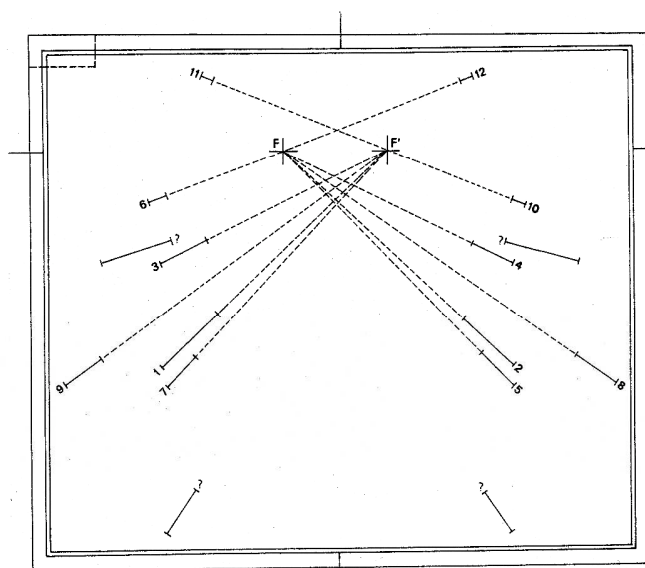


Fig. 4.1

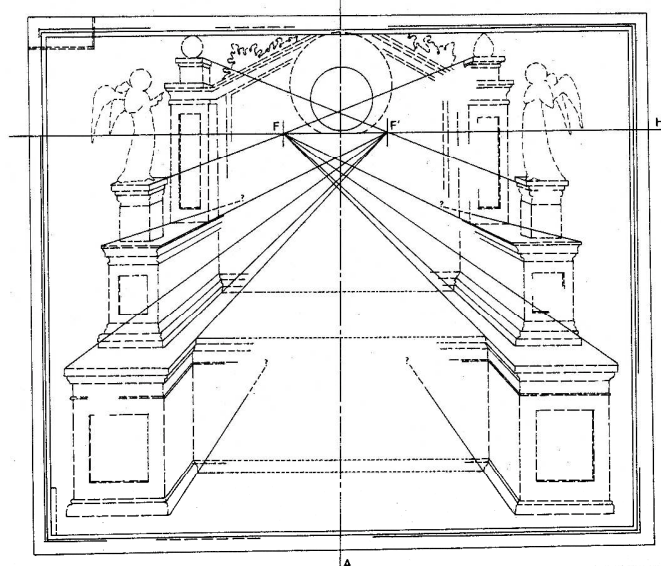


Fig. 4.2

Fig. 4.1. Giusto de' Menabuoi, *Saint sur le Trône* (Épure préparatoire)

Fig. 4.2. Giusto de' Menabuoi, *Saint sur le Trône* (Épure définitive)