HAL
open science

Enveloppes inférieures des fonctions admissibles sur l'espace projectif complexe. Cas dissymétrique.

Brahim Dridi, Adnène Ben Abdesselem

To cite this version:

Brahim Dridi, Adnène Ben Abdesselem. Enveloppes inférieures des fonctions admissibles sur l'espace projectif complexe. Cas dissymétrique.. 2006. halshs-00009904

HAL Id: halshs-00009904

https://shs.hal.science/halshs-00009904v1

Preprint submitted on 1 Apr 2006

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Enveloppes inférieures de fonctions admissibles sur l'espace projectif complexe. Cas dissymétrique.

Adnène Ben Abdesselem et Brahim Dridi

Université Paris 6, U.F.R.929, 4, place Jussieu, 75005, Paris, et L.I.M. Ecole Polytechnique de Tunisie.

RESUME. Cet article généralise les résultats du premier auteur concernant les fonctions admissibles sur certaines variétés de Fano [4],[5]. On étudie ici une classe plus large de fonctions, ces dernières pouvant présenter un défaut de symétrie, et on montre l'existence d'une fonction limite donnant précisément l'invariant de Tian sur les variétés considérées et minorant toutes les fonctions admissibles dont le sup est égal à zéro.

ABSTRACT. This paper generalizes the first author's preceding works concerning admissible functions on certain Fano manifolds [4], [5]. Here, we study a larger class of functions which can be less symmetric than the ones studied before. When the sup of these functions is null, we prove that they admit a lower bound, giving precisely Tian invariant on these manifolds.

1 Introduction.

Dans un travail précédent [5], le premier auteur a prouvé l'existence d'une fonction minorant toutes les fonctions admissibles à sup égal à zéro sur certains projectifs éclatés et invariantes par un groupe d'automorphismes bien choisi. Ce dernier s'obtient à partir de celui de $\mathbb{P}_m\mathbb{C}$ et contient en particulier les automorphismes échangeant deux coordonnées homogènes entre elles. Dans cet article les projectifs éclatés considérées ne peuvent, de par leur géométrie, avoir un groupe d'automorphismes aussi riche. On montre alors le résultat ci-dessous exposé sur $\mathbb{P}_m\mathbb{C}$ en considérant le groupe d'automorphismes adéquat, nous permettant, à l'instar de ce qui a été fait dans [5], d'étendre la méthode aux espaces X et Y étudiés dans [6].

Rappelons dans un premier temps la définition des espaces, métriques, et groupes d'automorphismes que l'on considérera. On adoptera les notations utilisées dans [6]. Désignons par $[z_0, z_1, .., z_m]$ les coordonnées homogènes de l'espace projectif complexe $\mathbb{P}_m\mathbb{C}$ de dimension complexe $m \geq 2$.

Munissons $\mathbb{P}_m\mathbb{C}$ de la métrique g ayant pour composantes, dans la carte $\{z_0 \neq 0\}$,

$$g_{\lambda\bar{\mu}} = (m+1)\partial_{\lambda\bar{\mu}} \ln(1 + x_1 + .. + x_m)$$

où $x_i = \mid z_i \mid^2$ et $\partial_{\lambda\bar{\mu}} = \frac{\partial^2}{\partial z_\lambda \partial \bar{z}_\mu}$.

Fixons pour le reste de l'article l'entier $k \in \{1, ..., m-1\}$, et rappelons la définition des variétés X et Y utilisées dans [6].

X est l'éclaté de $\mathbb{P}_m\mathbb{C}$ au dessus du sous-ensemble $\{[0, .., 0, z_{k+1}, .., z_m]\}$ qui s'identifie à l'espace $\mathbb{P}_{m-k-1}\mathbb{C}$; Y est l'éclaté de $\mathbb{P}_m\mathbb{C}$ au dessus des sous-ensembles $\{[z_0, .., z_k, 0, .., 0]\}$ et $\{[0, .., 0, z_{k+1}, .., z_m]\}$ qui s'identifient respectivement à $\mathbb{P}_k\mathbb{C}$ et $\mathbb{P}_{m-k-1}\mathbb{C}$.

X est alors la sous variété de $\mathbb{P}_m\mathbb{C} \times \mathbb{P}_k\mathbb{C}$ constituée des points

$$([z_0, .., z_k, z_{k+1}, .., z_m], [\zeta_0, .., \zeta_k]) \in \mathbb{P}_m\mathbb{C} \times \mathbb{P}_k\mathbb{C}$$

tels que les deux vecteurs $(z_0, .., z_k)$ et $(\zeta_0, .., \zeta_k)$ de $\mathbb{C}^{k+1}$ soient colinéaires.

On considère alors les projections π_1 et π_2 de X respectivement sur $\mathbb{P}_m\mathbb{C}$ et $\mathbb{P}_k\mathbb{C}$. En utilisant les métriques de Fubini-Study g_m de $\mathbb{P}_m\mathbb{C}$ et g_k de $\mathbb{P}_k\mathbb{C}$, on définit la métrique $\tilde{g}$ sur X par

$$\tilde{g} = (m+1-k)\pi_1^* g_m + k\pi_2^* g_k.$$

Ses composantes dans la carte dense de X constituée des points :

$$([1, z_1, .., z_m], [1, z_1, .., z_k]); (z_1, .., z_m) \in \mathbb{C}^m,$$

sont données par

$$\tilde{g}_{\lambda\bar{\mu}} = (m+1-k)\partial_{\lambda\bar{\mu}} \ln(1 + x_1 + .. + x_m) + k\partial_{\lambda\bar{\mu}} \ln(1 + x_1 + .. + x_k)$$

De même, Y est la sous-variété de $\mathbb{P}_m\mathbb{C} \times \mathbb{P}_k\mathbb{C} \times \mathbb{P}_{m-k-1}\mathbb{C}$ constituée de points

$$([z_0, .., z_k, z_{k+1}, .., z_m], [\zeta_0, .., \zeta_k], [\eta_{k+1}, .., \eta_m]) \in \mathbb{P}_m\mathbb{C} \times \mathbb{P}_k\mathbb{C} \times \mathbb{P}_{m-k-1}\mathbb{C}$$

tels que les vecteurs $(z_0, .., z_k)$ et $(z_{k+1}, .., z_m)$ sont respectivement proportionnels à $(\zeta_0, .., \zeta_k)$ et $(\eta_{k+1}, .., \eta_m)$. Comme pour X, on considère les projections π_1, π_2 et π_3 de Y respectivement sur $\mathbb{P}_m\mathbb{C}$, $\mathbb{P}_k\mathbb{C}$ et $\mathbb{P}_{m-k-1}\mathbb{C}$. Alors

$$\hat{g} = 2\pi_1^* g_m + k\pi_2^* g_k + (m-k-1)\pi_3^* g_{m-k-1}$$

est une métrique dans Y qui a pour composantes

$$\hat{g}_{\lambda\bar{\mu}} = 2\partial_{\lambda\bar{\mu}} \ln(1+x_1+..+x_m) + k\partial_{\lambda\bar{\mu}} \ln(1+x_1+..+x_k) + (m-k-1)\partial_{\lambda\bar{\mu}} \ln(x_{k+1}+..+x_m)$$

dans la carte dense de Y

$$\{([1, z_1, .., z_m], [1, z_1, .., z_k], [z_{k+1}, .., z_m]), (z_1, .., z_m) \in \mathbb{C}^m \text{ et } (z_{k+1}, .., z_m) \neq 0\}$$

On rappelle que $\tilde{g}$ et $\hat{g}$ sont respectivement dans la première classe de Chern de X et de Y (voir [6]); et par conséquent, X et Y sont de Fano.

On considère le groupe d'automorphismes G sur $\mathbb{P}_m\mathbb{C}$ engendré par les automorphismes $\sigma_{i,j}$, $\varphi_{p,q}$ $\tau_{l,\theta}$ définies $\forall\, i,j \in \{0,1,..,k\}$, $p,q \in \{k+1,..,m\}$, $l \in \{0,1,..,m\}$ et $\theta \in [0,2\pi]$ par

$$\sigma_{i,j}([z_0,..,z_i,..,z_j,..,z_k,..z_m]) = [z_0,..,z_j,..,z_i,..,z_k,..,z_m]$$
$$\varphi_{p,q}([z_0,..,z_k,..,z_p,..,z_q,..z_m]) = [z_0,..,z_k,..,z_q,..,z_p,..z_m]$$

et

$$\tau_{l,\theta}([z_0,..,z_l,..,z_m]) = [z_0,..,z_l e^{i\theta},..,z_m].$$

Ce groupe engendre des groupes d'automorphismes naturels de X et Y que l'on notera encore G dans les deux cas.

On définit sur $\mathbb{C}^{m+1}\backslash \bigcup_p \{z_p = 0\}$ la fonction $\psi = \inf(\psi_1, \psi_2)$, où

$$\psi_1 = \ln \frac{(\mid z_0 \mid ... \mid z_k \mid)^{2(m+1)/(k+1)}}{(\mid z_0 \mid^2 + ... + \mid z_m \mid^2)^{(m+1)}}$$

et

$$\psi_2 = \ln \frac{(\mid z_{k+1} \mid ... \mid z_m \mid)^{2(m+1)/(m-k)}}{(\mid z_0 \mid^2 + ... + \mid z_m \mid^2)^{(m+1)}}.$$

ψ_1 et ψ_2 sont homogènes de degré zéro sur $\mathbb{C}^{m+1}$, chacune d'entre elles induit alors une fonction sur $\mathbb{P}_m\mathbb{C}$. La fonction ψ_1 atteint son maximum égal à $-(m+1)\ln(k+1)$ en les points $[1, e^{i\theta_1}, .., e^{i\theta_k}, 0, .., 0] \in \mathbb{P}_m\mathbb{C}$ et tend vers moins l'infini lorsque l'une des coordonnées homogènes $z_0, .., z_k$ tend vers zéro ou vers l'infini, ce qui correspond aux frontières des cartes denses définies par $\{z_i \neq 0, 0 \leq i \leq k\}$.
ψ_2 atteint son maximum égal à $-(m+1)\ln(m-k)$ en les points
$[0, .., 0, e^{i\theta_{k+1}}, .., e^{i\theta_m}] \in \mathbb{P}_m\mathbb{C}$ et tend vers moins l'infini lorsque l'une des coordonnées homogènes $z_{k+1}, .., z_m$ tend vers zéro ou vers l'infini, c'est-à-dire aux frontières des cartes denses définies par $\{z_j \neq 0, k+1 \leq j \leq m\}$.

Pour décrire la fonction extrémale $\tilde{\psi}$ sur X, on considère $\tilde{\psi}_1$ et $\tilde{\psi}_2$ définies sur $(\mathbb{C}^{m+1}\backslash \bigcup_i \{z_i^{(0)} = 0\}) \times (\mathbb{C}^{k+1}\backslash \bigcup_j \{z_j^{(1)} = 0\})$ par

$$\tilde{\psi}_1 = \ln \frac{(\mid z_0^{(0)} \mid ... \mid z_k^{(0)} \mid)^{\frac{2(m+1-k)}{k+1}} \times (\mid z_0^{(1)} \mid ... \mid z_k^{(1)} \mid)^{\frac{2k}{k+1}}}{(\mid z_0^{(0)} \mid^2 + ... + \mid z_m^{(0)} \mid^2)^{(m+1-k)} \times (\mid z_0^{(1)} \mid^2 + ... + \mid z_k^{(1)} \mid^2)^k}$$

et

$$\tilde{\psi}_2 = \ln \frac{(\mid z_{k+1}^{(0)} \mid ... \mid z_m^{(0)} \mid)^{\frac{2(m+1-k)}{m-k}} \times (\mid z_0^{(1)} \mid ... \mid z_k^{(1)} \mid)^{\frac{2k}{k+1}}}{(\mid z_0^{(0)} \mid^2 + ... + \mid z_m^{(0)} \mid^2)^{(m+1-k)} \times (\mid z_0^{(1)} \mid^2 + ... + \mid z_k^{(1)} \mid^2)^k},$$

où $(z_0^{(0)}, .., z_m^{(0)})$ sont les coordonnées de $\mathbb{C}^{m+1}$ et $(z_0^{(1)}, .., z_k^{(1)})$ sont celles de $\mathbb{C}^{k+1}$. Elles sont séparément homogènes de degré zéro en les composantes de chacun des

vecteurs de $\mathbb{C}^{m+1}$ et $\mathbb{C}^{k+1}$. Elles définissent alors deux fonctions sur $\mathbb{C}^{m+1} \times \mathbb{C}^{k+1}$ et donc sur X, par restriction. On pose $\tilde{\psi} = \inf(\tilde{\psi}_1, \tilde{\psi}_2)$.

De même pour Y, on considère les fonctions

$$\hat{\psi}_1 = \ln\{\frac{(\mid z_0^{(0)} \mid ... \mid z_k^{(0)} \mid)^{\frac{4}{k+1}}}{(\mid z_0^{(0)} \mid^2 + ... + \mid z_m^{(0)} \mid^2)^2} \times \frac{(\mid z_0^{(1)} \mid ... \mid z_k^{(1)} \mid)^{\frac{2k}{k+1}}}{(\mid z_0^{(1)} \mid^2 + ... + \mid z_k^{(1)} \mid^2)^k} \times \frac{(\mid z_0^{(2)} \mid ... \mid z_{m-k-1}^{(2)} \mid)^{\frac{2(m-k-1)}{m-k}}}{(\mid z_0^{(2)} \mid^2 + ... + \mid z_{m-k-1}^{(2)} \mid^2)^{(m-k-1)}}\}$$

et

$$\hat{\psi}_2 = \ln\{\frac{(\mid z_{k+1}^{(0)} \mid ... \mid z_m^{(0)} \mid)^{\frac{4}{m-k}}}{(\mid z_0^{(0)} \mid^2 + ... + \mid z_m^{(0)} \mid^2)^2} \times \frac{(\mid z_0^{(1)} \mid ... \mid z_k^{(1)} \mid)^{\frac{2k}{k+1}}}{(\mid z_0^{(1)} \mid^2 + ... + \mid z_k^{(1)} \mid^2)^k} \times \frac{(\mid z_0^{(2)} \mid ... \mid z_{m-k-1}^{(2)} \mid)^{\frac{2(m-k-1)}{m-k}}}{(\mid z_0^{(2)} \mid^2 + ... + \mid z_{m-k-1}^{(2)} \mid^2)^{(m-k-1)}}\}.$$

$\hat{\psi}_1$ et $\hat{\psi}_2$ sont deux fonctions sur

$$(\mathbb{C}^{m+1} \backslash \bigcup_i \{z_i^{(0)} = 0\}) \times (\mathbb{C}^{k+1} \backslash \bigcup_j \{z_j^{(0)} = 0\}) \times (\mathbb{C}^{m-k} \backslash \bigcup_q \{z_q^{(0)} = 0\})$$

où $(z_i^{(0)})_{0 \leq i \leq m}$, $(z_j^{(1)})_{0 \leq j \leq k}$ et $(z_q^{(2)})_{0 \leq q \leq m-k-1}$ sont respectivement les coordonnées sur $\mathbb{C}^{m+1}$, $\mathbb{C}^{k+1}$ et $\mathbb{C}^{m-k}$. Elles sont séparément homogènes de degré zéro en les variables de $\mathbb{C}^{m+1}$, $\mathbb{C}^{k+1}$ et $\mathbb{C}^{m-k}$. Elles définissent des fonctions sur $\mathbb{P}_m\mathbb{C} \times \mathbb{P}_k\mathbb{C} \times \mathbb{P}_{m-k-1}\mathbb{C}$, et donc, par restriction, sur Y. On pose alors $\hat{\psi} = \inf(\hat{\psi}_1, \hat{\psi}_2)$

Enonçons à présent les principaux résultats de cet article.

Théorème 1 *Soit $\varphi \in C^\infty(\mathbb{P}_m\mathbb{C})$ une fonction g-admissible et G-invariante, vérifiant $\sup \varphi = 0$ sur $\mathbb{P}_m\mathbb{C}$. On a alors $\varphi \geq \psi$.*

On en déduit le corollaire suivant.

Corollaire 1 *Pour tout $\alpha < \inf(\frac{k+1}{m+1}, \frac{m-k}{m+1})$, on a l'inégalité de type Hőrmander suivante (voir [10] th. 4.4.5):*

$$\int_{\mathbb{P}_m\mathbb{C}} \exp(-\alpha\varphi) dv \leq Cst,$$

pour toute fonction $\varphi \in C^\infty(\mathbb{P}_m\mathbb{C})$, g-admissible, G-invariante, vérifiant $\sup \varphi = 0$ sur $\mathbb{P}_m\mathbb{C}$. dv est l'élément de volume sur $\mathbb{P}_m$ relatif à la métrique g.

Théorème 2 *Soit $\varphi \in C^\infty(X)$ une fonction $\tilde{g}$-admissible et G-invariante, vérifiant $\sup \varphi = 0$ sur X. On a alors $\varphi \geq \tilde{\psi}$.*

Corollaire 2 *Pour tout* $\alpha < \inf(\frac{k+1}{m+1}, \frac{m-k}{m-k+1})$*, on a l'inégalité*

$$\int_X \exp(-\alpha\varphi) d\tilde{v} \leq Cst,$$

pour toute fonction $\varphi \in C^\infty(X)$*,* $\tilde{g}$*-admissible, G-invariante, vérifiant* $\sup \varphi = 0$ *sur* X*.* $d\tilde{v}$ *est l'élément de volume sur* X *relatif à la métrique* $\tilde{g}$*.*

Théorème 3 *Soit* $\varphi \in C^\infty(Y)$ *une fonction* $\hat{g}$*-admissible et G-invariante, vérifiant* $\sup \varphi = 0$ *sur* Y*. On a alors* $\varphi \geq \hat{\psi}$*.*

Corollaire 3 *Pour tout* $\alpha < 1/2$*, on a l'inégalité*

$$\int_Y \exp(-\alpha\varphi) d\hat{v} \leq Cst,$$

pour toute fonction $\varphi \in C^\infty(Y)$*,* $\hat{g}$*-admissible, G-invariante, vérifiant* $\sup \varphi = 0$ *sur* Y*.* $d\hat{v}$ *est l'élément de volume sur* Y *relatif à la métrique* $\hat{g}$*.*

2 Preuve des résultats sur $\mathbb{P}_m\mathbb{C}$.

2.1 Preuve du théorème 1.

Pour le théorème 1, on utilisera l'invariance des fonctions $\varphi([z_0, ..., z_m])$ par le groupe G, afin de les considérer, au lemme 1, comme des fonctions $\varphi([1, x_1, ..., x_m])$ des variables réelles $x_i = \mid z_i \mid$, $i \in \{1, .., m\}$, puis, au lemme 2, comme des fonctions $\varphi([x_0, ..., x_k, 1, x_{k+2}, .., x_m])$ des variables réelles $x_i = \mid z_i \mid$, $i \in \{0, .., k, k+2, .., m\}$.
Lemme 1 *Soit une fonction* $\varphi \in C^\infty(\mathbb{P}_m\mathbb{C})$*, g-admissible, G-invariante.*
Si $x_i = \mid z_i \mid > 0$ *pour tout i, dans la carte* $\{z_0 \neq 0\}$*, on a*

$$(\varphi - \psi)([1, x_1, .., x_m]) \geq (\varphi - \psi)([1, x_1, .., x_k; \zeta^{[m-k]}]), \tag{1}$$

où $\zeta = (x_{k+1}...x_m)^{1/(m-k)}$ *et* $\zeta^{[m-k]} = (\zeta, .., \zeta) \in \mathbb{C}^{m-k}$*.*

Preuve. La démonstration se fait par récurrence. Supposons que pour $k+1 \leq p < m$ et pour tout $(x_1, .., x_m) \in \mathbb{R}^m$ avec $x_i > 0$ on ait

$$\begin{aligned}&(\varphi - \psi)([1, x_1, .., x_m]) \geq \\ &(\varphi - \psi)([1, x_1, .., x_k; (x_{k+1}...x_p)^{\frac{1}{p-k}}, .., (x_{k+1}...x_p)^{\frac{1}{p-k}}, x_{p+1}, ..x_m]).\end{aligned} \tag{2}$$

Cette propriété est claire pour $p = k+1$. Si l'inégalité (2) n'était pas satisfaite au rang $p+1$, il existerait alors un point $(x_1^0, .., x_m^0) \in \mathbb{R}^m$ avec $x_i^0 > 0$ pour tout i, tel que

$$\begin{aligned}&(\varphi - \psi)([1, x_1^0, .., x_m^0]) < \\ &(\varphi - \psi)([1, x_1^0, .., x_k^0; (x_{k+1}^0...x_{p+1}^0)^{\frac{1}{p+1-k}}, .., (x_{k+1}^0...x_{p+1}^0)^{\frac{1}{p+1-k}}, x_{p+2}^0, .., x_m^0].\end{aligned} \tag{3}$$

En utilisant la continuité de $(\varphi - \psi)$, on peut supposer, quitte à en modifier légérement les coordonnées, que le point $([1, x_1^0, .., x_m^0])$ de l'inégalité (3), vérifie

$$(x_1^0..x_k^0)^{1/(k+1)} \neq (x_{k+1}^0..x_m^0)^{1/(m-k)},$$

propriété dont on aura besoin plus loin. En utilisant la G-invariance de φ, on peut supposer que $x_{k+1}^0 \leq ... \leq x_m^0$. D'autre part, en tenant encore compte de la G invariance de φ et de l'hypothèse de récurrence (2) en les points

$$[1, x_1^0, .., x_k^0; x_{k+1}^0, x_{k+2}^0, .., x_p^0, x_{p+1}^0, x_{p+2}^0, .., x_m^0]$$

et

$$[1, x_1^0, .., x_k^0; x_{k+2}^0, x_{k+3}^0, .., x_p^0, x_{p+1}^0, x_{k+1}^0, x_{p+2}^0, .., x_m^0],$$

on peut écrire

$$\begin{aligned}&(\varphi - \psi)([1, x_1^0, .., x_m^0]) \geq \\ &(\varphi - \psi)([1, x_1^0, .., x_k^0; (x_{k+1}^0...x_p^0)^{\frac{1}{p-k}}, .., (x_{k+1}^0...x_p^0)^{\frac{1}{p-k}}, x_{p+1}^0, x_{p+2}^0, .., x_m^0] \quad (4)\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}&(\varphi - \psi)([1, x_1^0, .., x_k^0; x_{k+2}^0, .., x_{p+1}^0, x_{k+1}^0, x_{p+2}^0, .., x_m^0]) \geq \\ &(\varphi - \psi)([1, x_1^0, .., x_k^0; (x_{k+2}^0..x_{p+1}^0)^{\frac{1}{p-k}}, .., (x_{k+2}^0..x_{p+1}^0)^{\frac{1}{p-k}}, x_{k+1}^0, x_{p+2}^0, .., x_m^0]. (5)\end{aligned}$$

Considérons maintenant la courbe C d'équation

$$t^{p-k}x = x_{k+1}^0...x_{p+1}^0$$

dans le plan réel $\{[1, x_1^0, .., x_k^0, t, .., t, x, x_{p+2}^0, .., x_m^0]\}$ paramétré par les variables t et x. Les points

$$P_1 = [1, x_1^0, .., x_k^0; (x_{k+1}^0...x_p^0)^{\frac{1}{p-k}}, .., (x_{k+1}^0...x_p^0)^{\frac{1}{p-k}}, x_{p+1}^0, x_{p+2}^0, .., x_m^0]$$

et

$$P_2 = [1, x_1^0, .., x_k^0; (x_{k+2}^0...x_{p+1}^0)^{\frac{1}{p-k}}, .., (x_{k+2}^0...x_{p+1}^0)^{\frac{1}{p-k}}, x_{k+1}^0, x_{p+2}^0, .., x_m^0]$$

appartiennent à la courbe C.Notons que les réels x_i^0 pour $k+1 \leq i \leq p+1$ ne sont pas tous égaux, sinon (3)deviendrait une égalité.
Par suite, sachant que l'on a choisi $x_{k+1}^0 \leq ... \leq x_{p+1}^0$, les points distincts P_1 et P_2 se trouvent strictement de part et d'autre de la diagonale $t = x$ du plan précédent. Or la courbe C coupe cette diagonale en le point

$$P_3 = [1, x_1^0, .., x_k^0; (x_{k+1}^0...x_{p+1}^0)^{\frac{1}{p+1-k}}, .., (x_{k+1}^0...x_{p+1}^0)^{\frac{1}{p+1-k}}, x_{p+2}^0, .., x_m^0]$$

qui intervient dans l'inégalité (3). D'autre part, en utilisant les relations (3), (4) et (5) on obtient :

$$(\varphi-\psi)(P_3) > (\varphi-\psi)(P_1) \text{ et } (\varphi-\psi)(P_3) > (\varphi-\psi)(P_2),$$

ce qui prouve que la fonction $(\varphi-\psi)$ admet un maximum local sur la courbe C. En conséquence, la restriction de la fonction G-invariante $(\varphi-\psi)$ à la courbe holomorphe (toujours notée C) d'équation $\xi^{p-k}z = x^0_{k+1}...x^0_{p+1}$ du plan complexe $[1, x^0_1, .., x^0_k; \xi, .., \xi, z, x^0_{p+2}, .., x^0_m]$ atteint un maximum local en un point $P = C(\zeta)$. Posons $C(\zeta) = [1, C^1(\zeta), .., C^m(\zeta)]$ et $\dot{C}^\lambda(\xi) = \frac{dC^\lambda}{d\xi}(\xi)$ et $\dot{C}^{\overline{\mu}}(\xi) = \overline{\dot{C}^\mu(\xi)}$.

Sachant que l'on a choisi le point $[1, x^0_1, .., x^0_m]$ de sorte que

$$(x^0_1...x^0_k)^{1/(k+1)} \neq (x^0_{k+1}...x^0_m)^{1/(m-k)},$$

l'équation de la courbe C et les définitions de ψ_1 et ψ_2 montrent qu'en tout point de C

$$\psi_1([1, x^0_1, .., x^0_k; \xi, .., \xi, z, x^0_{p+2}, .., x^0_m]) \neq \psi_2([1, x^0_1, .., x^0_k; \xi, .., \xi, z, x^0_{p+2}, .., x^0_m]).$$

On peut alors supposer que $\psi = \psi_1$ dans un voisinage de P, la preuve étant identique si l'on suppose $\psi = \psi_2$ dans ce voisinage. On a donc :

$$\frac{\partial^2}{\partial\xi\partial\overline{\xi}}\{(\varphi-\psi_1)(C(\zeta))\} = \frac{\partial^2(\varphi-\psi_1)}{\partial z_\lambda \partial \overline{z}_\mu}(C(\zeta))\dot{C}^\lambda(\zeta)\dot{C}^{\overline{\mu}}(\zeta)$$

est négatif ou nul. Comme $-\frac{\partial^2\psi_1}{\partial z_\lambda \partial \overline{z}_\mu} = g_{\lambda\overline{\mu}}$, ceci exprime que la forme hermitienne de matrice:

$$(g_{\lambda\overline{\mu}} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z_\lambda \partial \overline{z}_\mu})_{\lambda,\mu} = (\frac{\partial^2(\varphi-\psi_1)}{\partial z_\lambda \partial \overline{z}_\mu})_{\lambda,\mu}$$

est négative en $P = C(\zeta)$. On en déduit une contradiction avec la g-admissibilité de φ en P. D'où l'inégalité (2) au rang $p+1$ et, par conséquent, le lemme 1.

Lemme 2 *Soit une fonction $\varphi \in C^\infty(\mathbb{P}_m\mathbb{C})$, g-admissible, G-invariante.// Si $x_i =\mid z_i \mid > 0$ pour tout i, dans la carte $\{z_{k+1} \neq 0\}$ on a*

$$(\varphi-\psi)([x_0, x_1, .., x_k; 1, x_{k+2}, .., x_m]) \geq (\varphi-\psi)([\eta, \eta, .., \eta; 1, x_{k+2}, .., x_m]), \qquad (6)$$

où $\eta = (x_0x_1...x_k)^{1/(k+1)}$.

Preuve. Comme dans le lemme 1, la preuve s'effectue par récurrence. Supposons que pour $0 \leq p < k$ et pour tout $(x_0, .., x_k; x_{k+2}, .., x_m) \in \mathbb{R}^m$ avec $x_i > 0$, on ait

$$\begin{aligned}&(\varphi-\psi)([x_0, .., x_k, 1, x_{k+2}, .., x_m]) \geq \\ &(\varphi-\psi)([(x_0...x_p)^{\frac{1}{p+1}}, .., (x_0...x_p)^{\frac{1}{p+1}}, x_{p+1}, .., x_k; 1, x_{k+2}, .., x_m]). \qquad (7)\end{aligned}$$

Cette hypothèse est vérifiée pour $p = 0$. Si l'inégalité (7) n'était pas satisfaite au rang $p+1$, il existerait un point $(x_0^0, .., x_k; x_{k+2}, .., x_m^0) \in \mathbb{R}^m$ avec $x_i^0 > 0$ pour tout i, tel que :

$$\begin{aligned}&(\varphi - \psi)([x_0^0, .., x_k^0; 1, x_{k+2}^0, .., x_m^0]) < \\ &(\varphi - \psi)([(x_0^0..x_{p+1}^0)^{\frac{1}{p+2}}, .., (x_0^0..x_{p+1}^0)^{\frac{1}{p+2}}, x_{p+2}^0, ..., x_k^0; 1, x_{k+2}^0, .., x_m^0]). \qquad (8)\end{aligned}$$

Comme au lemme 1, on peut supposer que le point $[x_0^0, .., x_k^0; 1, x_{k+2}^0, .., x_m^0]$ vérifie

$$(x_0^0..x_k^0)^{1/(k+1)} \neq (x_{k+2}^0..x_m^0)^{1/(m-k)},$$

et que $x_0^0 \leq ... \leq x_{p+1}^0$. D'autre part, en tenant compte de la G-invariance de φ et de l'hypothèse de récurrence (7) en les points

$$[x_0^0, x_1^0, .., x_p^0, x_{p+1}^0, .., x_k^0; 1, x_{k+2}^0, .., x_m^0]$$

et

$$[x_1^0, .., x_{p+1}^0, x_0^0, .., x_k^0; 1, x_{k+2}^0, .., x_m^0],$$

on a

$$\begin{aligned}&(\varphi - \psi)([x_0^0, .., x_k^0; 1, x_{k+2}^0, .., x_m^0]) \geq \\ &(\varphi - \psi)([(x_0^0..x_p^0)^{\frac{1}{p+1}}, .., (x_0^0..x_p^0)^{\frac{1}{p+1}}, x_{p+1}^0, .., x_k^0; 1, x_{k+2}^0, .., x_m^0]) \qquad (9)\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}&(\varphi - \psi)([x_1^0, .., x_{p+1}^0, x_0^0, .., x_k^0; 1, x_{k+2}^0, .., x_m^0]) \geq \\ &(\varphi - \psi)([(x_1^0..x_{p+1}^0)^{\frac{1}{p+1}}, .., (x_1^0..x_{p+1}^0)^{\frac{1}{p+1}}, x_0^0, x_{p+2}^0, .., x_k^0; 1, x_{k+2}^0, .., x_m^0]). \quad (10)\end{aligned}$$

Considérons maintenant la courbe C d'équation

$$t^{p+1}x = x_0^0...x_{p+1}^0$$

du plan réel $\{[t, .., t, x, x_{p+2}^0, .., x_k^0; 1, x_{k+2}^0, .., x_m^0]\}$ paramétré par les variables t et x. Les points

$$Q_1 = [(x_0^0..x_p^0)^{\frac{1}{p+1}}, .., (x_0^0..x_p^0)^{\frac{1}{p+1}}, x_{p+1}^0, x_{p+2}^0, .., x_k^0; 1, x_{k+2}^0, .., x_m^0]$$

et

$$Q_2 = [(x_1^0..x_{p+1}^0)^{\frac{1}{p+1}}, .., (x_1^0..x_{p+1}^0)^{\frac{1}{p+1}}, x_0^0, x_{p+2}^0, .., x_k^0; 1, x_{k+2}^0, .., x_m^0]$$

appartiennent à la courbe C.
D'autre part les réels x_i^0 pour $0 \leq i \leq p+1$ ne sont pas tous égaux, sinon (8) serait une égalité.
Par suite, sachant que l'on a choisi $x_0^0 \leq ... \leq x_{p+1}^0$, les points distincts Q_1 et Q_2 se

trouvent strictement de part et d'autre de la diagonale $t = x$ du plan précédent. Or la courbe C coupe cette diagonale en le point

$$Q_3 = [(x_0^0...x_{p+1}^0)^{\frac{1}{p+2}}, .., (x_0^0...x_{p+1}^0)^{\frac{1}{p+2}}, x_{p+2}^0, .., x_k^0; 1, x_{k+2}^0, .., x_m^0]$$

qui intervient dans l'inégalité (8). D'autre part, les relation (8), (9) et (10) donnent

$$(\varphi - \psi)(Q_3) > (\varphi - \psi)(Q_1) \text{ et } (\varphi - \psi)(Q_3) > (\varphi - \psi)(Q_2),$$

ce qui prouve que la fonction $(\varphi - \psi)$ admet un maximum local sur la courbe C. Sachant que l'on a choisi le point $[x_0^0, .., x_k^0; 1, x_{k+2}^0, .., x_m^0]$ de sorte que

$$(x_0^0..x_k^0)^{1/(k+1)} \neq (x_{k+2}^0..x_m^0)^{1/(m-k)},$$

on conclut de la même manière qu'au lemme précédent en consid´rant la restriction de $(\varphi - \psi)$ à une courbe holomorphe convenable.

Lemme 3 *Etant donnée une fonction $\varphi \in C^\infty(\mathbb{P}_m\mathbb{C})$, g-admissible, G-invariante, si $x_i =\mid z_i \mid > 0$ pour tout i, on a*

$$(\varphi - \psi)([1, x_1, .., x_k; x_{k+1}, x_{k+2}, .., x_m]) \geq (\varphi - \psi)([1^{[k+1]}; \nu^{[m-k]}]), \tag{11}$$

où $\nu = (x_1...x_k)^{-1/(k+1)}(x_{k+1}...x_m)^{1/(m-k)}$.

Preuve. D'après le lemme 1, on a

$$\begin{aligned}
& (\varphi - \psi)([1, x_1, .., x_k; x_{k+1}, x_{k+2}, .., x_m]) \\
\geq\ & (\varphi - \psi)([1, x_1, .., x_k; (x_{k+1}...x_m)^{1/(m-k)}, .., (x_{k+1}...x_m)^{1/(m-k)}]) \\
=\ & (\varphi - \psi)([\frac{1}{(x_{k+1}...x_m)^{1/(m-k)}}, \frac{x_1}{(x_{k+1}...x_m)^{1/(m-k)}}, .., \frac{x_k}{(x_{k+1}...x_m)^{1/(m-k)}}; 1, .., 1]).
\end{aligned}$$

La $(k+2)$-ième composante homogène de ce dernier point étant égale à 1, le lemme 2 nous permet d'écrire

$$\begin{aligned}
& (\varphi - \psi)([1, x_1, .., x_k; x_{k+1}, x_{k+2}, .., x_m]) \\
\geq\ & (\varphi - \psi)([\frac{1}{(x_{k+1}...x_m)^{1/(m-k)}}, \frac{x_1}{(x_{k+1}...x_m)^{1/(m-k)}}, .., \frac{x_k}{(x_{k+1}...x_m)^{1/(m-k)}}; 1, .., 1]) \\
\geq\ & (\varphi - \psi)([\frac{(x_1...x_k)^{1/(k+1)}}{(x_{k+1}...x_m)^{1/(m-k)}}, .., \frac{(x_1...x_k)^{1/(k+1)}}{(x_{k+1}...x_m)^{1/(m-k)}}; 1, .., 1]) \\
=\ & (\varphi - \psi)([1, .., 1; \frac{(x_{k+1}...x_m)^{1/(m-k)}}{(x_1...x_k)^{1/(k+1)}}, .., \frac{(x_{k+1}...x_m)^{1/(m-k)}}{(x_1...x_k)^{1/(k+1)}}]),
\end{aligned}$$

d'où la minoration (11).

Pour la suite de la preuve du théorème 1, précisons que la G invariance ne nous permet pas d'aller plus loin, contrairement à ce qui a été fait dans [5] où le

groupe d'automorphismes est plus gros. C'est pour cette raison que l'on ne peut pas conserver ici la fonction extrémale de [5]. Celle qui apparat dans cet article nous permet de passer directement du lemme 3 à la dernière étape, à savoir le lemme suivant :

Lemme 4 *Etant donnée une fonction $\varphi \in C^\infty(\mathbb{P}_m\mathbb{C})$, g-admissible, G-invariante et telle que* $\sup = 0$ *sur $\mathbb{P}_m\mathbb{C}$, alors pour tout $\zeta > 0$, on a*

$$(\varphi - \psi)([1^{[k+1]}; \zeta^{[m-k]}]) \geq 0, \tag{12}$$

Preuve. On raisonne sur la position du point $P_0 \in \mathbb{P}_m\mathbb{C}$ où φ atteint son maximum. En vertu de la G-invariance de φ, on peut supposer qu'il s'écrit sous la forme

$$P_0 = [y_0^0, .., y_k^0; y_{k+1}^0, .., y_m^0],$$

où les y_i^0 sont des réels positifs vérifiant $y_0^0 \geq y_1^0 \geq .. \geq y_k^0$ et $y_{k+1}^0 \geq y_{k+2}^0 \geq .. \geq y_m^0$. Deux cas se présentent : ou bien l'un des $y_0^0, .., y_k^0$ est non nul, ou bien tous les $y_0^0, .., y_k^0$ sont nuls.
Cas A : l'un des $y_0^0, .., y_k^0$ est non nul. On peut alors se placer dans la carte $\{z_0 \neq 0\}$ et écrire le point P_0 sous la forme

$$P_0 = [1, x_1^0, .., x_k^0; x_{k+1}^0, .., x_m^0],$$

où les réels positifs x_i^0 vérifient : $1 \geq x_1^0 \geq .. \geq x_k^0$ et $x_{k+1}^0 \geq ... \geq x_m^0$.

Raisonnons par l'absurde, et supposons qu'il existe un point $P_1 = [1^{[k+1]}; \zeta_0^{[m-k]}]$ tel que l'on ait $\zeta_0 > 0$ et

$$(\varphi - \psi)(P_1) < 0. \tag{13}$$

On envisage alors les deux sous-cas suivants : $x_{k+1}^0 < \zeta_0$ puis $x_{k+1}^0 \geq \zeta_0$.

- $\underline{x_{k+1}^0 < \zeta_0}$.

On introduit alors la fonction auxiliaire

$$\psi_0 = \log \frac{\mid z_0 \mid^{2(m+1)}}{(\mid z_0 \mid^2 + ... + \mid z_m \mid^2)^{m+1}}.$$

D'une part, puisque $\varphi \leq 0$,

$$(\varphi - \psi_0)([1, 0, ..., 0]) = \varphi([1, 0, ..., 0]) \leq 0. \tag{14}$$

De plus, sachant que $\varphi(P_0) = 0$ et $\psi_0 \leq 0$, on a

$$(\varphi - \psi_0)(P_0) \geq 0. \tag{15}$$

Si $P_0 \neq [1, 0, .., 0]$, $\psi_0(P_0) < 0$ et l'inégalité (15) est alors stricte. Si $P_0 = [1, 0, .., 0]$, quitte à se placer en un point P arbitrairement voisin de P_0, on peut supposer $(\varphi - \psi_0)(P) > 0$. En effet, si dans un voisinage de P_0 on avait $(\varphi - \psi_0) \leq 0$,

comme $(\varphi - \psi_0)(P_0) = 0$, $(\varphi - \psi_0)$ admettrait alors un maximun local en P_0, ce qui mettrait en défaut l'admissibilité de φ en ce point, sachant que

$$\partial_{\lambda\overline{\mu}}(\varphi - \psi_0)(P_0) = (g_{\lambda\overline{\mu}} + \partial_{\lambda\overline{\mu}}\varphi)(P_0).$$

Dans tous les cas, on peut donc affirmer qu'il existe un point $P_0' = [1, a_1, .., a_m]$ vérifiant

$$(\varphi - \psi_0)(P_0') > 0. \tag{16}$$

Par continuité et G-invariance de φ, on peut supposer $1 > a_1 \geq ... \geq a_k > 0$ et $\zeta_0 > a_{k+1} \geq ... \geq a_m > 0$. D'autre part, l'inégalité (13) jointe aux définitions de P_1, ψ_0, ψ_1 et $\psi = \inf(\psi_1, \psi_2)$ implique

$$(\varphi - \psi_0)(P_1) = (\varphi - \psi_1)(P_1) \leq (\varphi - \psi)(P_1) < 0. \tag{17}$$

La courbe :

$$[0,1] \ni t \to [1, t, t^{(\ln a_2)/(\ln a_1)}, .., t^{(\ln a_k)/(\ln a_1)}; \zeta_0 t^{\frac{\ln(a_{k+1}/\zeta_0)}{\ln a_1}}, .., \zeta_0 t^{\frac{\ln(a_m/\zeta_0)}{\ln a_1}}]$$

passe par $[1, 0, .., 0]$ en $t = 0$ puis par P'_0 en $t = a_1$ et enfin par le point P_1 en $t = 1$, valeurs en lesquelles, d'après (14), (16) et (17), $(\varphi - \psi_0)$ est respectivement négative, positive puis à nouveau négative. L'invariance de cette fonction par l'action des $\exp(i\theta)$, permet donc de déduire que $(\varphi - \psi_0)$ atteint un maximum sur la courbe holomorphe, complexifiée de la courbe décrite plus haut, ce qui contredit encore une fois l'admissibilité de φ.

- $\underline{x^0_{k+1} \geq \zeta_0}$.

Désignons dans ce cas par $p \in \{1, .., m-k\}$ l'entier pour lequel on a

$$x^0_{k+1} \geq ... \geq x^0_{k+p} > \zeta_0 \text{ et } \zeta_0 \geq x^0_{k+p+1} \geq ... \geq x^0_m,$$

et considérons la fonction auxiliaire

$$\psi_{k+1} = \log \frac{\mid z_{k+1} \mid^{2(m+1)}}{(\mid z_0 \mid^2 + ... + \mid z_m \mid^2)^{m+1}}.$$

On a

$$(\varphi - \psi_{k+1})(P_0) > 0. \tag{18}$$

La fonction $(\varphi - \psi_{k+1})$ étant continue, quitte à se placer en un point voisin de P_0, on peut supposer tous les x^0_i non nuls. Posons alors:

$$\alpha_2 = \frac{\ln x^0_2}{\ln x^0_1}, .., \alpha_k = \frac{\ln x^0_k}{\ln x^0_1}; \alpha_{k+1} = \frac{\ln(x^0_{k+1}/\zeta_0)}{\ln x^0_1}, .., \alpha_m = \frac{\ln(x^0_m/\zeta_0)}{\ln x^0_1}.$$

Sachant que l'on a $1 \geq x_1^0 \geq .. \geq x_k^0$; $x_{k+1}^0 \geq .. \geq x_{k+p}^0 \geq \zeta_0$ et $\zeta_0 \geq x_{k+p+1}^0 \geq .. \geq x_m^0$, on en déduit que $\alpha_2, .., \alpha_k \geq 0$, $\alpha_{k+1} \leq ... \leq \alpha_{p+k} \leq 0$ et $\alpha_{p+k+1}, .., \alpha_m \geq 0$, d'où, en notant $P_\varepsilon = [1, \varepsilon, \varepsilon^{\alpha_2}, .., \varepsilon^{\alpha_k}, \zeta_0 \varepsilon^{\alpha_{k+1}}, .., \zeta_0 \varepsilon^{\alpha_m}]$, on a

$$\begin{aligned}
\lim_{\varepsilon \to 0} \psi_{k+1}(P_\varepsilon) &= \lim_{\varepsilon \to 0} \ln \frac{\zeta_0^{2(m+1)} \varepsilon^{2\alpha_{k+1}(m+1)}}{[1 + \varepsilon^2 + \varepsilon^{2\alpha_2} + .. + \varepsilon^{2\alpha_k} + \zeta_0^2(\varepsilon^{2\alpha_{k+1}} + .. + \varepsilon^{2\alpha_m})]^{m+1}} \\
&= \ln \lim_{t \to \infty} \frac{\zeta_0^{2(m+1)} t^{-2\alpha_{k+1}(m+1)}}{[\zeta_0^2(t^{-2\alpha_{k+1}} + t^{-2\alpha_{k+2}} + .. + t^{-2\alpha_p})]^{(m+1)}} = \ln 1 = 0,
\end{aligned}$$

$-\alpha_{k+1}$ étant la plus grande puissance intervenant au dénominateur. Sachant que $\varphi([P_\varepsilon]) \leq 0$ et compte tenu de (18) il existe ε_0 tel que l'on ait

$$(\varphi - \psi_{k+1})(P_{\varepsilon_0}) \leq -\psi_{k+1}(P_{\varepsilon_0}) < (\varphi - \psi_{k+1})(P_0). \tag{19}$$

D'autre part, l'inégalité (13), jointe aux définitions de P_1, ψ_{k+1}, ψ_2 et $\psi = \inf(\psi_1, \psi_2)$ donne :

$$(\varphi - \psi_{k+1})(P_1) = (\varphi - \psi_2)(P_1) \leq (\varphi - \psi)(P_1) < 0. \tag{20}$$

La courbe

$$[\varepsilon_0, 1] \ni t \to [1, t, t^{\alpha_2}, .., t^{\alpha_k}, \zeta_0 t^{\alpha_{k+1}}, .., \zeta_0 t^{\alpha_m}],$$

passe par P_{ε_0} en $t = \varepsilon_0$ puis par P_0 en $t = x_1^0$ et enfin par P_1 en $t = 1$, ce qui, en vertu de (19), (18) et (20) prouve l'existence d'un maximum local pour la fonction $(\varphi - \psi_{k+1})$ sur la courbe précitée. Ceci contredit, à l'instar du cas précédent, l'hypothèse d'admissibilité de la fonction φ.

Cas B : $y_0^0 = ... = y_k^0 = 0$. On se place alors dans la carte $\{z_{k+1} \neq 0\}$, de sorte que le point P_0 où φ atteint son maximum égal à zéro puisse s'écrire sous la forme

$$P_0 = [0, 0, .., 0; 1, x_{k+2}^0, .., x_m^0].$$

On peut aussi supposer, en utilisant la G-invariance de φ, que $1 \geq x_{k+2}^0 \geq .. \geq x_m^0$. On montrera une version équivalente du lemme 4, à savoir que

$$(\varphi - \psi)([\zeta^{[k+1]}; 1^{[m-k]}]) \geq 0 \tag{21}$$

pour tout $\zeta > 0$. Raisonnons par l'absurde, et supposons qu'il existe un point $P_{k+1} = [\zeta_0^{[k+1]}; 1^{[m-k]}]$ tel que l'on ait $\zeta_0 > 0$ et

$$(\varphi - \psi)(P_{k+1}) < 0. \tag{22}$$

On considère alors la fonction auxiliaire ψ_{k+1} introduite plus haut. Sachant que $\varphi \leq 0$, on a

$$(\varphi - \psi_{k+1})([0^{[k+1]}; 1, 0, .., 0]) = \varphi([0^{[k+1]}; 1, 0, .., 0]) \leq 0. \tag{23}$$

D'autre part, sachant que $\varphi(P_0) = 0$ et $\psi_{k+1} \leq 0$, on a

$$(\varphi - \psi_{k+1})(P_0) = -\psi_{k+1}(P_0) \geq 0. \tag{24}$$

Cette inégalité est stricte dès que $P_0 \neq [0^{[k+1]}; 1, 0, .., 0]$. Si $P_0 = [0^{[k+1]}; 1, 0, .., 0]$, quitte à se placer en un point arbitrairement voisin de P_0, on peut supposer la dernière inégalité stricte. En effet, si dans un voisinage de P_0, on avait $\varphi - \psi_{k+1} \leq 0$, alors $\varphi - \psi_{k+1}$ admettrait un maximum local en P_0, ce qui contredirait l'admissibilité de φ en P_0. A l'instar du cas A, il existe donc un point $P_0' = [c_0, .., c_k; 1, c_{k+2}, .., c_m]$ vérifiant

$$(\varphi - \psi_{k+1})(P_0') > 0. \tag{25}$$

Par continuité et G-invariance de φ, on peut supposer $\zeta_0 > c_0 \geq ... \geq c_k > 0$ et $1 > c_{k+2} \geq ... \geq c_m > 0$. D'autre part, l'inégalité (22) jointe aux définitions de P_{k+1}, ψ_{k+1}, ψ_2 et $\psi = \inf(\psi_1, \psi_2)$ implique

$$(\varphi - \psi_{k+1})(P_{k+1}) = (\varphi - \psi_2)(P_{k+1}) \leq (\varphi - \psi)(P_{k+1}) < 0. \tag{26}$$

La courbe :

$$[0, 1] \ni t \to [\zeta_0 t^{\frac{\ln(c_0/\zeta_0)}{\ln c_{k+2}}}, .., \zeta_0 t^{\frac{\ln(c_k/\zeta_0)}{\ln c_{k+2}}}; 1, t, t^{(\ln c_{k+3})/(\ln c_{k+2})}, .., t^{(\ln c_m)/(\ln c_{k+2})}]$$

passe par $[0^{[k+1]}, 1, 0, .., 0]$ en $t = 0$ puis par P'_0 en $t = c_{k+2}$ et enfin par le point P_{k+1} en $t = 1$, valeurs en lesquelles, d'après (23), (25) et (26), $(\varphi - \psi_{k+1})$ est respectivement négative, positive puis négative. L'invariance de cette fonction par l'action des $\exp(i\theta)$, permet donc de déduire que $(\varphi - \psi_0)$ atteint un maximum sur la courbe holomorphe, déduite de la courbe décrite plus haut, ce qui contredit l'admissibilité de φ, d'où (21) et le lemme 4.

2.2 Preuve du corollaire 1.

Soit $\varphi \in C^\infty(\mathbb{P}_m\mathbb{C})$ une fonction g-admissible et G-invariante, dont le sup sur $\mathbb{P}_m\mathbb{C}$ est nul. D'après le théorème 1, on a $\varphi \geq \psi$ et par suite, pour tout $\alpha \geq 0$,

$$\int_{\mathbb{P}_m\mathbb{C}} \exp(-\alpha\varphi) dv \leq \int_{\mathbb{P}_m\mathbb{C}} \exp(-\alpha\psi) dv.$$

Cherchons les valeurs de α pour lesquelles cette dernière intégrale converge. Pour ce faire, on estimera $\int_{\mathbb{P}_m\mathbb{C}} \exp(-\alpha\psi_1) dv$ et $\int_{\mathbb{P}_m\mathbb{C}} \exp(-\alpha\psi_2) dv$ dans la carte dense définie par $\{z_0 = 1\}$. Dans cette carte, l'élément de volume est donné par

$$dv = (i)^m \frac{dz_1 \wedge d\overline{z}_1 \wedge ... \wedge dz_m \wedge d\overline{z}_m}{(1 + \mid z_1 \mid^2 + ... + \mid z_m \mid^2)^{m+1}}.$$

En utilisant la définition de ψ_1 qui ne dépand que des $\mid z_p \mid$, par le changement de variables $u_p = \mid z_p \mid^2$ on obtient :

$$\int_{\mathbb{P}_m\mathbb{C}} \exp(-\alpha\psi_1) dv = Cst \int_0^{+\infty} ... \int_0^{+\infty} \frac{(u_1 ... u_k)^{-\alpha(m+1)/(k+1)} du_1 ... du_m}{(1 + u_1 + ... + u_m)^{(1-\alpha)(m+1)}}.$$

Cette intégrale converge en zéro si et seulement si : $1-\frac{\alpha(m+1)}{k+1}>0$, c'est à dire $\alpha<(k+1)/(m+1)$. En l'infini, le passage en coordonnées polaires ramène l'étude à la convergence de

$$\int_{a>0}^{\infty} r^{\frac{-\alpha k(m+1)}{k+1}} r^{(\alpha-1)(m+1)} r^{m-1} dr,$$

ce qui donne la condition :

$$\frac{-\alpha k(m+1)}{k+1}+(\alpha-1)(m+1)+(m-1)+1<0,$$

et donc encore $\alpha<(k+1)/(m+1)$. Ainsi $\int_{\mathbb{P}_m\mathbb{C}}\exp(-\alpha\psi_1)dv$ converge si et seulement si $\alpha<\frac{k+1}{m+1}$. D'autre part,

$$\int_{\mathbb{P}_m\mathbb{C}}\exp(-\alpha\psi_2)dv = Cst\int_0^{+\infty}..\int_0^{+\infty}\frac{(u_{k+1}..u_m)^{-\alpha(m+1)/(m-k)}du_1..du_m}{(1+u_1+..+u_k+u_{k+1}+..+u_m)^{(1-\alpha)(m+1)}}.$$

La convergence en zéro exige $\frac{\alpha(m+1)}{m-k}<1$, c'est à dire $\alpha<\frac{m-k}{m+1}$. En l'infini, le passage en coordonnées polaires ramène l'étude à la convergence de

$$\int_{a>0}^{\infty} r^{-\alpha(m+1)} r^{(\alpha-1)(m+1)} r^{m-1} dr = \int_{a>0}^{\infty} r^{-2} dr,$$

intégrale convergente quelle que soit la valeur de α. D'où la convergence de $\int_{\mathbb{P}_m\mathbb{C}}\exp(-\alpha\psi_2)dv$ pour $\alpha<\frac{m-k}{m+1}$ et le corollaire 1.

2.3 Preuve du théorème 2.

Comme pour le théorème 1, on utilisera l'invariance par le groupe G défini dans l'introduction, des fonctions $\varphi([z_0,..,z_k,z_{k+1},..,z_m],[\zeta_0,..,\zeta_k])$ où $(z_0,..,z_k)$ et $(\zeta_0,..,\zeta_k)$ sont colinéaires. Celà nous permettra de les considérer, dans le lemme 5 comme des fonctions $\varphi([1,x_1,...,x_m],[1,x_1,...,x_k])$ des variables réelles $x_i=\mid z_i\mid>0$, $i\in\{1,..,m\}$, puis, dans le lemme 6 comme des fonctions

$$\varphi([x_0,...,x_k,1,x_{k+2},..,x_m],[x_0,...,x_k])$$

des variables réelles $x_i=\mid z_i\mid>0$, $i\in\{0,..,k,k+2,..,m\}$. Notons que ces repérages ne contiennent pas l'éclatement, les x_i étant non nuls dans l'énoncé de ces deux lemmes.

Lemme 5 *Etant donnée une fonction $\varphi\in C^\infty(X)$, $\tilde{g}$-admissible, G-invariante. Si $x_i=\mid z_i\mid>0$ pour tout i:*

$$(\varphi-\tilde{\psi})([1,x_1,..,x_m],[1,x_1,..,x_k])\geq(\varphi-\tilde{\psi})([1,x_1,..,x_k;\zeta^{[m-k]}],[1,x_1,..,x_m]),(27)$$

où $\zeta^{[m-k]}=(\zeta,..,\zeta)\in\mathbb{C}^{m-k}$ et $\zeta=(x_{k+1}...x_m)^{1/(m-k)}$.

Preuve. La démonstration se fait par récurrence, comme pour le lemme 1. Supposons que pour $k+1 \leq p < m$ et pour tout $(x_1, .., x_m) \in \mathbb{R}^m$ avec $x_i > 0$ on ait

$$\begin{aligned}&(\varphi - \tilde{\psi})([1, x_1, .., x_m], [1, x_1, .., x_k]) \geq \\ &(\varphi - \tilde{\psi})([1, x_1, .., x_k; (x_{k+1}...x_p)^{\frac{1}{p-k}}, .., (x_{k+1}...x_p)^{\frac{1}{p-k}}, x_{p+1}, ..x_m], \\ &[1, x_1, .., x_k]). \end{aligned} \tag{28}$$

Cette propriété est claire pour $p = k+1$. Si l'inégalité (28) n'était pas satisfaite au rang $p+1$, il existerait alors un point $(x_1^0, .., x_m^0) \in \mathbb{R}^m$ avec $x_i^0 > 0$ pour tout i, tel que

$$\begin{aligned}&(\varphi - \tilde{\psi})([1, x_1^0, .., x_m^0], [1, x_1^0, .., x_k^0]) < \\ &(\varphi - \tilde{\psi})([1, x_1^0, .., x_k^0; (x_{k+1}^0...x_{p+1}^0)^{\frac{1}{p+1-k}}, .., (x_{k+1}^0...x_{p+1}^0)^{\frac{1}{p+1-k}}, x_{p+2}^0, .., x_m^0], \\ &[1, x_1^0, .., x_k^0]). \end{aligned} \tag{29}$$

En utilisant la continuité de $(\varphi - \tilde{\psi})$, on peut supposer, quitte à en modifier légérement les coordonnées, que le point $([1, x_1^0, .., x_m^0], [1, x_1^0, .., x_k^0])$ de l'inégalité (29), vérifie

$$(x_1^0..x_k^0)^{1/(k+1)} \neq (x_{k+1}^0..x_m^0)^{1/(m-k)},$$

propriété dont on aura besoin plus loin. En utilisant la G-invariance de φ, on peut supposer que $x_{k+1}^0 \leq ... \leq x_m^0$. D'autre part, en tenant encore compte de la G invariance de φ et de l'hypothèse de récurrence (28) en les points

$$([1, x_1^0, .., x_k^0; x_{k+1}^0, x_{k+2}^0, .., x_p^0, x_{p+1}^0, x_{p+2}^0, .., x_m^0], [1, x_1^0, .., x_k^0])$$

et

$$([1, x_1^0, .., x_k^0; x_{k+2}^0, x_{k+3}^0, .., x_p^0, x_{p+1}^0, x_{k+1}^0, x_{p+2}^0, .., x_m^0], [1, x_1^0, .., x_k^0]),$$

on peut écrire

$$\begin{aligned}&(\varphi - \tilde{\psi})([1, x_1^0, .., x_m^0], [1, x_1^0, .., x_k^0]) \geq \\ &(\varphi - \tilde{\psi})([1, x_1^0, .., x_k^0; (x_{k+1}^0...x_p^0)^{\frac{1}{p-k}}, .., (x_{k+1}^0...x_p^0)^{\frac{1}{p-k}}, x_{p+1}^0, x_{p+2}^0, .., x_m^0], \\ &[1, x_1^0, .., x_k^0]) \end{aligned} \tag{30}$$

et

$$\begin{aligned}&(\varphi - \tilde{\psi})([1, x_1^0, .., x_k^0; x_{k+2}^0, .., x_{p+1}^0, x_{k+1}^0, x_{p+2}^0, .., x_m^0], [1, x_1^0, .., x_k^0]) \geq \\ &(\varphi - \tilde{\psi})([1, x_1^0, .., x_k^0; (x_{k+2}^0..x_{p+1}^0)^{\frac{1}{p-k}}, .., (x_{k+2}^0..x_{p+1}^0)^{\frac{1}{p-k}}, x_{k+1}^0, x_{p+2}^0, .., x_m^0], \\ &[1, x_1^0, .., x_k^0]). \end{aligned} \tag{31}$$

Considérons maintenant la courbe C d'équation

$$t^{p-k}x = x_{k+1}^0...x_{p+1}^0$$

dans le plan réel $\{[1, x_1^0, .., x_k^0, t, .., t, x, x_{p+2}^0, .., x_m^0], [1, x_1^0, .., x_k^0]\}$ paramétré par les variables t et x. Les points

$$\tilde{P}_1 = ([1, x_1^0, .., x_k^0; (x_{k+1}^0 ... x_p^0)^{\frac{1}{p-k}}, .., (x_{k+1}^0 ... x_p^0)^{\frac{1}{p-k}}, x_{p+1}^0, x_{p+2}^0, .., x_m^0], [1, x_1^0, .., x_k^0])$$

et

$$\tilde{P}_2 = ([1, x_1^0, .., x_k^0; (x_{k+2}^0 ... x_{p+1}^0)^{\frac{1}{p-k}}, .., (x_{k+2}^0 ... x_{p+1}^0)^{\frac{1}{p-k}}, x_{k+1}^0, x_{p+2}^0, .., x_m^0], [1, x_1^0, .., x_k^0])$$

appartiennent à la courbe C. Notons que les réels x_i^0 pour $k+1 \leq i \leq p+1$ ne sont pas tous égaux, sinon (29) deviendrait une égalité.
Par suite, sachant que l'on a choisi $x_{k+1}^0 \leq ... \leq x_{p+1}^0$, les points distincts $\tilde{P}_1$ et $\tilde{P}_2$ se trouvent strictement de part et d'autre de la diagonale $t = x$ du plan précédent. Or la courbe C coupe cette diagonale en le point

$$\tilde{P}_3 = ([1, x_1^0, .., x_k^0; (x_{k+1}^0 ... x_{p+1}^0)^{\frac{1}{p+1-k}}, .., (x_{k+1}^0 ... x_{p+1}^0)^{\frac{1}{p+1-k}}, x_{p+2}^0, .., x_m^0], [1, x_1^0, .., x_k^0])$$

qui intervient dans l'inégalité (29). D'autre part, en utilisant les relations (29), (30) et (31) on obtient :

$$(\varphi - \tilde{\psi})(\tilde{P}_3) > (\varphi - \tilde{\psi})(\tilde{P}_1) \text{ et } (\varphi - \tilde{\psi})(\tilde{P}_3) > (\varphi - \tilde{\psi})(\tilde{P}_2),$$

ce qui prouve que la fonction $(\varphi - \tilde{\psi})$ admet un maximum local sur la courbe C. En conséquence, la restriction de la fonction G-invariante $(\varphi - \tilde{\psi})$ à la courbe holomorphe (toujours notée C) d'équation $\xi^{p-k} z = x_{k+1}^0 ... x_{p+1}^0$ du plan complexe $\{([1, x_1^0, .., x_k^0; \xi, .., \xi, z, x_{p+2}^0, .., x_m^0], [1, x_1^0, .., x_k^0])\}$ atteint un maximum local en un point $\tilde{P} = C(\zeta)$. Posons

$$C(\zeta) = ([1, C^1(\zeta), .., C^m(\zeta)], [1, C^1(\zeta), .., C^k(\zeta)]),$$

$$\dot{C}^\lambda(\xi) = \frac{dC^\lambda}{d\xi}(\xi) \text{ et } \dot{C}^{\overline{\mu}}(\xi) = \overline{\dot{C}^\mu(\xi)}.$$

Sachant que l'on a choisi le point $([1, x_1^0, .., x_m^0], [1, x_1^0, .., x_k^0])$ de sorte que

$$(x_1^0 ... x_k^0)^{1/(k+1)} \neq (x_{k+1}^0 ... x_m^0)^{1/(m-k)},$$

l'équation de la courbe C et les définitions de $\tilde{\psi}_1$ et $\tilde{\psi}_2$ montrent qu'en tout point de C

$$\begin{aligned} &\tilde{\psi}_1([1, x_1^0, .., x_k^0; \xi, .., \xi, z, x_{p+2}^0, .., x_m^0], [1, x_1^0, .., x_k^0]) \neq \\ &\quad \tilde{\psi}_2([1, x_1^0, .., x_k^0; \xi, .., \xi, z, x_{p+2}^0, .., x_m^0], [1, x_1^0, .., x_k^0]). \end{aligned} \tag{32}$$

On peut alors supposer que $\tilde{\psi} = \tilde{\psi}_1$ dans un voisinage de $\tilde{P}$, la preuve étant identique si l'on suppose $\tilde{\psi} = \tilde{\psi}_2$ dans ce voisinage. On a donc :

$$\frac{\partial^2}{\partial\xi\partial\overline{\xi}}\{(\varphi-\tilde{\psi}_1)(C(\zeta))\}=\frac{\partial^2(\varphi-\tilde{\psi}_1)}{\partial z_\lambda\partial\overline{z}_\mu}(C(\zeta))\dot{C}^\lambda(\zeta)\dot{C}^{\overline{\mu}}(\zeta)$$

est négatif ou nul. Comme $-\frac{\partial^2\tilde{\psi}_1}{\partial z_\lambda\partial\overline{z}_\mu}=\tilde{g}_{\lambda\overline{\mu}}$, ceci exprime que la forme hermitienne de matrice:

$$(\tilde{g}_{\lambda\overline{\mu}}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z_\lambda\partial\overline{z}_\mu})_{\lambda,\mu}=(\frac{\partial^2(\varphi-\tilde{\psi}_1)}{\partial z_\lambda\partial\overline{z}_\mu})_{\lambda,\mu}$$

est négative en $\tilde{P}=C(\zeta)$. On en déduit une contradiction avec la $\tilde{g}$-admissibilité de φ en $\tilde{P}$. D'où l'inégalité (28) au rang $p+1$ et, par conséquent, le lemme 5.

Lemme 6 *Etant donnée une fonction $\varphi\in C^\infty(X)$, $\tilde{g}$-admissible, G-invariante. Si $x_i=\mid z_i\mid>0$ pour tout i, on a:*

$$\begin{aligned}(\varphi-\tilde{\psi})([x_0,x_1,..,x_k;1,x_{k+2},..,x_m],[x_0,x_1,..,x_k])\geq\\ (\varphi-\tilde{\psi})([\eta,\eta,..,\eta;1,x_{k+2},..,x_m],[1^{[k+1]}]),\end{aligned}\tag{33}$$

où $\eta=(x_0x_1...x_k)^{1/(k+1)}$.

Preuve. Comme dans le lemme 5, la preuve s'effectue par récurrence. Supposons que pour $0\leq p<k$ et pour tout $(x_0,..,x_k;x_{k+2},..,x_m)\in\mathbb{R}^m$ avec $x_i>0$, on ait

$$\begin{aligned}&(\varphi-\tilde{\psi})([x_0,..,x_k,1,x_{k+2},..,x_m],[x_0,..,x_k])\geq\\&(\varphi-\tilde{\psi})([(x_0...x_p)^{\frac{1}{p+1}},..,(x_0...x_p)^{\frac{1}{p+1}},x_{p+1},..,x_k;1,x_{k+2},..,x_m],\\&[(x_0...x_p)^{\frac{1}{p+1}},..,(x_0...x_p)^{\frac{1}{p+1}},x_{p+1},..,x_k]).\end{aligned}\tag{34}$$

Cette hypothèse est vérifiée pour $p=0$. Si l'inégalité (34) n'était pas satisfaite au rang $p+1$, il existerait un point $(x_0^0,..,x_k;x_{k+2},..,x_m^0)\in\mathbb{R}^m$ avec $x_i^0>0$ pour tout i, tel que :

$$\begin{aligned}&(\varphi-\tilde{\psi})([x_0^0,..,x_k^0;1,x_{k+2}^0,..,x_m^0],[x_0^0,..,x_k^0])<\\&(\varphi-\tilde{\psi})([(x_0^0..x_{p+1}^0)^{\frac{1}{p+2}},..,(x_0^0..x_{p+1}^0)^{\frac{1}{p+2}},x_{p+2}^0,...,x_k^0;1,x_{k+2}^0,..,x_m^0],\\&[(x_0^0..x_{p+1}^0)^{\frac{1}{p+2}},..,(x_0^0..x_{p+1}^0)^{\frac{1}{p+2}},x_{p+2}^0,...,x_k^0]).\end{aligned}\tag{35}$$

Comme au lemme 5, on peut supposer que le point

$$([x_0^0,..,x_k^0;1,x_{k+2}^0,..,x_m^0],[x_0^0,..,x_k^0])\in X$$

vérifie

$$(x_0^0..x_k^0)^{1/(k+1)}\neq(x_{k+2}^0..x_m^0)^{1/(m-k)},$$

et que $x_0^0\leq...\leq x_{p+1}^0$. D'autre part, en tenant compte de la G-invariance de φ et de l'hypothèse de récurrence (34) en les points

$$([x_0^0,x_1^0,..,x_p^0,x_{p+1}^0,..,x_k^0;1,x_{k+2}^0,..,x_m^0],[x_0^0,x_1^0,..,x_p^0,x_{p+1}^0,..,x_k^0])$$

et

$$([x_1^0,..,x_{p+1}^0,x_0^0,..,x_k^0;1,x_{k+2}^0,..,x_m^0],[x_1^0,..,x_{p+1}^0,x_0^0,..,x_k^0]),$$

on a

$$\begin{aligned}&(\varphi-\tilde{\psi})([x_0^0,..,x_k^0;1,x_{k+2}^0,..,x_m^0],[x_0^0,..,x_k^0])\geq\\&(\varphi-\tilde{\psi})([(x_0^0..x_p^0)^{\frac{1}{p+1}},..,(x_0^0..x_p^0)^{\frac{1}{p+1}},x_{p+1}^0,..,x_k^0;1,x_{k+2}^0,..,x_m^0],\\&[(x_0^0..x_p^0)^{\frac{1}{p+1}},..,(x_0^0..x_p^0)^{\frac{1}{p+1}},x_{p+1}^0,..,x_k^0])\end{aligned}\tag{36}$$

et

$$\begin{aligned}&(\varphi-\tilde{\psi})([x_1^0,..,x_{p+1}^0,x_0^0,..,x_k^0;1,x_{k+2}^0,..,x_m^0],[x_1^0,..,x_{p+1}^0,x_0^0,..,x_k^0])\geq\\&(\varphi-\tilde{\psi})([(x_1^0..x_{p+1}^0)^{\frac{1}{p+1}},..,(x_1^0..x_{p+1}^0)^{\frac{1}{p+1}},x_0^0,x_{p+2}^0,..,x_k^0;1,x_{k+2}^0,..,x_m^0],\\&[(x_1^0..x_{p+1}^0)^{\frac{1}{p+1}},..,(x_1^0..x_{p+1}^0)^{\frac{1}{p+1}},x_0^0,x_{p+2}^0,..,x_k^0]).\end{aligned}\tag{37}$$

Considérons maintenant la courbe C d'équation

$$t^{p+1}x=x_0^0...x_{p+1}^0$$

du plan réel $\{([t,..,t,x,x_{p+2}^0,..,x_k^0;1,x_{k+2}^0,..,x_m^0],[t,..,t,x,x_{p+2}^0,..,x_k^0])\}$ paramétré par les variables t et x. Les points

$$\begin{aligned}\tilde{Q}_1=&([(x_0^0..x_p^0)^{\frac{1}{p+1}},..,(x_0^0..x_p^0)^{\frac{1}{p+1}},x_{p+1}^0,x_{p+2}^0,..,x_k^0;1,x_{k+2}^0,..,x_m^0],\\&[(x_0^0..x_p^0)^{\frac{1}{p+1}},..,(x_0^0..x_p^0)^{\frac{1}{p+1}},x_{p+1}^0,x_{p+2}^0,..,x_k^0])\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\tilde{Q}_2=&([(x_1^0..x_{p+1}^0)^{\frac{1}{p+1}},..,(x_1^0..x_{p+1}^0)^{\frac{1}{p+1}},x_0^0,x_{p+2}^0,..,x_k^0;1,x_{k+2}^0,..,x_m^0],\\&[(x_1^0..x_{p+1}^0)^{\frac{1}{p+1}},..,(x_1^0..x_{p+1}^0)^{\frac{1}{p+1}},x_0^0,x_{p+2}^0,..,x_k^0])\end{aligned}$$

appartiennent à la courbe C.
D'autre part les réels x_i^0 pour $0\leq i\leq p+1$ ne sont pas tous égaux, sinon (35) serait une égalité.
Par suite, sachant que l'on a choisi $x_0^0\leq...\leq x_{p+1}^0$, les points distincts $\tilde{Q}_1$ et $\tilde{Q}_2$ se trouvent strictement de part et d'autre de la diagonale $t=x$ du plan précédent.
Or la courbe C coupe cette diagonale en le point

$$\begin{aligned}\tilde{Q}_3=&([(x_0^0...x_{p+1}^0)^{\frac{1}{p+2}},..,(x_0^0...x_{p+1}^0)^{\frac{1}{p+2}},x_{p+2}^0,..,x_k^0;1,x_{k+2}^0,..,x_m^0],\\&[(x_0^0...x_{p+1}^0)^{\frac{1}{p+2}},..,(x_0^0...x_{p+1}^0)^{\frac{1}{p+2}},x_{p+2}^0,..,x_k^0])\end{aligned}$$

qui intervient dans l'inégalité (35). D'autre part, les relation (35), (36) et (37) donnent

$$(\varphi-\tilde{\psi})(\tilde{Q}_3)>(\varphi-\tilde{\psi})(\tilde{Q}_1)\text{ et }(\varphi-\tilde{\psi})(\tilde{Q}_3)>(\varphi-\tilde{\psi})(\tilde{Q}_2),$$

ce qui prouve que la fonction $(\varphi - \tilde{\psi})$ admet un maximum local sur la courbe C. Sachant que l'on a choisi le point

$$([x_0^0, .., x_k^0; 1, x_{k+2}^0, .., x_m^0], [x_0^0, .., x_k^0])$$

de sorte que

$$(x_0^0..x_k^0)^{1/(k+1)} \neq (x_{k+2}^0..x_m^0)^{1/(m-k)},$$

on conclut de la même manière qu'au lemme précédent en considérant la restriction de $(\varphi - \tilde{\psi})$ à une courbe holomorphe convenable.

A l'instar du lemme 3, les lemmes 5 et 6 permettent d'établir le

Lemme 7 *Etant donnée une fonction $\varphi \in C^\infty(X)$, $\tilde{g}$-admissible, G-invariante, avec $x_i =\mid z_i \mid > 0$ pour tout i, on a :*

$$\begin{aligned}&(\varphi - \tilde{\psi})([1, x_1, .., x_k; x_{k+1}, x_{k+2}, .., x_m], [1, x_1, .., x_k])\\ &\geq (\varphi - \tilde{\psi})([1^{[k+1]}; \nu^{[m-k]}], [1^{[k+1]}]),\end{aligned} \tag{38}$$

où $\nu = \frac{(x_{k+1}...x_m)^{1/(m-k)}}{(x_1...x_k)^{1/(k+1)}}$.

Montrons maintenant le

Lemme 8 *Etant donnée une fonction $\varphi \in C^\infty(X)$, $\tilde{g}$-admissible, G-invariante, $\forall \zeta > 0$, on a :*

$$(\varphi - \tilde{\psi})([1^{[k+1]}; \zeta^{[m-k]}], [1^{[k+1]}]) \geq 0, \tag{39}$$

Preuve. On raisonne sur la position du point $\tilde{R}_0 \in \mathbb{P}_m\mathbb{C}$ où φ atteint son maximum. En vertu de la G-invariance de φ, on peut supposer qu'il s'écrit sous la forme

$$\tilde{R}_0 = ([y_0^0, .., y_k^0; y_{k+1}^0, .., y_m^0], [\rho_0^0, .., \rho_k^0]),$$

où les y_i^0 et ρ_i^0 sont des réels positifs vérifiant $y_0^0 \geq y_1^0 \geq .. \geq y_k^0$, $y_{k+1}^0 \geq y_{k+2}^0 \geq .. \geq y_m^0$, $\rho_0^0 \geq .. \geq \rho_k^0$ et où $(\rho_0^0, .., \rho_k^0)$ et $(y_0^0, .., y_k^0)$ sont parallèles. Deux cas se présentent : ou bien l'un des $y_0^0, .., y_k^0$ est non nul, ou bien tous les $y_0^0, .., y_k^0$ sont nuls.

Cas A : l'un des $y_0^0, .., y_k^0$ est non nul. On peut alors se placer dans la carte de X décrite par les points

$$([z_0, .., z_k, z_{k+1}, .., z_m], [\xi_0, .., \xi_k]) \in \mathbb{P}_m\mathbb{C} \times \mathbb{P}_k\mathbb{C}$$

tels que $z_0 \neq 0$. Ceci permet d'écrire le point $\tilde{R}_0$ sous la forme

$$\tilde{R}_0 = ([1, x_1^0, .., x_k^0; x_{k+1}^0, .., x_m^0], [1, x_1^0, .., x_k^0]),$$

où les réels positifs x_i^0 vérifient : $1 \geq x_1^0 \geq .. \geq x_k^0$ et $x_{k+1}^0 \geq ... \geq x_m^0$. Raisonnons par l'absurde, et supposons qu'il existe un point

$$\tilde{R}_1 = ([1^{[k+1]}; \zeta_0^{[m-k]}], [1^{[k+1]}])$$

tel que l'on ait $\zeta_0 > 0$ et

$$(\varphi - \tilde{\psi})(\tilde{R}_1) < 0. \tag{40}$$

On envisage alors les deux sous-cas suivants : $x^0_{k+1} < \zeta_0$ puis $x^0_{k+1} \geq \zeta_0$.

- $\underline{x^0_{k+1} < \zeta_0}$.

On introduit alors la fonction auxiliaire

$$\tilde{\psi}_0 = \log \frac{\mid z_0 \mid^{2(m+1-k)} \mid \xi_0 \mid^{2k}}{(\mid z_0 \mid^2 + ... + \mid z_m \mid^2)^{m+1-k} (\mid \xi_0 \mid^2 + ... + \mid \xi_k \mid^2)^k}.$$

D'une part, puisque $\varphi \leq 0$,

$$(\varphi - \tilde{\psi}_0)([1, 0^{[m]}], [1, 0^{[k]}]) = \varphi([1, 0^{[m]}], [1, 0^{[k]}]) \leq 0. \tag{41}$$

De plus, sachant que $\varphi(\tilde{R}_0) = 0$ et $\tilde{\psi}_0 \leq 0$, on a

$$(\varphi - \tilde{\psi}_0)(\tilde{R}_0) \geq 0. \tag{42}$$

Si $\tilde{R}_0 \neq ([1, 0^{[m]}], [1, 0^{[k]}])$, $\tilde{\psi}_0(\tilde{R}_0) < 0$ et l'inégalité (42) est alors stricte. Si $\tilde{R}_0 = ([1, 0^{[m]}], [1, 0^{[k]}])$, quitte à se placer en un point $\tilde{R}$ arbitrairement voisin de $\tilde{R}_0$, on peut supposer $(\varphi - \tilde{\psi}_0)(\tilde{R}) > 0$. En effet, si dans un voisinage de $\tilde{R}_0$ on avait $(\varphi - \tilde{\psi}_0) \leq 0$, comme $(\varphi - \tilde{\psi}_0)(\tilde{R}_0) = 0$, $(\varphi - \tilde{\psi}_0)$ admettrait alors un maximun local en $\tilde{R}_0$, ce qui mettrait en défaut l'admissibilité de φ en ce point, sachant que

$$\partial_{\lambda\overline{\mu}}(\varphi - \tilde{\psi}_0)(\tilde{R}_0) = (\tilde{g}_{\lambda\overline{\mu}} + \partial_{\lambda\overline{\mu}}\varphi)(\tilde{R}_0).$$

Dans tous les cas, on peut donc affirmer qu'il existe un point

$$\tilde{R}'_0 = ([1, a_1, .., a_m], [1, a_1, .., a_k])$$

vérifiant

$$(\varphi - \tilde{\psi}_0)(\tilde{R}'_0) > 0. \tag{43}$$

Par continuité et G-invariance de φ, on peut supposer $1 > a_1 \geq ... \geq a_k > 0$ et $\zeta_0 > a_{k+1} \geq ... \geq a_m > 0$. D'autre part, l'inégalité (40) jointe aux définitions de $\tilde{R}_1$, $\tilde{\psi}_0$, $\tilde{\psi}_1$ et $\tilde{\psi} = \inf(\tilde{\psi}_1, \tilde{\psi}_2)$ implique

$$(\varphi - \tilde{\psi}_0)(\tilde{R}_1) = (\varphi - \tilde{\psi}_1)(\tilde{R}_1) \leq (\varphi - \tilde{\psi})(\tilde{R}_1) < 0. \tag{44}$$

La courbe :

$$[0, 1] \ni t \to ([1, t, t^{(\ln a_2)/(\ln a_1)}, .., t^{(\ln a_k)/(\ln a_1)}; \zeta_0 t^{\frac{\ln(a_{k+1}/\zeta_0)}{\ln a_1}}, .., \zeta_0 t^{\frac{\ln(a_m/\zeta_0)}{\ln a_1}}],$$
$$[1, t, t^{(\ln a_2)/(\ln a_1)}, .., t^{(\ln a_k)/(\ln a_1)}])$$

passe par $([1, 0^{[m]}], [1, 0^{[k]}])$ en $t = 0$ puis par $\tilde{R}'_0$ en $t = a_1$ et enfin par le point $\tilde{R}_1$ en $t = 1$, valeurs en lesquelles, d'après (41), (43) et (44), $(\varphi - \tilde{\psi}_0)$ est respectivement négative, positive puis à nouveau négative. L'invariance de cette fonction par l'action des $\exp(i\theta)$, permet donc de déduire que $(\varphi - \tilde{\psi}_0)$ atteint un maximum sur la courbe holomorphe, complexifiée de la courbe décrite plus haut, ce qui contredit encore une fois l'admissibilité de φ.

- $\underline{x^0_{k+1} \geq \zeta_0}$.

Désignons dans ce cas par $p \in \{1, .., m-k\}$ l'entier pour lequel on a

$$x^0_{k+1} \geq ... \geq x^0_{k+p} > \zeta_0 \text{ et } \zeta_0 \geq x^0_{k+p+1} \geq ... \geq x^0_m,$$

et considérons la fonction auxiliaire

$$\tilde{\psi}_{k+1} = \log \frac{\mid z_{k+1} \mid^{2(m+1-k)} \mid \xi_0 \mid^{2k}}{(\mid z_0 \mid^2 + ... + \mid z_m \mid^2)^{m+1-k} (\mid \xi_0 \mid^2 + ... + \mid \xi_k \mid^2)^k}.$$

On a

$$(\varphi - \tilde{\psi}_{k+1})(\tilde{R}_0) > 0. \tag{45}$$

La fonction $(\varphi - \tilde{\psi}_{k+1})$ étant continue, quitte à se placer en un point voisin de $\tilde{R}_0$, on peut supposer tous les x^0_i non nuls. Posons alors:

$$\alpha_2 = \frac{\ln x^0_2}{\ln x^0_1}, .., \alpha_k = \frac{\ln x^0_k}{\ln x^0_1}; \alpha_{k+1} = \frac{\ln(x^0_{k+1}/\zeta_0)}{\ln x^0_1}, .., \alpha_m = \frac{\ln(x^0_m/\zeta_0)}{\ln x^0_1}.$$

Sachant que l'on a $1 \geq x^0_1 \geq .. \geq x^0_k$; $x^0_{k+1} \geq .. \geq x^0_{k+p} \geq \zeta_0$ et $\zeta_0 \geq x^0_{k+p+1} \geq .. \geq x^0_m$, on en déduit que $\alpha_2, .., \alpha_k \geq 0$, $\alpha_{k+1} \leq ... \leq \alpha_{p+k} \leq 0$ et $\alpha_{p+k+1}, .., \alpha_m \geq 0$, d'où, en notant

$$\tilde{R}_\varepsilon = ([1, \varepsilon, \varepsilon^{\alpha_2}, .., \varepsilon^{\alpha_k}, \zeta_0 \varepsilon^{\alpha_{k+1}}, .., \zeta_0 \varepsilon^{\alpha_m}], [1, \varepsilon, \varepsilon^{\alpha_2}, .., \varepsilon^{\alpha_k}]),$$

on a

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \to 0} \tilde{\psi}_{k+1}(\tilde{R}_\varepsilon) &= \lim_{\varepsilon \to 0} \ln \frac{\zeta_0^{2(m+1-k)} \varepsilon^{2(m+1-k)\alpha_k}}{[1 + \varepsilon^2 + \varepsilon^{2\alpha_2} + .. + \varepsilon^{2\alpha_k} + \zeta_0^2(\varepsilon^{2\alpha_{k+1}} + .. + \varepsilon^{2\alpha_m})]^{m+1-k}} \\ &= \ln \lim_{t \to \infty} \frac{\zeta_0^{2(m+1-k)} t^{-2\alpha_{k+1}(m+1-k)}}{[\zeta_0^2(t^{-2\alpha_{k+1}} + t^{-2\alpha_{k+2}} + .. + t^{-2\alpha_p})]^{(m+1-k)}} = \ln 1 = 0, \end{aligned}$$

$-\alpha_{k+1}$ étant la plus grande puissance intervenant au dénominateur. Sachant que $\varphi([\tilde{R}_\varepsilon]) \leq 0$ et compte tenu de (45) il existe ε_0 tel que l'on ait

$$(\varphi - \tilde{\psi}_{k+1})(\tilde{R}_{\varepsilon_0}) \leq -\tilde{\psi}_{k+1}(\tilde{R}_{\varepsilon_0}) < (\varphi - \tilde{\psi}_{k+1})(\tilde{R}_0). \tag{46}$$

D'autre part, l'inégalité (40), jointe aux définitions de $\tilde{R}_1$, $\tilde{\psi}_{k+1}$, $\tilde{\psi}_2$ et $\tilde{\psi} = \inf(\tilde{\psi}_1, \tilde{\psi}_2)$ donne :

$$(\varphi - \tilde{\psi}_{k+1})(\tilde{R}_1) = (\varphi - \tilde{\psi}_2)(\tilde{R}_1) \leq (\varphi - \tilde{\psi})(\tilde{R}_1) < 0. \tag{47}$$

La courbe

$$[\varepsilon_0, 1] \ni t \to ([1, t, t^{\alpha_2}, .., t^{\alpha_k}, \zeta_0 t^{\alpha_{k+1}}, .., \zeta_0 t^{\alpha_m}], [1, t, t^{\alpha_2}, .., t^{\alpha_k}]),$$

passe par $\tilde{R}_{\varepsilon_0}$ en $t = \varepsilon_0$ puis par $\tilde{R}_0$ en $t = x^0_1$ et enfin par $\tilde{R}_1$ en $t = 1$, ce qui, en vertu de (46), (45) et (47) prouve l'existence d'un maximum local pour la fonction

$(\varphi - \tilde{\psi}_{k+1})$ sur la courbe précitée. Ceci contredit, à l'instar du cas précédent, l'hypothèse d'admissibilité de la fonction φ.

Cas B : $y_0^0 = ... = y_k^0 = 0$. On peut alors se placer dans la carte de X décrite par les points

$$([z_0, .., z_k; z_{k+1}, .., z_m], [\xi_0, .., \xi_k]) \in \mathbb{P}_m\mathbb{C} \times \mathbb{P}_k\mathbb{C}$$

tels que $z_{k+1} \neq 0$ et $\xi_0 \neq 0$, de sorte que le point $\tilde{R}_0$ où φ atteint son maximum égal à zéro puisse s'écrire sous la forme

$$\tilde{R}_0 = ([0, 0, .., 0; 1, x_{k+2}^0, .., x_m^0], [1, u_1^0, .., u_k^0]).$$

On peut aussi supposer, en utilisant la G-invariance de φ, que $1 \geq x_{k+2}^0 \geq .. \geq x_m^0$ et $1 \geq u_1^0 \geq .. \geq u_k^0$. On montrera une version équivalente du lemme 8, à savoir que

$$(\varphi - \tilde{\psi})([\zeta^{[k+1]}; 1^{[m-k]}], [1^{[k+1]}]) \geq 0 \tag{48}$$

pour tout $\zeta > 0$.

Raisonnons par l'absurde, et supposons qu'il existe un point

$$\tilde{R}_{k+1} = ([\zeta_0^{[k+1]}; 1^{[m-k]}], [1^{[k+1]}])$$

de X tel que l'on ait $\zeta_0 > 0$ et

$$(\varphi - \tilde{\psi})(\tilde{R}_{k+1}) < 0. \tag{49}$$

On considère alors la fonction auxiliaire $\tilde{\psi}_{k+1}$ introduite plus haut. Sachant que $\varphi \leq 0$, on a

$$(\varphi - \tilde{\psi}_{k+1})([0^{[k+1]}; 1, 0, .., 0], [1, 0^{[k]}]) = \varphi([0^{[k+1]}; 1, 0, .., 0], [1, 0^{[k]}]) \leq 0. \tag{50}$$

D'autre part, sachant que $\varphi(\tilde{R}_0) = 0$ et $\tilde{\psi}_{k+1} \leq 0$, on a

$$(\varphi - \tilde{\psi}_{k+1})(\tilde{R}_0) = -\tilde{\psi}_{k+1}(\tilde{R}_0) \geq 0. \tag{51}$$

Cette inégalité est stricte dès que

$$\tilde{R}_0 \neq ([0^{[k+1]}; 1, 0, .., 0], [1, 0^{[k]}]).$$

Si $\tilde{R}_0 = ([0^{[k+1]}; 1, 0, .., 0], [1, 0^{[k]}])$, quitte à se placer en un point arbitrairement voisin de $\tilde{R}_0$, on peut supposer la dernière inégalité stricte. En effet, si dans un voisinage de $\tilde{R}_0$, on avait $\varphi - \tilde{\psi}_{k+1} \leq 0$, alors $\varphi - \tilde{\psi}_{k+1}$ admettrait un maximum local en $\tilde{R}_0$, ce qui contredirait l'admissibilité de φ en $\tilde{R}_0$. A l'instar du cas A, il existe donc un point

$$\tilde{R}_0' = ([c_0, .., c_k; 1, c_{k+2}, .., c_m], [c_0, .., c_k])$$

vérifiant

$$(\varphi - \tilde{\psi}_{k+1})(\tilde{R}_0') > 0. \tag{52}$$

Par continuité et G-invariance de φ, on peut supposer $\zeta_0 > c_0 > ... > c_k > 0$ et $1 > c_{k+2} > ... > c_m > 0$. D'autre part, l'inégalité (49) jointe aux définitions de $\tilde{R}_{k+1}$, $\tilde{\psi}_{k+1}$, $\tilde{\psi}_2$ et $\tilde{\psi} = \inf(\tilde{\psi}_1, \tilde{\psi}_2)$ implique

$$(\varphi - \tilde{\psi}_{k+1})(\tilde{R}_{k+1}) = (\varphi - \tilde{\psi}_2)(\tilde{R}_{k+1}) \leq (\varphi - \tilde{\psi})(\tilde{R}_{k+1}) < 0. \tag{53}$$

La courbe de X :

$$[0,1] \ni t \to ([\zeta_0 t^{\frac{\ln(c_0/\zeta_0)}{\ln c_{k+2}}}, .., \zeta_0 t^{\frac{\ln(c_k/\zeta_0)}{\ln c_{k+2}}}; 1, t, t^{(\ln c_{k+3})/(\ln c_{k+2})}, .., t^{(\ln c_m)/(\ln c_{k+2})}],$$
$$[1, t^{\frac{\ln(c_1/c_0)}{\ln c_{k+2}}}, .., t^{\frac{\ln(c_k/c_0)}{\ln c_{k+2}}}])$$

passe par $([0^{[k+1]}, 1, 0, .., 0], [1, 0^{[k]}])$ en $t = 0$ puis par $\tilde{R}_0$ en $t = c_{k+2}$ et enfin par le point $\tilde{R}_{k+1}$ en $t = 1$, valeurs en lesquelles, d'après (50), (52) et (53), $(\varphi - \tilde{\psi}_{k+1})$ est respectivement négative, positive puis négative. L'invariance de cette fonction par l'action des $\exp(i\theta)$, permet donc de déduire que $(\varphi - \tilde{\psi}_0)$ atteint un maximum sur la courbe holomorphe, déduite de la courbe décrite plus haut, ce qui contredit l'admissibilité de φ, d'où (48) et le lemme 8.

2.4 Preuve du corollaire 2.

Soit $\varphi \in C^\infty(X)$ une fonction $\tilde{g}$-admissible et G-invariante, dont le sup sur X est nul. D'après le théorème 2, on a $\varphi \geq \tilde{\psi}$ et par suite, pour tout $\alpha \geq 0$,

$$\int_X \exp(-\alpha\varphi)dv \leq \int_X \exp(-\alpha\tilde{\psi})dv.$$

Cherchons les valeurs de α pour lesquelles cette dernière intégrale converge. Pour ce faire, on estimera $\int_X \exp(-\alpha\tilde{\psi}_1)dv$ et $\int_X \exp(-\alpha\tilde{\psi}_2)dv$ dans la carte dense correspondant à la paramétrisation

$$([1, z_1, .., z_m], [1, z_1, .., z_k]).$$

Dans cette carte, l'élément de volume est donné par (c.f. [6]) :

$$dv = \det((\tilde{g}_{\lambda\overline{\mu}}))dz_1 \wedge d\overline{z}_1 \wedge ... \wedge dz_m \wedge d\overline{z}_m,$$

où

$$\det((\tilde{g}_{\lambda\overline{\mu}})) = (-1)^m \frac{(m+1-k)^{m-k}}{(1+\mid z_1 \mid^2 + ... + \mid z_k \mid^2)^k (1+\mid z_1 \mid^2 + ... + \mid z_m \mid^2)^{m+1}}$$
$$\times [k(1+\mid z_1 \mid^2 + ... + \mid z_m \mid^2) + (m-k+1)(1+\mid z_1 \mid^2 + ... + \mid z_k \mid^2)]^k.$$

En utilisant le fait que $\tilde{\psi}_1$ et $\tilde{\psi}_2$ ne dépendent que des $\mid z_p \mid$, le changement de variables $u_p = \mid z_p \mid^2$ donne :

$$\int_X \exp(-\alpha\tilde{\psi}_1)dv = Cst \sum_{i=0}^{k} C_k^i \times$$

$$\int_0^{+\infty} .. \int_0^{+\infty} \frac{(u_1...u_k)^{-\alpha(m+1)/(k+1)} du_1...du_m}{(1+u_1+...+u_m)^{(1-\alpha)(m+1-k)+i}(1+u_1+..+u_k)^{(1-\alpha)k-i}}$$
$$= \int_0^{+\infty} ... \int_0^{+\infty} \frac{(u_1...u_k)^{-\alpha(m+1)/(k+1)} du_1...du_k}{(1+u_1+...+u_m)^{(1-\alpha)(m+1)-(m-k)}}.$$

qui converge, indépendemment de i pour $\alpha < (k+1)/(m+1)$. D'autre part,

$$\int_X \exp(-\alpha\tilde{\psi}_2)dv = Cst \sum_{i=0}^{k} C_k^i \times$$
$$\int_0^{+\infty} .. \int_0^{+\infty} \frac{(u_1...u_k)^{-\alpha k/(k+1)}(u_{k+1}...u_m)^{-\alpha(m+1-k)/(m-k)} du_1...du_m}{(1+u_1+...+u_m)^{(1-\alpha)(m+1-k)+i}(1+u_1..+u_k)^{(1-\alpha)k-i}}.$$

Pour cette dernière intégrale, la convergence en zéro exige la condition

$$\alpha < \inf\{\frac{k}{k+1}, \frac{m-k}{m-k+1}\}.$$

En l'infini, un changement sphérique de coordonnées ramène l'étude à la convergence de

$$\int_{a>0}^{+\infty} \frac{r^{-\alpha k^2/(k+1)} r^{-\alpha(m+1-k)} r^{m-1}}{r^{(1-\alpha)(m+1-k)+i} r^{(1-\alpha)k-i}} dr = \int_{a>0}^{+\infty} r^{-\alpha k^2/(k+1)} r^{\alpha k-2} dr;$$

intgrale convergente pour $\alpha < \frac{k+1}{k}$. Cette dernière condition étant toujours vérifiée, le corollaire 2 est alors établi.

2.5 Preuve du théorème 3.

Comme pour l'espace X, l'invariance par le groupe G, des fonctions $\varphi([z_0, .., z_k, z_{k+1}, .., z_m], [\zeta_0, .., \zeta$ (où $(z_0, .., z_k)$ et $(\zeta_0, .., \zeta_k)$ ainsi que $(z_{k+1}, .., z_m)$ et $(\zeta'_{k+1}, .., \zeta'_m)$ sont colinéaires), nous permettra de les considérer, dans le lemme 9 comme des fonctions

$$\varphi([1, x_1, ..., x_m], [1, x_1, ..., x_k], [x_{k+1}, ..., x_m])$$

des variables réelles $x_i =| z_i |> 0$, $i \in \{1, .., m\}$, puis, dans le lemme 10 comme des fonctions

$$\varphi([x_0, ..., x_k, 1, x_{k+2}, .., x_m], [x_0, ..., x_k], [1, x_{k+2}, ..., x_m])$$

des variables réelles $x_i =| z_i |> 0$.

Lemme 9 *Etant donnée une fonction $\varphi \in C^\infty(Y)$, $\hat{g}$-admissible, G-invariante. Si $x_i =| z_i |> 0$ pour tout i:*

$$\begin{aligned}&(\varphi - \hat{\psi})([1, x_1, .., x_m], [1, x_1, .., x_k], [x_{k+1}, .., x_m])\\ &\geq (\varphi - \hat{\psi})([1, x_1, .., x_k; \zeta^{[m-k]}], [1, x_1, .., x_m], [1^{[m-k]}]),\end{aligned} \tag{54}$$

où $\zeta^{[m-k]} = (\zeta, .., \zeta) \in \mathbb{C}^{m-k}$ et $\zeta = (x_{k+1}...x_m)^{1/(m-k)}$.

Preuve. A l'instar du lemme 5, nous procéderons par récurrence. Supposons que pour $k+1 \leq p < m$ et pour tout $(x_1, .., x_m) \in \mathbb{R}^m$ avec $x_i > 0$ on ait

$$\begin{aligned}
&(\varphi - \hat{\psi})([1, x_1, .., x_m], [1, x_1, .., x_k], [x_{k+1}, .., x_m]) \geq \\
&(\varphi - \hat{\psi})([1, x_1, .., x_k; (x_{k+1}...x_p)^{\frac{1}{p-k}}, .., (x_{k+1}...x_p)^{\frac{1}{p-k}}, x_{p+1}, ..x_m], \\
&[1, x_1, .., x_k], [(x_{k+1}...x_p)^{\frac{1}{p-k}}, .., (x_{k+1}...x_p)^{\frac{1}{p-k}}, x_{p+1}, ..x_m]). \qquad (55)
\end{aligned}$$

Cette propriété est claire pour $p = k+1$. Si l'inégalité (55) n'était pas satisfaite au rang $p+1$, il existerait alors un point $(x_1^0, .., x_m^0) \in \mathbb{R}^m$ avec $x_i^0 > 0$ pour tout i, tel que

$$\begin{aligned}
&(\varphi - \hat{\psi})([1, x_1^0, .., x_m^0], [1, x_1^0, .., x_k^0], [x_{k+1}^0, .., x_m^0]) < \\
&(\varphi - \hat{\psi})([1, x_1^0, .., x_k^0; (x_{k+1}^0...x_{p+1}^0)^{\frac{1}{p+1-k}}, .., (x_{k+1}^0...x_{p+1}^0)^{\frac{1}{p+1-k}}, x_{p+2}^0, .., x_m^0], \\
&[1, x_1^0, .., x_k^0], [(x_{k+1}^0...x_{p+1}^0)^{\frac{1}{p+1-k}}, .., (x_{k+1}^0...x_{p+1}^0)^{\frac{1}{p+1-k}}, x_{p+2}^0, .., x_m^0]). \qquad (56)
\end{aligned}$$

En utilisant la continuité de $(\varphi - \hat{\psi})$, on peut supposer, quitte à en modifier légérement les coordonnées, que le point

$$([1, x_1^0, .., x_m^0], [1, x_1^0, .., x_k^0], [x_{k+1}^0, .., x_m^0])$$

de l'inégalité (56), vérifie

$$(x_1^0..x_k^0)^{1/(k+1)} \neq (x_{k+1}^0..x_m^0)^{1/(m-k)}.$$

En utilisant la G-invariance de φ, on peut supposer que $x_{k+1}^0 \leq ... \leq x_m^0$. D'autre part, en tenant encore compte de la G invariance de φ et de l'hypothèse de récurrence (55) en les points

$$\begin{aligned}
&([1, x_1^0, .., x_k^0; x_{k+1}^0, x_{k+2}^0, .., x_p^0, x_{p+1}^0, x_{p+2}^0, .., x_m^0], \\
&[1, x_1^0, .., x_k^0], [x_{k+1}^0, x_{k+2}^0, .., x_p^0, x_{p+1}^0, x_{p+2}^0, .., x_m^0])
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
&([1, x_1^0, .., x_k^0; x_{k+2}^0, x_{k+3}^0, .., x_p^0, x_{p+1}^0, x_{k+1}^0, x_{p+2}^0, .., x_m^0], \\
&[1, x_1^0, .., x_k^0], [x_{k+2}^0, x_{k+3}^0, .., x_p^0, x_{p+1}^0, x_{k+1}^0, x_{p+2}^0, .., x_m^0]),
\end{aligned}$$

de Y, on peut écrire

$$\begin{aligned}
&(\varphi - \hat{\psi})([1, x_1^0, .., x_m^0], [1, x_1^0, .., x_k^0], [x_{k+1}^0, .., x_m^0]) \geq \\
&(\varphi - \hat{\psi})([1, x_1^0, .., x_k^0; (x_{k+1}^0...x_p^0)^{\frac{1}{p-k}}, .., (x_{k+1}^0...x_p^0)^{\frac{1}{p-k}}, x_{p+1}^0, x_{p+2}^0, .., x_m^0], \\
&[1, x_1^0, .., x_k^0], [(x_{k+1}^0...x_p^0)^{\frac{1}{p-k}}, .., (x_{k+1}^0...x_p^0)^{\frac{1}{p-k}}, x_{p+1}^0, x_{p+2}^0, .., x_m^0]) \qquad (57)
\end{aligned}$$

et

$$(\varphi-\hat{\psi})([1,x_1^0,..,x_k^0;x_{k+2}^0,..,x_{p+1}^0,x_{k+1}^0,x_{p+2}^0,..,x_m^0],[1,x_1^0,..,x_k^0],$$
$$[x_{k+2}^0,..,x_{p+1}^0,x_{k+1}^0,x_{p+2}^0,..,x_m^0])\geq$$
$$(\varphi-\hat{\psi})([1,x_1^0,..,x_k^0;(x_{k+2}^0..x_{p+1}^0)^{\frac{1}{p-k}},..,(x_{k+2}^0..x_{p+1}^0)^{\frac{1}{p-k}},x_{k+1}^0,x_{p+2}^0,..,x_m^0],$$
$$[1,x_1^0,..,x_k^0],[(x_{k+2}^0..x_{p+1}^0)^{\frac{1}{p-k}},..,(x_{k+2}^0..x_{p+1}^0)^{\frac{1}{p-k}},x_{k+1}^0,x_{p+2}^0,..,x_m^0]). \qquad (58)$$

Considérons maintenant la courbe C d'équation

$$t^{p-k}x=x_{k+1}^0...x_{p+1}^0$$

dans le plan réel

$$\{[1,x_1^0,..,x_k^0;t,..,t,x,x_{p+2}^0,..,x_m^0],[1,x_1^0,..,x_k^0],[t,..,t,x,x_{p+2}^0,..,x_m^0]\}$$

paramétré par les variables t et x. Les points

$$\hat{P}_1=([1,x_1^0,..,x_k^0;(x_{k+1}^0...x_p^0)^{\frac{1}{p-k}},..,(x_{k+1}^0...x_p^0)^{\frac{1}{p-k}},x_{p+1}^0,x_{p+2}^0,..,x_m^0],$$
$$[1,x_1^0,..,x_k^0],[(x_{k+1}^0...x_p^0)^{\frac{1}{p-k}},..,(x_{k+1}^0...x_p^0)^{\frac{1}{p-k}},x_{p+1}^0,x_{p+2}^0,..,x_m^0])$$

et

$$\hat{P}_2=([1,x_1^0,..,x_k^0;(x_{k+2}^0...x_{p+1}^0)^{\frac{1}{p-k}},..,(x_{k+2}^0...x_{p+1}^0)^{\frac{1}{p-k}},x_{k+1}^0,x_{p+2}^0,..,x_m^0],$$
$$[1,x_1^0,..,x_k^0],[(x_{k+2}^0...x_{p+1}^0)^{\frac{1}{p-k}},..,(x_{k+2}^0...x_{p+1}^0)^{\frac{1}{p-k}},x_{k+1}^0,x_{p+2}^0,..,x_m^0])$$

appartiennent à la courbe C. Notons que les réels x_i^0 pour $k+1\leq i\leq p+1$ ne sont pas tous égaux, sinon (56) deviendrait une égalité.
Par suite, sachant que l'on a choisi $x_{k+1}^0\leq ...\leq x_{p+1}^0$, les points distincts $\hat{P}_1$ et $\hat{P}_2$ se trouvent strictement de part et d'autre de la diagonale $t=x$ du plan précédent. Or la courbe C coupe cette diagonale en le point

$$\hat{P}_3=([1,x_1^0,..,x_k^0;(x_{k+1}^0...x_{p+1}^0)^{\frac{1}{p+1-k}},..,(x_{k+1}^0...x_{p+1}^0)^{\frac{1}{p+1-k}},x_{p+2}^0,..,x_m^0],$$
$$[1,x_1^0,..,x_k^0],[(x_{k+1}^0...x_{p+1}^0)^{\frac{1}{p+1-k}},..,(x_{k+1}^0...x_{p+1}^0)^{\frac{1}{p+1-k}},x_{p+2}^0,..,x_m^0])$$

qui intervient dans l'inégalité (56). D'autre part, en utilisant les relations (56), (57) et (58) on obtient :

$$(\varphi-\hat{\psi})(\hat{P}_3)>(\varphi-\hat{\psi})(\hat{P}_1)\text{ et }(\varphi-\hat{\psi})(\hat{P}_3)>(\varphi-\hat{\psi})(\hat{P}_2),$$

ce qui prouve que la fonction $(\varphi-\hat{\psi})$ admet un maximum local sur la courbe C. En conséquence, la restriction de la fonction G-invariante $(\varphi-\hat{\psi})$ à la courbe holomorphe (toujours notée C) d'équation $\xi^{p-k}z=x_{k+1}^0...x_{p+1}^0$ du plan complexe

$\{([1, x_1^0, .., x_k^0; \xi, .., \xi, z, x_{p+2}^0, .., x_m^0], [1, x_1^0, .., x_k^0])\}$ atteint un maximum local en un point $\hat{P} = C(\zeta)$. Posons

$$C(\zeta) = ([1, C^1(\zeta), .., C^m(\zeta)], [1, C^1(\zeta), .., C^k(\zeta)], [C^{k+1}(\zeta), .., C^m(\zeta)]),$$

$$\dot{C}^\lambda(\xi) = \frac{dC^\lambda}{d\xi}(\xi) \text{ et } \dot{C}^{\overline{\mu}}(\xi) = \overline{\dot{C}^\mu(\xi)}.$$

Sachant que l'on a choisi le point $([1, x_1^0, .., x_m^0], [1, x_1^0, .., x_k^0], [x_{k+1}^0, .., x_m^0])$ de sorte que

$$(x_1^0 ... x_k^0)^{1/(k+1)} \neq (x_{k+1}^0 ... x_m^0)^{1/(m-k)},$$

l'équation de la courbe C et les définitions de $\hat{\psi}_1$ et $\hat{\psi}_2$ montrent qu'en tout point de C

$$\begin{aligned} &\hat{\psi}_1([1, x_1^0, .., x_k^0; \xi, .., \xi, z, x_{p+2}^0, .., x_m^0], [1, x_1^0, .., x_k^0]) \neq \\ &\quad \hat{\psi}_2([1, x_1^0, .., x_k^0; \xi, .., \xi, z, x_{p+2}^0, .., x_m^0], [1, x_1^0, .., x_k^0]). \end{aligned} \tag{59}$$

On peut alors supposer que $\hat{\psi} = \hat{\psi}_1$ dans un voisinage de $\hat{P}$, la preuve étant identique si l'on suppose $\hat{\psi} = \hat{\psi}_2$ dans ce voisinage. On a donc :

$$\frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \overline{\xi}}\{(\varphi - \hat{\psi}_1)(C(\zeta))\} = \frac{\partial^2(\varphi - \hat{\psi}_1)}{\partial z_\lambda \partial \overline{z}_\mu}(C(\zeta))\dot{C}^\lambda(\zeta)\dot{C}^{\overline{\mu}}(\zeta)$$

est négatif ou nul. Comme $-\frac{\partial^2 \hat{\psi}_1}{\partial z_\lambda \partial \overline{z}_\mu} = g_{\lambda\overline{\mu}}$, ceci exprime que la forme hermitienne de matrice:

$$(g_{\lambda\overline{\mu}} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z_\lambda \partial \overline{z}_\mu})_{\lambda,\mu} = (\frac{\partial^2(\varphi - \hat{\psi}_1)}{\partial z_\lambda \partial \overline{z}_\mu})_{\lambda,\mu}$$

est négative en $\hat{P} = C(\zeta)$. On en déduit une contradiction avec la g-admissibilité de φ en $\hat{P}$. D'où l'inégalité (55) au rang $p+1$ et, par conséquent, le lemme 9.

Lemme 10 *Etant donnée une fonction $\varphi \in C^\infty(Y)$, $\hat{g}$-admissible, G-invariante. Si $x_i =| z_i |> 0$ pour tout i, on a:*

$$\begin{aligned} &(\varphi - \hat{\psi})([x_0, x_1, .., x_k; 1, x_{k+2}, .., x_m], [x_0, x_1, .., x_k], [1, x_{k+2}, .., x_m]) \geq \\ &\qquad (\varphi - \hat{\psi})([\eta, \eta, .., \eta; 1, x_{k+2}, .., x_m], [1^{[k+1]}], [1, x_{k+2}, .., x_m]), \end{aligned} \tag{60}$$

où $\eta = (x_0 x_1 ... x_k)^{1/(k+1)}$.

Preuve. Comme dans le lemme 9, la preuve s'effectue par récurrence. Supposons que pour $0 \leq p < k$ et pour tout $(x_0, .., x_k; x_{k+2}, .., x_m) \in \mathbb{R}^m$ avec $x_i > 0$, on ait

$$\begin{aligned} &(\varphi - \hat{\psi})([x_0, .., x_k, 1, x_{k+2}, .., x_m], [x_0, .., x_k], [1, x_{k+2}, .., x_m]) \geq \\ &(\varphi - \hat{\psi})([(x_0 ... x_p)^{\frac{1}{p+1}}, .., (x_0 ... x_p)^{\frac{1}{p+1}}, x_{p+1}, .., x_k; 1, x_{p+2}, .., x_m], \\ &[(x_0 ... x_p)^{\frac{1}{p+1}}, .., (x_0 ... x_p)^{\frac{1}{p+1}}, x_{p+1}, .., x_k], [1, x_{p+2}, .., x_m]). \end{aligned} \tag{61}$$

Cette hypothèse est vérifiée pour $p = 0$. Si l'inégalité (61) n'était pas satisfaite au rang $p+1$, il existerait un point $(x_0^0, .., x_k; x_{k+2}, .., x_m^0) \in \mathbb{R}^m$ avec $x_i^0 > 0$ pour tout i, tel que :

$$\begin{aligned}
&(\varphi - \hat{\psi})([x_0^0, .., x_k^0; 1, x_{k+2}^0, .., x_m^0], [x_0^0, .., x_k^0], [1, x_{k+2}^0, .., x_m^0]) < \\
&(\varphi - \hat{\psi})([(x_0^0..x_{p+1}^0)^{\frac{1}{p+2}}, .., (x_0^0..x_{p+1}^0)^{\frac{1}{p+2}}, x_{p+2}^0, ..., x_k^0; 1, x_{k+2}^0, .., x_m^0], \\
&[(x_0^0..x_{p+1}^0)^{\frac{1}{p+2}}, .., (x_0^0..x_{p+1}^0)^{\frac{1}{p+2}}, x_{p+2}^0, ..., x_k^0], [1, x_{k+2}^0, .., x_m^0]). \qquad (62)
\end{aligned}$$

Comme au lemme 9, on peut supposer que le point

$$([x_0^0, .., x_k^0; 1, x_{k+2}^0, .., x_m^0], [x_0^0, .., x_k^0], [1, x_{k+2}^0, .., x_m^0]) \in Y$$

vérifie

$$(x_0^0..x_k^0)^{1/(k+1)} \neq (x_{k+2}^0..x_m^0)^{1/(m-k)},$$

et que $x_0^0 \leq ... \leq x_{p+1}^0$. D'autre part, en tenant compte de la G-invariance de φ et de l'hypothèse de récurrence (61) en les points

$$([x_0^0, x_1^0, .., x_p^0, x_{p+1}^0, .., x_k^0; 1, x_{k+2}^0, .., x_m^0], [x_0^0, x_1^0, .., x_p^0, x_{p+1}^0, .., x_k^0], [1, x_{k+2}^0, .., x_m^0])$$

et

$$([x_1^0, .., x_{p+1}^0, x_0^0, .., x_k^0; 1, x_{k+2}^0, .., x_m^0], [x_1^0, .., x_{p+1}^0, x_0^0, .., x_k^0], [1, x_{k+2}^0, .., x_m^0]),$$

on a

$$\begin{aligned}
&(\varphi - \hat{\psi})([x_0^0, .., x_k^0; 1, x_{k+2}^0, .., x_m^0], [x_0^0, .., x_k^0], [1, x_{k+2}^0, .., x_m^0]) \geq \\
&(\varphi - \hat{\psi})([(x_0^0..x_p^0)^{\frac{1}{p+1}}, .., (x_0^0..x_p^0)^{\frac{1}{p+1}}, x_{p+1}^0, .., x_k^0; 1, x_{k+2}^0, .., x_m^0], \\
&[(x_0^0..x_p^0)^{\frac{1}{p+1}}, .., (x_0^0..x_p^0)^{\frac{1}{p+1}}, x_{p+1}^0, .., x_k^0], [1, x_{k+2}^0, .., x_m^0]) \qquad (63)
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
&(\varphi - \hat{\psi})([x_1^0, .., x_{p+1}^0, x_0^0, .., x_k^0; 1, x_{k+2}^0, .., x_m^0], \\
&[x_1^0, .., x_{p+1}^0, x_0^0, .., x_k^0], [1, x_{k+2}^0, .., x_m^0]) \geq \\
&(\varphi - \hat{\psi})([(x_1^0..x_{p+1}^0)^{\frac{1}{p+1}}, .., (x_1^0..x_{p+1}^0)^{\frac{1}{p+1}}, x_0^0, x_{p+2}^0, .., x_k^0; 1, x_{k+2}^0, .., x_m^0], \\
&[(x_1^0..x_{p+1}^0)^{\frac{1}{p+1}}, .., (x_1^0..x_{p+1}^0)^{\frac{1}{p+1}}, x_0^0, x_{p+2}^0, .., x_k^0], [1, x_{k+2}^0, .., x_m^0]). \qquad (64)
\end{aligned}$$

Considérons maintenant la courbe C d'équation

$$t^{p+1}x = x_0^0...x_{p+1}^0$$

du plan réel

$$\{([t, .., t, x, x_{p+2}^0, .., x_k^0; 1, x_{k+2}^0, .., x_m^0], [t, .., t, x, x_{p+2}^0, .., x_k^0], [1, x_{k+2}^0, .., x_m^0])\}$$

paramétré par les variables t et x. Les points

$$\hat{Q}_1 = ([(x_0^0..x_p^0)^{\frac{1}{p+1}}, .., (x_0^0..x_p^0)^{\frac{1}{p+1}}, x_{p+1}^0, x_{p+2}^0, .., x_k^0; 1, x_{k+2}^0, .., x_m^0],$$
$$[(x_0^0..x_p^0)^{\frac{1}{p+1}}, .., (x_0^0..x_p^0)^{\frac{1}{p+1}}, x_{p+1}^0, x_{p+2}^0, .., x_k^0], [1, x_{k+2}^0, .., x_m^0])$$

et

$$\hat{Q}_2 = ([(x_1^0..x_{p+1}^0)^{\frac{1}{p+1}}, .., (x_1^0..x_{p+1}^0)^{\frac{1}{p+1}}, x_0^0, x_{p+2}^0, .., x_k^0; 1, x_{k+2}^0, .., x_m^0],$$
$$[(x_1^0..x_{p+1}^0)^{\frac{1}{p+1}}, .., (x_1^0..x_{p+1}^0)^{\frac{1}{p+1}}, x_0^0, x_{p+2}^0, .., x_k^0], [1, x_{k+2}^0, .., x_m^0])$$

appartiennent à la courbe C.
D'autre part les réels x_i^0 pour $0 \leq i \leq p+1$ ne sont pas tous égaux, sinon (62) serait une égalité.
Par suite, sachant que l'on a choisi $x_0^0 \leq ... \leq x_{p+1}^0$, les points distincts $\hat{Q}_1$ et $\hat{Q}_2$ se trouvent strictement de part et d'autre de la diagonale $t = x$ du plan précédent.
Or la courbe C coupe cette diagonale en le point

$$\hat{Q}_3 = ([(x_0^0...x_{p+1}^0)^{\frac{1}{p+2}}, .., (x_0^0...x_{p+1}^0)^{\frac{1}{p+2}}, x_{p+2}^0, .., x_k^0; 1, x_{k+2}^0, .., x_m^0],$$
$$[(x_0^0...x_{p+1}^0)^{\frac{1}{p+2}}, .., (x_0^0...x_{p+1}^0)^{\frac{1}{p+2}}, x_{p+2}^0, .., x_k^0], [1, x_{k+2}^0, .., x_m^0])$$

qui intervient dans l'inégalité (62). D'autre part, les relation (62), (63) et (64) donnent

$$(\varphi - \hat{\psi})(\hat{Q}_3) > (\varphi - \hat{\psi})(\hat{Q}_1) \text{ et } (\varphi - \hat{\psi})(\hat{Q}_3) > (\varphi - \hat{\psi})(\hat{Q}_2),$$

ce qui prouve que la fonction $(\varphi - \hat{\psi})$ admet un maximum local sur la courbe C.
Sachant que l'on a choisi le point

$$([x_0^0, .., x_k^0; 1, x_{k+2}^0, .., x_m^0], [x_0^0, .., x_k^0], [1, x_{k+2}^0, .., x_m^0])$$

de sorte que

$$(x_0^0..x_k^0)^{1/(k+1)} \neq (x_{k+2}^0..x_m^0)^{1/(m-k)},$$

on conclut de la même manière qu'au lemme précédent en considérant la restriction de $(\varphi - \hat{\psi})$ à une courbe holomorphe convenable.

A l'instar du lemme 7, les lemmes 9 et 10 permettent d'établir le

Lemme 11 *Etant donnée une fonction $\varphi \in C^\infty(Y)$, $\hat{g}$-admissible, G-invariante, avec $x_i = \mid z_i \mid > 0$ pour tout i, on a :*

$$(\varphi - \hat{\psi})([1, x_1, .., x_k; x_{k+1}, x_{k+2}, .., x_m], [1, x_1, .., x_k], [x_{k+1}, x_{k+2}, .., x_m])$$
$$\geq (\varphi - \hat{\psi})([1^{[k+1]}; \nu^{[m-k]}], [1^{[k+1]}], [1^{[m-k]}]), \tag{65}$$

où $\nu = \frac{(x_{k+1}...x_m)^{1/(m-k)}}{(x_1...x_k)^{1/(k+1)}}$.

Montrons maintenant le

Lemme 12 *Etant donnée une fonction $\varphi \in C^\infty(Y)$, $\hat{g}$-admissible, G-invariante, $\forall \zeta > 0$, on a :*

$$(\varphi - \hat{\psi})([1^{[k+1]}; \zeta^{[m-k]}], [1^{[k+1]}], [1^{[m-k]}]) \geq 0, \tag{66}$$

Preuve. On raisonne sur la position du point $\hat{R}_0 \in \mathbb{P}_m\mathbb{C}$ où φ atteint son maximum. En vertu de la G-invariance de φ, on peut supposer qu'il s'écrit sous la forme

$$\hat{R}_0 = ([y_0^0, .., y_k^0; y_{k+1}^0, .., y_m^0], [\rho_0^0, .., \rho_k^0], [\varrho_{k+1}^0, .., \varrho_m^0]),$$

où les y_i^0, ρ_i^0, ϱ_i^0 sont des réels positifs vérifiant $y_0^0 \geq y_1^0 \geq .. \geq y_k^0$, $y_{k+1}^0 \geq y_{k+2}^0 \geq .. \geq y_m^0$, $\rho_0^0 \geq .. \geq \rho_k^0$ et $\varrho_{k+1}^0 \geq .. \geq \varrho_m^0$ et où $(\rho_0^0, .., \rho_k^0)$ et $(y_0^0, .., y_k^0)$ sont parallèles, ainsi que $(\varrho_{k+1}^0, .., \varrho_m^0)$ et $(y_{k+1}^0, .., y_m^0)$. Trois cas se présentent : ou bien l'un des $y_0^0, .., y_k^0$ et l'un des $y_k^0, .., y_m^0$ sont non nuls, ou bien tous les $y_0^0, .., y_k^0$ sont nuls, ou bien enfin tous les $y_k^0, .., y_m^0$. Ces deux derniers casétant symétriques, ils se traitent de manière similaire.
Cas A : l'un des $y_0^0, .., y_k^0$ et l'un des $y_k^0, .., y_m^0$ sont non nuls. On se place alors dans la carte de Y décrite par les points

$$([z_0, .., z_k, z_{k+1}, .., z_m], [\xi_0, .., \xi_k], [\xi_{k+1}, .., \xi_m]) \in \mathbb{P}_m\mathbb{C} \times \mathbb{P}_k\mathbb{C} \times \mathbb{P}_{m-k-1}\mathbb{C}$$

tels que $z_0 \neq 0, \xi_0 \neq 0$. Ceci permet de repérer $\hat{R}_0$ par

$$\hat{R}_0 = ([1, x_1^0, .., x_k^0; x_{k+1}^0, .., x_m^0], [1, x_1^0, .., x_k^0], [x_{k+1}^0, .., x_m^0]),$$

où les réels positifs x_i^0 vérifient : $1 \geq x_1^0 \geq .. \geq x_k^0$ et $x_{k+1}^0 \geq ... \geq x_m^0$. Raisonnons par l'absurde, et supposons qu'il existe un point

$$\hat{R}_1 = ([1^{[k+1]}; \zeta_0^{[m-k]}], [1^{[k+1]}], [1^{[m-k]}])$$

tel que l'on ait $\zeta_0 > 0$ et

$$(\varphi - \hat{\psi})(\hat{R}_1) < 0. \tag{67}$$

On envisage alors les deux sous-cas suivants : $x_{k+1}^0 < \zeta_0$ puis $x_{k+1}^0 \geq \zeta_0$.

- $\underline{x_{k+1}^0 < \zeta_0}$.

On introduit alors la fonction auxiliaire

$$\hat{\psi}_0 = \log \frac{\mid z_0 \mid^4 \mid \xi_0 \mid^{2k} \mid \xi_{k+1} \mid^{2(m-k-1)}}{(\mid z_0 \mid^2 + ... + \mid z_m \mid^2)^2 (\mid \xi_0 \mid^2 + ... + \mid \xi_k \mid^2)^k (\mid \xi_{k+1} \mid^2 + ... + \mid \xi_m \mid^2)^{m-k-1}}.$$

D'une part, puisque $\varphi \leq 0$,

$$(\varphi - \hat{\psi}_0)([1, 0^{[m]}], [1, 0^{[k]}], [1, 0^{[m-k-1]}]) = \varphi([1, 0^{[m]}], [1, 0^{[k]}], [1, 0^{[m-k-1]}]) \leq 0. \tag{68}$$

De plus, sachant que $\varphi(\hat{R}_0) = 0$ et $\hat{\psi}_0 \leq 0$, on a

$$(\varphi - \hat{\psi}_0)(\hat{R}_0) \geq 0. \tag{69}$$

Si $\hat{R}_0 \neq ([1, 0^{[m]}], [1, 0^{[k]}], [1, 0^{[m-k-1]}])$, $\hat{\psi}_0(\hat{R}_0) < 0$ et l'inégalité (69) est alors stricte. Si $\hat{R}_0 = ([1, 0^{[m]}], [1, 0^{[k]}], [1, 0^{[m-k-1]}])$, quitte à se placer en un point $\hat{R}$ arbitrairement voisin de $\hat{R}_0$, on peut supposer $(\varphi - \hat{\psi}_0)(\hat{R}) > 0$. En effet, si dans un voisinage de $\hat{R}_0$ on avait $(\varphi - \hat{\psi}_0) \leq 0$, comme $(\varphi - \hat{\psi}_0)(\hat{R}_0) = 0$, $(\varphi - \hat{\psi}_0)$ admettrait alors un maximun local en $\hat{R}_0$, ce qui mettrait en défaut l'admissibilité de φ en ce point, sachant que

$$\partial_{\lambda\overline{\mu}}(\varphi - \hat{\psi}_0)(\hat{R}_0) = (g_{\lambda\overline{\mu}} + \partial_{\lambda\overline{\mu}}\varphi)(\hat{R}_0).$$

Dans tous les cas, on peut donc affirmer qu'il existe un point

$$\hat{R}'_0 = ([1, a_1, .., a_m], [1, a_1, .., a_k], [a_{k+1}, .., a_m])$$

vérifiant

$$(\varphi - \hat{\psi}_0)(\hat{R}'_0) > 0. \tag{70}$$

Par continuité et G-invariance de φ, on peut supposer $1 > a_1 > ... > a_k > 0$ et $\zeta_0 > a_{k+1} > ... > a_m > 0$. D'autre part, l'inégalité (67) jointe aux définitions de $\hat{R}_1$, $\hat{\psi}_0$, $\hat{\psi}_1$ et $\hat{\psi} = \inf(\hat{\psi}_1, \hat{\psi}_2)$ implique

$$(\varphi - \hat{\psi}_0)(\hat{R}_1) = (\varphi - \hat{\psi}_1)(\hat{R}_1) \leq (\varphi - \hat{\psi})(\hat{R}_1) < 0. \tag{71}$$

La courbe :

$$\begin{aligned}[0,1] \ni t \to ([1, t, t^{(\ln a_2)/(\ln a_1)}, .., t^{(\ln a_k)/(\ln a_1)}; \zeta_0 t^{\frac{\ln(a_{k+1}/\zeta_0)}{\ln a_1}}, .., \zeta_0 t^{\frac{\ln(a_m/\zeta_0)}{\ln a_1}}], \\ [1, t, t^{(\ln a_2)/(\ln a_1)}, .., t^{(\ln a_k)/(\ln a_1)}], [1, t^{\frac{\ln(a_{k+2}/a_{k+1})}{\ln a_1}}, .., t^{\frac{\ln(a_m/a_{k+1})}{\ln a_1}}])\end{aligned}$$

passe par $([1, 0^{[m]}], [1, 0^{[k]}], [1, 0^{[m-k-1]}])$ en $t = 0$ puis par $\hat{R}'_0$ en $t = a_1$ et enfin par le point $\hat{R}_1$ en $t = 1$, valeurs en lesquelles, d'après (68), (70) et (71), $(\varphi - \hat{\psi}_0)$ est respectivement négative, positive puis à nouveau négative. L'invariance de cette fonction par l'action des $\exp(i\theta)$, permet donc de déduire que $(\varphi - \hat{\psi}_0)$ atteint un maximum sur la courbe holomorphe, complexifiée de la courbe décrite plus haut, ce qui contredit encore une fois l'admissibilité de φ.

- $\underline{x^0_{k+1} \geq \zeta_0}$.

Désignons dans ce cas par $p \in \{1, .., m-k\}$ l'entier pour lequel on a

$$x^0_{k+1} \geq ... \geq x^0_{k+p} > \zeta_0 \text{ et } \zeta_0 \geq x^0_{k+p+1} \geq ... \geq x^0_m,$$

et considérons la fonction auxiliaire

$$\hat{\psi}_{k+1} = \log \frac{\mid z_{k+1} \mid^4 \mid \xi_0 \mid^{2k} \mid \xi_{k+1} \mid^{2(m-k-1)}}{(\mid z_0 \mid^2 + ... + \mid z_m \mid^2)^2 (\mid \xi_0 \mid^2 + ... + \mid \xi_k \mid^2)^k (\mid \xi_{k+1} \mid^2 + ... + \mid \xi_m \mid^2)^{m-k-1}}.$$

On a

$$(\varphi - \hat{\psi}_{k+1})(\hat{R}_0) > 0. \tag{72}$$

La fonction $(\varphi - \hat{\psi}_{k+1})$ étant continue, quitte à se placer en un point voisin de $\hat{R}_0$, on peut supposer tous les x_i^0 non nuls. Posons alors:

$$\alpha_2 = \frac{\ln x_2^0}{\ln x_1^0}, .., \alpha_k = \frac{\ln x_k^0}{\ln x_1^0}; \alpha_{k+1} = \frac{\ln(x_{k+1}^0/\zeta_0)}{\ln x_1^0}, .., \alpha_m = \frac{\ln(x_m^0/\zeta_0)}{\ln x_1^0}.$$

Sachant que l'on a $1 \geq x_1^0 \geq .. \geq x_k^0$; $x_{k+1}^0 \geq .. \geq x_{k+p}^0 \geq \zeta_0$ et $\zeta_0 \geq x_{k+p+1}^0 \geq .. \geq x_m^0$, on en déduit que $\alpha_2, .., \alpha_k \geq 0$, $\alpha_{k+1} \leq ... \leq \alpha_{p+k} \leq 0$ et $\alpha_{p+k+1}, .., \alpha_m \geq 0$, d'où, en notant

$$\hat{R}_\varepsilon = ([1, \varepsilon, \varepsilon^{\alpha_2}, .., \varepsilon^{\alpha_k}; \zeta_0 \varepsilon^{\alpha_{k+1}}, .., \zeta_0 \varepsilon^{\alpha_m}], [1, \varepsilon, \varepsilon^{\alpha_2}, .., \varepsilon^{\alpha_k}], [\varepsilon^{\alpha_{k+1}}, .., \varepsilon^{\alpha_m}]),$$

on a

$$\begin{aligned}
\lim_{\varepsilon \to 0} \hat{\psi}_{k+1}(\hat{R}_\varepsilon) &= \lim_{\varepsilon \to 0} \{ \ln \frac{\zeta_0^4 \varepsilon^{4\alpha_{k+1}}}{[1 + \varepsilon^2 + \varepsilon^{2\alpha_2} + .. + \varepsilon^{2\alpha_k} + \zeta_0^2 (\varepsilon^{2\alpha_{k+1}} + .. + \varepsilon^{2\alpha_m})]^2} \\
&\quad \times \frac{\varepsilon^{2(m-k-1)\alpha_{k+1}}}{(\varepsilon^{2\alpha_{k+1}} + .. + \varepsilon^{2\alpha_m})^{m-k-1}} \} \\
&= \ln \lim_{t \to \infty} \frac{t^{-2\alpha_{k+1}(m+1-k)}}{(t^{-2\alpha_{k+1}} + t^{-2\alpha_{k+2}} + .. + t^{-2\alpha_p})^{(m+1-k)}} = \ln 1 = 0,
\end{aligned}$$

$-\alpha_{k+1}$ étant la plus grande puissance intervenant au dénominateur. Sachant que $\varphi([\hat{R}_\varepsilon]) \leq 0$ et compte tenu de (72) il existe ε_0 tel que l'on ait

$$(\varphi - \hat{\psi}_{k+1})(\hat{R}_{\varepsilon_0}) \leq -\hat{\psi}_{k+1}(\hat{R}_{\varepsilon_0}) < (\varphi - \hat{\psi}_{k+1})(\hat{R}_0). \tag{73}$$

D'autre part, l'inégalité (67), jointe aux définitions de $\hat{R}_1$, $\hat{\psi}_{k+1}$, $\hat{\psi}_2$ et $\hat{\psi} = \inf(\hat{\psi}_1, \hat{\psi}_2)$ donne :

$$(\varphi - \hat{\psi}_{k+1})(\hat{R}_1) = (\varphi - \hat{\psi}_2)(\hat{R}_1) \leq (\varphi - \hat{\psi})(\hat{R}_1) < 0. \tag{74}$$

La courbe

$$[\varepsilon_0, 1] \ni t \to ([1, t, t^{\alpha_2}, .., t^{\alpha_k}, \zeta_0 t^{\alpha_{k+1}}, .., \zeta_0 t^{\alpha_m}], [1, t, t^{\alpha_2}, .., t^{\alpha_k}], [t^{\alpha_{k+1}}, .., t^{\alpha_m}]),$$

passe par $\hat{R}_{\varepsilon_0}$ en $t = \varepsilon_0$ puis par $\hat{R}_0$ en $t = x_1^0$ et enfin par $\hat{R}_1$ en $t = 1$, ce qui, en vertu de (73), (72) et (74) prouve l'existence d'un maximum local pour la fonction $(\varphi - \hat{\psi}_{k+1})$ sur la courbe précitée. Ceci contredit, à l'instar du cas précédent, l'hypothèse d'admissibilité de la fonction φ.

Cas B : $y_0^0 = ... = y_k^0 = 0$. On peut alors se placer dans la carte de Y décrite par les points

$$([z_0, .., z_k; z_{k+1}, .., z_m], [\xi_0, .., \xi_k], [\xi_{k+1}, .., \xi_m]) \in \mathbb{P}_m\mathbb{C} \times \mathbb{P}_k\mathbb{C} \times \mathbb{P}_{m-k-1}\mathbb{C}$$

tels que $z_{k+1} \neq 0$ et $\xi_0 \neq 0$, de sorte que le point $\hat{R}_0$ où φ atteint son maximum égal à zéro puisse s'écrire sous la forme

$$\hat{R}_0 = ([0, 0, .., 0; 1, x_{k+2}^0, .., x_m^0], [1, u_1^0, .., u_k^0], [1, x_{k+2}^0, .., x_m^0]).$$

On peut aussi supposer, en utilisant la G-invariance de φ, que $1 \geq x_{k+2}^0 \geq .. \geq x_m^0$ et $1 \geq u_1^0 \geq .. \geq u_k^0$. On montrera une version équivalente du lemme 12, à savoir que

$$(\varphi - \hat{\psi})([\zeta^{[k+1]}; 1^{[m-k]}], [1^{[k+1]}], [1^{[m-k]}]) \geq 0 \tag{75}$$

pour tout $\zeta > 0$.

Raisonnons par l'absurde, et supposons qu'il existe un point

$$\hat{R}_{k+1} = ([\zeta_0^{[k+1]}; 1^{[m-k]}], [1^{[k+1]}], [1^{[m-k]}])$$

de Y tel que l'on ait $\zeta_0 > 0$ et

$$(\varphi - \hat{\psi})(\hat{R}_{k+1}) < 0. \tag{76}$$

On considère alors la fonction auxiliaire $\hat{\psi}_{k+1}$. Sachant que $\varphi \leq 0$, on a

$$\begin{aligned}&(\varphi - \hat{\psi}_{k+1})([0^{[k+1]}; 1, 0, .., 0], [1, 0^{[k]}], [1, 0^{[m-k-1]}]) = \\ &\varphi([0^{[k+1]}; 1, 0, .., 0], [1, 0^{[k]}], [1, 0^{[m-k-1]}]) \leq 0.\end{aligned} \tag{77}$$

D'autre part, sachant que $\varphi(\hat{R}_0) = 0$ et $\hat{\psi}_{k+1} \leq 0$, on a

$$(\varphi - \hat{\psi}_{k+1})(\hat{R}_0) = -\hat{\psi}_{k+1}(\hat{R}_0) \geq 0, \tag{78}$$

inégalité stricte dès que

$$\hat{R}_0 \neq ([0^{[k+1]}; 1, 0, .., 0], [1, 0^{[k]}], [1, 0^{[m-k-1]}]).$$

Si $\hat{R}_0 = ([0^{[k+1]}; 1, 0, .., 0], [1, 0^{[k]}], [1, 0^{[m-k-1]}])$, quitte à se placer en un point arbitrairement voisin de $\hat{R}_0$, on peut supposer la dernière inégalité stricte. En effet, si dans un voisinage de $\hat{R}_0$, on avait $\varphi - \hat{\psi}_{k+1} \leq 0$, alors $\varphi - \hat{\psi}_{k+1}$ admettrait un maximum local en $\hat{R}_0$, ce qui contredirait l'admissibilité de φ en $\hat{R}_0$. A l'instar du cas A, il existe donc un point

$$\hat{R}_0' = ([c_0, .., c_k; 1, c_{k+2}, .., c_m], [c_0, .., c_k], [1, c_{k+2}, .., c_m])$$

vérifiant

$$(\varphi - \hat{\psi}_{k+1})(\hat{R}_0') > 0. \tag{79}$$

Par continuité et G-invariance de φ, on peut supposer $\zeta_0 > c_0 > ... > c_k > 0$ et $1 > c_{k+2} > ... > c_m > 0$. D'autre part, l'inégalité (76) jointe aux définitions de $\hat{R}_{k+1}$, $\hat{\psi}_{k+1}$, $\hat{\psi}_2$ et $\hat{\psi} = \inf(\hat{\psi}_1, \hat{\psi}_2)$ implique

$$(\varphi - \hat{\psi}_{k+1})(\hat{R}_{k+1}) = (\varphi - \hat{\psi}_2)(\hat{R}_{k+1}) \leq (\varphi - \hat{\psi})(\hat{R}_{k+1}) < 0. \tag{80}$$

La courbe de Y :

$$[0,1] \ni t \to ([\zeta_0 t^{\frac{\ln(c_0/\zeta_0)}{\ln c_{k+2}}}, .., \zeta_0 t^{\frac{\ln(c_k/\zeta_0)}{\ln c_{k+2}}}; 1, t, t^{(\ln c_{k+3})/(\ln c_{k+2})}, .., t^{(\ln c_m)/(\ln c_{k+2})}],$$
$$[1, t^{\frac{\ln(c_1/c_0)}{\ln c_{k+2}}}, .., t^{\frac{\ln(c_k/c_0)}{\ln c_{k+2}}}], [1, t, t^{(\ln c_{k+3})/(\ln c_{k+2})}, .., t^{(\ln c_m)/(\ln c_{k+2})}])$$

passe par $([0^{[k+1]}, 1, 0, .., 0], [1, 0^{[k]}])$ en $t = 0$ puis par $\hat{R}_0$ en $t = c_{k+2}$ et enfin par le point $\hat{R}_{k+1}$ en $t = 1$, valeurs en lesquelles, d'après (77), (79) et (80), $(\varphi - \hat{\psi}_{k+1})$ est respectivement négative, positive puis négative. L'invariance de cette fonction par l'action des $\exp(i\theta)$, permet donc de déduire que $(\varphi - \hat{\psi}_0)$ atteint un maximum sur la courbe holomorphe, déduite de la courbe décrite plus haut, ce qui contredit l'admissibilité de φ, d'où (75).

Cas C : Les $y_0^0, .., y_k^0$ sont tous nuls. On peut alors se placer dans la carte de Y décrite par les points

$$([z_0, .., z_k; z_{k+1}, .., z_m], [\xi_0, .., \xi_k], [\xi_{k+1}, .., \xi_m]) \in \mathbb{P}_m\mathbb{C} \times \mathbb{P}_k\mathbb{C} \times \mathbb{P}_{m-k-1}\mathbb{C}$$

tels que $z_0 \neq 0$ et $\xi_{k+1} \neq 0$, de sorte que le point $\hat{R}_0$ où φ atteint son maximum égal à zéro puisse s'écrire sous la forme

$$\hat{R}_0 = ([1, x_1^0, .., x_k^0; 0, 0, .., 0], [1, x_1^0, .., x_k^0], [1, u_{k+2}^0, .., u_m^0]).$$

On peut aussi supposer, en utilisant la G-invariance de φ, que $1 \geq x_1^0 \geq .. \geq x_k^0$ et $1 \geq u_{k+2}^0 \geq .. \geq u_m^0$.

Raisonnons par l'absurde, et supposons qu'il existe un point que l'on notera encore

$$\hat{R}_{k+1} = ([1^{[k+1]}; \zeta_0^{[m-k]}], [1^{[k+1]}], [1^{[m-k]}])$$

de Y tel que l'on ait $\zeta_0 > 0$ et

$$(\varphi - \hat{\psi})(\hat{R}_{k+1}) < 0. \tag{81}$$

On considère alors la fonction auxiliaire $\hat{\psi}_0$ définie plus haut. Sachant que $\varphi \leq 0$, on a

$$\begin{aligned}&(\varphi - \hat{\psi}_0)([1, 0, .., 0; 0^{[m-k]}], [1, 0^{[k]}], [1, 0^{[m-k-1]}]) = \\ &\varphi([1, 0^{[k]}; 0^{[m-k]}], [1, 0^{[k]}], [1, 0^{[m-k-1]}]) \leq 0.\end{aligned} \tag{82}$$

D'autre part, sachant que $\varphi(\hat{R}_0) = 0$ et $\hat{\psi}_{k+1} \leq 0$, on a

$$(\varphi - \hat{\psi}_0)(\hat{R}_0) = -\hat{\psi}_{k+1}(\hat{R}_0) \geq 0, \tag{83}$$

inégalité stricte dès que

$$\hat{R}_0 \neq ([1, 0^{[k]}; 0^{[m-k]}], [1, 0^{[k]}], [1, 0^{[m-k-1]}]).$$

Si $([1, 0^{[k]}; 0^{[m-k]}], [1, 0^{[k]}], [1, 0^{[m-k-1]}])$, quitte à se placer en un point arbitrairement voisin de $\hat{R}_0$, on peut supposer la dernière inégalité stricte. En effet, si dans un voisinage de $\hat{R}_0$, on avait $\varphi - \hat{\psi}_{k+1} \leq 0$, alors $\varphi - \hat{\psi}_{k+1}$ admettrait un maximum local en $\hat{R}_0$, ce qui contredirait l'admissibilité de φ en $\hat{R}_0$. Il existe donc un point

$$\hat{R}'_0 = ([1, c_1, .., c_k; c_{k+1}, .., c_m], [1, c_1, .., c_k], [c_{k+1}, .., c_m])$$

vérifiant

$$(\varphi - \hat{\psi}_0)(\hat{R}'_0) > 0. \tag{84}$$

Par continuité et G-invariance de φ, on peut supposer $\zeta_0 > c_{k+1} > ... > c_m > 0$ et $1 > c_1 > ... > c_k > 0$. D'autre part, l'inégalité (81) jointe aux définitions de $\hat{R}_{k+1}$, $\hat{\psi}_0$, $\hat{\psi}_1$ et $\hat{\psi} = \inf(\hat{\psi}_1, \hat{\psi}_2)$ implique

$$(\varphi - \hat{\psi}_0)(\hat{R}_{k+1}) = (\varphi - \hat{\psi}_1)(\hat{R}_{k+1}) \leq (\varphi - \hat{\psi})(\hat{R}_{k+1}) < 0. \tag{85}$$

La courbe de Y :

$$[0, 1] \ni t \to ([1, t, t^{(\ln c_2)/(\ln c_1)}, .., t^{(\ln c_k)/(\ln c_1)}; \zeta_0 t^{\frac{\ln(c_{k+1}/\zeta_0)}{\ln c_1}}, .., \zeta_0 t^{\frac{\ln(c_m/\zeta_0)}{\ln c_1}}],$$
$$[1, t, t^{(\ln c_2)/(\ln c_1)}, .., t^{(\ln c_k)/(\ln c_1)}], [1, t^{\frac{\ln(c_{k+2}/c_{k+1})}{\ln c_1}}, .., t^{\frac{\ln(c_m/c_{k+1})}{\ln c_1}}])$$

passe par $([1, 0, .., 0], [1, 0^{[k]}], [1, 0^{[m-k]}])$ en $t = 0$ puis par $\hat{R}_0$ en $t = c_1$ et enfin par le point $\hat{R}_{k+1}$ en $t = 1$, valeurs en lesquelles, d'après (82), (84) et (85), $(\varphi - \hat{\psi}_{k+1})$ est respectivement négative, positive puis négative. L'invariance de cette fonction par l'action des $\exp(i\theta)$, permet donc de déduire que $(\varphi - \hat{\psi}_0)$ atteint un maximum sur la courbe holomorphe, déduite de la courbe décrite plus haut, ce qui contredit l'admissibilité de φ, d'où et le lemme 12.

2.6 Preuve du corollaire 3.

Soit $\varphi \in C^\infty(Y)$ une fonction $\hat{g}$-admissible et G-invariante, dont le sup sur Y est nul. D'après le théorème 3, on a $\varphi \geq \hat{\psi}$ et par suite, pour tout $\alpha \geq 0$,

$$\int_Y \exp(-\alpha\varphi) dv \leq \int_Y \exp(-\alpha\hat{\psi}) dv.$$

Afin d'obtenir les valeurs de α pour lesquelles cette dernière intégrale converge, on estimera $\int_Y \exp(-\alpha\hat{\psi}_1) dv$ et $\int_Y \exp(-\alpha\hat{\psi}_2) dv$ dans la carte dense correspondant à la paramétrisation

$$([1, z_1, .., z_m], [1, z_1, .., z_k], [z_{k+1}, .., z_m]).$$

Dans cette carte, l'élément de volume est donné par (c.f. [6]) :

$$dv = \det((\hat{g}_{\lambda\overline{\mu}}))dz_1 \wedge d\overline{z}_1 \wedge ... \wedge dz_m \wedge d\overline{z}_m,$$

où

$$\det((\hat{g}_{\lambda\overline{\mu}})) = 2(-1)^m \frac{[(k+2)(1+\mid z_1 \mid^2 +...+ \mid z_k \mid^2) + k(\mid z_{k+1} \mid^2 +...+ \mid z_m \mid^2)]^k}{(1+\mid z_1 \mid^2 +...+ \mid z_k \mid^2)^k(\mid z_{k+1} \mid^2 +...+ \mid z_m \mid^2)^{m-k-1}}$$
$$\times \frac{[(m-k-1)(1+\mid z_1 \mid^2 +...+ \mid z_k \mid^2) + (m-k+1)(\mid z_{k+1} \mid^2 +...+ \mid z_m \mid^2)]^{m-k-1}}{(1+\mid z_1 \mid^2 +...+ \mid z_m \mid^2)^{m+1}}.$$

Si $u_p =\mid z_p \mid^2$, en zéro et en l'infini on a l'équivalence :

$$dv \sim \frac{Cst(>0)}{(1+u_1+..+u_k)^k(u_{k+1}+..+u_m)^{m-k-1}(1+u_1+..+u_m)^2}.$$

La convergence de $\int_Y \exp(-\alpha\hat{\psi}_1)dv$ est donc équivalente à celle de

$$\int_0^{+\infty} .. \int_0^{+\infty} \frac{(u_1...u_k)^{-\alpha(k+2)/(k+1)}(u_{k+1}...u_m)^{-\alpha(m-k-1)/(m-k)}}{(1+u_1+...+u_m)^{2(1-\alpha)}(1+u_1+..+u_k)^{(1-\alpha)k}} \times \frac{du_1...du_m}{(u_{k+1}+..+u_m)^{(1-\alpha)(m-k-1)}}, \tag{86}$$

qui converge en zéro pour $\alpha < (k+1)/(k+2)$. En l'infini en effectuant en changement de coordonnées sphériques on ramène l'étude à celle de

$$\int_{a>0}^{+\infty} \frac{r^{-\alpha k(k+2)/(k+1)}r^{-\alpha(m-1-k)}r^{m-1}}{r^{2(1-\alpha)}r^{k(1-\alpha)}r^{(1-\alpha)(m-k-1)}}dr, \tag{87}$$

qui converge pour $\alpha < (k+1)/(k+2)$. De même, la convergence de $\int_Y \exp(-\alpha\hat{\psi}_2)dv$ est équivalente à celle de

$$\int_0^{+\infty} .. \int_0^{+\infty} \frac{(u_1...u_k)^{-\alpha k/(k+1)}(u_{k+1}...u_m)^{-\alpha(m-k+1)/(m-k)}}{(1+u_1+...+u_m)^{2(1-\alpha)}(1+u_1+..+u_k)^{(1-\alpha)k}} \times \frac{du_1...du_m}{(u_{k+1}+..+u_m)^{(1-\alpha)(m-k-1)}}, \tag{88}$$

qui converge en zéro pour $\alpha < 1/2$. En l'infini, cela revient à étudier la convergence de

$$\int_{a>0}^{+\infty} r^{-\alpha k^2/(k+1)}r^{-\alpha(m-k+1)}r^{-(1-\alpha)(m+1)}r^{m-1}dr, \tag{89}$$

qui converge pour $\alpha < (k+1)/k$, condition toujours vérifiée, d'où le corollaire 3.

References

[1] T.Aubin– Réduction du cas positif de l'équation de Monge-Ampère sur les variétés Kählériennes à la démonstration d'une inégalité , *J. Funct. Anal. 57, 1984, 143-153.*

[2] T.Aubin– Métriques d'Einstein-Kähler et exponentiel de fonctions admissibles, *J. Funct. Anal. 88, 1990, 385-394.*

[3] T.Aubin– Some Non-linear Problems in Riemannian Geometry, *Springer-Verlag, Berlin, 1998.*

[4] A.Ben Abdesselem– Lower bound of admissible functions on sphere, *Bull. Sci. Math. 126, 2002, 675-680.*

[5] A.Ben Abdesselem– Enveloppes inférieures de fonctions admissibles sur l'espace projectif complexe. Cas symétrique, à paraître. (Arxiv D.G, 2003)

[6] A.Ben abdesselem–P.Cherrier– Estimation of ricci tensor on certain Fano manifolds, *Math.Z.233, 2000,481-505*

[7] A.Ben Abdesselem–P.Cherrier– On Ricci curvature of certain complex bundles, *J. Math. Pures Appl. 9, 2000, 919-940.*

[8] A.Ben Abdesselem–P.Cherrier– Einstein-Kähler metrics on a class of bundles involving integral weigths, *J.Math. Pures Appl. 3, vol 81, 2002, 259-281.*

[9] J.P. Bourguignon– Métriques d'Einstein-Kähler sur les variétés de Fano : Obstructions et existence, *Sém. Bourbaki, 1996-97, 277-305.*

[10] L. Hőrmander – An introduction to complex analysis in several variables, *North-Holland, Amsterdam, 1973.*

[11] A.M. Nadel– Multiplier ideal sheaves and Kähler-Einstein metrics of positive scalar curvature, *Ann. Math. 132, 1990, 549-596.*

[12] Y.T. Siu– The existence of Kähler-Einstein metrics on manifolds with positive anticanonical line bundle and suitable finite symmetry group, *Ann. of Math. 127, 1988, 585-627.*

[13] G. Tian– On Kähler-Einstein metrics on certain Kähler manifolds with $C_1(M) > 0$, *Invent. Math. 89, 1987, 225-246.*

[14] G. Tian–S.T. Yau– Kähler-Einstein metrics on complex surfaces with $C_1 > 0$, *Comment. Math. Phys., 112, 1987, 175-203.*

[15] X. Zhu– Kähler-Ricci solitons on Toric Fano varieties, *IHES/M/00/58, 2000.*

Université Pierre et Marie Curie, Paris, France.
e-mail: benabdes@math.jussieu.fr
dridi@math.jussieu.fr