



**HAL**  
open science

## Diversité des sources d'incertitude et accumulation de capital humain sur le cycle de vie

Saïd Hanchane, David Touahri

► **To cite this version:**

Saïd Hanchane, David Touahri. Diversité des sources d'incertitude et accumulation de capital humain sur le cycle de vie. LIIème Congrès de l'Association Française de Sciences Economiques (AFSE), 18 septembre 2003, 2003, pp.27. halshs-00010255

**HAL Id: halshs-00010255**

**<https://shs.hal.science/halshs-00010255>**

Submitted on 18 Apr 2006

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Diversité des sources d'incertitude et accumulation de capital humain sur le cycle de vie

S. Hanchane\* et D. Touahri†

16 Octobre 2003

## Résumé

Dans ce papier, nous analysons le processus d'accumulation de capital humain sur le cycle de vie des individus sous l'hypothèse d'incertitude. Pour cela, nous développons un modèle de programmation dynamique en temps continu dans lequel plusieurs sources d'incertitude sont prises en compte. Outre l'incertitude portant sur le marché financier, nous distinguons l'incertitude portant sur le processus d'accumulation du capital humain de celle qui porte sur le marché du travail. En particulier, le risque de déclassement est explicitement pris en compte. Ce modèle permet une étude approfondie des effets directs et indirects des différentes sources de l'incertitude sur l'investissement en capital humain. Nous montrons que selon la perception qu'ont les individus des différents risques, l'investissement en éducation peut être encouragé.

*mots clés* : capital humain, cycle de vie, risque, contrôle optimal stochastique.

*JEL Classification* : I20, J24, C61, D99, G11.

---

\*IDEP-LEST, Tel : +33 4 04 42 37 85 24, Fax : +33 4 04 42 26 79 37, Email : hanchane@univ-aix.fr

†LEST, Tel : +33 4 04 42 35 87 06, Fax : +33 4 04 42 26 79 37, Email : touahri@univ-aix.fr,  
© touahri & hanchane

# 1 Introduction

Depuis les travaux précurseurs de Schultz (1961) et Becker (1962) dans le domaine de l'éducation, la scolarité et plus généralement la formation ont été considérées comme un investissement en capital humain, au même titre que le capital physique. Cependant, la nature risquée de cet investissement a longtemps été occultée de l'analyse. Or, depuis une vingtaine d'année, on assiste sur les marchés du travail européens au développement d'un chômage des jeunes souvent récurrent et parfois long, accompagné de déclassements salariaux lors des premiers emplois (Forgeot et Gautié, 1997). La vulnérabilité des jeunes et l'incertitude à laquelle ils font face à l'entrée du marché du travail s'expriment non seulement par les difficultés accrues pour trouver un emploi qui correspond à leur niveau d'étude (Giret et Hatot, 2001) mais aussi par des taux d'emploi beaucoup plus sensibles que les autres catégories d'actifs à la conjoncture économique (Fondeur, 1996, Fondeur et Minni, 1999). Dans le domaine de l'éducation, on assiste également à une diversification des filières et des parcours de formation (Kirsch, 1998). A un niveau agrégé, cette hétérogénéité accrue peut être de nature à accentuer l'incertitude sur la qualité des parcours. Au niveau individuel, elle tend à brouiller la perception que peuvent avoir les employeurs des potentiels de productivité des élèves.

De ce fait, les prédictions de modèles fondés sur l'hypothèse d'anticipations parfaites quant à la valeur future du capital humain accumulé, semblent de moins en moins adaptées aux données observées. Il semble, par conséquent, nécessaire de replacer la problématique de l'investissement en capital humain et celle de l'efficacité des systèmes éducatifs qui en découle, dans un cadre plus général qui prend en compte l'incertitude. Dès lors, la question qui se pose est dans quelle mesure et sous quelles formes l'incertitude influence les décisions d'investissement en capital humain.

La première analyse théorique rigoureuse de cette question a été proposée par Levhari et Weiss (1974), dans un modèle à deux périodes. L'incertitude portant sur les salaires futurs, c'est-à-dire sur le rendement de l'investissement en capital humain, est supposée provenir de deux sources. La première porte sur le processus d'apprentissage dans le système éducatif. Elle porte sur un ensemble de caractéristiques individuelles et collectives exogènes que sont par exemple l'aptitude scolaire des élèves mais aussi la qualité des classes, des établissements, des enseignants, des filières, etc. La seconde provient du marché du travail ; elle porte sur les conditions futures d'offre et de demande de travail. Ces hypothèses, conformes à l'intuition et plutôt réalistes au regard des faits, ne se retrouvent pas dans les spécifications du modèle. En effet, ces sources d'incertitudes ne sont pas distinguées. Elles sont agrégées et représentées par une variable aléatoire unique. Plus précisément, l'incertitude est définie par la variance des gains au sens de Rothschild-Stiglitz. L'effet de l'incertitude est étudiée à partir de la corrélation entre les rendements moyens et marginaux futurs du capital humain. Si cette corrélation est positive, ou, ce qui est équivalent, si la variance des gains est croissante avec le niveau de scolarité, le rendement espéré du capital humain sera plus grand que celui d'un actif financier supposé certain. Dans ce cas, un individu averse au risque, se protégera en réduisant son investissement en capital humain. Une corrélation négative entre les rendements moyens et marginaux a l'effet opposé : un accroissement du niveau de scolarité réduira la variance des gains futurs. Dans ce cas, l'investissement en capital humain est encouragé lorsque le risque augmente. Cependant, l'hypothèse retenue généralement dans la littérature empirique est celle d'un risque croissant (variance croissante des gains). Cela conduit à supposer un niveau d'éducation plus faible en situation d'incertitude.

Plus récemment, Kodde (1986) a apporté des résultats empiriques qui contre-

disent la prédiction de Levhari et Weiss (1974) et indiquent au contraire l'existence d'une relation positive entre incertitude et investissement en capital humain. Pour tenter de rendre compte de ce constat empirique, Snow et Warren (1990) ont développé une extension du modèle de Levhari et Weiss (1974) en introduisant l'hypothèse d'une offre de travail endogène. Celle-ci permet de mettre en évidence un effet revenu qui peut rendre ambigu la relation entre risque et investissement. Autrement dit, l'investissement peut augmenter ou diminuer avec le risque.

Cette ambiguïté de l'effet du risque sur l'investissement provient, selon nous, de l'agrégation des différentes sources d'incertitude à travers un paramètre aléatoire unique qui capture tous les effets. Or, on peut a priori penser que ces différentes sources d'incertitude exercent un effet contrasté, sinon contradictoire, sur l'investissement en capital humain. Par ailleurs, dans les modèles rappelés précédemment, l'horizon de planification de l'individu est réduit à deux périodes, ce qui ne permet pas de mettre en évidence le caractère intertemporel de l'investissement en capital humain.

Pour dépasser ces deux limites, nous proposons un modèle de programmation dynamique en temps continu qui permet à la fois d'étudier le comportement de l'individu sur l'ensemble de son cycle de vie, mais aussi de décomposer et d'identifier séparément l'effet des différentes sources d'incertitude. Dans la section suivante, nous présentons les principes généraux du problème d'investissement en capital humain dans un cadre stochastique. La section 3 est consacrée à la spécification de notre modèle. Dans la section 4, nous présentons les résultats du modèle dans le cas général où les préférences individuelles ne sont pas spécifiées. Dans la section 5, après avoir explicité les préférences individuelles, nous discutons de l'effet des différentes sources d'incertitude sur l'investissement optimal en capital humain. Enfin, la section 6 conclut ce travail.

## 2 Le modèle stochastique de capital humain en temps continu : éléments préliminaires.

L'étude du caractère dynamique de l'investissement en capital humain dans un contexte d'incertitude peut se faire, comme dans le cas certain, dans deux directions.

Dans la première (Fan (1993), Hogan et Walker (2002) par exemple), la théorie des options réelles est appliquée au problème d'éducation. Il s'agit de la transposition au cas incertain d'un modèle de choix de scolarité. Dans la seconde (Williams, 1979), on applique la théorie du portefeuille au problème de choix d'investissement sur l'ensemble du cycle de vie de l'individu.

Dans la première direction, les travaux développent un modèle de *scolarité pur* dans lequel l'individu doit décider d'un date d'arrêt optimale et définitive des études. L'éducation est considérée ici comme un investissement irréversible<sup>1</sup>. Le problème de l'individu est le suivant : lorsqu'il est dans le système éducatif, l'individu possède à chaque date l'option de quitter l'école et d'entrer sur le marché du travail à un taux de salaire qui dépend stochastiquement du temps passé à l'école. Une fois que cette option est exercée, l'individu ne peut plus retourner dans le système éducatif, et il percevra sur l'ensemble de son cycle de vie un revenu qui dépend uniquement de la scolarité accumulée. En présence de risque, l'individu est incité à différer dans le temps sa sortie du système scolaire à cause de l'irréversibilité de son choix. En effet, en restant à l'école, l'individu a l'option de sortir à la période suivante dans le

---

<sup>1</sup>Les versions stochastiques du problème d'arrêt optimal sont analysées dans Kamien et Schwartz (1991). L'application de ces techniques à l'investissement en capital physique est passée en revue dans Dixit et Pindick (1994).

but de tirer avantage d'un "meilleur tirage" dans la distribution des rendements. Il a également le choix de rester à l'école pour éviter un "mauvais tirage". L'incertitude accroît de ce fait le bénéfice potentiel de l'option. Mais si l'individu n'exerce pas son option, suite à une anticipation d'un salaire faible, la perte de valeur de l'option reste inchangée. Cette asymétrie des effets de l'incertitude sur la valeur de l'option incite l'individu à reporter sa sortie du système scolaire, d'autant plus longtemps que l'incertitude sur les salaires est forte<sup>2</sup>.

Ainsi, la durée de scolarité est une fonction croissante non seulement du rendement espéré mais aussi du risque associé à l'éducation. Ce modèle apporte des fondements microéconomiques au phénomène de poursuite d'étude, en mettant en avant le rôle protecteur de l'éducation face aux risques existants à l'entrée du marché du travail. Néanmoins, les résultats de ce type de modèle méritent être nuancés, au regard des hypothèses assez restrictives sur lesquelles il repose. Tout d'abord, le modèle de Hogan et Walker (2002), par exemple, peut être perçu comme un cas très particulier du modèle de capital humain. Il s'agit en effet d'un modèle de *scolarité pur*, dans lequel l'offre de travail est supposée exogène. Cela signifie la durée de scolarité est la seule variable que contrôle l'individu. De ce fait, toute possibilité de formation conjointe à l'emploi est interdite par ce modèle. Durant la période d'emploi, les salaires sont supposés croître à un taux exogène, identique pour tous les travailleurs. Ainsi, les différentiels de salaires moyens observés sur le cycle de vie des individus s'expliquent uniquement à partir des différences initiales de niveaux de scolarité. Toute possibilité de changer sa situation initiale grâce à de la formation post-scolaire est exclue. Dans ces circonstances, la question de l'investissement sur le cycle de vie perd tout son intérêt, puisque la situation future de l'individu est définitivement établie à la sortie du système scolaire.

Enfin, les sources d'incertitude ne sont pas distinguées dans le modèle. Le processus d'accumulation de capital humain n'étant pas spécifié, toute l'incertitude est supposée provenir du marché du travail via les salaires. Le contenu risqué de l'apprentissage scolaire est ici totalement absent.

Or, rappelons que l'on assiste de plus en plus dans les économies occidentales, en France en particulier, à une diversification des parcours de formation qui peut affecter l'incertitude portant sur les capacités productives des élèves. Ce constat suffit à justifier la prise en compte du risque pouvant exister à l'intérieur du processus d'éducation. C'est ce que fait Williams (1979) dans un cadre théorique différent mais plus général. C'est la seconde voie d'analyse.

Williams propose un modèle de portefeuille beaucoup plus proche du modèle initial de capital humain. Il généralise le modèle de base, où l'individu arbitre entre des activités non risquées, au cas d'un arbitrage entre activités risquées. L'objet du choix individuel n'est pas la des études, mais l'intensité de l'investissement en capital humain sur l'ensemble du cycle de vie. Ceci provient du fait que chez Williams, le capital humain ne se résume pas uniquement à la formation initiale. La formation post-scolaire, en particulier la formation continue, est une autre forme d'investissement en capital humain, qui est prise en compte. Le cadre d'analyse de Williams apparaît également plus général, dans la mesure où d'une part, l'offre de travail est endogène, et d'autre part, différentes sources d'incertitude, concernant à la fois le processus d'éducation et de salaire sont prises en comptes. Plus précisément, quatre sources d'incertitude sont distinguées. Une première source d'incertitude porte sur la valeur des actifs financiers dans lesquels peut investir l'individu sur le marché des capitaux. Deux autres sources proviennent du processus d'accumulation de capital humain : l'une porte sur l'efficacité de l'apprentissage scolaire, et l'autre porte sur le taux de dépréciation du capital humain. La dernière source d'incertitude porte sur le niveau de salaire par niveau qualification. Les covariances entre les diffé-

---

<sup>2</sup>La démonstration est donnée dans l'annexe de Hogan et Walker (2002).

rentes variables risquées jouent un rôle central dans l'analyse, en particulier dans la détermination de l'effet global du risque sur l'investissement en capital humain. Contrairement à Hogan et Walker (2002), Williams conclut à un effet négatif du risque : l'individu est amené à réduire son investissement en capital humain lorsque le risque associé à l'éducation augmente.

Nous montrons dans la section suivante que ce résultat provient de l'hypothèse (ad hoc) d'indépendance des différents marchés. En forçant la nullité de certaines covariances, en particulier celles reliant les risques relatifs au processus d'acquisition des connaissances au risque sur les salaires, Williams fait peser implicitement tout le poids de l'incertitude sur le processus d'apprentissage. Or, cette hypothèse est difficilement soutenable, dans la mesure où l'essence même de l'économie de l'éducation (Willis et Rosen, 1979) réside dans l'étude des mécanismes qui articulent le déroulement scolaire et sa valorisation sur le marché du travail. Les caractéristiques individuelles observables et non observables expliquant les différences de niveaux d'éducation, expliquent en partie aussi les différences de salaires (Willis, 1986, Griliches, 1977).

Sur la base de l'ensemble de ces critiques, nous présentons un modèle théorique qui étend celui de Williams (1979) dans deux directions. D'une part, pour ne pas réduire toute l'incertitude en provenance du marché du travail au risque sur le salaire, nous intégrons explicitement le risque portant sur le type d'emploi futur, ou plus précisément sur le taux d'utilisation du capital humain dans un emploi donné. Ceci permet de mieux rendre compte des phénomènes de déclassement actuels que connaissent les jeunes lors de leur insertion professionnelle. D'autre part, nous levons l'hypothèse d'indépendance entre les variables aléatoires décrivant le processus d'acquisition des connaissances et celles relatives au marché du travail, et réexaminons l'effet des différentes sources d'incertitude sur l'investissement en capital humain.

### 3 Spécification du modèle

Dans cette section, nous présentons un modèle dynamique et stochastique d'accumulation de capital humain sur le cycle de vie. L'incertitude ici provient de cinq sources. Les quatre sources retenues dans le modèle de Williams (1979) sont reprises et une source supplémentaire est intégrée : celle portant sur le décalage qui peut exister entre le capital humain détenu par l'individu et le niveau de capital humain requis dans l'emploi futur. L'incertitude intervient dans les contraintes d'accumulation de capital humain et de richesse financière. C'est pourquoi, la première étape de ce travail consiste à dériver correctement les versions stochastiques de ces équations d'accumulation.

Dans ce modèle, la valeur du stock de capital humain courant  $k(t)$  est définie comme étant le revenu du travail maximal auquel l'individu peut prétendre sur le marché du travail.  $e(t)$  mesure la proportion du temps que l'individu consacre à la formation durant la période  $t$ .  $l(t)$  désigne la proportion du temps alloué au loisir à la période  $t$ .  $(1 - e(t) - l(t))$  est par conséquent la proportion du temps allouée au travail.

Le stock de capital humain en unité physique de la période  $t + \Delta t$  est égal au stock de la période précédente  $K(t)$  auquel s'ajoute le capital humain nouvellement produit au début de la période  $t + \Delta t$  :  $\theta(t + \Delta t) e(t) K(t)$ . Ce stock nouvellement créé est supposé dépendre linéairement du temps consacré à l'éducation  $e(t)$  et d'un

paramètre  $\theta(t + \Delta t)$  d'efficacité de l'apprentissage. On doit également soustraire le stock de capital humain déprécié durant la période  $t$ , égal à  $\delta(t + \Delta t) K(t)$  :

$$K(t + \Delta t) = K(t) + \theta(t + \Delta t) e(t) K(t) - \delta(t + \Delta t) K(t) \quad (1)$$

Pour des raisons considérées comme exogènes dans ce papier, nous supposons que sur le marché du travail, l'individu peut obtenir un emploi qui ne correspond pas complètement à son niveau de capital humain. Plus précisément, nous supposons que le capital humain d'un individu peut ne pas être pleinement utilisé dans un emploi particulier. Ainsi, en pondérant le stock de capital humain (équation 1) par un coefficient  $h$ , avec  $h \in [0, 1[$  on obtient le stock de capital humain effectivement utilisé dans un emploi donné :

$$h(t + \Delta t) K(t + \Delta t) = h(t + \Delta t) [1 + \theta(t + \Delta t) e(t) - \delta(t + \Delta t)] K(t) \quad (2)$$

Cette équation permet de mettre en évidence un phénomène de déclassement (ou "sur-éducation"), qui est d'autant plus grand que  $h$  est faible<sup>3</sup>.

En multipliant chacun des deux membres de l'équation ci-dessus par le prix du capital humain " $\omega$ ", on obtient la valeur monétaire du stock de capital humain effectivement utilisé sur le marché du travail :

$$\omega(t + \Delta t) h(t + \Delta t) K(t + \Delta t) = \omega(t + \Delta t) h(t + \Delta t) [1 + \theta(t + \Delta t) e(t) - \delta(t + \Delta t)] K(t) \quad (3)$$

En posant  $k(t + \Delta t) = \omega(t + \Delta t) h(t + \Delta t) K(t + \Delta t)$ , la valeur du stock de capital humain futur effectivement utilisé dans l'emploi peut être réécrite sous la forme suivante :

$$k(t + \Delta t) = \frac{h(t + \Delta t)}{h(t)} \frac{\omega(t + \Delta t)}{\omega(t)} [1 - \delta(t + \Delta t) + \theta(t + \Delta t) e(t)] k(t) \quad (4)$$

Écrite sous cette forme, cette équation indique que la valeur du stock de capital humain de la période  $t + \Delta t$ , dépend non seulement de la variation du volume de capital humain, exprimée par le terme entre crochets, mais également des variations entre les dates  $t$  et  $t + \Delta t$ , de la valorisation du stock de capital humain sur le marché du travail, exprimée à la fois par la variation du taux d'utilisation du capital humain dans l'emploi futur  $\frac{h(t + \Delta t)}{h(t)}$ , et par la variation de son prix de marché :  $\frac{\omega(t + \Delta t)}{\omega(t)}$ .

L'incertitude porte sur les paramètres  $\theta(t + \Delta t)$  et  $\delta(t + \Delta t)$ , relatifs au processus d'accumulation de capital humain en volume, ainsi que sur les paramètres  $\omega(t + \Delta t)$  et  $h(t + \Delta t)$ , qui renvoient à la valorisation future du capital humain sur le marché du travail.

Le paramètre stochastique  $\theta(t + \Delta t)$  représente l'incertitude portant sur la véritable capacité d'apprentissage de l'individu. Il prend en compte également tous les inputs non identifiables entrant dans le processus d'éducation, tels que la qualité des filières de formation, des établissements, des classes, des enseignants, etc. Le paramètre aléatoire  $\delta(t + \Delta t)$  représente le taux de dépréciation inconnu du capital humain de la période suivante.

---

<sup>3</sup>Par définition, le stock de capital humain détenu par un individu correspond au revenu du travail maximal auquel il peut prétendre sur le marché du travail. Ainsi, tout phénomène de surclassement salarial (ou sous-éducation), correspondant à une sur-utilisation du capital humain dans un emploi particulier, est exclu de ce modèle.

Le paramètre aléatoire  $\omega(t + \Delta t)$  correspond à la rémunération future du capital humain sur le marché du travail, inconnue à la date  $t$ . Nous supposons que l'individu observe parfaitement le salaire courant correspondant à son niveau de capital humain, mais qu'il ne connaît pas la distribution future des salaires. Le caractère aléatoire de la distribution des salaires (correspondant à un niveau d'éducation donné) permet de caractériser les évolutions futures du marché du travail, et en particulier, les conditions institutionnelles de détermination des salaires, très largement non maîtrisées par l'individu au moment où il prend ses décisions. Autrement dit, deux individus ayant les mêmes caractéristiques, travaillant dans des emplois similaires aujourd'hui, peuvent percevoir des salaires différents dans le futur, tout simplement parce qu'ils auront obtenu un "tirage" différent dans la distribution des salaires. Le paramètre  $h(t + \Delta t)$  exprime l'incertitude sur le taux d'utilisation du capital humain dans l'emploi futur. Nous supposons que les emplois sont hétérogènes du point de vue de l'utilisation du capital humain, et que l'individu ne connaît pas parfaitement la distribution des emplois. Cela signifie que deux individus ayant le même niveau de capital humain pourront obtenir des revenus du travail différents dans le futur, s'ils accèdent à des emplois différentes, ou à des promotions professionnelles différentes. En d'autres termes, même si l'individu pouvait parfaitement connaître le salaire associé à chaque poste de travail, il ne peut connaître a priori son revenu du travail futur, car il ne sait pas si le poste de travail auquel il accèdera dans le futur sera pleinement adapté à ses compétences. Ainsi, le paramètre  $h(t + \Delta t)$  permet de mettre en évidence les éventuels problèmes d'inadaptation des emplois offerts aux compétences détenues par les individus. Nous parlerons, dans la suite de ce travail, de risque de déclassement dans l'emploi futur en référence au risque portant sur  $h(t + \Delta t)$ .

Ces quatre paramètres aléatoires sont supposés être infiniment divisibles et suivre des lois lognormales de moyenne  $\mu$  et de variance  $\sigma$  :  $\theta(t + \Delta t) \sim LN(\mu_\theta, \sigma_\theta)$  ;  $\delta(t + \Delta t) \sim LN(\mu_\delta, \sigma_\delta)$  ;  $\omega(t + \Delta t) \sim LN(\mu_\omega, \sigma_\omega)$  et  $h(t + \Delta t) \sim LN(\mu_h, \sigma_h)$ .

En introduisant la dimension temporelle, les variations de chacun des paramètres aléatoires sont supposées suivre, d'après le lemme d'Itô<sup>4</sup>, un processus de Wiener se caractérisant par les différentielles stochastiques suivantes :

$$\Delta\theta(t) = \mu_\theta \Delta t + \sigma_\theta \Delta Z(t) \quad (5)$$

$$\Delta\delta(t) = \mu_\delta \Delta t + \sigma_\delta \Delta Z(t) \quad (6)$$

$$\Delta\omega(t) = \omega(t) [\mu_\omega \Delta t + \sigma_\omega \Delta Z(t)] \quad (7)$$

$$\Delta h(t) = h(t) [\mu_h \Delta t + \sigma_h \Delta Z(t)] \quad (8)$$

$\mu_\theta, \mu_\delta, \mu_\omega$  et  $\mu_h$  représentent les moyennes instantanées des processus stochastiques respectifs. Ces paramètres sont constants, d'après les propriétés du processus de Wiener.  $\sigma_\theta, \sigma_\delta, \sigma_\omega$  et  $\sigma_h$  sont des vecteurs de constantes de dimension  $N + 4$ . Ils correspondent aux écart-types instantanés de chacun des processus stochastiques. Ce sont des indicateurs de risque au sens de Rothschild-Stiglitz.  $Z(t)$  est le processus de Wiener standard. Par définition, c'est un vecteur aléatoire de moyenne nulle, de covariances nulles et de variance  $\Delta t$ . Il est également, dans ce modèle, de dimension  $N + 4$ .

---

<sup>4</sup>Le lemme d'Itô, appelé aussi théorème fondamental du calcul stochastique, est le résultat le plus utilisé des modèles en temps continu. Il permet de déterminer les paramètres de tout processus d'Itô lorsque celui-ci dépend d'un processus de même nature dont on connaît les paramètres. Les versions unidimensionnelle et multidimensionnelle du lemme d'Itô est donné par Roger (1991), pp 234-236.

A partir de ces quatre expressions, en faisant tendre  $\Delta t$  vers 0, en remplaçant ces valeurs dans (1) et en appliquant le lemme d'Itô, on obtient l'écriture stochastique de l'équation d'accumulation de capital humain en temps continu<sup>5</sup> :

$$\begin{aligned} \frac{dk(t)}{k(t)} = & (\mu_h + \mu_\omega + (\mu_\theta + \sigma_{h\theta} + \sigma_{\theta\omega})e(t) - \mu_\delta - \sigma_{h\delta} - \sigma_{\delta\omega} + \sigma_{h\omega}) dt \\ & + (\sigma_h + \sigma_\omega + \sigma_\theta e(t) - \sigma_\delta)' dZ(t) \end{aligned} \quad (9)$$

Cette équation établit que le rendement du capital humain suit un processus de diffusion qui dépend linéairement du temps consacré à l'éducation. Plus précisément, toute augmentation de l'allocation courante en éducation  $e(t)$  augmente simultanément la moyenne et la variance du taux de croissance instantané du capital humain et donc des gains futurs sur le cycle de vie.

On notera, à partir de cette équation, que l'ampleur de cet effet de l'éducation dépend cruciallement du paramètre de productivité nette  $\theta$ . Seule l'incertitude portant sur la dépréciation du capital humain n'affecte pas directement l'impact de l'éducation. A la différence de Williams (1979), l'incertitude existant sur le marché du travail influence directement le rendement du capital humain à travers les covariances instantanées  $\sigma_{h\theta}$  et  $\sigma_{\theta\omega}$ . En effet, dans le modèle de Williams, les emplois sont supposés homogènes : le capital humain est toujours pleinement utilisé de sorte que  $h = 1$  et  $\sigma_{h\theta} = 0$ . Par ailleurs, les ajustements qui se produisent sur le marché du travail et dans le système éducatif sont supposés indépendants, ce qui implique la nullité de  $\sigma_{\theta\omega}$  et des autres covariances apparaissant dans l'équation (9). L'originalité de notre travail est précisément de lever cette hypothèse d'indépendance, et de supposer au contraire, l'existence d'une relation non nulle entre les variables associées au processus d'accumulation du capital humain et celles associées à la valorisation du capital humain au marché du travail.  $\sigma_{\theta h}$  identifie la relation entre l'efficacité de l'apprentissage et le taux d'utilisation du capital humain dans l'emploi.  $\sigma_{\theta\omega}$  identifie la relation entre efficacité de l'apprentissage et niveau des salaires. Nous supposons que ces covariances instantanées sont de signe positif : les individus les plus efficaces, ou étant passés par les formations les plus efficaces, sont ceux qui accèdent davantage à des niveaux d'emplois  $h$  et de salaire  $\omega$  correspondant à leur niveau de capital humain. Cette hypothèse, assez intuitive, n'est pas contredite par les travaux empiriques. C'est d'ailleurs l'objet d'une vaste littérature économétrique autour du fameux "biais d'aptitude" que de prendre en compte ce type de relations ( cf. Moullet (2000) , pour une synthèse de ces travaux)

Simultanément, l'individu est supposé répartir sa richesse financière courante entre trois éléments : des dépenses de consommation, un investissement dans un actif non risqué et un investissement dans les  $N$  actifs risqués sur le marché financier. L'actif sans risque est supposé rapporter un taux d'intérêt connu et fixé à  $r$ . Le rendement des actifs financiers risqués sont supposés suivre un processus de Wiener dont la différentielle stochastique s'écrit :

$$dP(t) = P(t) [\mu dt + \Gamma' dZ(t)] \quad (10)$$

Où  $\mu$  est le vecteur des rendements moyens par unité de temps et  $\Sigma \equiv \Gamma'\Gamma$  est la matrice des variances-covariances du rendement des  $N$  actifs risqués par unité de temps, de dimension  $(N + 4) \times N$ . De plus, les rendements des  $N$  actifs risqués exhibent les covariances  $\Sigma_\omega \equiv \Gamma'\sigma_\omega$  avec les ajustements de rémunération du capital

<sup>5</sup>Les calculs effectués pour obtenir cette équation sont exposés intégralement dans l'annexe A.1.

humain, les covariances  $\Sigma_h \equiv \Gamma' \sigma_h$  avec les ajustements du taux d'utilisation du capital humain dans l'emploi, ainsi que les covariances  $\Sigma_\theta \equiv \Gamma' \sigma_\theta$  et  $\Sigma_\delta \equiv \Gamma' \sigma_\delta$  avec les paramètres de productivité nette et de dépréciation du capital humain. Pour simplifier drastiquement les calculs, nous poserons dans le développement qui suit ces covariances égales à 0. Autrement dit, comme Williams (1979), nous supposons que le marché financier fonctionne de manière indépendante, c'est-à-dire, que les ajustements de salaires et d'emploi ainsi que les valeurs de la productivité nette et de la dépréciation des compétences productives sont déterminés indépendamment des forces exercées par le marché financier.

En notant  $X$  la proportion de la richesse investie en actifs risqués,  $c(t)$  le flux de consommation à l'instant  $t$ , et  $y(t)$  le flux de revenu du travail perçu en  $t$ , la variation de la richesse financière entre  $t$  et  $\Delta t$ , lorsque  $\Delta t$  tend vers 0, peut s'écrire :

$$dw(t) = \frac{wX'dP(t)}{P(t)} + r(1-X)w(t)dt + y(t)dt - c(t)dt$$

En remplaçant  $dP(t)$  par sa valeur donnée par (7) et en arrangeant les termes, on obtient la contrainte stochastique d'accumulation de la richesse financière :

$$dw(t) = [rw(t) + y(t) - c(t) + w(t)(\mu - r1)'X]dt + w(t)X'\Gamma'dZ(t) \quad (11)$$

Les équations (6) et (8) constitue les contraintes sous lesquelles l'individu est supposé maximiser sur l'ensemble de son cycle de vie sa fonction d'utilité séparable dans le temps, qui dépend de la consommation, du loisir, du capital humain<sup>6</sup> et de la richesse terminale<sup>7</sup>. Plus précisément, le programme à résoudre est posé de la façon suivante :

$$Max E_t \int_t^T u[c(t), l(t), k(t), t] \Delta t + B[w(T), T] \quad (12)$$

sous les contraintes<sup>8</sup> :

$$\begin{aligned} \frac{dk}{k} = & (\mu_h + \mu_\omega + (\mu_\theta + \sigma_{h\theta} + \sigma_{\theta\omega})e - \mu_\delta - \sigma_{h\delta} - \sigma_{\delta\omega} + \sigma_{h\omega})dt \\ & + (\sigma_h + \sigma_\omega + \sigma_\theta e - \sigma_\delta)'dZ(t) \end{aligned} \quad (13)$$

$$dw = [rw + (1 - e - l)k - c + w(\mu - r1)'X]dt + wX'\Gamma'dZ(t) \quad (14)$$

$$\text{et } c \geq 0, 0 \leq e, l \leq 1 \quad (15)$$

## 4 Investissement optimal en capital humain

A partir de ce programme stochastique initial, le principe d'optimalité de Bellman permet d'écrire les équivalences suivantes :

<sup>6</sup>L'intégration du capital humain dans la fonction d'utilité n'est pas fondamentale dans l'analyse. Elle permet néanmoins de prendre en compte les gains non monétaire procurés par le capital humain, de la même façon que le loisir apporte une certaine satisfaction à l'individu.

<sup>7</sup>Lorsque l'horizon de planification de l'individu n'est pas infini, on peut ajouter au problème une fonction d'héritage (bequest fonction) de la forme  $B[w(T), T]$ .

<sup>8</sup>Dans tout le développement qui suit, nous remplaçons respectivement  $c(t), l(t), k(t), w(t)$ , et  $e(t)$ , par  $c, l, k, w, e$ , de façon à alléger les écritures.

$$\begin{aligned}
V[k, w, t, T] &\equiv \text{Max } E_t \int_t^T u[c, l, k, t] \Delta t + B[w(T), T] & (16) \\
&\equiv \text{Max } E_t \left\{ \int_t^T u[c, l, k, t] \Delta t \right. \\
&\quad \left. + \text{Max } E_{t+\Delta t} \int_{t+\Delta t}^T u[c, l, k, t] \Delta t + B[w(T), T] \right\} \\
&\equiv \text{Max } E_t \left\{ \int_t^{t+\Delta t} u[c, l, k, t] \Delta t \right. \\
&\quad \left. + V[k, w, t + \Delta t, T] \right\} & (17)
\end{aligned}$$

$V[k, w, t, T]$  est appelée fonction d'utilité indirecte. Elle correspond au niveau d'utilité maximal que peut espérer l'individu sur l'ensemble de son cycle de vie, s'il alloue de façon optimale son temps et sa richesse dans les différentes activités qui lui sont proposées. Elle est supposée strictement croissante et concave en  $k$  et  $w$ .

Le principe d'optimalité de Bellman permet de mettre en évidence les effets présents et futurs des variations des variables de contrôle sur la trajectoire optimale des variables d'état. Plus précisément, l'utilité maximale obtenue dans l'intervalle  $[t, T]$  résulte d'une suite de choix des variables de contrôle  $e$ ,  $wX$ ,  $c$  et  $l$  et de l'évolution des variables d'état  $k$  et  $w$ . Par conséquent, le premier terme  $u[c, l, k, t] \Delta t$  valorise les effets directs de la décision prise à l'instant  $t$ , alors que le second  $V[k, w, t + \Delta t, T]$  mesure les effets indirects, c'est-à-dire l'utilité cumulée que l'individu pourra obtenir dans l'intervalle  $[t + \Delta t, T]$  compte tenu du choix réalisé dans l'intervalle  $[t, t + \Delta t]$ .

Dans ce modèle, le capital humain et le capital financier sont supposés être des substituts imparfaits. C'est pourquoi  $k$  et  $w$  apparaissent séparément dans la fonction d'utilité indirecte  $V$ . Cette hypothèse provient du fait que, à la différence du capital financier, le capital humain ne peut pas être acheté ou vendu librement sur un marché. Il est non marchand et partiellement irréversible.

Nous montrons dans l'annexe A.2 que le programme (17) est équivalent à :

$$\begin{aligned}
0 &\equiv \text{Max } \{ u[c, l, k, t] + V_k k (\mu_h + \mu_w + (\mu_\theta + \sigma_{h\theta} + \sigma_{\theta w}) e - \mu_\delta - \sigma_{\delta h} - \sigma_{\delta w} + \sigma_{hw}) \\
&\quad + V_w [rw + (1 - e - l)k - c + w(\mu - r1)'X] \\
&\quad + \frac{1}{2} V_{kk} k^2 (\sigma_h^2 + \sigma_w^2 + \sigma_\theta^2 e^2 + \sigma_\delta^2 + 2\sigma_{h\theta} e + 2\sigma_{\theta w} e - 2\sigma_{\theta\delta} e + 2\sigma_{hw} - 2\sigma_{h\delta} - 2\sigma_{\delta w}) \\
&\quad + \frac{1}{2} V_{ww} w^2 X' \Sigma X + V_{kw} kw \Sigma'_w X + V_t \} & (18)
\end{aligned}$$

Cette *équation aux dérivées partielles stochastiques* (EDPs) est connue sous le nom d'équation de Bellman du contrôle optimal stochastique, ou encore équation d'Hamilton-Jacobi-Bellman. Les solutions intérieures pour cette équation sont obtenues de manière classique, en posant chacune des dérivées partielles égales à zéro<sup>9</sup>. On obtient alors les conditions d'optimalité qui définissent implicitement les quatre solutions  $c^*(t)$ ,  $l^*(t)$ ,  $wX^*(t)$ , et  $e^*(t)$ .

Les deux premières conditions, pour  $0 \leq t \leq T$ , sont immédiates :

<sup>9</sup>Les indices désignent, là encore, les dérivées partielles par rapport aux variables.

$$\frac{u_c}{V_w} = 1 \quad (19)$$

et

$$\frac{u_c}{u_l} = \frac{1}{k} \quad (20)$$

Les conditions (19) et (20) sont semblables à celles des modèles certains, puisque les paramètres relatifs au risque n'interviennent pas dans la détermination de ces deux conditions d'optimalité. En outre, la consommation courante et le temps de loisir courant sont affectés de manière similaire au cas certain par les variations de la richesse financière et du capital humain. En effet, un accroissement marginal de la richesse financière accroît la consommation courante et le temps de loisir courant de l'individu<sup>10</sup>. En supposant comme Williams, que le taux marginal de substitution entre la consommation et le loisir est indépendant du capital humain, alors une augmentation du capital humain courant accroît la consommation courante mais réduit le loisir courant<sup>11</sup>. En effet, l'incrément en capital humain augmente relativement la valeur de la richesse financière courante, et donc à travers (19) accroît la consommation. Cependant, en augmentant l'utilité marginale de la richesse financière, l'incrément en capital humain accroît le coût d'opportunité du loisir. L'individu est donc incité à réduire son temps de loisir au profit du travail.

La troisième condition implique que la dérivée partielle de (18) par rapport à  $wX$  est égale à 0, ce qui donne :

$$V_w(\mu - r1) + V_{ww}wX'\Sigma + V_{kw}k\Sigma'_w = 0$$

Soit

$$wX(t) = \left(-\frac{V_w}{V_{ww}}\right)\Sigma^{-1}(\mu - r1) - \frac{V_{kw}}{V_{ww}}k\Sigma^{-1}\Sigma'_w \quad (21)$$

Enfin le niveau d'investissement optimal en capital humain est donné par :

$$V_k k(\mu_\theta + \sigma_{h\theta} + \sigma_{\theta\omega}) - V_w k + V_{kk}k^2\sigma_\theta^2 e - V_{kk}k^2\sigma_{\theta\delta} + V_{kk}k^2\sigma_{h\theta} + V_{kk}k^2\sigma_{\theta\omega} = 0$$

Ce qui donne, en réarrangeant les termes

$$e(t) = \left(-\frac{V_k}{V_{kk}k}\right) \frac{(\mu_\theta + \sigma_{h\theta} + \sigma_{\theta\omega}) - \frac{V_w}{V_k}}{\sigma_\theta^2} + \frac{\sigma_{\theta\delta} - \sigma_{h\theta} - \sigma_{\theta\omega}}{\sigma_\theta^2} \quad (22)$$

La condition (21) est semblable à la condition d'optimalité d'un problème de portefeuille moyenne-variance standard. En effet, elle établit que le portefeuille en actifs risqués de l'individu est constitué à l'optimum des deux portefeuilles de base.

<sup>10</sup> En effet, si  $w$  augmente, on a d'après (19),  $\frac{\partial u_c}{\partial w} = V_{ww}$ . D'où  $\frac{\partial c}{\partial w} = \frac{V_{ww}}{u_{cc}} > 0$ , d'après l'hypothèse de concavité des fonctions d'utilité. En appliquant le même principe, on montre également que le loisir augmente avec la richesse financière :  $u_l = ku_c = kV_w$ . D'où  $\frac{\partial u_l}{\partial w} = kV_{ww}$  et  $\frac{\partial l}{\partial w} = k\frac{V_{ww}}{u_{ll}} > 0$ .

<sup>11</sup> L'hypothèse  $\frac{\partial}{\partial k}\left(\frac{u_c}{u_l}\right) = 0$  implique que  $\frac{\partial c}{\partial k} = -\frac{u_c}{u_l}\frac{u_{cc}}{u_{ll}}\frac{\partial l}{\partial k}$ . La fonction d'utilité étant strictement croissante et concave en  $c$  et en  $l$ , on a :  $u_c > 0, u_l > 0, u_{cc} < 0$  et  $u_{ll} < 0$ . On en conclut que  $\partial c/\partial k$  et  $\partial l/\partial k$  sont de signe contraire. Or, d'après (19),  $\frac{\partial u_c}{\partial k} = V_{wk}$ , d'où  $\frac{\partial c}{\partial k} = \frac{V_{wk}}{u_{cc}} > 0$ . On en déduit que  $\frac{\partial l}{\partial k} < 0$ .

Dans le cas général, le portefeuille  $\Sigma^{-1}\Sigma'_\omega$  est composé uniquement d'actif risqués. Il représente la couverture maximale contre le risque portant sur le capital humain. Or, si on suppose que les ajustements de salaires n'ont aucune influence sur le prix des actifs financiers, alors ce portefeuille est nul, puisque dans ce cas  $\Sigma'_\omega$  est nul. L'autre portefeuille,  $\Sigma^{-1}(\mu - r1)$ , est le portefeuille de marché standard.

On remarque que la composition du portefeuille optimal d'actif risqué dépend cruciallement de la perception qu'on les individus du risque ( $\Sigma$ ) mais aussi de le comportement face au risque. En effet, l'investissement en actifs risqués est proportionnel à la prime de risque ( $-\frac{1}{2}\Sigma\frac{V_{ww}}{V_w}$ ) et inversement proportionnel à l'indice d'aversion absolue vis-à-vis du risque d'Arrow-Pratt<sup>12</sup> : ( $-\frac{V_{www}}{V_w}$ ) ainsi qu'à la variance des rendements ( $\Sigma$ ). On notera que le poids attaché au portefeuille de marché est strictement l'inverse de l'index d'aversion absolue vis-à-vis du risque.

De même, l'investissement en éducation (22) est affecté directement par les paramètres associés au risque inhérent à l'accumulation de capital humain. Les individus allouent en effet leur temps dans les activités de formation en fonction des leurs préférences vis-à-vis du risque et du jugement qu'ils portent sur la réalisation des événements futurs. On remarque en effet, que l'investissement en capital humain dépend cruciallement de l'indice d'aversion relative vis-à-vis du risque d'Arrow-Pratt  $-\frac{V_{kkk}}{V_k}$ . En particulier, toute augmentation de l'aversion au risque se traduit par une réduction de l'investissement en capital humain.

Le temps alloué à la formation dépend également de la perception du risque associé à l'éducation, représenté par l'ensemble des variances et covariances instantanées. Il dépend directement du risque associé à l'efficacité de l'apprentissage, mesuré par la variance du produit marginal de l'éducation  $\sigma_\theta^2$ . Par contre, le risque portant sur la dépréciation des compétences existantes, le risque de déclassement dans l'emploi et le risque portant sur les salaires, interviennent indirectement par l'intermédiaire des covariances  $\sigma_{\theta\delta}, \sigma_{h\theta}$  et  $\sigma_{\theta\omega}$ .

La grande différence avec le modèle de Williams (1979) est qu'ici l'effet global des différentes sources d'incertitude sur l'investissement en capital humain ne peut pas être déterminé sans ambiguïté. Il dépend du signe et de l'ampleur des covariances. En effet, l'absence d'incertitude sur la distribution des emplois (risque de déclassement) et l'hypothèse d'indépendance entre le risque sur les salaires et les risques existants dans le processus de formation conduisent Williams aux prédictions suivantes : l'accroissement du risque sur le produit marginal de l'éducation entraîne une baisse de l'investissement en capital humain et des gains sur le cycle de vie. De même, en supposant une relation négative entre l'efficacité de l'apprentissage et la dépréciation ( $\sigma_{\theta\delta} < 0$ ), l'individu est incité à réduire son investissement pour se couvrir contre un risque accru de dépréciation des compétences.

Dans notre modèle, ces résultats restent en partie valides mais ils sont insuffisants pour caractériser l'effet global du risque, puisque le risque sur les salaires et le risque de déclassement dans l'emploi interviennent dans la détermination de  $e(t)$ . Pour mesurer l'impact d'une variation de ces deux types de risque, il est nécessaire de spécifier plus en détail les préférences de l'individu. Il suffit de remarquer que le signe de ces deux effets dépend fondamentalement de la valeur du paramètre d'aversion au risque. Or, cet indice, construit à partir de la fonction d'utilité indirecte  $V$ , confisque généralement l'effet de tous les paramètres du modèle sur la structure temporelle des valeurs optimales. Sans restrictions supplémentaires sur les préférences individuelles il n'est pas possible d'obtenir des solutions explicites pour (18) ni d'évaluer l'impact sur le cycle de vie des variations des paramètres du modèle. C'est pourquoi, dans la section suivante, nous spécifions plus en détail les préférences individuelles.

---

<sup>12</sup>Pour une présentation détaillée des différents indices d'aversion au risque cf. Laffont (1991).

## 5 Spécification des préférences individuelles et effet des différentes sources d'incertitude

Supposons que la fonction d'utilité instantanée a la structure suivante<sup>13</sup> :

$$u[c(t), l(t), k(t), t] = \alpha(t) [c(t) - \mathbf{c}(t)]^\gamma [l(t) k(t)]^\lambda \quad (23)$$

Avec  $\alpha(t), c(t), \mathbf{c}(t), l(t), k(t) \geq 0$ ,  $\gamma, \lambda > 0$  et  $\gamma + \lambda < 1$

$\mathbf{c}(t)$  représente le niveau de consommation minimal indispensable pour l'individu.

$l(t) k(t)$  désigne le loisir effectif (*cf.* Heckman (1976)).

$\alpha(t)$  est le facteur d'escompte. Il est tel que le taux de préférence pour le présent  $-\frac{\dot{\alpha}(t)}{\alpha(t)} \geq 0$

La Fonction d'héritage  $B$  devient dans ce cas :

$$B[w(T), T] = \alpha(T) [w(T) - \mathbf{w}(T)]^{\gamma+\lambda} \quad (24)$$

$w(t) - \mathbf{w}(t)$  constitue la richesse financière effective de l'individu. Il correspond à la différence entre la richesse courante  $w(t)$  et le niveau de richesse minimal  $\mathbf{w}(t)$  nécessaire pour satisfaire le niveau de consommation minimal  $\mathbf{c}(t)$ . Plus précisément,  $\mathbf{w}(t)$  correspond à la somme actualisée de la consommation minimale et de la richesses terminale minimale :

$$\mathbf{w}(t) \equiv \int_t^T \mathbf{c}(\tau) e^{-r(\tau-t)} d\tau + \mathbf{w}(T) e^{-r(T-t)} \quad (25)$$

A partir de (23) et (24), il est possible de trouver des solutions explicites approchées au problème initial (12)<sup>14</sup> :

$$c^*(t) \simeq \mathbf{c} + \left[ \frac{\alpha \lambda^\lambda \gamma^{1-\gamma}}{\beta \gamma + \lambda} \right]^{\frac{1}{1-\gamma-\lambda}} [\eta k + w - \mathbf{w}] \quad (26)$$

$$l^*(t) \simeq \eta \left[ \frac{\alpha \gamma^\gamma \lambda^{1-\gamma}}{\beta \gamma + \lambda} \right]^{\frac{1}{1-\gamma-\lambda}} \left[ 1 + \frac{w - \mathbf{w}}{\eta k} \right] \quad (27)$$

$$wX^*(t) \simeq \frac{\Sigma^{-1}(\mu - r\mathbf{1})}{1 - \gamma - \lambda} [\eta k + w - \mathbf{w}] \quad (28)$$

$$e^*(t) \simeq \frac{(\mu_\theta + \sigma_{h\theta} + \sigma_{\theta\omega}) - 1/\eta}{(1 - \gamma - \lambda) \sigma_\theta^2} \left[ 1 + \frac{w - \mathbf{w}}{\eta k} \right] + \frac{\sigma_{\theta\delta} - \sigma_{h\theta} - \sigma_{\theta\omega}}{\sigma_\theta^2} \quad (29)$$

En ce qui concerne les solutions optimales (26), (27) et (28), on retrouve les résultats énoncés précédemment, identiques à ceux de Williams (1979). Un accroissement marginal de la richesse financière effective  $w(t) - \mathbf{w}(t)$  accroît la consommation courante, le temps de loisir courant et l'investissement courant en actifs risqués.

<sup>13</sup>Cette structure est similaire à celle de Heckman (1976) dans le cadre d'un modèle sans incertitude.

<sup>14</sup>La résolution complète est fournie dans l'annexe A.3. Ce problème est soumis aux contraintes (13), (14) et (15) ainsi qu'aux contraintes suivantes :  $\beta(T) = \alpha(T)$  et  $\eta(T) = 0$ . Les solutions sont calculées à la date  $t$ .

Un incrément en capital humain effectif  $\eta(t)k(t)$ <sup>15</sup> accroît la consommation courante et l'investissement courant en actifs risqués, mais réduit le temps consacré au loisir. Ces résultats sont démontrés dans l'annexe A.4.

Comme précédemment l'investissement courant en actifs risqués est toujours réduit lorsque le paramètre d'aversion relative vis-à-vis au risque  $(1 - \gamma - \lambda)$  et la variance des rendements des actifs risqués  $(\Sigma)$  augmentent.

Comme dans le cas certain, un incrément dans le capital humain effectif réduit le niveau optimal d'investissement en capital humain. Par contre, toute augmentation de la richesse effective courante accroît l'investissement en capital humain, et par l'équation (13), accroît aussi la moyenne et la variance des gains sur le cycle de vie. Cette propriété fondamentale, mise en évidence par Williams (1979) et qu'on retrouve ici, contraste fortement avec les prédictions des modèles sans incertitude. En effet, dans le modèle de Heckman (1976), dont la structure est semblable à celle-ci, l'investissement en capital humain n'est pas affecté par les variations de la richesse financière (*cf.* page 523). Il en résulte que les différences de niveaux d'éducation observées entre des individus ayant des ressources financières différentes sont communément attribuées à des différences de taux d'intérêt effectifs. Ces différences de taux d'intérêt sont interprétées comme étant la preuve indirecte d'une imperfection du marché des capitaux. Sans doute, comme l'avait déjà fait remarquer Becker (1993), que cette hétérogénéité dans les taux d'intérêt individuels existe et qu'elle accroît la contrainte financière des individus les moins bien dotés. Cependant ici, l'hétérogénéité du coût d'opportunité de l'éducation ne provient pas d'une hétérogénéité du taux d'intérêt. Toutes choses égales par ailleurs, c'est parce que les individus ayant de faibles ressources financières, font face à un coût d'opportunité du capital humain plus élevé, qu'ils atteignent des niveaux d'éducation et donc de salaire plus faibles que les individus mieux dotés financièrement. Ce résultat théorique, plutôt réaliste, est obtenu indépendamment de toute imperfection du marché des capitaux.

Comme le souligne Williams (1979), les variations de la richesse financière effective ou du ratio richesse financière effective sur capital humain effectif, ont un effet non seulement sur les valeurs courantes des solutions optimales, mais elles affectent également la structure temporelle de ces variables. Comme l'indique l'annexe A.4, toute augmentation de la richesse effective accroît la consommation et le loisir de la période courante mais aussi des périodes futures, si le taux de préférence pour le présent est suffisamment bas. Par contre, les variations de la richesse financière effective et du capital humain effectif, ont un effet sur l'investissement en actifs risqués seulement à la période courante. La part du revenu investie en actifs risqués est indépendante de l'horizon temporel de l'individu. Enfin, l'augmentation du ratio capital financier sur capital humain accroît l'investissement courant en capital humain. Cet effet est partiellement compensé sur le cycle de vie de l'individu, si le taux marginal de substitution entre le capital humain et le revenu décroît dans le temps.

Lorsque les préférences individuelles sont spécifiées, l'effet de certains paramètres associés au risque sur l'investissement en capital humain est identique au cas où la fonction d'utilité est définie de manière implicite. En particulier, les incréments dans l'index d'aversion relatif vis-à-vis du risque  $(1 - \gamma - \lambda)$  et dans le risque sur la dépréciation du capital humain  $(\sigma_{\delta\theta})$  réduisent l'investissement courant dans la formation.

---

<sup>15</sup>Le capital humain effectif correspond au stock de capital humain courant pondéré par le taux marginal de substitution entre le capital humain et le capital financier  $(\eta)$ .

Par contre, si on suppose que les individus ayant un produit marginal de l'éducation élevé accèdent plus facilement à un emploi et à un salaire qui correspondent davantage à leur niveau de formation, autrement dit si  $\sigma_{h\theta} > 0$  et  $\sigma_{\omega\theta} > 0$ , alors un accroissement du risque sur le marché du travail conduit à une augmentation de l'investissement en capital humain. En effet, tout accroissement du risque de déclassement dans l'emploi, se traduisant par un incrément positif dans  $\sigma_{h\theta}$ , élève le niveau d'investissement en capital humain. En effet,

$$\begin{aligned}\frac{\partial e(t)}{\partial \sigma_{h\theta}} &= \frac{1}{(1-\gamma-\lambda)\sigma_{\theta}^2} \left[ 1 + \frac{w-\mathbf{w}}{\eta k} \right] - \frac{1}{\sigma_{\theta}^2} \\ &= \frac{1}{(1-\gamma-\lambda)\sigma_{\theta}^2} \left[ \frac{w-\mathbf{w}}{\eta k} + \gamma + \lambda \right] > 0\end{aligned}$$

De même, ce modèle prédit que l'individu augmentera son investissement en capital humain pour se protéger d'un risque sur les salaires accru (l'effet est strictement identique au précédent).

Enfin, contrairement aux prédictions de Williams (1979), une augmentation du risque portant sur l'efficacité de l'éducation :  $\sigma_{\theta}^2$ , ne réduit pas obligatoirement l'investissement en capital humain ; deux effets contractoires agissent : un effet direct négatif à travers  $\sigma_{\theta}^2$ , situé est au dénominateur de (29), et un effet indirect positif à travers  $\sigma_{h\theta}$  et  $\sigma_{\omega\theta}$ .

L'interprétation économique de ces résultats est relativement intuitive : L'augmentation des risques associés au processus d'accumulation du capital humain (efficacité de l'apprentissage et dépréciation des compétences existantes) augmentent le risque que l'investissement en capital humain ne soit pas rentabilisé et, de ce fait, accroissent le coût d'opportunité de l'investissement. À l'inverse, l'augmentation des risques sur le marché du travail réduisent le coût d'opportunité de l'investissement, et de ce fait, incitent l'individu à investir davantage en capital humain.

Ces résultats originaux contrastent fortement avec les conclusions tranchées du modèle de Williams (1979) quant à l'effet du risque sur l'investissement en capital humain. L'extension que nous proposons ici, permet de mieux comprendre pourquoi l'effet de l'incertitude, lorsqu'elle est prise en compte de manière agrégée, est difficile à établir sans ambiguïté. C'est parce que les différentes sources d'incertitude ont un effet contradictoire sur l'investissement. L'incertitude portant sur le processus d'accumulation de capital humain exerce un effet direct négatif sur l'investissement en capital humain alors que le risque existant sur le marché du travail encourage indirectement l'investissement. La perception qu'ont les individus de ces différents risques, traduite par l'ampleur des différentes covariances, est fondamentale dans la décision d'investir en capital humain. Lorsqu'un individu prend sa décision d'investir en éducation, s'il accorde un poids plus important au risque de déclassement et au risque sur les salaires futurs, qu'aux risques associés à son processus d'apprentissage, alors pour se protéger, il augmentera son investissement en éducation. Ce modèle apporte donc une réponse théorique au phénomène de poursuite d'étude et plus généralement à l'augmentation de la demande d'éducation, constatée dans les économies occidentales ces dernières décennies.

## 6 Conclusion

Ce travail partait d'une critique adressée au modèle standard de capital humain, qui ne parvient plus à rendre compte d'un certain nombre de réalités observées dans

la plupart des pays développés. L'existence, à des degrés divers selon les pays et selon les conjonctures économiques, de phénomènes de chômage et de déclassement, particulièrement marqués pour les jeunes depuis plusieurs années, ne permet plus de fonder les décisions en matière de politiques éducatives sur la base d'un modèle supposant que les individus connaissent parfaitement leur situation future lorsqu'ils prennent leurs décisions en matière de formation. Pour tenter de dépasser cette critique, nous avons présenté un modèle théorique, qui situe l'analyse de la demande d'éducation dans un cadre d'incertitude.

L'hypothèse défendue dans ce travail est qu'on ne peut pas déterminer ex-ante l'effet de l'incertitude sans ambiguïté, si les différentes sources de l'incertitude, portant à la fois sur le processus d'apprentissage des connaissances et sur la situation future sur le marché du travail, ne sont pas explicitées. C'est pourquoi nous avons proposé une extension du modèle dynamique de Williams (1979) dans lequel cinq sources d'incertitude ont été spécifiées.

Pour être en phase avec les problèmes observés sur les marchés du travail européens, nous avons intégré le risque sur le taux d'emploi futur. Par ailleurs, en levant l'hypothèse d'indépendance entre les variables relatives au marché du travail et celles définissant le processus d'accumulation de capital humain, nous avons pu mettre en évidence le rôle fondamental de la perception qu'ont les individus des conditions de valorisation future de leur capital humain sur le marché du travail. Nous avons montré que le poids accordé aux différentes sources d'incertitude est déterminant dans la décision d'investir en capital humain, car l'incertitude provenant du marché du travail et celle provenant du processus d'apprentissage exercent un effet contradictoire sur l'investissement. En particulier, l'éducation joue un rôle protecteur contre les risques existant sur le marché du travail et peut être encouragée si le risque associé au processus d'apprentissage est faible, ou du moins s'il est perçu comme tel.

Le volet empirique n'a pas été abordé dans le papier. Pour autant, l'estimation des effets du risque dans l'évaluation des rendements du capital humain est une étape incontournable. Le message délivré par ce modèle théorique est clair : ne pas contrôler l'effet du risque biaise inévitablement les estimations des rendements éducatifs, puisque le risque intervient directement dans la détermination de l'investissement optimal en éducation. Pour contrôler ce "biais d'incertitude", des indicateurs comme la variance du taux d'emploi par niveau d'étude, l'écart au salaire moyen (ou médian), la durée du contrat de travail, *etc.*, apparaissent spontanément candidats. Or il est important de noter, que ce "biais d'incertitude" ne peut être éliminé, si l'on prend en compte uniquement les variables risquées relatives au marché du travail. L'existence de risques liés au processus d'accumulation de capital humain produit un effet contradictoire sur l'investissement qui doit être pris en compte. Ceci nous conduira à nous intéresser davantage à la question de la diversification des parcours de formation, de la sélectivité des filières et plus généralement aux questions de certification des compétences, de façon à pouvoir construire des indicateurs de risques liés au système éducatif.

## 7 Références

**Becker G., (1993)**, *Human Capital : A Theoretical and Empirical Analysis*. 3rd edition. Columbia University Press.

**Ben-Porath Y., (1967)**, "The production of human capital and the life cycle of earnings". *Journal of Political Economy*, **75**, 352-365.

- Card D., (2001)**, "Estimating the return to schooling : progress on some persistent econometric problems". *Econometrica*, **69** (5), 1127-1160.
- Dixit A. K., (1993)**, *The Art of Smooth Pasting*. Harwood Academic Publisher.
- Dixit A. K., & Pindick R. S., (1994)**, *Investment under uncertainty*. Princeton University, Princeton , New Jersey.
- Fan C., (1993)**, "Schooling as a job search process", *Economics Letters*, **41**, 85-91.
- Fondeur, Y., (1996)**, "Insertioin professionnelle des jeunes et cycle économique : quelques pistes de recherche". *Revue de l'IREES*, printemps-été, n°21, 37-71.
- Fondeur, Y., et Minni, C., (1999)**, "Emploi des jeunes et conjoncture", *Pre-mières Synthèses*, Dares, n°51.1.
- Forgeot, G., et Gautié, J., (1997)**, "Insertion professionnelle des jeunes et processus de déclassement". *Économie et Statistique*, **304-305**, 53-74.
- Giret, J-F., et Hatot, C., (2001)**, "Mesurer le déclassement à l'embauche : l'exemple des DUT et des BTS". *Formation-Emploi*, n°75, 59-73.
- Griliches Z., (1977)**, "Estimating the return to schooling : some econometric problems", *Econometrica*, **45**, 1-22
- Heckman J., (1976)**, "A life cycle model of earnings learning and consumption". *Journal of Political Economy*, **84**, 511-544.
- Hogan V., & Walker I., (2002)**, " Education choice under uncertainty". *mi-meo*, University College Dublin, presented to the *Royal Economic Society Annual Conference 2002*.
- Kamien M., & Schwartz N., (1991)**, *Dynamic Optimization : The Calculus of Variations and Optimal Control in Economics and Management*. 2nd edition, North-Holland
- Kirsch, E., (1998)**, "Les nouveaux territoires de l'enseignement technique", *Bref*, Céreq, n°145.
- Kodde D., (1986)**, "Uncertainty and the demand for education". *The Review of Economics and Statistics*, **68** (3), 460-467.
- Laffont J-J., (1991)**, *Economie de l'Information et de l'Incertain*. Economica.
- Lehvari D., & Weiss Y., (1974)**, "The effect of risk on the investment in human capital ". *American Economic Review*, **64** (6), 950-963.
- Merton R., (1971)**, "Optimum consumption and portfolio rules in a continuous-time model". *Journal of Economic Theory*, **3**, 373-413.
- Mincer J., (1974)**, *Schooling Experience and Earnings*. New-York : National Bureau of Economic Research.

**Moulet S., (2000)**, "Contributions à l'analyse des rendements éducatifs : Enjeux théoriques et problèmes empiriques d'identification", *Thèse de Doctorat*, Université de la Méditerranée, Décembre.

**Roger P., (1991)**, *Les outils de la modélisation financière*. Presses Universitaires de France.

**Rothschild M & Stiglitz J. E., (1970)**, "Increasing risk : I. A definition", *Journal of Economic Theory*, **2**, 225-243.

\_\_\_\_\_ & \_\_\_\_\_(1971), "Increasing risk : II. Its economic consequences". *Journal of Economic Theory*, **3**, 66-84.

**Snow A. & Warren R. S., (1990)**, "Human capital investment and labour supply under uncertainty". *International Economic Review*, **31** (1), 195-206.

**Weiss Y., (1986)**, "The determination of life cycle earnings : a survey". *Handbook of Labor Economics*, **1**, chap. 11, 603-640.

**Williams J. T., (1979)**, "Uncertainty and the accumulation of human capital over the life cycle". *Journal of Business*, **52** (2), 521-548.

**Willis R. J., (1986)**, "Wage determinants : a survey and reinterpretation of human capital earnings functions", *Handbook of Labor Economics*, **1**, chap. 10, 525-602.

**Willis R. J., & Rosen S., (1979)**, "Education and Self-Selection", *Journal of Political Economy*, **87**, 7-35.

## A Annexes : Résolution du problème de contrôle optimal stochastique par programmation dynamique en temps continu

### A.1 Preuve de l'équation stochastique d'accumulation de capital humain (6) :

Le développement de Taylor à l'ordre 2 de l'équation (4) est le suivant :

$$\begin{aligned}
k(t + \Delta t) = & k(t) + \frac{\partial k(t + \Delta t)}{\partial t} \Delta t + \frac{\partial k(t + \Delta t)}{\partial h(t + \Delta t)} \Delta h + \frac{\partial k(t + \Delta t)}{\partial \omega(t + \Delta t)} \Delta \omega + \frac{\partial k(t + \Delta t)}{\partial \theta(t + \Delta t)} \Delta \theta \\
& + \frac{\partial k(t + \Delta t)}{\partial \delta(t + \Delta t)} \Delta \delta + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 k(t + \Delta t)}{\partial h^2(t + \Delta t)} (\Delta h)^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 k(t + \Delta t)}{\partial \omega^2(t + \Delta t)} (\Delta \omega)^2 \\
& + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 k(t + \Delta t)}{\partial \theta^2(t + \Delta t)} (\Delta \theta)^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 k(t + \Delta t)}{\partial \delta^2(t + \Delta t)} (\Delta \delta)^2 + \frac{\partial^2 k(t + \Delta t)}{\partial h(t + \Delta t) \partial \omega(t + \Delta t)} (\Delta h \Delta \omega) \\
& + \frac{\partial^2 k(t + \Delta t)}{\partial h(t + \Delta t) \partial \theta(t + \Delta t)} (\Delta h \Delta \theta) + \frac{\partial^2 k(t + \Delta t)}{\partial h(t + \Delta t) \partial \delta(t + \Delta t)} (\Delta h \Delta \delta) \\
& + \frac{\partial^2 k(t + \Delta t)}{\partial \omega(t + \Delta t) \partial \theta(t + \Delta t)} (\Delta \omega \Delta \theta) + \frac{\partial^2 k(t + \Delta t)}{\partial \omega(t + \Delta t) \partial \delta(t + \Delta t)} (\Delta \omega \Delta \delta) \\
& + \frac{\partial^2 k(t + \Delta t)}{\partial \theta(t + \Delta t) \partial \delta(t + \Delta t)} (\Delta \theta \Delta \delta) + \frac{\partial^2 k(t + \Delta t)}{\partial t^2} (\Delta t)^2 + \frac{\partial^2 k(t + \Delta t)}{\partial t \partial h(t + \Delta t)} (\Delta t \Delta h) \\
& + \frac{\partial^2 k(t + \Delta t)}{\partial t \partial \omega(t + \Delta t)} (\Delta t \Delta \omega) + \frac{\partial^2 k(t + \Delta t)}{\partial t \partial \theta(t + \Delta t)} (\Delta t \Delta \theta) + \frac{\partial^2 k(t + \Delta t)}{\partial t \partial \delta(t + \Delta t)} (\Delta t \Delta \delta) + R(\Delta t)
\end{aligned}$$

En notant que les termes en  $\Delta t$  d'ordre 2 et au-delà sont infiniment "petit" devant  $\Delta t$ , ils seront systématiquement négligés dans les calculs. Les six derniers termes disparaissent donc du développement ci-dessus. En notant également que  $\frac{\partial^2 k(t + \Delta t)}{\partial h^2} = \frac{\partial^2 k(t + \Delta t)}{\partial \omega^2} = \frac{\partial^2 k(t + \Delta t)}{\partial \theta^2} = \frac{\partial^2 k(t + \Delta t)}{\partial \delta^2} = 0$ , le développement de Taylor peut être réécrit de la façon suivante :

$$\begin{aligned}
k(t + \Delta t) = & k(t) + \frac{\partial k(t + \Delta t)}{\partial t} \Delta t + \frac{\partial k(t + \Delta t)}{\partial h(t + \Delta t)} \Delta h + \frac{\partial k(t + \Delta t)}{\partial \omega(t + \Delta t)} \Delta \omega \\
& + \frac{\partial k(t + \Delta t)}{\partial \theta(t + \Delta t)} \Delta \theta + \frac{\partial k(t + \Delta t)}{\partial \delta(t + \Delta t)} \Delta \delta + \frac{\partial^2 k(t + \Delta t)}{\partial h(t + \Delta t) \partial \omega(t + \Delta t)} (\Delta h \Delta \omega) \\
& + \frac{\partial^2 k(t + \Delta t)}{\partial h(t + \Delta t) \partial \theta(t + \Delta t)} (\Delta h \Delta \theta) + \frac{\partial^2 k(t + \Delta t)}{\partial h(t + \Delta t) \partial \delta(t + \Delta t)} (\Delta h \Delta \delta) \\
& + \frac{\partial^2 k(t + \Delta t)}{\partial \omega(t + \Delta t) \partial \theta(t + \Delta t)} (\Delta \omega \Delta \theta) + \frac{\partial^2 k(t + \Delta t)}{\partial \omega(t + \Delta t) \partial \delta(t + \Delta t)} (\Delta \omega \Delta \delta) \\
& + \frac{\partial^2 k(t + \Delta t)}{\partial \theta(t + \Delta t) \partial \delta(t + \Delta t)} (\Delta \theta \Delta \delta)
\end{aligned}$$

L'hypothèse de stationnarité des accroissements des processus stochastiques étudiés implique que  $\frac{\partial k(t + \Delta t)}{\partial t} \Delta t = 0$ . Le calcul des dérivées partielles et la substitution de  $\Delta h$ ,  $\Delta \omega$ ,  $\Delta \theta$  et  $\Delta \delta$  par leur valeur respective (5), (6), (7), (8) permettent d'écrire :

$$\begin{aligned}
k(t + \Delta t) - k(t) &= \frac{1}{h(t)} \frac{\omega(t + \Delta t)}{\omega(t)} [1 - \delta(t + \Delta t) + \theta(t + \Delta t)e(t)] k(t) h(t) (\mu_h \Delta t + \sigma'_h \Delta Z(t)) \\
&+ \frac{h(t + \Delta t)}{h(t)} \frac{1}{\omega(t)} [1 - \delta(t + \Delta t) + \theta(t + \Delta t)e(t)] k(t) \omega(t) (\mu_\omega \Delta t + \sigma'_\omega \Delta Z(t)) \\
&+ \frac{h(t + \Delta t)}{h(t)} \frac{\omega(t + \Delta t)}{\omega(t)} e(t) k(t) (\mu_\theta \Delta t + \sigma'_\theta \Delta Z(t)) \\
&- \frac{h(t + \Delta t)}{h(t)} \frac{\omega(t + \Delta t)}{\omega(t)} k(t) (\mu_\delta \Delta t + \sigma'_\delta \Delta Z(t)) \\
&+ \frac{1}{h(t)} \frac{1}{\omega(t)} [1 - \delta(t + \Delta t) + \theta(t + \Delta t)e(t)] k(t) h(t) \omega(t) \\
&\times (\mu_h \Delta t + \sigma'_h \Delta Z(t)) (\mu_\omega \Delta t + \sigma'_\omega \Delta Z(t)) \\
&+ \frac{1}{h(t)} \frac{\omega(t + \Delta t)}{\omega(t)} e(t) [1 - \delta(t + \Delta t) + \theta(t + \Delta t)e(t)] k(t) h(t) \\
&\times (\mu_h \Delta t + \sigma'_h \Delta Z(t)) (\mu_\theta \Delta t + \sigma'_\theta \Delta Z(t)) \\
&- \frac{1}{h(t)} \frac{\omega(t + \Delta t)}{\omega(t)} k(t) h(t) (\mu_h \Delta t + \sigma'_h \Delta Z(t)) (\mu_\delta \Delta t + \sigma'_\delta \Delta Z(t)) \\
&+ \frac{h(t + \Delta t)}{h(t)} \frac{1}{\omega(t)} e(t) k(t) \omega(t) (\mu_\omega \Delta t + \sigma'_\omega \Delta Z(t)) (\mu_\theta \Delta t + \sigma'_\theta \Delta Z(t)) \\
&- \frac{h(t + \Delta t)}{h(t)} \frac{1}{\omega(t)} k(t) \omega(t) (\mu_\omega \Delta t + \sigma'_\omega \Delta Z(t)) (\mu_\delta \Delta t + \sigma'_\delta \Delta Z(t))
\end{aligned}$$

En simplifiant par  $h(t)$  à la première, cinquième, septième et neuvième ligne et par  $\omega(t)$  à la seconde cinquième, dixième et onzième, en mettant  $k(t)$  en facteur et en le faisant passer du coté gauche de l'équation, puis en développant les cinq derniers termes, on obtient :

$$\begin{aligned}
\frac{\Delta k(t)}{k(t)} &= \frac{\omega(t + \Delta t)}{\omega(t)} [1 - \delta(t + \Delta t) + \theta(t + \Delta t)e(t)] (\mu_h \Delta t + \sigma'_h \Delta Z(t)) \\
&+ \frac{h(t + \Delta t)}{h(t)} [1 - \delta(t + \Delta t) + \theta(t + \Delta t)e(t)] (\mu_\omega \Delta t + \sigma'_\omega \Delta Z(t)) \\
&+ \frac{h(t + \Delta t)}{h(t)} \frac{\omega(t + \Delta t)}{\omega(t)} e(t) (\mu_\theta \Delta t + \sigma'_\theta \Delta Z(t)) \\
&- \frac{h(t + \Delta t)}{h(t)} \frac{\omega(t + \Delta t)}{\omega(t)} (\mu_\delta \Delta t + \sigma'_\delta \Delta Z(t)) \\
&+ [1 - \delta(t + \Delta t) + \theta(t + \Delta t)e(t)] \times \\
&\left[ \mu_h \mu_\omega (\Delta t)^2 + \mu_h \sigma'_\omega \Delta Z(t) \Delta t + \mu_\omega \sigma'_h \Delta Z(t) \Delta t + \sigma'_h \sigma_\omega (\Delta Z(t))^2 \right] \\
&+ \frac{\omega(t + \Delta t)}{\omega(t)} e(t) [1 - \delta(t + \Delta t) + \theta(t + \Delta t)e(t)] \times \\
&\left[ \mu_h \mu_\theta (\Delta t)^2 + \mu_h \sigma'_\theta \Delta Z(t) \Delta t + \mu_\theta \sigma'_\omega \Delta Z(t) \Delta t + \sigma'_h \sigma_\theta (\Delta Z(t))^2 \right] \\
&- \frac{\omega(t + \Delta t)}{\omega(t)} \left[ \mu_h \mu_\delta (\Delta t)^2 + \mu_h \sigma'_\delta \Delta Z(t) \Delta t + \mu_\delta \sigma'_h \Delta Z(t) \Delta t + \sigma'_h \sigma_\delta (\Delta Z(t))^2 \right] \\
&+ \frac{h(t + \Delta t)}{h(t)} e(t) \left[ \mu_\omega \mu_\theta (\Delta t)^2 + \mu_\omega \sigma'_\theta \Delta Z(t) \Delta t + \mu_\theta \sigma'_\omega \Delta Z(t) \Delta t + \sigma'_\omega \sigma_\theta (\Delta Z(t))^2 \right] \\
&- \frac{h(t + \Delta t)}{h(t)} \left[ \mu_\omega \mu_\delta (\Delta t)^2 + \mu_\omega \sigma'_\delta \Delta Z(t) \Delta t + \mu_\delta \sigma'_\omega \Delta Z(t) \Delta t + \sigma'_\delta \sigma_\omega (\Delta Z(t))^2 \right]
\end{aligned}$$

En faisant tendre  $\Delta t$  vers 0,  $\frac{h(t+\Delta t)}{h(t)} = \frac{\omega(t+\Delta t)}{\omega(t)} = 1$  et  $[1 - \delta(t + \Delta t) + \theta(t + \Delta t)e(t)] = 1$  d'après l'équation (23), ce qui donne :

$$\begin{aligned}
\frac{\Delta k(t)}{k(t)} &= (\mu_h dt + \sigma'_h dZ(t)) + (\mu_\omega dt + \sigma'_\omega dZ(t)) \\
&\quad + e(t) (\mu_\theta dt + \sigma'_\theta dZ(t)) - (\mu_\delta dt + \sigma'_\delta dZ(t)) \\
&\quad + \left[ \mu_h \mu_\omega (dt)^2 + \mu_h \sigma'_\omega dZ(t) dt + \mu_\omega \sigma'_h dZ(t) dt + \sigma'_h \sigma_\omega (dZ(t))^2 \right] \\
&\quad + e(t) \left[ \mu_h \mu_\theta (dt)^2 + \mu_h \sigma'_\theta dZ(t) dt + \mu_\theta \sigma'_h dZ(t) dt + \sigma'_h \sigma_\theta (dZ(t))^2 \right] \\
&\quad - \left[ \mu_h \mu_\delta (dt)^2 + \mu_h \sigma'_\delta dZ(t) dt + \mu_\delta \sigma'_h dZ(t) dt + \sigma'_h \sigma_\delta (dZ(t))^2 \right] \\
&\quad + e(t) \left[ \mu_\omega \mu_\theta (dt)^2 + \mu_\omega \sigma'_\theta dZ(t) dt + \mu_\theta \sigma'_\omega dZ(t) dt + \sigma'_\omega \sigma_\theta (dZ(t))^2 \right] \\
&\quad - \left[ \mu_\omega \mu_\delta (dt)^2 + \mu_\omega \sigma'_\delta dZ(t) dt + \mu_\delta \sigma'_\omega dZ(t) dt + \sigma'_\delta \sigma_\omega (dZ(t))^2 \right]
\end{aligned}$$

Enfin, en notant d'après les propriétés du processus de Wiener standard que  $(dt)^2 = dZ(t) dt = o(dt)$  et que  $(dZ(t))^2 = dt + o(dt)$ , on retrouve, en réarrangeant les termes, l'expression finale de l'équation stochastique d'accumulation de capital humain (9) :

$$\begin{aligned}
\frac{dk(t)}{k(t)} &= (\mu_h + \mu_\omega + (\mu_\theta + \sigma_{h\theta} + \sigma_{\theta\omega}) e(t) - \mu_\delta - \sigma_{h\delta} - \sigma_{\delta\omega} + \sigma_{h\omega}) dt \\
&\quad + (\sigma_h + \sigma_\omega + \sigma_\theta e(t) - \sigma_\delta)' dZ(t)
\end{aligned}$$

Où  $\sigma_{h\theta} = \sigma'_h \sigma_\theta$ ,  $\sigma_{\theta\omega} = \sigma'_\theta \sigma_\omega$ ,  $\sigma_{h\delta} = \sigma'_h \sigma_\delta$ ,  $\sigma_{\delta\omega} = \sigma'_\delta \sigma_\omega$  et  $\sigma_{h\omega} = \sigma'_h \sigma_\omega$ .

## A.2 Preuve de l'équation (18)

Sachant que le premier terme entre crochet de (17) peut être approximé par  $u[c, l, k, t] \Delta t$  et en appliquant à  $V[k, w, t + \Delta t, T]$  le développement de Taylor à l'ordre 2 et en négligeant le reste<sup>16</sup>, on obtient alors :

$$\begin{aligned}
V[k(t), w(t), T] &\equiv \text{Max } E_t \{ u[c, l, k, t] \Delta t + V[k, w, T] \\
&\quad + V_t \Delta t + V_k \Delta k + V_w \Delta w + \frac{1}{2} (\Delta k)' V_{kk} \Delta k + \frac{1}{2} (\Delta w)' V_{ww} \Delta w + V_{kw} (\Delta k)' \Delta w \}
\end{aligned}$$

En simplifiant par  $V[k, w, T]$  dans chacun des membres de l'équation, en faisant tendre  $\Delta t$  vers 0, et en appliquant le lemme d'Itô, on trouve :

$$\begin{aligned}
0 &\equiv \text{Max } E_t \{ u[c, l, k, t] dt \\
&\quad + \left[ V_t + \mu_k V_k + \mu_w V_w + \frac{1}{2} \sigma_k^2 V_{kk} + \frac{1}{2} \sigma_w^2 V_{ww} + \sigma_k \sigma_w V_{kw} \right] dt \\
&\quad + [\sigma_k V_k + \sigma_w V_w] dZ(t) \}
\end{aligned} \tag{30}$$

<sup>16</sup>Le reste est constitué de la somme des termes en  $(dt)^\alpha$  avec  $\alpha > 1$ .

En posant

$$dV = \left[ V_t + \mu_k V_k + \mu_w V_w + \frac{1}{2} \sigma_k^2 V_{kk} + \frac{1}{2} \sigma_w^2 V_{ww} + \sigma_k \sigma_w V_{kw} \right] dt + [\sigma_k V_k + \sigma_w V_w] dZ(t) \quad (31)$$

et en développant l'opérateur d'espérance conditionnelle, on obtient l'équation aux dérivées partielles stochastique (EDPs) suivante :

$$0 \equiv \text{Max} \{ E_t u [c, l, k, t] dt + E_t dV \} \quad (32)$$

Cette équation peut être simplifiée car  $Z$  est un processus de Wiener standard. On a donc  $E_t [dZ(t)] = 0$ . D'où  $E_t [\sigma_k V_k + \sigma_w V_w] dZ(t) = 0$ . Dans ces conditions,

$$E_t dV = \left[ V_t + \mu_k V_k + \mu_w V_w + \frac{1}{2} \sigma_k^2 V_{kk} + \frac{1}{2} \sigma_w^2 V_{ww} + \sigma_k \sigma_w V_{kw} \right] dt \quad (33)$$

En notant en outre que

$$E_t u [c, l, k, t] = u [c, l, k, t] \quad (34)$$

on aboutit en utilisant (33) et (34) une équation équivalente à (32), qui s'écrit :

$$0 \equiv \text{Max} \{ u [c, l, k, t] dt + [V_t + \mu_k V_k + \mu_w V_w + \frac{1}{2} \sigma_k^2 V_{kk} + \frac{1}{2} \sigma_w^2 V_{ww} + \sigma_k \sigma_w V_{kw}] dt \} \quad (35)$$

Les paramètres associés au processus d'Itô sont les suivants :

$$\begin{aligned} \mu_k &= (\mu_h + \mu_w + (\mu_\theta + \sigma_{h\theta} + \sigma_{\theta\omega})e - \mu_\delta - \sigma_{h\delta} - \sigma_{\delta\omega} + \sigma_{h\omega}) \\ \mu_w &= rw - c + (1 - e - l)k + w(\mu - r1)'X \\ \sigma_k^2 &= \sigma_h^2 + \sigma_w^2 + \sigma_\theta^2 e^2 + \sigma_\delta^2 + 2\sigma_{h\theta}e + 2\sigma_{\theta\omega}e - 2\sigma_{\theta\delta}e + 2\sigma_{h\omega} - 2\sigma_{h\delta} - 2\sigma_{\delta\omega} \\ \text{puisque } \sigma_k &= (\sigma_h + \sigma_w + \sigma_\theta e - \sigma_\delta)' \\ \sigma_w^2 &= w^2 X' \Sigma X \text{ puisque } \sigma_w = w X' \Gamma' \\ \sigma_k \sigma_w &= kw \Sigma'_\omega X \end{aligned}$$

En divisant les deux membres de (35) par  $dt$  et en remplaçant  $\mu_k$ ,  $\mu_w$ ,  $\sigma_k^2$ ,  $\sigma_w^2$ , et  $\sigma_k \sigma_w$  par leur expression ci-dessus, on obtient la version finale du programme initial de maximisation (12), qui correspond à l'équation (18) dans le texte :

$$\begin{aligned} 0 \equiv & \text{Max} \{ u [c, l, k, t] + V_k k (\mu_h + \mu_w + (\mu_\theta + \sigma_{h\theta} + \sigma_{\theta\omega})e - \mu_\delta - \sigma_{h\delta} - \sigma_{\delta\omega} + \sigma_{h\omega}) \\ & + V_w [rw + (1 - e - l)k - c + w(\mu - r1)'X] \\ & + \frac{1}{2} V_{kk} k^2 (\sigma_h^2 + \sigma_w^2 + \sigma_\theta^2 e^2 + \sigma_\delta^2 + 2\sigma_{h\theta}e + 2\sigma_{\theta\omega}e - 2\sigma_{\theta\delta}e + 2\sigma_{h\omega} - 2\sigma_{h\delta} - 2\sigma_{\delta\omega}) \\ & + \frac{1}{2} V_{ww} w^2 X' \Sigma X + V_{kw} kw \Sigma'_\omega X + V_t \} \end{aligned}$$

### A.3 Détermination explicite des solutions

Connaissant la forme de la fonction d'utilité, il suffit de recalculer les conditions d'optimalité à partir de cette fonction et de les remplacer dans l'équation (18). On obtient alors une nouvelle forme de l'équation d'Hamilton-Jacobi-Bellman, à partir de laquelle on définit les solutions explicite du problème d'optimisation stochastique :

$$\begin{aligned}
0 = & u(1 - \gamma - \lambda) - V_w \mathbf{c} + V_k k (\mu_h + \mu_\omega - \mu_\delta - \sigma_{h\delta} - \sigma_{\delta\omega} + \sigma_{h\omega}) + V_w (k + rw) \\
& + \frac{1}{2} V_{kk} k^2 (\sigma_h^2 + \sigma_\omega^2 + \sigma_\delta^2 + 2\sigma_{h\omega} - 2\sigma_{h\delta} - 2\sigma_{\delta\omega}) \\
& + \frac{V_{kk} k (\sigma_{\theta\delta} - \sigma_{h\theta} - \sigma_{\theta\omega}) + V_w - V_k (\mu_\theta + \sigma_{h\theta} + \sigma_{\theta\omega})}{V_{kk} \sigma_\theta^2} \times \\
& \{ V_k (\mu_\theta + \sigma_{h\theta} + \sigma_{\theta\omega}) - V_w - V_{kk} (\sigma_{\theta\delta} - \sigma_{h\theta} - \sigma_{\theta\omega}) \\
& + \frac{1}{2} [V_{kk} k (\sigma_{\theta\delta} - \sigma_{h\theta} - \sigma_{\theta\omega}) + V_w - V_k (\mu_\theta + \sigma_{h\theta} + \sigma_{\theta\omega})] \} \\
& - \frac{V_w (\mu - r1) + V_{kw} k \Sigma'_\omega}{V_{ww} \Sigma} \times \\
& \left( V_w (\mu - r1) - V_{kw} k \Sigma'_\omega + \frac{1}{2} (V_w (\mu - r1) + V_{kw} k \Sigma'_\omega) \right) + V_t
\end{aligned} \tag{36}$$

En observant que " $V_k (\mu_\theta + \sigma_{h\theta} + \sigma_{\theta\omega})$ " et " $V_w$ " disparaissent à l'intérieur de la seconde parenthèse, (36) peut être simplifiée de la façon suivante :

$$\begin{aligned}
0 = & u(1 - \gamma - \lambda) - V_w \mathbf{c} + V_t + V_k k (\mu_h + \mu_\omega - \mu_\delta - \sigma_{h\delta} - \sigma_{\delta\omega} + \sigma_{h\omega}) + V_w (k + rw) \\
& + \frac{1}{2} V_{kk} k^2 (\sigma_h^2 + \sigma_\omega^2 + \sigma_\delta^2 + 2\sigma_{h\omega} - 2\sigma_{h\delta} - 2\sigma_{\delta\omega}) \\
& - \frac{1}{2} \frac{[V_k (\mu_\theta + \sigma_{h\theta} + \sigma_{\theta\omega}) - V_w - V_{kk} k (\sigma_{\theta\delta} - \sigma_{h\theta} - \sigma_{\theta\omega})]^2}{V_{kk} \sigma_\theta^2} \\
& - \frac{V_w (\mu - r1) + V_{kw} k \Sigma'_\omega}{V_{ww} \Sigma} \left( V_w (\mu - r1) - V_{kw} k \Sigma'_\omega + \frac{1}{2} (V_w (\mu - r1) + V_{kw} k \Sigma'_\omega) \right)
\end{aligned} \tag{37}$$

Le développement de la dernière parenthèse donne :

$$\begin{aligned}
0 = & u(1 - \gamma - \lambda) - V_w \mathbf{c} + V_t + V_k k (\mu_h + \mu_\omega - \mu_\delta - \sigma_{h\delta} - \sigma_{\delta\omega} + \sigma_{h\omega}) + V_w (k + rw) \\
& + \frac{1}{2} V_{kk} k^2 (\sigma_h^2 + \sigma_\omega^2 + \sigma_\delta^2 + 2\sigma_{h\omega} - 2\sigma_{h\delta} - 2\sigma_{\delta\omega}) \\
& - \frac{1}{2} \frac{[V_k (\mu_\theta + \sigma_{h\theta} + \sigma_{\theta\omega}) - V_w - V_{kk} k (\sigma_{\theta\delta} - \sigma_{h\theta} - \sigma_{\theta\omega})]^2}{V_{kk} \sigma_\theta^2} \\
& + V_{kw} k \Sigma'_\omega \left( \frac{-V_w (\mu - r1) - V_{kw} k \Sigma'_\omega}{V_{ww} \Sigma} \right) + \frac{1}{2} V_{ww} \Sigma \left( \frac{-V_w (\mu - r1) - V_{kw} k \Sigma'_\omega}{V_{ww} \Sigma} \right)^2
\end{aligned} \tag{38}$$

En factorisant les termes entre parenthèse et en simplifiant, on obtient :

$$\begin{aligned}
0 &= u(1 - \gamma - \lambda) - V_w \mathbf{c} + V_k k (\mu_h + \mu_\omega - \mu_\delta - \sigma_{h\delta} - \sigma_{\delta\omega} + \sigma_{h\omega}) + V_w (k + rw) \\
&+ \frac{1}{2} V_{kk} k^2 (\sigma_h^2 + \sigma_\omega^2 + \sigma_\delta^2 + 2\sigma_{h\omega} - 2\sigma_{h\delta} - 2\sigma_{\delta\omega}) \\
&- \frac{1}{2} \frac{[V_k (\mu_\theta + \sigma_{h\theta} + \sigma_{\theta\omega}) - V_w - V_{kk} k (\sigma_{\theta\delta} - \sigma_{h\theta} - \sigma_{\theta\omega})]^2}{V_{kk} \sigma_\theta^2} \\
&+ \frac{-V_w (\mu - r1) - V_{kw} k \Sigma'_\omega}{V_{ww} \Sigma} \left( V_{kw} k \Sigma'_\omega - \frac{1}{2} V_w (\mu - r1) - \frac{1}{2} V_{kw} k \Sigma'_\omega \right) + V_t
\end{aligned} \tag{39}$$

En simplifiant à l'intérieur de la dernière parenthèse et en arrangeant les termes, on aboutit à l'expression finale de l'équation de Bellman :

$$\begin{aligned}
0 &= u(1 - \gamma - \lambda) - V_w \mathbf{c} - \frac{1}{2} \frac{[V_k (\mu_\theta + \sigma_{h\theta} + \sigma_{\theta\omega}) - V_w - V_{kk} k (\sigma_{\theta\delta} - \sigma_{h\theta} - \sigma_{\theta\omega})]^2}{V_{kk} \sigma_\theta^2} \\
&- \frac{1}{2} \left\{ [V_w (\mu - r1) + V_{kw} k \Sigma'_\omega]' \Sigma^{-1} [V_w (\mu - r1) + V_{kw} k \Sigma'_\omega] \right\} / V_{ww} \\
&+ V_k k (\mu_h + \mu_\omega - \mu_\delta - \sigma_{h\delta} - \sigma_{\delta\omega} + \sigma_{h\omega}) + V_w (k + rw) \\
&+ \frac{1}{2} V_{kk} k^2 (\sigma_h^2 + \sigma_\omega^2 + \sigma_\delta^2 + 2\sigma_{h\omega} - 2\sigma_{h\delta} - 2\sigma_{\delta\omega}) + V_t
\end{aligned} \tag{40}$$

Etant donné la spécification de la fonction d'utilité, cette équation admet comme solution approchée :

$$V[k(t), w(t), t] \simeq \beta(t) [\eta(t) k(t) + w(t) - \mathbf{w}(t)]^{\gamma+\lambda} \tag{41}$$

Il suffit alors d'utiliser les expressions suivantes pour obtenir les solutions explicites du problème de départ (12) :

$$V_k \simeq \beta(t) (\gamma + \lambda) \eta(t) [\eta(t) k(t) + w(t) - \mathbf{w}(t)]^{\gamma+\lambda-1} \tag{42}$$

$$V_w \simeq \beta(t) (\gamma + \lambda) [\eta(t) k(t) + w(t) - \mathbf{w}(t)]^{\gamma+\lambda-1} \tag{43}$$

$$V_{kk} \simeq \beta(t) (\gamma + \lambda) (\gamma + \lambda - 1) \eta^2(t) [\eta(t) k(t) + w(t) - \mathbf{w}(t)]^{\gamma+\lambda-2} \tag{44}$$

$$V_{ww} \simeq \beta(t) (\gamma + \lambda) (\gamma + \lambda - 1) [\eta(t) k(t) + w(t) - \mathbf{w}(t)]^{\gamma+\lambda-2} \tag{45}$$

$$V_{kw} \simeq \beta(t) (\gamma + \lambda) (\gamma + \lambda - 1) \eta(t) [\eta(t) k(t) + w(t) - \mathbf{w}(t)]^{\gamma+\lambda-2} \tag{46}$$

Plus précisément, à partir de ces conditions, on obtient les solutions suivantes<sup>17</sup> :

$$u_c \simeq \alpha \gamma (c - \mathbf{c})^{\gamma-1} (lk)^\lambda \tag{47}$$

$$u_l \simeq \alpha \lambda (c - \mathbf{c})^\gamma (lk)^{\lambda-1} k \tag{48}$$

(47)/(48) donne

$$\frac{u_c}{u_l} \simeq \frac{\gamma}{\lambda} \frac{lk}{c - \mathbf{c}} \frac{1}{k} \tag{49}$$

<sup>17</sup>Pour alléger l'écriture, nous supprimons les marqueurs de temps "(t)".

Or

$$\frac{u_c}{u_l} \simeq \frac{1}{k} \quad \text{d'où} \quad lk \simeq \frac{\lambda}{\gamma} (c - \mathbf{c}) \quad (50)$$

En substituant (50) dans (47) on trouve :

$$u_c \simeq \alpha \gamma (c - \mathbf{c})^{\gamma-1} \left( \frac{\lambda}{\gamma} (c - \mathbf{c}) \right)^\lambda \quad (51)$$

d'où en simplifiant

$$u_c \simeq \alpha \lambda^\lambda \gamma^{1-\gamma} (c - \mathbf{c})^{\gamma+\lambda-1} \quad (52)$$

Or  $u_c \simeq V_w$  d'où

$$\alpha \lambda^\lambda \gamma^{1-\gamma} (c - \mathbf{c})^{\gamma+\lambda-1} \simeq \beta (\gamma + \lambda) [\eta k + w - \mathbf{w}]^{\gamma+\lambda-1} \quad (53)$$

Ce qui donne

$$(c - \mathbf{c})^{\gamma+\lambda-1} \simeq \frac{\beta (\gamma + \lambda)}{\alpha \lambda^\lambda \gamma^{1-\gamma}} [\eta k + w - \mathbf{w}]^{\gamma+\lambda-1} \quad (54)$$

En réarrangeant (54), on obtient le niveau de consommation optimal correspondant à l'expression (26) dans le texte :

$$c^* \simeq \mathbf{c} + \left[ \frac{\alpha \lambda^\lambda \gamma^{1-\gamma}}{\beta (\gamma + \lambda)} \right]^{\frac{1}{1-\gamma-\lambda}} [\eta k + w - \mathbf{w}]$$

Pour déterminer la quantité optimale de loisir, il suffit de remplacer la valeur optimale de la consommation définie ci-dessus dans (50). On obtient :

$$l \simeq \frac{\lambda}{\gamma} \frac{1}{k} \left[ \frac{\alpha \lambda^\lambda \gamma^{1-\gamma}}{\beta (\gamma + \lambda)} \right]^{\frac{1}{1-\gamma-\lambda}} [\eta k + w - \mathbf{w}] \quad (55)$$

Ce qui donne, en mettant  $\eta$  en facteur et en faisant entrer  $\frac{\lambda}{\gamma}$  dans la parenthèse, on retrouve (27) :

$$l^* \simeq \eta \left[ \frac{\alpha \gamma^\gamma \lambda^{1-\gamma}}{\beta (\gamma + \lambda)} \right]^{\frac{1}{1-\gamma-\lambda}} \left[ 1 + \frac{w - \mathbf{w}}{\eta k} \right] \quad (56)$$

Pour déterminer la valeur optimale explicite de l'investissement en capital financier, il faut remplacer (43), (45) et (46) dans

$$wX \simeq \left( -\frac{V_w}{V_{ww}w} \right) \Sigma^{-1} (\mu - r1) - \left( \frac{V_{kw}k}{V_{ww}} \right) \Sigma^{-1} \Sigma_\omega \quad (57)$$

Cela donne

$$wX \simeq \left( -\frac{\beta(\gamma+\lambda)[\eta k + w - \mathbf{w}]^{\gamma+\lambda-1}}{\beta(\gamma+\lambda)(\gamma+\lambda-1)[\eta k + w - \mathbf{w}]^{\gamma+\lambda-2} w} \right) \Sigma^{-1}(\mu - r1) - \left( \frac{\beta(\gamma+\lambda)(\gamma+\lambda-1)\eta[\eta k + w - \mathbf{w}]^{\gamma+\lambda-2} k}{\beta(\gamma+\lambda)(\gamma+\lambda-1)[\eta k + w - \mathbf{w}]^{\gamma+\lambda-2}} \right) \Sigma^{-1}\Sigma_\omega \quad (58)$$

En simplifiant, on obtient directement

$$wX \simeq \frac{\Sigma^{-1}(\mu - r1)}{1 - \gamma - \lambda} [\eta k + w - \mathbf{w}] + \eta k \Sigma^{-1}\Sigma_\omega \quad (59)$$

En supposant que  $\Sigma'_\omega \simeq 0$ , on aboutit finalement à l'expression (28) :

$$wX^* \simeq \frac{\Sigma^{-1}(\mu - r1)}{1 - \gamma - \lambda} [\eta k + w - \mathbf{w}] \quad (60)$$

Enfin, le niveau optimal d'investissement en capital humain est donné par l'équation (22) du texte :

$$e \simeq \left( -\frac{V_k}{V_{kkk}} \right) \frac{(\mu_\theta + \sigma_{h\theta} + \sigma_{\theta\omega}) - V_w/V_k}{\sigma_\theta^2} + \frac{\sigma_{\theta\delta} - \sigma_{h\theta} - \sigma_{\theta\omega}}{\sigma_\theta^2} \quad (61)$$

En substituant (42), (43) et (44) dans (61) on obtient

$$e \simeq \left( -\frac{\beta(\gamma+\lambda)\eta[\eta k + w - \mathbf{w}]^{\gamma+\lambda-1}}{\beta(\gamma+\lambda)(\gamma+\lambda-1)\eta^2[\eta k + w - \mathbf{w}]^{\gamma+\lambda-2} k} \right) \times \frac{(\mu_\theta + \sigma_{h\theta} + \sigma_{\theta\omega}) - \frac{\beta(\gamma+\lambda)[\eta k + w - \mathbf{w}]^{\gamma+\lambda-1}}{\beta(\gamma+\lambda)\eta[\eta k + w - \mathbf{w}]^{\gamma+\lambda-1}}}{\sigma_\theta^2} + \frac{\sigma_{\theta\delta} - \sigma_{h\theta} - \sigma_{\theta\omega}}{\sigma_\theta^2} \quad (62)$$

Soit, en simplifiant

$$e \simeq \left( -\frac{\eta k + w - \mathbf{w}}{(\gamma + \lambda - 1)\eta k} \right) \frac{(\mu_\theta + \sigma_{h\theta} + \sigma_{\theta\omega}) - 1/\eta}{\sigma_\theta^2} + \frac{\sigma_{\theta\delta} - \sigma_{h\theta} - \sigma_{\theta\omega}}{\sigma_\theta^2} \quad (63)$$

En simplifiant le terme entre parenthèse, on aboutit à la solution explicite (29) pour  $e(t)$  :

$$e^*(t) \simeq \frac{(\mu_\theta + \sigma_{h\theta} + \sigma_{\theta\omega}) - 1/\eta}{(1 - \gamma - \lambda)\sigma_\theta^2} \left[ 1 + \frac{w - \mathbf{w}}{\eta k} \right] + \frac{\sigma_{\theta\delta} - \sigma_{h\theta} - \sigma_{\theta\omega}}{\sigma_\theta^2} \quad (64)$$

#### A.4 Effet d'une variation infinitésimale du capital humain effectif et de la richesse financière effective sur la trajectoire des variables optimales

L'effet de la richesse effective sur la consommation est positif.

$$\frac{\partial c}{\partial(w - \mathbf{w})} = \left[ \frac{\alpha \lambda^\lambda \gamma^{1-\gamma}}{\beta \gamma + \lambda} \right]^{\frac{1}{1-\gamma-\lambda}} > 0$$

Dans le temps cet effet reste positif si  $\dot{\alpha}$  est faible. Dans le cas contraire, la propension marginale à consommer baisse sur le cycle de vie.

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial c}{\partial(w - \mathbf{w})} \right] = \frac{1}{\beta} \frac{1}{1-\gamma-\lambda} \frac{\lambda^\lambda \gamma^{1-\gamma}}{\gamma + \lambda} \left[ \frac{\alpha \lambda^\lambda \gamma^{1-\gamma}}{\beta \gamma + \lambda} \right]^{\frac{\gamma+\lambda}{1-\gamma-\lambda}} \left( \dot{\alpha} - \alpha \frac{\dot{\beta}}{\beta} \right)$$

L'effet marginal de la richesse effective (exprimée en proportion du capital humain effectif) est identique sur le loisir puisque :

$$\frac{\partial l}{\partial \frac{(w-\mathbf{w})}{\eta k}} = \left[ \frac{\alpha \gamma^\gamma \lambda^{1-\gamma}}{\beta \gamma + \lambda} \right]^{\frac{1}{1-\gamma-\lambda}} > 0$$

L'effet instantané d'une augmentation du ratio richesse financière effective sur capital humain effectif sur l'investissement éducatif est positif.

$$\frac{\partial e}{\partial \frac{(w-\mathbf{w})}{\eta k}} = \frac{(\mu_\theta + \sigma_{h\theta} + \sigma_{\theta\omega}) - 1/\eta}{(1-\gamma-\lambda)\sigma_\theta^2} > 0$$

L'effet d'une variation du ratio capital financier effectif sur capital humain effectif dépend du taux marginal de substitution entre le capital humain et la richesse financière courante. Si ce dernier baisse dans le temps comme on peut s'y attendre,  $\dot{\eta} < 0$ , alors l'investissement en capital humain ( $e$ ) baisse dans le temps :

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial e}{\partial \frac{(w-\mathbf{w})}{\eta k}} \right] = \frac{\dot{\eta}}{\eta^2} \frac{1}{(1-\gamma-\lambda)\sigma_\theta^2} < 0$$

Les variations de la richesse financière effective et du capital humain effectif n'ont aucune influence sur la trajectoire temporelle de l'investissement en actif risqué. Seul l'investissement de la période courante est affecté positivement par un accroissement de  $w - \mathbf{w}$  ou de  $\eta k$  :

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial wX}{\partial(w - \mathbf{w})} \right] = 0 \quad \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial wX}{\partial \eta k} \right] = 0$$