



**HAL**  
open science

## Il dibattito sul platonismo aritmetico

Marco Panza

► **To cite this version:**

| Marco Panza. Il dibattito sul platonismo aritmetico. 2006. halshs-00116720

**HAL Id: halshs-00116720**

**<https://shs.hal.science/halshs-00116720v1>**

Preprint submitted on 27 Nov 2006

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# IL PLATONISMO ARITMETICO\*

Marco Panza

28 luglio 2006

## Indice

<b>1</b>	<b>Cenni su alcune posizioni classiche</b>	<b>4</b>
1.1	Il platonismo di Platone . . . . .	4
1.2	Il platonismo aritmetico di Frege . . . . .	5
1.3	Il dibattito sui fondamenti della matematica . . . . .	5
1.4	La svolta analitica: Paul Benacerraf . . . . .	6
<b>2</b>	<b>La domanda ontologica</b>	<b>6</b>
2.1	Oggetti matematici . . . . .	6
2.2	Oggetti astratti . . . . .	7
2.2.1	Condizione d'identità e condizione di applicazione . . .	7
2.2.2	Definizioni contestuali e definizioni implicite . . . . .	8
2.3	L'esistenza dei numeri naturali . . . . .	9
2.3.1	Il problema di Cesare . . . . .	9
2.3.2	Le definizioni di Frege . . . . .	10
2.3.3	I paradossi di Russell e Cantor . . . . .	11
2.3.4	Le gerarchie di von Neumann e Zermelo . . . . .	13
<b>3</b>	<b>Il primo argomento di Benacerraf</b>	<b>14</b>
3.1	Il primo argomento di Benacerraf e il problema di Cesare . . .	14
3.2	Conseguenze dell'argomento di Benacerraf . . . . .	15

---

\*Ringrazio per utili commenti a versioni precedenti del mio articolo: Annalisa Coliva, Eva Picardi, Andrea Sereni e Elia Zardini.

<b>4</b>	<b>Il secondo argomento di Benacerraf: il dilemma</b>	<b>15</b>
4.1	L'imperscrutabilità del riferimento . . . . .	16
4.2	La natura dell'aritmetica discende da quella dei numeri naturali e non viceversa . . . . .	16
4.3	Platonismo sobrio e platonismo robusto . . . . .	16
4.4	L'intuizione matematica . . . . .	17
4.5	Il dilemma . . . . .	17
4.6	Il problema dell'accesso . . . . .	18
<b>5</b>	<b>Alcune risposte semplici agli argomenti di Benacerraf</b>	<b>19</b>
5.1	I numeri naturali non sono solo oggetti dell'aritmetica . . . . .	19
5.2	I termini numerali non si riferiscono a un unico oggetto . . . . .	20
5.3	L'esistenza degli insiemi . . . . .	21
5.4	Gli insiemi funzionano come generi naturali . . . . .	21
5.5	La differenza fra insiemi e mere collezioni di oggetti ha un'origine percettiva? . . . . .	22
5.6	L'esistenza degli oggetti matematici si può giustificare su base empirica? . . . . .	23
5.7	Il nominalismo di Field . . . . .	23
5.8	Un nominalismo realista? . . . . .	26
5.9	Finzionalismo . . . . .	27
<b>6</b>	<b>Vi sono altri modi di formulare o interpretare la domanda ontologica?</b>	<b>27</b>
<b>7</b>	<b>Il neologicismo</b>	<b>28</b>
7.1	Il principio del contesto . . . . .	28
7.2	Domanda ontologica e nozione di esistenza . . . . .	28
7.3	Il principio di Hume . . . . .	29
7.4	Il teorema di Frege . . . . .	30
7.5	Principio di Hume e verità . . . . .	30
7.6	L'analiticità del principio di Hume . . . . .	31
7.7	Il principio di Hume e il dilemma di Benacerraf . . . . .	32
7.8	Il problema di Cesare e la risposta al primo argomento di Benacerraf . . . . .	32
7.9	Che cosa ci autorizza a scartare la gerarchia di Zermelo? . . . . .	33
7.10	Come giustificare la definizione neologicista dei numeri naturali? . . . . .	34

<b>8</b>	<b>Lo strutturalismo</b>	<b>34</b>
8.1	Lo strutturalismo di Benacerraf . . . . .	34
8.2	Strutture <i>versus</i> oggetti? . . . . .	35
8.3	Lo strutturalismo eliminativo . . . . .	35
8.3.1	Gli asserti a proposito di una struttura che non esiste non possono essere falsi . . . . .	36
8.3.2	Lo strutturalismo eliminativo modalizzato . . . . .	36
8.4	Lo strutturalismo <i>ante rem</i> . . . . .	36
8.4.1	Ontologia . . . . .	37
8.4.2	Semantica . . . . .	37
8.4.3	La dissoluzione del problema di Cesare . . . . .	38
8.4.4	Epistemologia . . . . .	38
8.4.5	La risposta al dilemma di Benacerraf . . . . .	39
8.4.6	Il problema dell'identità . . . . .	39
8.5	Strutturalismo e intuizione . . . . .	40
<b>9</b>	<b>Esercizi</b>	<b>41</b>

In filosofia della matematica, la distinzione fra un orientamento propriamente analitico e altri orientamenti non è netta. Si possono indicare almeno tre ragioni per questo: *i*) la filosofia della matematica è assai sensibile alle caratteristiche intrinseche delle matematica, e alle preoccupazioni metodologiche dei matematici, e ciò impone certe direzioni di ricerca e porta a scartarne altre, indipendentemente dall'orientamento filosofico preferito; *ii*) la matematica presenta un'evoluzione tecnica costante e ha una dimensione storica che non può venire negata senza condurre a concezioni implausibili, e ciò rende difficile un approccio che faccia astrazione dalla pratica matematica e dalle considerazioni storiche a essa connesse; *iii*) il dibattito filosofico a proposito della matematica è stato per lungo tempo dominato dalla questione dei **fondamenti della matematica** stessa (sez. 1.3), e ciò ha mostrato quanto una contingenza storica (quale la crisi dei fondamenti) possa avere grande influenza sulla riflessione filosofica e ha indotto un confronto fra filosofi quali Frege, Russell, Carnap, antenati riconosciuti della tradizione analitica, e matematici o logici, quali Poincaré, Hilbert, Brouwer, Weyl, Gödel, la cui assegnazione a questa tradizione è perlomeno dubbia.

Non ne è risultato tanto un avvicinamento delle tradizioni analitica a continentale, quanto una mescolanza di sensibilità, stili e punti di vista, che

si manifesta anche e soprattutto entro la comunità filosofica di lingua inglese. Ne sono degli esempi la critica di Imre Lakatos (1976 e 1978) nei confronti di un orientamento accusato di dare troppo peso all'analisi logico-formale della matematica, e l'elaborazione, da parte di Philip Kitcher (1983), di una concezione anti-apriorista che descrive la matematica come un'impresa storica. A questi e altri orientamenti simili fanno oggi seguito molti indirizzi di ricerca volti all'analisi dettagliata della pratica matematica e tendenti a mostrarne la dimensione storica.

A questa situazione fa riscontro la grande varietà di posizioni sostenute, negli ultimi decenni, da molti filosofi della matematica che si dichiarano apertamente analitici. Ne segue che una presentazione sintetica e completa dell'odierna filosofia analitica della matematica è assai difficile. Mi limiterò quindi a una sola questione, peraltro cruciale. Presentata nel modo più neutro e generale possibile, essa riguarda la natura delle entità matematiche. Come vedremo, questa formulazione cela tuttavia molti problemi che emergono non appena si cerca di essere più precisi.

## 1 Cenni su alcune posizioni classiche

Comincerò con alcune posizioni classiche.

### 1.1 Il platonismo di Platone

Nella sua *Settima Lettera* (342, *a-d*), Platone distingue fra la conoscenza, i mezzi di questa e il suo oggetto e presenta un esempio geometrico. I mezzi della conoscenza sono il nome, la definizione e l'immagine. Nell'esempio scelto, si tratta del termine "cerchio", della descrizione "Ciò che ha gli estremi equidistanti da un punto detto centro" e della figura fisica di un cerchio, tracciata su di un supporto qualsiasi. La conoscenza è in tal caso la geometria del cerchio, mentre l'oggetto è il cerchio stesso. Il problema riguarda la natura di quest'ultimo. Per Platone si tratta di un'idea.

Liberata dai vincoli imposti dalla teoria platonica delle idee (Panza 1995, pp. 88-96), tale tesi è sopravvissuta nei secoli e costituisce il cuore di una posizione molto influente in filosofia della matematica, il **platonismo**, appunto: la matematica tratta di **oggetti astratti** che popolano un mondo totalmente indipendente dal nostro e preesistono ai nostri discorsi su di essi e in particolare alla stessa matematica, la quale può solo descriverli. Ancora

più persistente è stato l'interrogativo di Platone: di che cosa parliamo (se parliamo di qualcosa) quando parliamo di cerchi o, per fare un esempio più comune, di numeri?

## 1.2 Il platonismo aritmetico di Frege

Nelle sue *Grundlagen der Arithmetik* (1884), Gottlob Frege intese questa domanda a proposito dei numeri e in particolare dei **numeri naturali** (ovvero i numeri interi non negativi finiti: 0, 1, 2, 3, ...), come parte di un interrogativo più ampio: come fare a fornire una fondazione sicura per l'aritmetica? La risposta di Frege è considerata una versione paradigmatica del **platonismo aritmetico**: i numeri naturali sono **oggetti logici** (ovvero oggetti conoscibile *a priori*, e quindi tramite il solo uso della ragione; vedremo quali nella sez. 2.3.2), e le loro proprietà sono espresse da **verità analitiche** (per Frege, una verità analitica è un asserto derivabile entro un **sistema logico** grazie al ricorso a null'altro se non a **definizioni** opportune, ovvero una **conseguenza logica** — v. [cap.MoruzziZardini](#) — di **principi logici**). Essi esistono quindi indipendentemente da noi e non hanno una collocazione spazio-temporale; sono particolari **oggetti astratti**, la cui esistenza è più sicura di quella di ogni oggetto fisico poiché è garantita dalle leggi della **logica**.

## 1.3 Il dibattito sui fondamenti della matematica

Le varie critiche di cui la posizione di Frege è stata oggetto e i numerosi tentativi di riformularla e correggerla, hanno costituito un aspetto di un dibattito più ampio, durato per quasi cent'anni e volto a cercare dei fondamenti certi per tutta la matematica.

Questo si è incentrato sulla valutazione di tre opzioni principali: il **logicismo**, iniziato da Frege; l'**intuizionismo**, proposto dapprima da Jan Brouwer; e il **formalismo**, introdotto da David Hilbert (Frege 1884, 1893-1903; Brouwer CW1, CL; Hilbert GA3, RFMA; van Heijenoort 1967; Cellucci 1977). Il suo inaridirsi non ha coinciso con l'abbandono delle posizioni logicista, intuizionista e formalista, ma piuttosto con la rinuncia alla ricerca di una garanzia di certezza per la matematica e con l'emergere di nuovi contesti entro i quali riformulare tali posizioni.

## 1.4 La svolta analitica: Paul Benacerraf

Sul versante analitico, tale frattura è stata segnata dalla pubblicazione di due articoli di Paul Benacerraf (1965, 1973). Si può dire che gli argomenti proposti in questi articoli abbiano dato inizio a una filosofia della matematica propriamente analitica. In particolare, il secondo ha posto un problema cruciale: è possibile dotare l'aritmetica, e più in generale la matematica, di una semantica e di un'epistemologia plausibili e compatibili fra loro? Presentato sotto la forma di un dilemma — il cosiddetto **dilemma di Benacerraf** — tale problema ha costituito il contesto entro il quale molti filosofi analitici si sono interrogati a proposito della natura delle entità matematiche. Cercherò di ripercorrere una parte del dibattito aperto dagli argomenti di Benacerraf che è lungi dall'essere chiuso (per altre ricostruzioni di tale dibattito e utili complementi: Engel 1995; Garavaso 1998, 2002; Shapiro 2000, 2005).

## 2 La domanda ontologica

Un modo per porre il problema della natura delle entità matematiche è di formulare una domanda ontologica: vi sono **oggetti matematici**?

Per comprendere questa domanda e rispondere in modo argomentato occorre fare chiarezza su almeno tre punti:

1. Che cosa si intende quando si asserisce (o si nega) l'**esistenza** di qualcosa che non è (necessariamente) spazio-temporalmente localizzato?
2. Sotto quali condizioni si può asserire di qualcosa che è un **oggetto** (astratto)?
3. Che cosa garantisce che un oggetto debba essere considerato **matematico**?

### 2.1 Oggetti matematici

La terza domanda può sembrare semplice, ma se non ci si accontenta di rispondere facendo un elenco di oggetti matematici, ma si cerca di stabilire ciò che fa di un oggetto un oggetto matematico, diventa tanto complessa che è preferibile evitarla. Una maniera per farlo è di limitare il campo d'indagine, scegliendo un esempio paradigmatico. Una scelta ovvia è quella dei numeri

naturali. La domanda ontologica prende allora questa forma: vi sono oggetti che si identificano con i numeri naturali?

## 2.2 Oggetti astratti

Un modo comune per rispondere alla seconda domanda è questo:  $x$  è un oggetto se e solo se cade sotto un **concetto sortale**. La nozione di concetto sortale si può a sua volta chiarire così:  $P$  è un concetto sortale se e solo se  $P$  è un concetto tale che se  $x$  e  $y$  cadono sotto  $P$ , allora è possibile stabilire se  $x$  è o no identico a  $y$ . Un oggetto sarebbe allora qualcosa che cade sotto un concetto e che sia possibile identificare e distinguere da qualsiasi altra cosa cada sotto questo concetto. Le stelle sarebbero oggetti, perché ogni stella si distingue da un'altra: se osserviamo una stella all'alba, possiamo stabilire (in linea di principio) se essa è o no la stessa che avevamo osservato al tramonto. Non così per le emozioni: come stabilire se l'emozione che proviamo osservando una stella all'alba è o no la stessa che avevamo provato osservandola al tramonto?

Per rispondere positivamente e in modo soddisfacente alla domanda ontologica ristretta ai numeri naturali è allora necessario definire un concetto sortale appropriato e asserire (in base a buoni argomenti) che sotto di esso cadono tutti (e solo) i numeri naturali.

### 2.2.1 Condizione d'identità e condizione di applicazione

Che cosa significa definire un concetto e, in particolare, un concetto sortale? Per cercare una risposta esuastiva dovremmo allontanarci dalla filosofia della matematica (per alcune considerazioni sulla questione, v. Capitolo Cozzo). Limitiamoci a un aspetto della questione.

Supponiamo di aver fissato una **condizione d'identità** per ciò che cade sotto un concetto  $P$ , ovvero di aver stipulato che se  $x$  e  $y$  cadono sotto  $P$ , allora  $x$  è identico a  $y$  se e solo se una certa condizione  $C_P(x, y)$  è soddisfatta. Supponiamo anche che se  $x$  e  $y$  cadono sotto  $P$ , allora si possa stabilire se  $C_P(x, y)$  è soddisfatta o no. Abbiamo così definito il concetto sortale  $P$ ? Immaginiamo che  $P$  sia il concetto di stella e che  $C_P(x, y)$  sia un'opportuna condizione che riguardi la posizione celeste di  $x$  e  $y$ . Sembrerebbe che la risposta dovrebbe essere positiva. Ma ciò sembra dipendere dal fatto che presumiamo di sapere già che cosa sia una stella. Immaginiamo allora che  $P$  sia il concetto  $\lceil$ (essere uno) zuzazu $\rceil$ , e che tutto ciò che abbiamo fissato è

una condizione di identità per ciò che cade sotto  $P$ . Siamo ancora convinti di aver in tal modo definito il concetto sortale  $\ulcorner$ (essere uno) zuzazu $\urcorner$ ?

Si potrebbe rispondere negativamente avvalendosi della considerazione seguente: per definire un concetto sortale è necessario fissare una condizione d'identità relativa a tale concetto, ma ciò non è sufficiente, occorre anche fissare una **condizione di applicazione**, ovvero una condizione atta a stabilire se qualcosa cade o no sotto tale concetto.

### 2.2.2 Definizioni contestuali e definizioni implicite

Per definire un concetto sortale sembrerebbe allora necessario fissare due condizioni: una condizione di applicazione e una d'identità. Ma è davvero così? Non si potrebbe sostenere che, almeno in certi casi, la condizione d'identità è sufficiente?

Il caso dei numeri naturali potrebbe essere uno di questi. Nelle *Grundlagen* (§§ 45-46) Frege aveva osservato che tutte le volte che formuliamo un “giudizio numerico”, ovvero attribuiamo un numero (naturale) a qualcosa, facciamo un'affermazione relativa a un concetto. L'asserto “La carrozza dell'imperatore è tirata da quattro cavalli”, si può per esempio interpretare come l'affermazione secondo la quale il “numero che spetta” al concetto  $\ulcorner$ (essere un) cavallo che tira la carrozza dell'imperatore $\urcorner$  è quattro. Frege ne aveva dedotto che per chiarire il nostro uso dei termini numerali (attenendomi a una convenzione diffusa, impiego il termine “termine numerale” per designare i termini che, a loro volta, designano i numeri naturali: “zero”, “uno”, “due”, ...; oppure “0”, “1”, “2”, ...) è necessario stabilire che si intende con “Il numero che spetta al concetto  $P$  è  $n$ ”, e aveva prospettato la possibilità, poi scartata, di definire il concetto  $\ulcorner$ (essere un) numero $\urcorner$  stipulando una condizione d'identità relativa a numeri che spettano a concetti (*ibid.* §§ 62-67; v. sez. 7).

Questo concetto sarebbe stato così definito tramite una **definizione contestuale**: una definizione che non stabilisce che cosa sono le cose che cadono sotto un concetto, ma fissa una condizione di verità per degli **asserti d'identità** che connettono dei termini che designano queste cose (degli asserti della forma “ $\alpha = \beta$ ” dove “ $\alpha$ ” e “ $\beta$ ” sono tali termini). Tale definizione sarebbe stata fornita grazie alla fissazione di una condizione d'identità, e i numeri sarebbero stati identificati con le cose che soddisfano questa condizione (i numeri naturali sarebbero poi stati identificati con alcune di queste cose: v. sez. 7.5).

I matematici fanno qualcosa di simile quando stabiliscono degli **assiomi** in cui intervengono termini non ancora definiti e deducono da essi teoremi in cui compaiono tali termini; un esempio paradigmatico sono gli assiomi della geometria euclidea proposti da Hilbert (1899). Tuttavia, piuttosto che di definizione contestuale, essi parlano di **definizione implicita**. Non insisto qui sulle differenze fra i due casi (per una discussione approfondita dei problemi connessi a questo genere di definizione, v. Fine, 2002). È invece importante osservare che i matematici accettano comunemente una definizione implicita anche per i numeri naturali. Immaginiamo di aver stabilito un linguaggio adeguato, per esempio quello della **logica del second'ordine**, e di aggiungere, senza definirli in modo esplicito, dei termini opportuni, quali il predicato “(essere un) numero naturale”, la costante individuale “zero”, e la costante relazionale diadica “(essere) successore di”. Nel linguaggio così ottenuto si possono formulare degli assiomi che costituiscono una base deduttiva per l'aritmetica e definiscono così, implicitamente, questi termini. Si tratta dei cosiddetti **assiomi di Peano**, perché il primo a presentarne una formulazione esplicita e precisa fu Giuseppe Peano (1889), o **assiomi dell'aritmetica**.

## 2.3 L'esistenza dei numeri naturali

Frege scartò la possibilità di definire i numeri naturali tramite l'impiego di una definizione contestuale, e sostenne più tardi che la semplice formulazione degli assiomi di Peano non poteva risolvere il problema della fondazione dell'aritmetica. Ciò lo portò a rivendicare la necessità di stabilire una condizione d'applicazione anche in casi come quello dei numeri naturali.

### 2.3.1 Il problema di Cesare

Il suo argomento si riduce alla presentazione di un problema, il cosiddetto **problema di Cesare**, (Frege 1884, §§ 56 e 66). Domandiamoci: Giulio Cesare è un numero naturale? Sembrerebbe facile rispondere. Ma la risposta dovrebbe essere giustificata in base alla definizione adottata per i numeri naturali. Il problema sta qui: come giustificare una risposta a questa domanda, riferendosi a una definizione contestuale? Frege pensava che questo non fosse possibile e ne dedusse che il concetto sortale  $\ulcorner$ (essere un) numero naturale $\urcorner$  non può venire definito adeguatamente tramite una definizione contestuale.

### 2.3.2 Le definizioni di Frege

Frege propose di identificare i numeri naturali con le **estensioni** di opportuni concetti di secondo livello (§§ 68-83): il numero zero con l'estensione del concetto

⌈(essere un) concetto equinumeroso con il concetto ⌈ (essere) diverso da se stesso<sup>⌈</sup>;

il numero uno con l'estensione del concetto

⌈(essere un) concetto equinumeroso con il concetto ⌈(essere) identico al numero zero<sup>⌈</sup>;

il numero due con l'estensione del concetto

⌈(essere un) concetto equinumeroso con il concetto ⌈(essere) identico al numero zero o al numero uno<sup>⌈</sup>;

e così via.

In realtà, nella definizione di Frege, la clausola “e così via” è sostituita da una definizione esplicita del concetto sortale ⌈(essere) un numero naturale<sup>⌈</sup> che impiega la relazione ancestrale della relazione ⌈seguire in una successione<sup>⌈</sup>. Ma per quanto cruciale, ciò può essere considerato qui come un tecnicismo (ma si veda Boolos 1998, capitolo 12). Si noti inoltre che due concetti sono equinumerosi se è possibile stabilire una corrispondenza biunivoca fra le loro estensioni, ovvero se a ogni oggetto che cade sotto il primo è possibile associare uno e un solo oggetto che cade sotto il secondo, in modo tale che ogni oggetto che cade sotto il secondo risulti in questo modo associato a uno e un solo oggetto che cade sotto il primo.

Se supponiamo che Giulio Cesare non sia l'estensione di un concetto di secondo livello, e in particolare di uno dei concetti che intervengono nelle definizioni precedenti (ma, ci si potrebbe chiedere, come facciamo a saperlo?), allora l'adozione di queste definizioni — e la prova che i numeri naturali definiti in base a esse soddisfano gli assiomi dell'aritmetica — sono sufficienti per risolvere il problema di Cesare. E lo sono anche per fornire una risposta positiva alla domanda ontologica: per Frege, l'esistenza dei numeri naturali segue dal fatto che questi sono oggetti logici. Così, per Frege, i numeri naturali esistono in quanto si identificano con oggetti particolari, le estensioni di

concetti appunto, la cui esistenza è a sua volta assunta come certa. Stabilire che i numeri naturali sono oggetti va quindi di pari passo con lo stabilire che esistono: possiamo stabilire che esistono perché siamo in grado di dire che oggetti sono.

Questa risposta alla domanda ontologica ha un pregio indiscutibile: non richiede nessuna risposta preventiva all'imbarazzante domanda generale: "Quand'è che esiste un oggetto astratto?". Così anche la terza fra le domande precedenti può essere evitata, a condizione d'identificare i numeri naturali con oggetti di cui si assuma l'esistenza. Questa è la strategia di Frege.

### 2.3.3 I paradossi di Russell e Cantor

Il problema è che le definizioni di Frege sono incoerenti: esse si avvalgono di nozioni che non sembrano precisabili senza incorrere in qualche paradosso. Il più celebre è il **paradosso di Russell**, che quest'ultimo comunicò allo stesso Frege in una lettera datata 16 giugno 1902.

Tale paradosso è generalmente presentato così: consideriamo l'**insieme** di tutti gli insiemi che non appartengono a se stessi e domandiamoci se tale insieme appartenga o no a se stesso; se vi appartiene, allora è un insieme che non appartiene a se stesso, quindi non vi appartiene; se non vi appartiene, allora è un insieme che non appartiene a se stesso, quindi vi appartiene; ne segue che tale insieme appartiene a se stesso se e solo se non appartiene a se stesso.

Perché la nozione di estensione di un concetto possa venire impiegata per definire i numeri naturali come propone di fare Frege, occorre almeno poter stabilire sotto quali condizioni due concetti possiedono la stessa estensione. Nelle *Grundlagen*, Frege non precisa questa condizione, ma ammette implicitamente che due concetti hanno la stessa estensione se e solo se sotto di essi cadono esattamente gli stessi oggetti, ovvero:

$$est(F) = est(G) \Leftrightarrow \forall x [F(x) \Leftrightarrow G(x)].$$

Quando decise di formalizzare gli argomenti delle *Grundlagen*, nel primo volume dei *Grundgesetze*, Frege enunciò esplicitamente questo principio, assegnandogli il ruolo di assioma. Oggi è noto come **quinto assioma di Frege** (o come *Basic Law V*, in inglese). Il paradosso di Russell colpisce questo principio.

Sia  $R$  il concetto  $\ulcorner$ (essere l') estensione di un concetto la quale non cada sotto questo concetto $\urcorner$ . Consideriamo l'oggetto  $est(R)$ , ovvero l'estensione

di  $R$ , e domandiamoci se essa cada o no sotto  $R$ , ovvero se  $R(est(R))$  o  $\neg R(est(R))$ . Per evitare di avvalerci dalla nostra idea intuitiva (ma, come vedremo, imprecisa) di che cosa sia un'estensione, caratterizziamo precisamente il concetto  $R$ : esso è il concetto sotto il quale un oggetto  $x$  cade se e solo se esiste un concetto  $F$  tale che  $x = est(F)$  e  $\neg F(x)$ . In simboli:

$$R =_{df} [x : \exists F ((x = est(F)) \wedge (\neg F(x)))].$$

Supponiamo che  $est(R)$  non cada sotto  $R$ , ovvero che  $\neg R(est(R))$ . Allora non esiste nessun concetto  $F$  tale che:  $est(R) = est(F)$  e  $\neg F(est(R))$ . Quindi ciò non può essere neppure il caso di  $R$ . Ma siccome è certo che  $est(R) = est(R)$ , non può essere il caso che  $\neg R(est(R))$ . Abbiamo così dimostrato che da  $\neg R(est(R))$  segue  $\neg[\neg R(est(R))]$  (che, in logica classica, equivale a  $R(est(R))$ ). Supponiamo ora  $est(R)$  cada sotto  $R$ , ovvero che  $R(est(R))$ . Vi è allora un concetto  $F$  tale che:  $est(R) = est(F)$  e  $\neg F(est(R))$ . Ma da  $est(F) = est(R)$  e dal quinto assioma di Frege, segue  $\forall x [F(x) \Leftrightarrow R(x)]$ . Da  $\neg F(est(R))$  segue quindi:  $\neg R(est(R))$ . Abbiamo così dimostrato che da  $R(est(R))$  segue  $\neg R(est(R))$ . Quindi, se il quinto assioma di Frege governa l'identità delle estensioni, sia  $\neg R(est(R))$  che  $R(est(R))$  implicano la loro negazione (ovvero, in logica classica:  $R(est(R))$  se e solo se  $\neg R(est(R))$ ). Questa è una **contraddizione**, quindi il quinto assioma di Frege genera una contraddizione (si veda Boolos 1988, pp. 172-173).

Ma se il quinto assioma di Frege non vale, allora qual è la condizione d'identità per le estensione dei concetti? Potremmo sperare di cavarcela identificando l'estensione di un concetto con un insieme definito in modo opportuno, ovvero eliminando dalle definizioni di Frege dei diversi numeri naturali tanto le estensioni che i concetti, e riformulando tali definizioni così:

0 =<sub>df</sub> l'insieme di tutti gli insiemi equinumerosi all'insieme degli oggetti diversi da se stessi;

1 =<sub>df</sub> l'insieme di tutti gli insiemi equinumerosi all'insieme degli oggetti identici a 0;

2 =<sub>df</sub> l'insieme di tutti gli insiemi equinumerosi all'insieme degli oggetti identici a 0 o a 1;

e così via.

Ma ciò non si può fare. Tali definizioni condurrebbero infatti a un altro paradosso.

Dato un insieme  $e$ , è sempre possibile associare a tale insieme l'insieme  $\{e\}$ , di cui tale insieme è il solo elemento: ovvero se esiste  $e$ , esiste anche  $\{e\}$ . Sia allora  $e$  un insieme qualsiasi. Sarà allora possibile associare a esso l'insieme  $\{e\}$  il quale sarà equinumeroso con l'insieme degli oggetti identici a 0, posto che al primo di tali insiemi appartiene  $e$  e solo  $e$  e al secondo 0 e solo 0. Vi sono così tanti insiemi equinumerosi con l'insieme degli oggetti identici a 0 quanti sono gli insiemi, e quindi, secondo la definizione precedente, il numero 1 sarebbe un insieme che comprende tanti elementi quanti sono gli insiemi. Ma nessun insieme può comprendere tanti elementi quanti sono gli insiemi, pena l'insorgere del cosiddetto **paradosso di Cantor**: se così fosse, tale insieme dovrebbe infatti comprendere almeno tanti elementi quanti sono i suoi sottoinsiemi (i quali sono appunto degli insiemi), il che non è possibile.

### 2.3.4 Le gerarchie di von Neumann e Zermelo

I paradossi di Russell e Cantor non colpiscono la possibilità di far uso di una nozione d'insieme coerente. Per questo basta adottare un'opportuna **teoria degli insiemi**, per esempio la **teoria di Zermelo-Fraenkel** (Casalegno e Mariani 2002, Hallett 1984), che blocchi l'insorgere di questi paradossi: nella teoria di Zermelo-Fraenkel, l'insieme di Russell è mal definito e la totalità degli insiemi non è un insieme.

Pare allora possibile abbandonare le definizioni di Frege e identificare i numeri naturali con insiemi ottenuti in modo ricorsivo (ovvero, successivamente, l'uno dall'altro), partendo dall'insieme vuoto.

Questo si può fare, come ha proposto John von Neumann (1923, p. 347), identificando lo zero con l'insieme vuoto e usando la clausola ricorsiva che associa a un insieme dato l'unione di tale insieme con l'insieme di cui esso è l'unico elemento (dato  $e$  si passa così a  $e \cup \{e\}$ ), oppure, come ha proposto Ernst Zermelo (1908, p. 205), identificando ancora lo zero con l'insieme vuoto, e usando la clausola ricorsiva che associa a un insieme dato l'insieme di cui tale insieme è l'unico elemento (dato  $e$  si passa così a  $\{e\}$ ). Nel primo caso, la successione dei numeri naturali si identifica con questa gerarchia di insiemi:

$$\emptyset ; \{\emptyset\} ; \{\emptyset, \{\emptyset\}\} ; \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\} ; \dots$$

Nel secondo caso, essa s'identifica con quest'altra gerarchia di insiemi:

$$\emptyset ; \{\emptyset\} ; \{\{\emptyset\}\} ; \{\{\{\emptyset\}\}\} ; \dots$$

È facile verificare che entrambe queste gerarchie soddisfano gli assiomi dell'aritmetica, ovvero formano delle **progressioni**.

### **3 Il primo argomento di Benacerraf**

È a questo punto che interviene l'argomento del primo articolo di Benacerraf (1965). Caratteristica essenziale degli insiemi è quella di appartenere a altri insiemi. Quindi, se i numeri naturali sono insiemi, è possibile domandarsi se uno di essi appartiene o no a un altro. Consideriamo due numeri naturali successivi, come 2 e 3, e chiediamoci se 2 appartiene a 3 o no. La risposta è positiva sia per gli insiemi di von Neumann sia per quelli di Zermelo. Consideriamo due numeri naturali non successivi, come 3 e 27, e chiediamoci ancora se 3 appartiene a 27 o no. Se i numeri naturali sono gli insiemi di von Neumann, la risposta è positiva; se sono gli insiemi di Zermelo, la risposta è negativa (visto che ognuno di questi insiemi non contiene che un solo elemento: quello che lo precede immediatamente nella gerarchia).

Qui sta il problema: quale fra queste due risposte è quella corretta? L'aritmetica non può aiutarci a stabilirlo perché entrambe le gerarchie precedenti ne soddisfano gli assiomi. Ma se i numeri naturali sono insiemi, è intollerabile che questa domanda non preveda una risposta corretta. Quindi, se i numeri naturali sono oggetti, o non sono insiemi, o l'aritmetica non ci offre nessuna ragione per stabilire quali insiemi siano. Ma se sono oggetti ma non insiemi, che oggetti sono? Ancora una volta, una risposta non può venire dall'aritmetica, perché i suoi assiomi sono soddisfatti da opportune gerarchie di insiemi. L'aritmetica può dirci quindi qualcosa sulle relazioni che i numeri naturali hanno fra loro, ma non sulla loro natura particolare. Ma se qualcosa è un oggetto, allora ha una natura particolare. Conclusione: o i numeri naturali non sono oggetti, oppure sono oggetti che l'aritmetica non può aiutarci a individuare.

#### **3.1 Il primo argomento di Benacerraf e il problema di Cesare**

L'identificazione dei numeri naturali con gli insiemi di von Neumann oppure con quelli di Zermelo permetterebbe di stabilire che Giulio Cesare non è un numero naturale, se solo si concedesse che nessuno degli insiemi che

costituiscono gli elementi di queste gerarchie s'identifica con il noto imperatore romano (ciò che tuttavia è impossibile da dimostrare entro la stessa teoria degli insiemi). Ma condurrebbe anche a concludere che neppure  $\{\{\emptyset\}\}$  o  $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$  (a seconda di quale gerarchia scegliamo) lo è. Ma perché dovrebbe essere così, posto che questi insiemi sono parte di gerarchie che soddisfano gli assiomi dell'aritmetica? D'altra parte, se non identifichiamo preventivamente i numeri naturali con gli insiemi di von Neumann o di Zermelo, allora la domanda di Frege può venire sostituita da altre, quali: “ $\{\{\emptyset\}\}$  è un numero natural?”; oppure “ $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$  è un numero naturale?” E, come abbiamo visto, l'aritmetica non ci è di nessun aiuto per rispondere a domande come questa. E allora su che cosa dobbiamo basarci per farlo?

### 3.2 Conseguenze dell'argomento di Benacerraf

Se di fronte a queste difficoltà riconosciamo che la risposta alla domanda ontologica non può venire dall'identificazione dei numeri naturali con degli oggetti logici, la cui esistenza è riconoscibile *a priori*, allora ci troviamo di fronte a molti altri problemi.

Se vogliamo comunque sostenere che i numeri naturali sono oggetti, dobbiamo basarci su un argomento del tutto diverso da quello di Frege. E se vogliamo aggiungere che questi oggetti esistono, dobbiamo produrre un altro argomento, che difficilmente potrà essere tanto sobrio quanto quello di Frege. Se invece vogliamo sostenere che i termini numerali si comportano come nomi di oggetti, ma che i numeri naturali non esistono, allora dobbiamo fornire un resoconto plausibile dei nostri usi linguistici relativi a tali termini che sia compatibile con questa tesi.

Se vogliamo negare che i numeri naturali siano oggetti, allora dobbiamo trovare un altro modo per render conto dell'uso apparentemente referenziale che facciamo dei termini numerali: se i numeri naturali non sono oggetti, di che cosa parliamo quando sembriamo parlare di essi?

## 4 Il secondo argomento di Benacerraf: il dilemma

Torneremo più avanti su alcune di queste posizioni. Cerchiamo ora di capire se è plausibile sostenere che i numeri naturali sono oggetti che l'aritmetica non può aiutarci a individuare.

## 4.1 L'imperscrutabilità del riferimento

Crispin Wright (1983, p. 127) ha osservato che il primo argomento di Benacerraf è soltanto un “argomento per l' **imperscrutabilità del riferimento** dei termini numerici singolari rispetto al dominio delle classi”. Esso mostra che l'uso che facciamo dei termini numerali in aritmetica è compatibile con “varie interpretazioni” per questi termini, ma non solleva nessun problema che riguardi specificamente tali termini. Anzi mostra che questi si comportano rispetto al loro **riferimento** come si comportano tutti i termini singolari del linguaggio quotidiano, almeno se accettiamo le tesi di Quine su riferimento e traduzione (Quine 1969, in particolare cap. 2): se hanno un riferimento, i nostri usi linguistici non ci permettono d'identificarlo.

## 4.2 La natura dell'aritmetica discende da quella dei numeri naturali e non viceversa

Ma si può anche sostenere che l'aritmetica non è la fonte delle nostre conoscenze sui numeri naturali, bensì ne è il risultato: i numeri naturali non sono come l'aritmetica ci dice che siano; è piuttosto l'aritmetica che è come i numeri naturali fanno sì che essa sia. Questa non è in fondo che una riformulazione del platonismo aritmetico. Quindi, se tale posizione è corretta, il primo argomento di Benacerraf non offre ragioni per confutarla.

## 4.3 Platonismo sobrio e platonismo robusto

Queste due contromosse hanno qualcosa in comune: concordano nell'affermare che l'argomento di Benacerraf non scalfisce una posizione platonista robusta, ma la rafforza. Se i numeri naturali sono oggetti che esistono indipendentemente da noi, esistono indipendentemente dall'aritmetica, che è certamente una nostra produzione intellettuale. Pertanto, che l'aritmetica non ci dica tutto dei numeri naturali non è affatto sorprendente.

Ma se in questo modo si può far fronte al primo argomento di Benacerraf, resta il fatto che una tale contromossa non è priva di conseguenze. Quello di Frege può essere inteso come un platonismo sobrio, in quanto afferma che i numeri naturali esistono perché si identificano con oggetti logici la cui esistenza è assicurata *a priori*. Se il paradosso di Russell mostra che tali oggetti non possono identificarsi con le estensioni di Frege, lascia la strada aperta per altre soluzioni dello stesso genere, quali quelle considerate nella

sez. 2.3.4. Ma se rispondiamo all'argomento di Benacerraf come ho appena detto, allora il platonismo sobrio lascia il posto a un platonismo robusto che ammette l'esistenza dei numeri naturali prima che si possa stabilire che sorta di oggetti siano.

D'altra parte, le due contromosse precedenti differiscono per un aspetto cruciale. La prima lascia aperta la questione relativa al significato che deve essere assegnato alla condizione di esistenza per oggetti astratti (che cosa significa esattamente che questi esistono indipendentemente da noi?), limitandosi a constatare che l'esistenza dei numeri naturali è compatibile con la nostra incapacità di stabilire che cosa sono (v. sez. 7). La seconda va più in là, ammettendo che questa incapacità non ci preclude la possibilità di mantenere con essi una relazione tale permetterci di riconoscere che essi soddisfano certe condizioni che l'aritmetica descrive.

#### 4.4 L'intuizione matematica

Il problema della seconda posizione è quello di chiarire la natura di tale relazione. Possiamo certo riferirci a essa parlando d'**intuizione matematica**, ma l'impiego di questo termine non risolve il problema.

Seguendo Gödel (1947, supplemento del 1963), si potrebbe sostenere che l'esistenza dell'intuizione matematica, o almeno di "un'intuizione sufficientemente chiara per produrre gli assiomi delle teoria degli insiemi" e verso la quale non "dovremmo nutrire meno fiducia che nella percezione sensibile", è un "mero fatto psicologico". Il problema non sarebbe allora quello di accertarsi della presenza di tale facoltà, ma al più quello di spiegarla. Ma si dovrebbe allora spiegare come si possa avere intuizione di oggetti che esistono indipendentemente da noi e come questa intuizione possa assicurarci che questi oggetti sono i numeri naturali. E ciò non è semplice.

#### 4.5 Il dilemma

Qui interviene l'argomento del secondo articolo di Benacerraf (1973). Questo chiamo in causa due nozioni che non abbiamo finora considerato esplicitamente: le nozioni di **verità** e **conoscenza**.

L'attrattiva principale del platonismo consiste nella possibilità che esso concede di applicare agli asserti matematici una **semantica** strutturalmente equivalente a quella che si applica agli asserti del linguaggio quoti-

diano e di corredarla con una distinzione equivalente a quella fra verità e **giustificazione**.

Un asserto quale “Vi sono almeno tre numeri perfetti maggiori di 17” potrebbe infatti ricevere la stessa analisi semantica che un asserto quale “Vi sono almeno tre grandi città più antiche di New York”. Questi asserti sarebbero entrambi veri in virtù dell’esistenza di oggetti che godono delle proprietà rilevanti. La loro verità non dipenderebbe da come li giustifichiamo: non è perché sappiamo valutare la grandezza o l’antichità di una città che questa è grande o antica; analogamente, non sarebbe perché sappiamo provare che un numero è perfetto (ovvero, è uguale alla somma dei suoi divisori propri, come è il caso di 6, posto che  $6 = 1 + 2 + 3$ ) o maggiore di un altro che esso lo è.

È un punto di vista attraente per la sua semplicità, che motiva una distinzione spesso ritenuta cruciale in matematica: quella fra verità e **dimostrabilità**. Ma, così intesa, la nozione di verità può costituire un ingrediente di un’**epistemologia** plausibile per l’aritmetica?

Secondo Benacerraf, una tale epistemologia dovrebbe fondarsi su una nozione causale di conoscenza, per cui la conoscenza è un’opinione vera giustificata in termini causali: un soggetto  $s$  conosce che  $p$  solo se si stabilisce una relazione causale fra  $s$  e ciò che rende  $p$  vero, sulla quale si fonda la giustificazione che  $s$  dà per  $p$ .

Ma se un asserto aritmetico fosse vero secondo la concezione della verità precedente, ciò che lo renderebbe vero sarebbe uno stato di cose relativo ai numeri naturali. E se i numeri naturali esistessero indipendentemente da noi, quale relazione causale potrebbe esserci fra noi e loro? Parrebbe plausibile ammettere che in matematica “giustificare” significhi “dimostrare”. Ma se fosse così, e se dimostrabilità e verità fossero distinte, la giustificazione di un asserto matematico non si fonderebbe su una relazione causale fra il soggetto epistemico e ciò che rende vero questo asserto, e l’epistemologia matematica non sarebbe soddisfacente.

In breve: una buona semantica per l’aritmetica sembrerebbe richiedere una cattiva epistemologia e una buona epistemologia sembrerebbe richiedere una cattiva semantica.

## 4.6 Il problema dell’accesso

Si potrebbe pensare che per superare la difficoltà basti abbandonare la teoria causale della conoscenza. Non è così.

Hartry Field (1989, pp. 230-233) ha riformulato il dilemma di Benacerraf in modo che esso “non dipende da nessuna assunzione sulle condizioni necessarie e sufficienti per la conoscenza”, ma solo “dall’idea che dovremmo considerare con sospetto ogni pretesa di conoscere fatti relativi a un certo dominio se noi crediamo che sia in principio impossibile spiegare l’affidabilità delle nostre credenze relative a questo dominio”. Più in generale, mi pare che ogni teoria plausibile della conoscenza, intesa come opinione vera giustificata, debba richiedere che la giustificazione di  $p$  si richiami allo stato di cose che rende  $p$  vero. Quindi il problema non riguarda tanto il carattere causale della relazione fra un soggetto e questo stato di cose, quanto la possibilità stessa che il soggetto avrebbe di accedere a tale stato di cose.

Qui sta la difficoltà principale sollevata dal dilemma di Benacerraf: sembra implausibile asserire allo stesso tempo che gli oggetti matematici, che sono oggetti astratti, esistano indipendentemente da noi e siano accessibili per noi. È il cosiddetto **problema dell’accesso**.

## 5 Alcune risposte semplici agli argomenti di Benacerraf

A mio parere, il problema dell’accesso costituisce una difficoltà insormontabile per ogni versione robusta del platonismo. Si può tuttavia sperare di elaborare una versione sobria del platonismo che eviti questa difficoltà. Nelle sez. 7 e 8.4 ne presenterò due, entrambe fondate su una riconsiderazione critica delle nozioni di oggetto e esistenza. Qui prenderò invece in esame alcune risposte agli argomenti di Benacerraf che chiamerei “semplici”, in quanto non si avvalgono di una tale riconsiderazione.

### 5.1 I numeri naturali non sono solo oggetti dell’aritmetica

I termini numerici non popolano soltanto il linguaggio dell’aritmetica, ma anche quello quotidiano; sarebbe quindi auspicabile poter assegnare a essi lo stesso riferimento nei due casi. Secondo Michael Dummett (1991, p. 48), questo era lo scopo di Frege (si veda per esempio il § 87 delle *Grundlagen*), il quale ne avrebbe tratto una delle motivazioni principali per identificare i nu-

meri con oggetti, come le estensioni di concetti, che non sono di competenza esclusiva dell'aritmetica.

Ma se i numeri naturali sono ciò a cui i termini numerali si riferiscono sia nel linguaggio dell'aritmetica sia in quello quotidiano, allora l'indeterminatezza del loro riferimento messa in luce dal primo argomento di Benacerraf potrebbe venire meno qualora se ne considerasse l'uso non aritmetico: questo potrebbe dare ragioni per identificare i numeri naturali con gli insiemi di una sola fra le gerarchie di von Neumann e di Zermelo, oppure con altri oggetti opportuni.

## 5.2 I termini numerali non si riferiscono a un unico oggetto

Ma si potrebbe anche sostenere che il primo argomento di Benacerraf mostra soltanto che i termini numerali non possono avere un riferimento costituito da un unico oggetto. Vi sono almeno due modi di articolare questa tesi.

Secondo Nicholas White (1974, p. 112), “nel nostro discorso aritmetico, possiamo rimpiazzare i nostri termini aritmetici singolari, come ‘tre’ con corrispondenti termini atomici generali, come ‘è un tre’ o ‘fa il tre’”. Questi termini generali dovrebbero inoltre essere relativizzati a progressioni, ovvero intervenire in espressioni più complesse atte a denotare predicati binari come “ $x$  è un tre in  $p$ ”, dove la variabile “ $p$ ” è supposta variare su progressioni. I numeri naturali sarebbero allora “oggetti che occupano posizioni nelle progressioni, e dei quali predicati del tipo ‘ $\exists p(x \text{ è un tre in } p)$ ’ sono veri” (*ibid.* p. 114).

White propone quindi di interpretare i termini numerali come termini generali, ovvero termini che non designano un oggetto ma un concetto sortale sotto il quale cadono più oggetti distinti. Così non vi sarebbe il numero tre, ma differenti numeri tre, e un asserto nel quale interviene il termine “tre” non ci parlerebbe di  $\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$  o di  $\{\{\{\emptyset\}\}\}$ , ma di ogni oggetto che, come questi, possa venire considerato come un tre in una progressione, ovvero come il successore del successore del successore del primo elemento di tale progressione. La forma apparente di un asserto quale “Tre è un numero primo” non rispecchierebbe quindi la sua struttura semantica, e tale asserto dovrebbe essere riformulato così: “per ogni  $p$ , se  $p$  è una progressione, allora il tre di  $p$  è primo in  $p$ ” e, così inteso, sarebbe vero.

Secondo Field (1974, pp. 209, 220-222) vi sarebbero invece dei termini che

si riferiscono parzialmente a più oggetti distinti, ognuno dei quali costituirebbe solo una parte del loro riferimento, e i termini numerali sarebbero proprio dei termini di questo tipo: essi si riferirebbero parzialmente a ognuno degli oggetti che svolgono la funzione di elemento appropriato di una progressione.

### 5.3 L'esistenza degli insiemi

Le due risposte precedenti al primo argomento di Benacerraf potrebbero essere oggetto di molte obiezioni. Ne considererò una sola. Secondo tali risposte, questo argomento non contraddice la possibilità che vi siano oggetti, quali i numeri naturali, a cui i termini numerali si riferiscono, totalmente o parzialmente, o che cadono sotto i concetti sortali che tali termini designano. Ma questo non basta per pervenire a una risposta soddisfacente a entrambi gli argomenti di Benacerraf, che costituisca la base di un platonismo plausibile. Fra l'altro, sarebbe anche necessario fornire argomenti per sostenere che tali oggetti esistono.

Un modo assai semplice per soddisfare questa richiesta potrebbe essere quello di identificare questi oggetti con insiemi opportuni — per esempio proprio con quelli che intervengono nelle gerarchie di von Neumann e Zermelo — e sostenere che l'esistenza di tali oggetti è ovvia. Ma è davvero così ovvia?

Se, per argomentare a favore dell'esistenza di certi insiemi, ci limitassimo a osservare che possediamo una teoria degli insiemi soddisfacente, che ci permette di definire questi insiemi in modo preciso, allora dovremmo anche riconoscere che, per argomentare a favore dell'esistenza dei numeri naturali, basterebbe osservare che gli assiomi dell'aritmetica permettono di definirli in modo preciso (e anche di studiarli e di assegnare loro delle proprietà). Quindi, o il problema dell'esistenza dei numeri naturali può essere risolto tramite il semplice richiamo agli assiomi dell'aritmetica — come propongo, in fondo, i sostenitori dello strutturalismo *ante rem* (v. sez. 8.4), che però si avvalgono di una riconsiderazione critica della nozione di oggetto —, oppure l'esistenza degli insiemi, perfino quella di certi insiemi particolari e ben definiti, è tutt'altro che ovvia.

### 5.4 Gli insiemi funzionano come generi naturali

Penelope Maddy (1980, 1990; ma v. anche 1997 per una posizione differente, anche se simile sotto molti aspetti) ha sostenuto una posizione realista a proposito della teoria degli insiemi che si richiama, cercando di fornirne una

esplicazione, alla nozione d'intuizione di Gödel (v. sez. 4.4) e all'idea che gli insiemi funzionano come "collezioni o generi naturali [*natural collections or kinds*]" (1990, pp. 38-40, 48-49, 96). Secondo Maddy la struttura del nostro **apparato cognitivo** sarebbe tale che non ci limitiamo a percepire gli elementi degli insiemi di piccole dimensioni composti da oggetti concreti di media grandezza, ma percepiamo questi insiemi come tali. Ciò genererebbe in noi delle credenze immediate (ovvero non inferenziali), ma tuttavia generali, a proposito di questi insiemi, che formerebbero un'evidenza intuitiva a sostegno degli assiomi più elementari della teoria degli insiemi. A questa evidenza se ne aggiungerebbe poi un'altra, di natura teorica, dovuta, almeno in parte, all'osservazione del ruolo che una teoria degli insiemi, edificata anche sulla base di altri assiomi meno elementari, svolge nella fondazione dell'aritmetica. Per Maddy, i numeri naturali non sarebbero tuttavia degli insiemi, ma delle proprietà d'insiemi (1990, cap. 3).

Per sostenere le sue tesi a proposito della percezione di certi insiemi e delle sue conseguenze, Maddy si avvale dei risultati di numerosi esperimenti riguardanti le nostre cognizioni numeriche (per alcuni di essi, v. Dehaene 1997), che sembrano mostrare che alcune delle nostre credenze aritmetiche più elementari hanno un'origine percettiva. Ma questi esperimenti non ci dicono, né possono dirci, se queste credenze riguardano insiemi, nel senso proprio di tale termine stabilito dalla teoria degli insiemi, oppure mere collezioni di oggetti. Per sostenere che riguardano insiemi, Maddy si richiama al ruolo che la teoria degli insiemi svolge in matematica e in logica, sfruttando così un'**inferenza alla spiegazione migliore**.

## 5.5 La differenza fra insiemi e mere collezioni di oggetti ha un'origine percettiva?

Questo argomento è, come tale, perfettamente corretto, ma non può essere impiegato, pena un'evidente circolarità, per sostenere che la distinzione fra insiemi in senso proprio e mere collezioni di oggetti — resa possibile dall'edificazione di una teoria degli insiemi, e in particolare dai suoi assiomi meno elementari — ha un'origine percettiva (Doridot e Panza 2004, pp. 283-284). Non possiamo quindi basarci su di esso per sostenere che l'esistenza degli insiemi con i quali, o con le cui proprietà, vorremmo poter identificare i numeri naturali, è percettivamente giustificata.

Si noti che ciò che è qui in causa non è la taglia di questi insiemi. Per

quanto formino certamente una successione infinita, non vi è ragione per richiedere che essi siano a loro volta infiniti e neppure che contengano molti elementi. È piuttosto la nozione stessa di insieme a essere qui in causa. Farò solo due esempi: fra le caratteristiche essenziali di questa nozione vi è la possibilità di concepire l'insieme vuoto, ma ciò non sembra valere per la nozione di collezione d'oggetti (potremmo legittimamente parlare di collezioni di oggetti anche se non concepissimo la possibilità di una collezione vuota di oggetti); la differenza fra un insieme  $e$  e l'unione  $e \cup \{e\}$ , che svolge un ruolo essenziale nella costruzione della gerarchia di von Neumann, è del tutto inintelligibile se si concepisce un insieme come una collezione di oggetti.

## 5.6 L'esistenza degli oggetti matematici si può giustificare su base empirica?

Una difficoltà simile concerne ogni filosofia empirista della matematica che voglia sostenere, se non che gli oggetti matematici sono empirici — come aveva sostenuto per esempio John Stuart Mill nel suo *System of Logic* (1843), riguardo ai numeri naturali —, almeno che la loro esistenza si possa giustificare su basi empiriche.

Non è che manchino argomenti per sostenere che la matematica abbia una base empirica. Anche se si tratta di una tesi difficilmente formulabile in modo preciso, chiunque abbia un minimo di consapevolezza dell'evoluzione storica della matematica dovrebbe considerare come perfettamente plausibile l'idea che anche le più astratte teorie matematiche si possano ricondurre a un'origine empirica (Kitcher 1983). Il problema è quello di mostrare come il passaggio da credenze empiricamente giustificate a principi generali come quelli che reggono le nostre teorie matematiche possa a sua volta essere empiricamente giustificato: per quanto le nostre capacità percettive possano contribuire a formare queste teorie, e perfino essere essenziali per condurre una dimostrazione matematica (Panza, 2003), l'esistenza di oggetti matematici non sembra possa venir giustificata su basi puramente empiriche.

## 5.7 Il nominalismo di Field

Una risposta semplice agli argomenti di Benacerraf, radicalmente nominalista, è stata proposta da Field (1980) e consiste nel rifiuto di ammettere l'esistenza di oggetti astratti (o meglio, secondo la terminologia adottata da

Field, di “entità astratte”), in particolare dei numeri, delle **funzioni** e degli insiemi. Per Field, gli asserti che affermano che questi oggetti esistono, ovvero gli “asserti matematici di esistenza”, sono quindi falsi.

Il libro di Field non contiene nessun argomento a sostegno di tale tesi; il suo scopo è solo quello di contraddire il “migliore argomento disponibile” contro di essa (1980, p. 4): il cosiddetto **argomento dell’indispensabilità**, generalmente attribuito a Quine e Putnam (Putnam 1971, p. 57, che si richiama genericamente a Quine; secondo Resnik 1980, pp. 62-63, un argomento simile si trova già in Frege 1893-1903, vol. 2, §91; v. anche Resnik 1997, pp. 44-48). Tale argomento può formularsi così: i teoremi della matematica intervengono in modo essenziale nella formulazione delle migliori teorie delle scienze naturali, che noi riteniamo essere formate da asserti veri; essi devono quindi essere a loro volta veri. Field non nega che le migliori teorie delle scienze naturali siano formate da asserti veri; e neppure che i teoremi della matematica, e, fra questi, gli asserti matematici d’esistenza, siano utili in tali scienze. Propone piuttosto un contr’argomento consistente in una riduzione all’assurdo (Shapiro 2000, p. 234): se l’argomento dell’indispensabilità fosse corretto, allora i teoremi della matematica sarebbero veri; ma se tali teoremi fossero veri, allora non sarebbero indispensabili per le teorie delle scienze naturali e la loro utilità per queste teorie non dipenderebbe dalla loro verità; quindi, se l’argomento dell’indispensabilità fosse corretto, esso sarebbe scorretto; quindi è scorretto.

Incominciamo dal secondo punto: se i teoremi della matematica fossero veri, allora la loro utilità per queste teorie non dipenderebbe dalla loro verità; potrebbe infatti venir spiegata mostrando che ogni teoria matematica **consistente** (ovvero: ogni teoria matematica che non ammette contraddizioni) è **conservativa** rispetto a queste teorie e che il ricorso a essa rende più agevole l’argomentazione. Field si propone di mostrare proprio questo. Mi limito al suo argomento relativo alla conservatività. Ecco come egli riassume la propria tesi, “in modo un po’ vago” (1980, p. 9): se  $\mathbf{N}$  è un corpo qualsiasi di asserti formulati in un linguaggio nominalista (un linguaggio che non contiene termini che designano oggetti astratti e nel quale le variabili non sono supposte variare su tali oggetti) e  $\mathbf{S}$  una teoria matematica qualsiasi, che supponiamo essere consistente (in particolare una teoria che ammetta principi-ponte che associno oggetti astratti con oggetti concreti), allora un asserto  $\mathbf{A}$ , formulato in un linguaggio nominalista, deriva da  $\mathbf{N} + \mathbf{S}$  solo se deriva anche da  $\mathbf{N}$  da solo. Questa formulazione è vaga perché  $\mathbf{N}$  potrebbe contenere asserti che escludono l’esistenza di oggetti astratti, e quindi  $\mathbf{N} + \mathbf{S}$

potrebbe essere **inconsistente**. Field mostra tuttavia come correggerla: introduce nel linguaggio di  $\mathbf{N}$  e  $\mathbf{A}$  il predicato ‘ $M(x)$ ’ per ‘ $x$  è un oggetto matematico’ e propone di riformulare gli asserti di  $\mathbf{N}$  e  $\mathbf{A}$  in modo che gli oggetti che cadono sotto tale predicato siano esclusi dal dominio dei quantificatori che occorrono in essi. Supponiamo che  $\mathbf{N}^*$  e  $\mathbf{A}^*$  siano ciò che risulta da tale operazione. Field ragiona così (1980, p. 13): se  $\mathbf{A}^*$  derivasse da  $\mathbf{N}^* + \mathbf{S}$  ma non da  $\mathbf{N}^*$ , allora  $\mathbf{N}^* + \neg \mathbf{A}^*$  sarebbe consistente, e la sua negazione sarebbe implicata da  $\mathbf{S}$  (perché  $[(\mathbf{N}^* \wedge \mathbf{S}) \Rightarrow \mathbf{A}^*] \Rightarrow [\mathbf{S} \Rightarrow \neg(\mathbf{N}^* \wedge \neg \mathbf{A}^*)]$  è una tautologia), quindi  $\mathbf{S}$  implicherebbe la negazione di un corpo consistente di asserti a proposito di oggetti concreti e i suoi teoremi non potrebbero così essere veri in tutti i modi possibili. Ma se i teoremi di una teoria matematica sono veri, dovrebbero esserlo in tutti i mondi possibili, quindi se i teoremi di  $\mathbf{S}$  sono veri,  $\mathbf{A}^*$  deriva da  $\mathbf{N}^* + \mathbf{S}$  solo se deriva da  $\mathbf{N}^*$  da solo. Ma se è così, allora si può facilmente provare (Field 1980, p. 108, nota 9) che  $\mathbf{A}^*$  deriva da  $\mathbf{N}^* + \mathbf{S} + \exists x (\neg M(x))$  solo se  $\mathbf{A}$  deriva da  $\mathbf{N}$  da solo.

Resta da mostrare che le teorie delle scienze naturali possano ridursi a un corpo di asserti come  $\mathbf{N}$ , ovvero essere formulate in un linguaggio nominalista. Ciò significa mostrare che la matematica non solo è conservativa rispetto a una teoria come  $\mathbf{N}$ , ma è anche **dispensabile** per le teorie delle scienze naturali (ovvero eliminabile da esse senza che ciò comporti una perdita quanto alle loro capacità espressive). Per farlo, Field presenta un esempio: mostra come riformulare la “teoria newtoniana della gravitazione” in un linguaggio nominalista, in particolare un linguaggio che non contiene nessun termine che designa numeri reali (e quindi anche naturali) e funzioni, e nel quale nessuna variabile è supposta variare su tali oggetti. Mostra dapprima come eliminare le abituali occorrenze di termini numerali, impiegando **quantificatori esistenziali numerici**, come “ $\exists_n x [P(x)]$ ” (che si legge “Esistono esattamente  $n$   $x$  tali che  $P(x)$ ”). Questi possono infatti essere definiti ricorsivamente in termini puramente logici (senza nessun ricorso a termini numerali), seguendo le indicazioni date da Frege nel § 55 delle *Grundlagen*, ovvero così:

$$\exists_0 x [P(x)] \Leftrightarrow \forall x [\neg P(x)] \quad \text{e} \quad \exists_n x [P(x)] \Leftrightarrow \exists y [P(y) \wedge \exists_{n-1} x [P(x) \wedge x \neq y]] .$$

In secondo luogo, Field mostra come eliminare sia i termini che designano numeri reali e funzioni sia le variabili che sono supposte variare su tali oggetti, impiegando rispettivamente al loro posto termini che designano punti e regioni dello spazio e istanti e intervalli del tempo — che, a suo modo di vedere, sono oggetti concreti — e variabili che variano su tali punti e regioni,

e fondandosi per questo sulla versione assiomatica della geometria euclidea proposta da Hilbert (v. sez. 2.2.2).

## 5.8 Un nominalismo realista?

Fra i tanti argomenti che sono stati avanzati contro le tesi di Field, ne considererò uno solo (Shapiro 1997, pp. 75-77; Resnik 1985, pp. 165-169; Petitot 1995, pp. 155-156).

Perché la riformulazione della teoria newtoniana della gravitazione proposta da Field possa considerarsi immune da ogni coinvolgimento con oggetti matematici, occorre sostenere che la geometria euclidea, almeno nella versione proposta da Hilbert, non sia una teoria matematica. Questa è una tesi davvero sorprendente, che ben pochi matematici, fisici e storici della scienza ammetterebbero. Ma per non procedere secondo argomenti d'autorità, consideriamola più in dettaglio. Essa dipende dall'identificazione dei punti e delle regioni dello spazio che intervengono in questa teoria con oggetti concreti. Field ammette tuttavia che su tali punti e regioni possano venire definite opportune operazioni e relazioni, le cui caratteristiche dipendono in modo essenziale dal fatto che essi appartengono a un **continuo**, ciò che è d'altra parte esplicitamente stabilito da uno degli assiomi di Hilbert. Ma se i punti e le regioni dello spazio sono oggetti concreti, ognuno di essi deve poter essere percepito e caratterizzato (almeno ostensivamente) indipendentemente dagli altri, mentre se lo spazio è un continuo, nessuno dei suoi elementi può essere identificato percettivamente in modo distinto, né caratterizzato indipendentemente dallo spazio stesso, preso nel suo insieme. Field sembra quindi ammettere nello stesso tempo due cose fra loro contraddittorie: che i punti e le regioni dello spazio siano oggetti concreti e che possano venire caratterizzati grazie alle relazioni reciproche che li legano in quanto elementi di un sistema. La loro concretezza sembra quindi solo presunta, ma di fatto negata. Lungi dall'essere scevra da ogni contaminazione matematica, la versione di Field della meccanica newtoniana è quindi una teoria matematica e i suoi presunti oggetti concreti sono di fatto astratti. Si noti tuttavia che questo non dipende dal fatto che tale teoria ricorre surrettiziamente ai numeri reali o a funzioni definiti su di essi. Field ha ragione quando osserva che la geometria euclidea, nella versione di Hilbert, non si serve né dei primi, né delle seconde. E ha ragione anche quando afferma che la fisica newtoniana può essere fatta senza ricorrere a tali oggetti. Proprio così l'aveva fatta Newton e molti altri dopo di lui. Ciò non toglie che tanto la geometria di

Hilbert, quanto la fisica di Newton siano teorie matematiche che si avvalgono di termini che designano oggetti astratti.

## 5.9 Finzionalismo

Nonostante queste e altre difficoltà in cui la tesi di Field sembra incorrere, essa ha costituito la base di una posizione oggi abbastanza diffusa, anche se variamente formulata dai suoi sostenitori (per esempio Field 1989 e Yablo 2001): il finzionalismo. Si tratta di pensare la matematica come un'utile finzione atta a costituire un contesto entro il quale si possa riconoscere che certi asserti siano veri; ne seguirebbe che gli oggetti matematici (così come i protagonisti di un romanzo di fantasia) esisterebbero nel contesto di una finzione, pur continuando a non esistere nella realtà.

Fra i tanti problemi che una tale concezione sembra comportare, il principale mi pare quello di stabilire un senso e dei criteri precisi grazie ai quali si possa riconoscere che la finzione in cui la matematica consisterebbe sia effettivamente utile, pur continuando a essere, appunto, una finzione. Mi pare che, correttamente inteso, tale problema sia equivalente a quello a cui il finzionalismo vorrebbe rispondere: il problema di stabilire un senso in cui si possa plausibilmente parlare di oggetti matematici. Più che una soluzione, il finzionalismo mi pare quindi, nella migliore delle ipotesi, una riformulazione di tale problema.

## 6 Vi sono altri modi di formulare o interpretare la domanda ontologica?

Fin qui la domanda ontologica è stata intesa secondo una nozione d'esistenza per così dire primitiva, in base alla quale l'affermazione " $x$  esiste" non si lascia ridurre a nessun'altra affermazione del tipo " $x$  è tale che. . .", dove al posto dei puntini vi sia qualcosa di diverso da " $x$  esiste". Così, quando si domanda che cosa significhi che qualcosa esiste, non si richiede un chiarimento a proposito del significato del termine "esiste" ma solo un criterio d'esistenza; ci si chiede solo: che cosa dobbiamo stabilire di  $x$  per poter concludere che  $x$  esiste?

Entrambi gli argomenti di Benacerraf sembrano presupporre tale nozione d'esistenza e considerare rispetto a essa la possibilità che un oggetto esista e sia il riferimento di un termine singolare. Una strategia per rispondere a questi argomenti, del tutto diversa da quelle a cui si richiamano le risposte

precedenti, consiste nell'interpretare diversamente la domanda ontologica, ripensando la nozione d'esistenza di un oggetto e la possibilità che esso fornisca il riferimento di un termine singolare.

## 7 Il neologicismo

Il programma neologicista, promosso in particolare da Crispin Wright e Bob Hale (Wright 1983; Hale 1987; Hale e Wright 2001, 2000; e, per una traduzione italiana di alcuni articoli importanti, Pedferri 2005), potrebbe essere inteso come un modo di mettere in opera una simile strategia.

### 7.1 Il principio del contesto

Alla base di questo programma vi è un'interpretazione del **principio del contesto** di Frege (“cercare il significato delle parole, considerandole non isolatamente ma nel contesto dell'enunciato”: Frege 1884, Introduzione e §§ 60 e 62) che era già stata prospettata da Dummett (1956, pp. 493-494; 1973, pp. 195, 496-497), per cui sostenere che esistono certi oggetti astratti equivale a sostenere che essi sono denotati da certi **termini singolari** e che questi termini funzionano come termini genuinamente referenziali, ovvero hanno un riferimento, la qual cosa significa, a sua volta, che questi termini intervengono in asserti veri di un genere opportuno.

I neologicisti sostengono che i termini numerali sono singolari e che alcuni asserti (tanto del linguaggio dell'aritmetica quanto di quello quotidiano) in cui intervengono sono veri. In particolare, sostengono che questo è il caso per alcuni asserti d'identità che connettono fra loro dei termini numerici — asserti della forma “Il numero che spetta al concetto  $F$  = il numero che spetta al concetto  $G$ ” — e che la verità di ogni altro asserto in cui intervengono tali termini numerali discende dalla verità di tali asserti. Ne segue che i numeri naturali esistono e costituiscono il riferimento dei questi termini.

### 7.2 Domanda ontologica e nozione di esistenza

I neologicisti rispondono quindi positivamente alla domanda ontologica circa i numeri naturali. Ma lo fanno interpretando questa domanda così: i termini numerici intervengono in opportuni asserti veri nei quali funzionano come termini singolari?

Non mi è chiaro se questo significhi che riducano la domanda ontologica a una domanda semantica — e ammettano quindi che la nozione d'esistenza non sia primitiva, potendo essere chiarita usando nozioni semantiche —, oppure se considerino la nozione di esistenza come primitiva e pensino che la loro risposta positiva alla domanda semantica fornisca un mero criterio d'esistenza.

Se vale la seconda possibilità, tanto la **concezione della verità** quanto le **condizioni di verità** sulle quali si fonda tale risposta devono essere tali che gli asserti che risultano veri in base a esse concordino con la natura e le caratteristiche dei numeri naturali, la cui esistenza e le cui proprietà non dipendono dalla verità di tali asserti. Se vale la prima possibilità, sono le condizioni di verità che, data una certa concezione della verità, decidono dell'esistenza e delle caratteristiche dei numeri naturali. Tali condizioni devono quindi venire stabilite in base a valutazioni che non facciano intervenire nessuna considerazione relativa alla natura dei numeri naturali.

Considerata alla luce del programma neologicista questa alternativa prende una forma particolare.

### 7.3 Il principio di Hume

Secondo i neologicisti, la verità di ogni asserto che faccia intervenire termini numerali discende — oltre che da opportune condizioni logiche e eventualmente da circostanze particolari che riguardano i termini non logici e non aritmetici che intervengono in tali asserti — dall'adozione di un principio che Frege (1884, §§ 62-63) aveva introdotto richiamandosi a un brano di Hume e che per questo è noto come **principio di Hume**. Tale principio fornisce una condizione d'identità relativa a numeri che spettano a concetti, ma Frege aveva negato che esso potesse anche fornire una definizione adeguata per i numeri naturali (v. sez. 2.2.2); i neologicisti pensano invece che possa farlo. Ecco:

Per ogni concetto  $F$  e per ogni concetto  $G$ , il numero che spetta a  $F$  è lo stesso che spetta a  $G$  se e solo se  $F$  e  $G$  sono equinumerosi.

I neologicisti propongono di svincolare questo principio da ogni precedente identificazione dei numeri che spettano a concetti con oggetti opportuni e di considerarlo come un assioma atto a fornire una definizione contestuale di tali numeri su cui basarsi per definire i numeri naturali.

## 7.4 Il teorema di Frege

Questa proposta si fonda su due considerazioni: *i*) ogni attribuzione di un numero a qualcosa può essere intesa come l'affermazione che un certo numero spetta a un certo concetto (v. sez. 2.2.2); *ii*) se il principio di Hume viene formulato nel linguaggio della logica del second'ordine e accompagnato da opportuni assiomi logici, è possibile dedurne gli assiomi dell'aritmetica — e quindi tutti i suoi teoremi — senza ricorrere a nessun'altra risorsa non logica e usando definizioni non problematiche. È inoltre facile mostrare la consistenza del principio di Hume così inteso (Boolos 1998, pp. 151-154).

Il risultato (*ii*) — noto come **teorema di Frege**, perché dimostrabile avvalendosi delle indicazioni date da Frege (1884, §§ 74-83) — è stato anticipato da Wright (1983, p. 153) che ne ha preconizzato una dimostrazione formalizzata quattro anni dopo da George Boolos (1998, pp. 191-195, 217-219). Questa dimostrazione non lascia dubbi, ma le opinioni restano contrastanti a proposito del carattere puramente logico delle risorse che impiega. Il problema (filosofico) di stabilire i confini della logica è infatti lunghi dall'essere risolto — si pensi, per esempio, che per Quine, la stessa logica del second'ordine non è propriamente logica, ma teoria degli insiemi mascherata (Quine 1970, cap. 5, pp. 66-68; Boolos 1998, cap. 3-5) —, e Boolos (pur senza concordare con Quine) aveva idee assai diverse da Wright sullo statuto del principio di Hume.

## 7.5 Principio di Hume e verità

L'alternativa evocata nella sez. 7.2 può allora essere formulata così: per concludere che il principio di Hume fornisca la base su cui edificare una definizione accettabile per il concetto sortale  $\ulcorner$ (essere un) numero naturale $\urcorner$ , e quindi le condizioni di verità che si applicano agli asserti in cui intervengono termini numerici, è sufficiente richiamarsi a (*i*) e (*ii*), oppure è necessario accertarsi che questo principio sia tale che gli asserti che risultano veri in base a esso lo sono in quanto concordano con la natura e le caratteristiche dei numeri naturali?

Si noti che il principio di Hume può fornire la base di una tale definizione, ma non può da solo costituirla. Se il numero che spetta a un dato concetto coincide, infatti, con il numero degli oggetti che cadono sotto tale concetto, come segue dalla dimostrazione del teorema di Frege, allora vi sono necessariamente dei concetti ai quali non può spettare un numero naturale. Uno

fra questi è proprio il concetto  $\lceil$ (essere un) numero naturale $\rceil$ , sotto il quale cadono infiniti oggetti. I numeri naturali sono quindi soltanto una parte dei numeri che spettano a concetti. Ne segue che per definirli è necessario caratterizzarli fra gli altri. E per questo occorre aggiungere al principio di Hume delle definizioni opportune. Proprio questo è ciò che viene fatto nel corso della dimostrazione del teorema di Frege. Sostenere che tale dimostrazione è puramente logica significa sostenere, fra l'altro, che ciò può essere fatto senza uscire dai limiti della logica.

## 7.6 L'analiticità del principio di Hume

I neologicisti non sostengono solo che il principio di Hume fornisce la base di una definizione accettabile per il concetto sortale  $\lceil$ (essere un) numero naturale $\rceil$ , ma anche che: *a*) questa definizione è la sola legittima. Ne segue che non possono ammettere la possibilità di un argomento, indipendente da tale principio, atto a stabilire che un asserto che contenga termini numerali sia vero: tutto ciò che sappiamo (e possiamo sapere) a proposito dei numeri naturali deve essere fatto discendere da tale definizione.

I neologicisti sostengono inoltre (Hale e Wright 2001, p. 312) che: *b*) questo principio, inteso come definizione contestuale, è **analitico**, in quanto la sua parte sinistra fornisce una “**riconcettualizzazione** del tipo di stati di cose descritto” dalla sua parte destra.

La nozione di analiticità che interviene in questo argomento è diversa da quella di Frege (v. sez. 1.2) e anche da quella odierna di **verità logica** (Boolos 1998, cap. 19; Hale & Wright 2001, cap. 13). Secondo l'interpretazione neologicista del teorema di Frege, gli assiomi dell'aritmetica sono una conseguenza logica dal principio di Hume. Siccome la loro congiunzione è vera soltanto in un mondo popolato da infiniti individui, i neologicisti dovrebbero riconoscere che tale principio non è una verità logica, in quanto è contraddetta in tutti i **mondi possibili** popolati da un numero finito di individui.

Essi ritengono tuttavia che la loro nozione di analiticità (che si richiama a quella di riconcettualizzazione) è adeguata per permettere loro di ragionare così: il principio di Hume è analitico; gli assiomi dell'aritmetica ne sono una conseguenza logica; quindi i numeri naturali sono oggetti logici.

## 7.7 Il principio di Hume e il dilemma di Benacerraf

Ma si potrebbe anche ragionare come segue: i numeri naturali sono oggetti logici; i teoremi dell'aritmetica non possono quindi derivare che da principi analitici; *ergo*, la definizione del concetto sortale  $\ulcorner$ (essere un) numero naturale $\urcorner$  fornita dal principio di Hume è legittima, mentre non lo è nessun'altra definizione che si serva di un principio non analitico. Se si volesse usare questo argomento per sostenere che tale definizione è la sola legittima, ovvero dedurre (a) da (b), si dovrebbe anche essere disposti a riconoscere che il principio di Hume non assegna ai numeri naturali la natura di oggetti logici, ma è piuttosto giustificato, in quanto fonte della sola definizione legittima del concetto sortale  $\ulcorner$ (essere un) numero naturale $\urcorner$ , in base a tale natura.

Ma se così fosse, allora i numeri naturali dovrebbero avere una certa natura indipendentemente dal principio di Hume. Si porrebbe così il problema di stabilire che cosa potrebbe permetterci di riconoscere questa loro natura. E in tal modo si riproporrebbe il problema dell'accesso e quindi il dilemma di Benacerraf.

Tale problema sarebbe invece risolto se si riconoscesse che la natura dei numeri naturali dipende dal principio di Hume: ciò equivarrebbe a riconoscere che la nozione di esistenza non è primitiva, ovvero che la domanda ontologica si riduce alla domanda semantica e che il principio di Hume ne fornisce una risposta, la cui legittimità non discende dal fatto che questo principio si accorda con la natura dei numeri naturali. Infatti, supposta la conoscenza delle condizioni non aritmetiche rilevanti, la verità degli asserti che contengono termini numerici dipenderebbe soltanto dalla loro deducibilità da questo principio, così come la nostra conoscenza del contenuto di tali asserti. Ma si porrebbe allora il problema di giustificare (a).

Per comprendere la natura di questo problema, torniamo a quello di Cesare.

## 7.8 Il problema di Cesare e la risposta al primo argomento di Benacerraf

Per risolvere il problema di Cesare, i neologicisti si richiamano al principio seguente (Wright 1983, pp. 116-177; Hale e Wright 2001, pp. 262, 369):

$G$  è un concetto sortale sotto il quale cadono i numeri naturali soltanto se vi sono (o potrebbero esserci) dei termini singolari ' $a$ '

e 'b' suscettibili di denotare esempi di  $G$ , tali che le condizioni di verità dell'asserto ' $a = b$ ' possano essere adeguatamente spiegate riconducendole a quelle di un qualche asserto che asserisce che due concetti opportuni sono fra loro equinumerosi.

Secondo i neologicisti, questo principio è una conseguenza non problematica del principio di Hume, implica che Giulio Cesare non è un numero naturale e fornisce una risposta al primo argomento di Benacerraf, permettendo di concludere (Wright 1983, p. 123) che gli insiemi di Zermelo (ognuno dei quali è equinumeroso con tutti gli altri) non possano venire identificati con i numeri naturali.

Si potrebbe ribattere che — come Wright riconosce — non basta scartare la gerarchia di Zermelo per individuare una sola progressione i cui elementi possano, in base al principio precedente, venire identificati con i numeri naturali. Allo stesso modo, una volta scartati tutti gli oggetti che, come Giulio Cesare, non si adattano al principio precedente, non si è ancora pervenuti a individuare quelli che s'identificano con i numeri naturali.

Resta tuttavia che i neologicisti non intendono dirci che cosa siano i numeri naturali, ma si limitano a fornirne una definizione contestuale. La loro risposta al primo argomento di Benacerraf consiste quindi nel riconoscere che da tale definizione segue che né Giulio Cesare né nessun altro oggetto indesiderabile è un numero naturale.

## 7.9 Che cosa ci autorizza a scartare la gerarchia di Zermelo?

Ma anche se la si ammettesse, questa risposta porterebbe a una vittoria di Pirro. Gli insiemi di Zermelo soddisfano gli assiomi dell'aritmetica; perché non dovrebbero allora potersi identificare con i numeri naturali? Come potremmo ammettere che un principio che esclude questa possibilità sia fonte della sola definizione legittima del concetto sortale  $\ulcorner$ (essere un) numero naturale $\urcorner$ ? Quale che sia questa ragione, non può dipendere dalla natura dell'aritmetica. Ma allora da che cosa dipende? Dopo essere stato fatto uscire dall'uscio, il problema posto dal primo argomento di Benacerraf sembra quindi rientrare dalla finestra.

## 7.10 Come giustificare la definizione neologicista dei numeri naturali?

Si potrebbe rispondere che tale ragione dipende dall'uso dei termini numerali nel linguaggio quotidiano (v. sez. 5.1). Ma occorrerebbe allora trovare due argomenti supplementari: il primo, per sostenere questa risposta (convincendoci così che i numeri naturali non sono oggetti prettamente aritmetici); il secondo, per sostenere che l'uso dei termini numerali nel linguaggio quotidiano giustifica (a). Ma non mi pare che argomenti simili siano disponibili e trovo difficile immaginare che possano esserlo. E anche se lo fossero, sarebbero difficilmente estensibili al caso di altri oggetti matematici, designati da termini che non hanno occorrenze significative nel linguaggio quotidiano. Il caso dei numeri reali — cui i neologicisti credono possibile estendere le loro tesi, fornendo opportune addizioni al principio di Hume (Hale 2000; Hale e Wright 2001, cap. 15) — è emblematico: quali occorrenze di termini come “ $\sqrt{2}$ ”, “ $\pi$ ”, o “ $\log \sqrt[5]{7}$ ” nel linguaggio quotidiano potrebbero mai guidarci nella scelta di una definizione appropriata dei numeri reali?

Nella sez. 7.7, abbiamo d'altra parte visto che (a) non può essere giustificata richiamandosi all'analiticità del principio di Hume, pena il risorgere del problema dell'accesso. Ma allora, a quale argomento dovremmo richiamarci per giustificare (a)? Questa mi pare la domanda principale cui i neologicisti dovrebbero rispondere.

## 8 Lo strutturalismo

Un altro modo per mettere in opera la strategia indicata nella sez. 6 è quello suggerito dallo strutturalismo. L'idea essenziale è la seguente: la matematica concerne **strutture** relazionali che fissano condizioni che caratterizzano certi ruoli o funzioni, piuttosto che oggetti particolari.

### 8.1 Lo strutturalismo di Benacerraf

Benacerraf (1965, p. 70) ha sostenuto per esempio che “i numeri [naturali] non sono affatto oggetti”, poiché in aritmetica i numeri naturali sono definiti caratterizzando una struttura astratta, i cui elementi “non hanno nessuna proprietà se non quelle che li mettono in relazione con altri elementi della stessa struttura”.

## 8.2 Strutture *versus* oggetti?

In tal modo la nozione di struttura si oppone a quella di oggetto: l'aritmetica non tratta di oggetti, ma della struttura di progressione.

Questa opposizione risulta tuttavia perspicua solo localmente, per esempio quando è riferita alla sola aritmetica. Ma che dire, invece, della teoria dei gruppi o di quella delle funzioni a variabili reali? Un gruppo è certamente una struttura (una coppia  $\langle E, * \rangle$ , dove  $E$  è un insieme e  $*$  un'operazione definita su di esso che soddisfa certe condizioni), ma la teoria dei gruppi non studia questi ultimi in quanto elementi di un'altra struttura; studia piuttosto le proprietà di ogni gruppo e le diverse forme che la struttura di gruppo può assumere. I numeri reali sono certamente elementi di una struttura, ma le funzioni a variabili reali (ovvero le funzioni i cui argomenti sono numeri reali) non sono definite abitualmente come elementi di un'altra struttura, ma come leggi che operano sui numeri reali.

Appare quindi preferibile evitare di contrapporre oggetti e strutture e pensare le strutture come reti di relazioni fra oggetti che possano venire studiate come tali oppure messe in relazione con altre strutture, formando nuove strutture di livello superiore. Vi sono vari modi per farlo.

## 8.3 Lo strutturalismo eliminativo

Una prima forma di strutturalismo, il cosiddetto **strutturalismo eliminativo** (descritta, ma non sostenuta, da Shapiro 1997, pp. 85-88), deriva da una generalizzazione dell'opzione discussa nella sez. 5.2: una struttura è la forma astratta di differenti sistemi di oggetti, i quali esistono indipendentemente da essa; una struttura può essere definita come tale, senza definire degli oggetti che formino un sistema che la esemplifica, limitandosi a stabilire le condizioni relazionali che questi devono soddisfare, ma una tale definizione non ne implica l'esistenza; una struttura non esiste se non esiste un sistema di oggetti che la esemplifica.

Basta tuttavia definire una struttura per stabilire che i suoi eventuali elementi dovrebbero godere di certe proprietà relazionali. Questo è quanto ci dice un asserto matematico. Ne segue che esso dovrebbe essere riformulato come un asserto universalmente quantificato riguardante i sistemi di oggetti che esemplificano una certa struttura. Un teorema  $t$  dell'aritmetica, come "Tre è un numero primo", dovrebbe quindi venire riformulato così: "Per

ogni sistema di oggetti  $S$ , se  $S$  esemplifica la struttura di progressione, allora l'oggetto che occupa il posto di tre in  $S$  è  $S$ -primo".

### 8.3.1 Gli asserti a proposito di una struttura che non esiste non possono essere falsi

Ma se non esistesse nessun sistema di oggetti che esemplifica una struttura  $\Sigma$ , allora ogni asserto della forma "Per ogni sistema di oggetti  $S$ , se  $S$  esemplifica la struttura  $\Sigma$ , allora ..." sarebbe **vacuamente vero** (un asserto come " $A \Rightarrow B$ " o " $\forall x [\mathcal{A}(x) \Rightarrow \mathcal{B}(x)]$ " è vacuamente vero se gli asserti " $A$ " o " $\exists x [\mathcal{A}(x)]$ " sono falsi). Se risultasse quindi che non esiste nessun sistema di oggetti che esemplifica la struttura di progressione, allora ogni asserto matematico sarebbe vero e lo sarebbero quindi tanto "Tre è un numero primo", che "Tre non è un numero primo" o anche "Ventisette è un numero pari".

La conclusione è ovvia: lo strutturalista eliminativo può fornire una risposta accettabile alla domanda ontologica, solo se possiede le risorse per assicurare l'esistenza di sistemi di oggetti che, come le gerarchie di von Neumann e Zermelo, esemplificano le strutture di cui tratta la matematica.

### 8.3.2 Lo strutturalismo eliminativo modalizzato

Questa difficoltà può essere evitata adottando uno **strutturalismo eliminativo modalizzato** (Hellman 1989), secondo il quale gli asserti matematici devono interpretarsi come asserti riferiti a sistemi di oggetti possibili. L'asserto "Tre è un numero primo" sarebbe allora reso così: "Per ogni possibile sistema di oggetti  $S$ , se  $S$  esemplifica la struttura di progressione, allora l'oggetto che occupa il posto di tre in  $S$  è  $S$ -primo". Il problema diverrebbe allora quello di spiegare la nozione di possibilità cui ci si riferisce e di chiarire il modo in cui sappiamo che qualcosa è possibile e perveniamo a conoscerlo (su queste difficoltà, v. Shapiro 1997, pp. 88-89, 228-229).

## 8.4 Lo strutturalismo *ante rem*

Lo strutturalismo eliminativo richiede una reinterpretazione degli asserti matematici che assegna loro una struttura differente da quella che è *prima facie* manifestata dalla loro forma grammaticale. Delle considerazioni di natura filosofica si antepongono così alla pratica matematica che dovrebbe invece

venire interpretata e spiegata come tale. Questo è almeno il parere di Shapiro (1997) che ha proposto una versione dello strutturalismo compatibile con l'assunzione che la struttura semantica degli asserti matematici è quella manifestata dalla loro forma grammaticale. Si tratta dello **strutturalismo ante rem**.

#### 8.4.1 Ontologia

Shapiro dà una risposta positiva alla domanda ontologica, ma riconosce che gli oggetti matematici sono oggetti *sui generis*: si identificano con i ruoli previsti in una struttura, o, come egli dice, con le posizioni in una struttura.

Ne segue che i termini numerici sono singolari: possiedono uno e un solo riferimento costituito da una posizione nella struttura di progressione. I numeri naturali esistono in quanto esiste questa struttura, la quale, a sua volta, non ha bisogno per esistere dell'esistenza preventiva né delle sue posizioni né dei sistemi che la soddisfano: per un oggetto matematico esistere significa solo essere una posizione in una struttura.

Una struttura esiste, a sua volta, come esiste un insieme, in quanto posizione nella teoria degli insiemi. Una struttura è una posizione nella **teoria delle strutture**, una teoria assiomatica, assai simile a quella degli insiemi, elaborata dallo stesso Shapiro (1997, pp. 90-97). Questa teoria fissa le condizioni d'esistenza di strutture generiche: perché una teoria particolare esista, essa deve essere definita in modo compatibile con i vincoli posti da tale teoria.

#### 8.4.2 Semantica

Per identificare gli oggetti matematici con posizioni in una struttura occorre interpretare sia gli assiomi e le definizioni che caratterizzano tale struttura, sia le loro conseguenze come degli asserti che affermano che certi oggetti godono di certe proprietà e stanno in certe relazioni; ammettere che tali oggetti sono a loro volta caratterizzati dal fatto di godere di tali proprietà e di essere in tali relazioni. Da qui a riconoscere che questi asserti sono veri non vi è che un passo che dipende solo dall'adozione di un'opportuna convenzione terminologica.

La posizione dello strutturalista *ante rem* è allora, sotto questo aspetto, equivalente a quella del neologicista: essere un oggetto matematico signi-

fica essere designato da un termine singolare che interviene in un *corpus* opportuno di asserti veri.

### 8.4.3 La dissoluzione del problema di Cesare

La differenza è che, secondo lo strutturalista *ante rem*, un asserto che asserisce qualcosa di un oggetto matematico è **ben formato** solo se è formulato nel linguaggio di una determinata struttura. Il problema di Cesare è quindi dissolto: un asserto quale “Il numero tre è Giulio Cesare” non è falso; è semplicemente mal formato.

### 8.4.4 Epistemologia

Resta da stabilire come è possibile avere conoscenza matematica, ovvero come è possibile conoscere le strutture. Secondo Shapiro questo si può fare in tre modi.

Alcune strutture di piccola dimensione possono essere conosciute attraverso un contatto percettivo con certi sistemi che le esemplificano: si tratta del fenomeno che gli psicologici cognitivi chiamano “*pattern recognition*”.

Altre strutture possono essere conosciute attraverso un processo di **astrazione** linguistica: sia per estensione, eventualmente indefinita, di un processo atto a generare delle strutture conosciute nel primo modo; sia tramite il riconoscimento di una **relazione di equivalenza** fra oggetti già dati e la conseguente definizione di diverse **classi di equivalenza** di tali oggetti, le quali vengono a formare una nuova struttura. Ecco un esempio semplice della prima possibilità (Shapiro 1997, pp. 118-119). Supponiamo di vedere dei sistemi di barrette verticali come questi |, ||, |||, ||||, e di riconoscere in essi degli esempi di certe strutture che chiamiamo “uno”, “due”, “tre”, “quattro” (si noti che questi non sarebbero ancora, in senso proprio, dei numeri naturali, ma solo degli antecedenti proto-percettivi di tali numeri); possiamo allora imparare a estendere tali sistemi aggiungendo | ogni volta e pervenire a conoscere la struttura di progressione, in quanto struttura esemplificata dal sistema di sistemi |, ||, |||, ||||, . . . Ecco ora un esempio della seconda possibilità. Immaginiamo che i numeri naturali siano dati, così come la relativa operazione di moltiplicazione; possiamo allora formare delle coppie di tali numeri (in cui il secondo non sia mai 0) e definire su di esse una relazione di equivalenza stabilendo che  $(n, m)$  e  $(p, q)$  sono equivalenti se e solo se  $nq = mp$ ; le classi d’equivalenza relative a tale relazione formeranno

una nuova struttura, quella dei numeri frazionari — o meglio, razionali — positivi.

Infine, una struttura può essere conosciuta tramite la presa in esame della sua definizione implicita fornita da un opportuno sistema di assiomi.

#### 8.4.5 La risposta al dilemma di Benacerraf

È chiaro che nel secondo e nel terzo caso una struttura è conosciuta, secondo Shapiro, in quanto è costituita dal soggetto che la conosce, o da altri soggetti che entrano in relazione con questo, comunicandogli una descrizione di essa.

Questo non significa che gli oggetti matematici siano nostre libere creazioni, poiché la loro costituzione può sottostare a vincoli indipendenti da noi. Ma resta il fatto che per lo strutturalista *ante rem* un asserto matematico è reso vero dalle caratteristiche di una struttura e la nostra conoscenza matematica è dovuta alla nostra capacità di entrare in contatto con tali caratteristiche, attraverso un processo che consiste assai spesso e in larga parte in un vero e proprio atto di costituzione compiuto da noi o da altri soggetti con i quali entriamo in contatto attraverso un linguaggio opportuno. Il dilemma di Benacerraf riceve quindi una risposta assai semplice.

#### 8.4.6 Il problema dell'identità

Dal mio punto di vista, lo strutturalismo *ante rem* è una posizione largamente soddisfacente. Questo non significa che non presenti difficoltà e non richieda ulteriori sviluppi.

Una difficoltà è il **problema dell'identità** (Keränen 2001). Molte strutture matematiche presentano una simmetria interna, che in termini tecnici si descrive come un **automorfismo**: una funzione biiettiva da una struttura verso se stessa che conserva le relazioni interne (una funzione biiettiva è una legge che associa ognuno degli elementi di un insieme a uno e un solo elemento di un altro insieme e che è tale che ogni elemento di quest'ultimo insieme risulta in tal modo associato a uno e un solo elemento del primo insieme).

Un semplice esempio è quello del gruppo  $\langle \mathbb{Z}, + \rangle$  costituito dall'insieme dei numeri relativi  $(0, 1, 2, \dots; -1, -2, \dots)$  e dall'addizione definita su di essi, il quale presenta un automorfismo che corrisponde al cambiamento di segno dei suoi elementi: supponendo che per ogni numero relativo  $h$ ,  $\varphi$  sia l'automorfismo che associa  $h$  a  $-h$  (ovvero:  $\varphi(h) = -h$ ), è chiaro che per ogni coppia di numeri relativi  $h$  e  $k$ ,  $\varphi(h + k) = \varphi(h) + \varphi(k)$ . Se restiamo

all'interno di tale gruppo e caratterizziamo i suoi oggetti in termini puramente relazionali, non vi è quindi modo di distinguere il numero 1 dal numero  $-1$ ; l'asserto "1 è identico a  $-1$ " è quindi vero. Per poter dire che è falso bisogna ricorrere a condizioni di verità extra-strutturali. Lo stesso vale per ogni struttura sulla quale può essere definito un automorfismo.

## 8.5 Strutturalismo e intuizione

Lo strutturalista *ante rem* potrebbe riconoscere la possibilità che due oggetti matematici distinti godano esattamente delle stesse proprietà intra-strutturali (osservando a esempio che questo è ovviamente il caso per i punti nella geometria di Euclide) e negare quindi che l'asserto "1 è identico a  $-1$ ", riferito agli oggetti di  $\langle \mathbb{Z}, + \rangle$ , sia vero (Shapiro 2006). Ma occorrerebbe allora, mi pare, richiamarsi a qualcosa come un'intuizione che possa intervenire localmente per distinguere questi oggetti fra loro. In questo modo non si negherebbero le fondamenta stesse dello strutturalismo e non si riaprirebbero le porte al dilemma di Benacerraf?

Per rispondere negativamente, ci si potrebbe richiamare alla distinzione proposta da Parsons (1980) fra **oggetti astratti quasi concreti** e **oggetti astratti puri**. Mentre i secondi sarebbero del tutto indipendenti da ogni oggetto concreto, i primi sarebbero rappresentati da opportuni oggetti concreti che contribuirebbero a stabilirne le proprietà. L'esempio tipico è quello di un triangolo, la cui figura fisica può essere fatta intervenire in molte dimostrazioni di teoremi geometrici. Secondo Parsons, vi sarebbe intuizione di oggetti astratti quasi concreti se alla percezione delle loro rappresentazioni si accompagnasse il riconoscimento del fatto che esse forniscono dei *token* concreti di *type* astratti. È in fondo ciò che avviene nella prima forma di conoscenza di una struttura proposta da Shapiro.

In un celebre articolo del 1922 (GA3, pp. 157-177; RFMA, pp. 189-213), nel quale presenta il proprio programma formalista, Hilbert prospetta un'idea simile, distinguendo fra dimostrazioni **formali** e argomentazioni **contenutuali** (o contenutistiche): le prime si richiamerebbero a opportuni sistemi di assiomi, le seconde riguarderebbero oggetti che possono venire esibiti piuttosto che definiti e consisterebbero nella constatazione diretta delle proprietà di tali oggetti. Come esempio, Hilbert fornisce una versione ristretta dell'aritmetica, in cui i numeri naturali sono immediatamente identificati con diagrammi quali  $1 + 1 + 1 + 1$ , sottoposti a regole di formazione e trasformazione esplicite. Analogamente, Parsons si propone di mostrare che gli assiomi

elementari dell'aritmetica (ovvero tutti, tranne **l'assioma d'induzione**, che assicura che i numeri naturali sono tutti e solo i successori di 0) possono derivare dall'esame di stringhe di barrette verticali come ||||.

La matematica non può certo essere ridotta a un corpo di conoscenze derivanti da argomenti contentuali. Ma si potrebbe sostenere che la definizione di una struttura matematica si accompagna a forme di rappresentazione che fanno sì che certi oggetti strutturali si comportino come oggetti quasi concreti. Si potrebbe ammettere, per esempio, che per definire il gruppo  $\langle \mathbb{Z}, + \rangle$  occorre non solo stabilire un sistema di assiomi, ma anche caratterizzare un elemento di tale gruppo come l'elemento rappresentato dal segno "1" e richiamarsi a esso per definire il suo inverso  $-1$  e tutti i restanti numeri relativi.

La distinzione fra oggetti concreti e oggetti astratti quasi concreti può venire concepita come equivalente a quella fra oggetti percettivi e oggetti empirici. Se accettiamo l'idea che le scienze fisiche e naturali trattano di oggetti empirici, non possiamo ammettere, infatti, che tali oggetti siano percettivi. Essi sarebbero piuttosto oggetti complessi, costituiti tramite un processo d'edificazione teorica, le cui proprietà sarebbero rivelate, fra l'altro, tramite considerazioni percettive. Una teoria dell'intuizione degli oggetti astratti quasi concreti simile a quella di Parsons, associata a una concezione strutturalista dell'ontologia matematica, potrebbe allora fornire la base di una filosofia della matematica empirista che non pretendesse di ridurre la matematica a una costruzione giustificata su basi puramente empiriche e, ancor meno, percettive.

Si tratta di una prospettiva largamente inesplorata, ma proprio per questo mi pare opportuno richiamarmi a essa in conclusione di una rassegna che, come questa, si propone di fornire un quadro di una discussione che è tuttora in corso.

## 9 Esercizi

**Esercizio 1** *La domanda "Giulio Cesare è un numero naturale?" può sembrare bizzarra. Ricostruite un contesto nel quale ponga un problema filosofico cruciale e formulate tale problema in generale. Cercatene poi una soluzione diversa da quelle che ho esposto.*

**Soluzione.** Si ragioni su ciò che significa definire un oggetto astratto. Si cerchino delle definizioni adeguate dei numeri naturali e, se se ne trovano più

di una, ci si chieda quali relazioni devono avere fra loro (sono equivalenti? e se sì, in base a quale condizione di equivalenza?)

**Esercizio 2** *Definite l'addizione sui numeri naturali intesi come gli elementi della gerarchia di Zermelo (v. sez. 2.3.4).*

**Soluzione.** Ricorsivamente. Per ogni coppia di numeri naturali  $n$  e  $m$ :  
 $n + \emptyset = n$ ;  $n + \{m\} = \{n + m\}$ .

**Esercizio 3** *Formulate un'obiezione alle tesi di Field diversa da quella presentata nell sez. 5.8.*

**Esercizio 4** *Nella sez. 7.5 si è detto che se i numeri naturali sono definiti basandosi sul principio di Hume, e in accordo alla dimostrazione del teorema di Frege, vi sono necessariamente dei concetti cui non può spettare un numero naturale. Dimostrate.*

**Soluzione.** Si studino attentamente i §§ 72-85 delle *Grundlagen* e li si confrontino con la dimostrazione di Boolos del teorema di Frege (Boolos 1998, pp. 191-195, 217-219).

**Esercizio 5** *Cercate argomenti a favore o contro la tesi che asserisce che il principio di Hume è analitico. Valutate se i vostri eventuali argomenti a favore sono compatibili con l'impiego di tale premessa in ulteriori argomenti a sostegno della tesi (a) della sez. 7.6. Cercate altri argomenti a favore di tale tesi e provate a criticarli.*

**Soluzione.** Per l'analiticità del principio di Hume, confrontate i vostri argomenti con quelli di Wright e Boolos (Hale & Wright 2001, cap. 13; Boolos 1998, cap. 19). Per il resto, i problemi sono aperti.

**Esercizio 6** *Nella sez. 8.4 non ho esposto esplicitamente le ragioni che fanno sì che lo strutturalismo ante rem non cada nel problema posto dal primo argomento di Benacerraf. Provate a esporle voi.*

**Soluzione.** Per lo strutturalista *ante rem*, un sistema di insiemi particolari è al più un'esemplificazione della struttura di progressione.

**Esercizio 7** Nella sez. 8.5 ho accennato a un esempio di matematica contentuale proposto da Hilbert costituito da una versione ristretta dell'aritmetica in cui i numeri naturali sono identificati con diagrammi quali  $1 + 1 + 1 + 1$ . Fornite le regole di buona formazione di tali diagrammi e definite l'operazione di addizione su di essi, poi dimostrate che essa è commutativa. Chiedetevi: per condurre tale dimostrazione è necessario aver dimostrato in precedenza che l'addizione è associativa? Alla luce di questo esempio, riflettete sul ruolo che gli assiomi hanno in una teoria matematica non contentuale.

**Soluzione.** Leggete l'articolo di Hilbert del 1922. È semplice, chiarissimo e illuminante.

## Riferimenti bibliografici

Benacerraf, P. (1965) *What Numbers Could not Be*, in "The Philosophical Review", 74, pp. 47-73.

Benacerraf, P. (1973) *Mathematical Truth*, in "Journal of Philosophy", 70, pp. 661-680.

Boolos, G. (1998) *Logic, Logic and Logic*, Harvard Univ. Press, Cambridge (Mass.), London.

Brouwer, L. E. J. (CW1) *Collected Works*, vol. I, *Philosophy and Foundations of Mathematics* (edited by A. Heyting), North-Holland P. C., Amsterdam, 1975.

Brouwer, L. E. J. (CL) *Brouwer's Cambridge Lectures on Intuitionism* (edited by D. van Dalen), Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1983.

Casalegno, P e Mariani, M. (2004) *Teoria degli insiemi. Un'introduzione*, Carocci, Roma.

Cellucci, C. (1977) (a cura di), *La filosofia della matematica*, Laterza, Bari, 1977.

Dehaene, S. (1997) *The Number Sense : How the Mind Creates Mathematics*, Oxford Univ. Press, New York.

Dummett, M. (1956) *Nominalism*, in "The Philosophical Review", 65, pp. 491-505.

Dummett, M. (1973) *Frege: Philosophy of Language*, Duckworth, London.

Dummett, M. (1991) *Frege: Philosophy of Mathematics*, Duckworth, London.

Doridot, F. & Panza, M. (2004) *À propos des apports des sciences cognitives à la philosophie des mathématiques*, in "Intellectica", 39/2, pp. 263-287.

Engel, P. (1995) *Platonisme mathématique et antiréalisme*, in M. Panza e J.-M. Salanskis (a cura di), *L'objectivité mathématique. Platonismes et structures formelles*, Masson, Paris, pp. 133-146.

Field, H. (1974) *Quine and the Correspondence Theory*, in "The Philosophical Review", 83, pp. 200-228.

Field, H. (1980) *Science Without Numbers*, Princeton Univ. Press, Princeton.

Field, H. (1989) *Realism, Mathematics and Modality*, Basil Blackwell, New York.

Fine, K. (2002) *The Limits of Abstraction*, Oxford Univ. Press, Oxford, New York.

Frege, G. (1884) *Die Grundlagen der Arithmetik [...]*, Wilhelm Koebner, Breslau; traduzione inglese: *The Foundations of Arithmetic* (a cura di J. L. Austin), Basil Blackwell, Oxford, 1950; traduzione italiana: *I fondamenti dell'aritmetica*, in G. Frege, *Logica e aritmetica* (a cura di C. Mangione), I I edizione, Boringhieri, Torino, 1977, pp. 207-349.

Frege, G. (1893-1903) *Grundgesetze der Arithmetik [...]*, Pohle, Jena (2 voll.); traduzione italiana parziale: *I principi dell'aritmetica*, in G. Frege, *Logica e aritmetica* (a cura di C. Mangione), II edizione, Boringhieri, Torino, 1977, pp. 475-594.

Garavaso, P. (1998) *Filosofia della matematica*, Guerini, Milano.

Garavaso, P. (2002) *Filosofia della matematica*, in F. d'Agostini e N. Vassallo, *Storia della filosofia analitica*, Einaudi, Torino, 275-296.

Gödel, K. (1947) *What is Cantor's continuum problem?*, in "American Mathematical Monthly", 54, 1947, pp. 515-525; ripubblicato in versione modificata e ampliata in P. Benacerraf e H. Putnam, *Philosophy of Mathematics*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, II edizione, 1983, pp. 470-485.

Hale, B. (1987) *Abstract Objects*, Blackwell, Oxford.

Hale, B. (2000) *Reals by abstraction*, in "Philosophia Mathematica", 8, pp. 304-321.

Hale, B. e Wright, C. (2001) *The Reason's Proper Study*, Clarendon Press, Oxford.

Hale, B. e Wright, C. (2002) *Benacerraf's Dilemma Revised*, in "European Journal of Philosophy", 10, pp. 101-129.

Hallet, M. (1984) *Cantorian set theory and limitation of size*, Clarendon Press, Oxford.

Heijenoort, J. von (1967) (a cura di) *From Frege to Gödel*, Harvard Univ. Press, Cambridge (Mass).

Hellman, G. (1989) *Mathematics without Numbers*, Clarendon Press, Oxford.

Hilbert, D. (1899) *Grundlagen der Geometrie*, Teubner, Leipzig; traduzione inglese: *Foundations of Geometry* (edited by E. Townsend), Open Court, La Salle (Illinois), 1959.

Hilbert, D. (GA3) *Gesammelte Abhandlungen*, vol. 3, Springer, Berlin, 1935 (3 voll.).

Hilbert, D. (RFMA) *Ricerche sui fondamenti della matematica* (a cura di V. M. Abrusci), Bibliopolis, Napoli, 1978.

Keränen, J. (2001) *The Identity Problem of Realist Structuralism*, in “*Philosophia Mathematica*”, 9, pp. 308-330.

Kitcher, P. (1983), *The Nature of Mathematical Knowledge*, Oxford Univ. Press, New York.

Lakatos, I. (1976) *Proofs and Refutations* (a cura di J. Worrall e E. Zahar), Cambridge Univ. Press, Cambridge; traduzione italiana: *Dimostrazioni e confutazioni* (a cura di G. Giorello), Feltrinelli, Milano, 1979.

Lakatos, I. (1978) *Mathematics, Science and Epistemology* (a cura di J. Worrall e G. Currie), Cambridge Univ. Press, Cambridge; traduzione italiana: *Matematica, scienza e epistemologia*, (a cura di Marcello d’Agostino), Il Saggiatore, Milano, 1985.

Maddy, P. (1980), *Perception and Mathematical Intuition*, in “*The Philosophical Review*”, 99, pp. 163-196.

Maddy, P. (1990), *Realism in Mathematics*, Clarendon Press, Oxford.

Maddy, P. (1997) *Naturalism in Mathematics*, Clarendon Press, Oxford.

Mill, J. S. (1843) *A system of logic, ratiocinative and inductive [...]*, John W. Parker, London; traduzione italiana (a cura di G. Facchi): *Sistema di logica : raziocinativa e induttiva [...]*, Ubaldini, Roma, stampa 1986.

Neumann, von J. (1923) *Zur Einführung der transfiniten Zahlen*, in “*Acta litt. ac sci. Reg. Univ. Hungaricæ Francisco-Josephinæ, Sect. Sci. Math.*”, 1, pp. 199-208; traduzione inglese citata in: von Heijenoort (1967), pp. 346-354.

Panza, M. (1995) *Platonisme et intentionalité*, in M. Panza e J.-M. Salanskis (a cura di), *L’objectivité mathématique. Platonismes et structures formelles*, Masson, Paris, pp. 85-132.

Panza, M. (2003) *Mathematical proofs*, in “*Synthese*”, 134, pp. 119-158.

Parsons, C. (1980) *Mathematical intuition*, in “*Proceedings of the Aristotelian Society*”, 80, pp. 145-168.

- Peano, G. (1889) *Arithmetices principia, nova methodo exposita*, Bocca, Augustæ Taurinorum; ora in G. Peano, *Opere Scelte*, Cremonese, Roma, 1957-1959, vol. II, pp. 20-55.
- Pedefferri, A. (2005) (a cura di) *Frege e il neologicismo*, Franco Angeli, Milano.
- Petitot, J. (1995), *Pour un platonism transcendantal*, in M. Panza e J.-M. Salanskis (a cura di), *L'objectivité mathématique. Platonismes et structures formelles*, Masson, Paris, pp. 147-178.
- Putnam, H. (1971) *Philosophy of Logic*, Harper Torchbooks, New York.
- Quine, W. V. O. (1969) *Ontological Relativity and Other Essays*, Columbia Univ. Press, New York e London.
- Quine, W. V. O. (1970) *Philosophy of Logic*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs (NJ).
- Resnik M. D. (1980) *Frege and the Philosophy of Mathematics*, Cornell Univ. Press, Ithaca (NY).
- Resnik M. D. (1985), *How Nominalist is Hartry Field's Nominalism?*, in "Philosophical Studies", 47, pp. 163-181.
- Resnik M. D. (1997) *Mathematics as a Science of Patterns*, Clarendon Press, Oxford.
- Shapiro, S. (1997) *Philosophy of Mathematics. Structure and Ontology*, Oxford Univ. Press, Oxford, New York.
- Shapiro, S. (2000) *Thinking about Mathematics. The Philosophy of Mathematics*, Oxford Univ. Press, Oxford, New York
- Shapiro, S. (2005) (a cura di), *Oxford Handbook of Philosophy of Mathematics and Logic*, Oxford Univ. Press, Oxford, New York.
- Shapiro, S. (2006) *Structure and Identity*, in corso di pubblicazione.
- White, N. (1974) *What Numbers Are*, in "Synthese", 27, pp. 111-124.
- Wright, C. (1983) *Frege's Conception of Numbers as Objects*, Aberdeen Univ. Press, Aberdeen.
- Yablo, S. (2001) *Go Figure: A Path Through Fictionalism*, in "Midwest Studies", 25, pp. 36-71.
- Zermelo, E. (1908) *Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre I*, in "Mathematische Annalen", 59, pp. 261-281; traduzione inglese citata in: von Heijenoort (1967), pp. 199-215.

## Indice analitico

- Benacerraf, P., 6, 14–21, 23, 27, 32–34, 39, 40, 42  
Boolos, G., 10, 12, 30, 31, 42  
Brouwer, L. E. J., 3, 5  
Cantor, G., 11, 13  
Carnap, R., 3  
Casalegno, P., 13  
Cellucci, C., 5  
Coliva, A., 3  
Dehaene, S., 22  
Doridot, F., 22  
Dummett, M., 19, 28  
Euclide, 40  
Field, H., 19, 20, 23–27, 42  
Fine, K., 9  
Fraenkel, A., 13  
Frege, G., 3, 5, 8–13, 15, 16, 19, 24, 25, 28–31, 42  
Gödel, K., 3  
Garavaso, P., 6  
Hale, B., 28, 31, 32, 34, 42  
Hallett, M., 13  
Heijenoort, van J., 5  
Hellman, G., 36  
Hilbert, D., 3, 5, 9, 26, 27, 40, 43  
Hume, D., 29–34, 42  
Keränen, J., 39  
Kitcher, P., 4, 23  
Lakatos, I., 4  
Maddy, P., 21, 22  
Mariani, M., 13  
Mill, J. S., 23  
Neumann, von J., 13–15, 20, 21, 23, 36  
Newton, I., 26, 27  
Panza, M., 4, 22, 23  
Parsons, C., 40, 41  
Peano, G., 9  
Petitot, J., 26  
Platone, 4, 5  
Poincaré, H., 3  
Putnam, H., 24  
Quine, W. von H., 16, 24, 30  
Resnik, M., 24, 26  
Russell, B., 3, 11, 13, 16  
Shapiro, S., 6, 24, 26, 35–40  
Weyl, H., 3  
White, N., 20  
Wright, C., 16, 28, 30–34, 42  
Yablo, S., 27  
Zermelo, E., 13–15, 20, 21, 33, 36, 42