À propos de l'apport des sciences cognitives à la philosophie des mathématiques

Marco Panza, Fernand Doridot

▶ To cite this version:

Marco Panza, Fernand Doridot. À propos de l'apport des sciences cognitives à la philosophie des mathématiques. Intellectica - La revue de l'Association pour la Recherche sur les sciences de la Cognition (ARCo), 2004, 39 (2), pp.263-287 et 299-301. halshs-00116760

HAL Id: halshs-00116760
https://shs.hal.science/halshs-00116760

Submitted on 29 Nov 2006

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Dernière version avant publication :
***Intellectica*, 2004/2, 39, pp. 263-287**

Fernand Doridot & Marco Panza

À propos des apports des sciences cognitives à la philosophie des mathématiques

Dans[1] les toutes dernières années on a souvent soutenu que les sciences cognitives peuvent apporter une contribution à la résolution des problèmes classiques abordés par la philosophie des mathématiques. Bien que ce soit également notre opinion, il nous semble utile de soumettre à une analyse critique certaines des raisons qui ont été avancées pour justifier cette conviction.

Nous discuterons d'abord celles avancées respectivement par S. Dehaene et par G. Lakoff et R. E. Núñez.

Le premier de ces livres[2] présente et interprète un ensemble très large de résultats expérimentaux suggérant la présence chez les hommes adultes, les enfants et les animaux de certaines capacités cognitives, certaines innées et d'autres acquises, ayant trait à l'usage des nombres. Nous n'avons pas la compétence pour discuter ces résultats et nous ne le faisons guère. Nous nous limitons à observer que, quand bien même ces résultats seraient tous acceptés et qu'ils attesteraient avec certitude la présence de ces capacités, il n'en demeurerait pas moins que ces capacités ne sont pas au sens propre des capacités mathématiques, et qu'elles ne doivent pas être prises comme telles. Le second livre[3] est consacré à étudier le processus qui permet à des êtres dotés de ces capacités d'élaborer et/ou d'apprendre d~~es~~ véritables théories mathématiques. Cette étude n'est cependant pas de nature expérimentale. Elle consiste plutôt en une sorte de déconstruction de quelques théories mathématiques, visant à retrouver en deçà de ces théories des structures de concepts qui seraient à leur tour le produit d'un mécanisme cognitif standard, qualifié de « mappage métaphorique. » Ce mécanisme permettrait de reproduire la structure d'un certain domaine conceptuel en dehors des entités propres de ce domaine, en donnant lieu de cette manière à un nouveau domaine, composé de nouvelles entités, sur lesquelles il serait possible de raisonner en utilisant les procédures inférentielles propres au premier domaine. C'est une hypothèse aussi séduisante que mal fondée, car elle ne repose que sur une analyse des théories mathématiques données : le processus de formation de ces dernières n'est qu'imaginé conformément à un schéma établi au préalable, qui fait d'emblée disparaître ses dimensions historiques, logiques, et en un sens même psychologiques. Tout en ayant le mérite de mettre le doigt sur ce qui nous paraît être le problème crucial de toute philosophie des mathématiques, celui de la constitution des structures formelles[4] valant

---

[1] Une première version de notre article a été écrite entre le printemps et l'automne de l'année 2002. Nous remercions Roberto Casati, Annalisa Coliva, Marie-José Durand-Richard, Giuseppe Longo, Susanna Marietti, et Joëlle Proust pour leurs commentaires à cette version ainsi qu'à d'autres versions successives.

[2] Cf. Dehaene (1997).

[3] Cf. Lakoff et Núñez (2000).

[4] L'adjectif « formel » est souvent entendu en logique et en philosophie des mathématiques en un sens technique très strict, selon lequel ne serait formel que ce qui relève d'une suite finie de signes sans signification gérés par des règles, elles-mêmes données par des suites finies de signes qui n'opèrent que par *sequence-matching* et *sequence-replacement* [nous remercions Giuseppe Longo pour nous avoir suggéré cette formulation d'une définition souvent avancée de manière assez vague : cf. Longo (2002) et Bailly et Longo (2004)]. Cette caractérisation du formel correspond bien sûr à un programme fondationnel bien établi,

comme des théories mathématiques, le livre de G. Lakoff et R. E. Núñez nous semble ainsi loin de tracer les lignes directrices d'une contribution possible des sciences cognitives à la solution (ou même à une plus précise formulation) de ce problème.

Face à cette situation, nous avons cherché chez d'autres auteurs, certains récents et d'autres moins, des suggestions allant en ce sens. Bien que fort différentes entre elles, autant par leur contenu que par leur visée, les thèses que nous discutons nous semblent partager une difficulté commune dérivant de l'absence d'une distinction précise entre les mathématiques en tant que systèmes de théories et un savoir diffus, diversement connecté avec ces théories, mais loin de les constituer comme telles. Ce savoir nous paraît devoir tout au plus être conçu comme un aspect de celles qu'il nous semble possible de reconnaître comme des conditions cognitives intervenant dans la constitution des théories mathématiques. C'est l'étude de ces conditions, bien définies et caractérisées comme telles, qui devrait de notre point de vue faire l'objet d'une collaboration féconde entre sciences cognitives et philosophie des mathématiques. La possibilité d'une philosophie cognitive des mathématiques, qui nous semble au présent bien loin d'être établie, dépendra, nous croyons, des résultats de cette collaboration[5].

I.

D'après Dehaene, les hommes partagent avec certains animaux une capacité inscrite dans leur patrimoine génétique, résultant de l'histoire évolutive de l'espèce et dérivant de la présence dans leur cerveau d'un « organe spécialisé dans la perception et la représentation des quantités numériques. » Cet organe — que Dehaene appelle confidentiellement « accumulateur » — pourrait « coder avec précision […] les ensembles dont le cardinal ne dépasse pas 3 », mais confondrait « d'autant plus facilement les nombres que ceux-ci sont grands et proches », car il tendrait « à associer l'étendue des quantités numériques à une

dû pour l'essentiel à Hilbert. Encore que Gödel ait montré, dès le début des années 30, que ce programme est globalement irréalisable, celui-ci a continué et continue encore à inspirer plusieurs recherches autant positives que négatives, visant soit à élargir le plus possible, soit à limiter de la manière la plus nette le pouvoir expressif de différentes sortes de systèmes formels (au précédent sens strict de ce terme). En identifiant les théories mathématiques à des structures formelles, nous ne prétendons aucunement réveiller l'espérance impossible des formalistes. Nous nous détachons plutôt de cet usage d'un tel adjectif, et souhaitons l'utiliser en un sens plus large, pour indiquer ce qui ne relève que de certaines conditions concernant des fonctions établies à l'intérieur d'un système. Il nous semble en effet qu'en confisquant cet adjectif pour l'employer comme un mot-clef caractérisant le programme formaliste, on se priverait d'une ressource indispensable pour qualifier une modalité intellectuelle qui est propre aux mathématiques. Encore qu'il soit certain que les mathématiques ne peuvent en aucune manière être réduites à un ensemble de systèmes formels, au sens strict de ce terme, il reste, nous semble-t-il, qu'elles ne sont présentes qu'à partir du moment où il est possible d'établir (à l'aide d'instructions précises et parfaitement comprises au sein d'une certaine communauté d'individus, encore que certainement informelles, encore une fois au sens strict du terme « formel ») des procédures inférentielles globales comptant parmi leurs composantes des sous-procédures locales qui ne relèvent, quant à elles, que du fonctionnement de systèmes de ce type. Ce que nous appelons « formel » relève justement de telles procédures inférentielles globales, fournissant le contexte indispensable au sein duquel ces sous-procédures locales peuvent fonctionner et fournir des informations utiles. Nous insistons de plus sur le fait que les mathématiques relèvent moins des répétitions et des applications particulières de ces procédures globales que de leur établissement, c'est-à-dire, en d'autres termes, qu'elles relèvent moins de l'administration effective de preuves que de la détermination des conditions qui rendent des preuves possibles et instructives.

[5] Cette collaboration n'est à son tour possible qu'à la condition de comprendre les mathématiques comme un phénomène humain et réel et donc historiquement conditionné, et plus particulièrement comme le produit d'un ensemble de prestations et l'objet d'un ensemble de compétences propres à de réels êtres humains ayant leur place au sein d'une histoire. Bien que cette attitude soit loin d'être partagée par tous les philosophes des mathématiques, on admettra ici qu'elle ne pose pas problème.

étendue spatiale[6]. » Cette capacité nous permettrait ainsi de réaliser avec exactitude des opérations arithmétiques portant sur des nombres très petits, mais elle ne participerait de compétences mathématiques plus étendues qu'en se combinant avec des capacités langagières acquises successivement et dépendant d'une activité cérébrale diffuse. Ce serait ainsi que les nombres acquièrent des noms et des symboles permettant de les distinguer, de les ordonner et de les comparer avec plus de précision. Mais bien que ceci soit du ressort du bagage éducationnel normal d'un homme adulte, il resterait dans ce dernier une sorte de dualité qui fait qu'il lui soit biologiquement d'autant plus aisé de comparer les nombres entre eux que ceux-ci sont petits et proches.

Dehaene évoque à l'appui de cette thèse un large nombre d'expériences réalisées par plusieurs chercheurs de manière souvent indépendante. On a observé par exemple que le temps nécessaire à « reconnaître et dénommer » une certaine quantité d'objets perceptifs croît doucement lorsqu'on passe d'un objets à trois, puis « s'élève soudainement […] en même temps que le nombre d'erreurs s'accroît brutalement[7] », ou bien qu'on prend beaucoup moins de temps à reconnaître le nombre le plus petit parmi deux nombres relativement distants, tels 2 et 9, qu'à faire la même chose pour deux nombre plus proches, tels 7 et 8. C'est un phénomène qu'on appelle « subitisation » (ou « subitizing », en anglais). Encore que des expériences comme celles-ci ne peuvent certes attester la présence dans notre cerveau d'un organe spécialisé dans le traitement des quantités numériques, et qu'aucune des techniques d'imagerie cérébrale dont on dispose aujourd'hui ne permettrait de le faire, il nous semble que la réification hypothétique portant à affirmer l'existence de cet organe est en son genre légitime. Bien que la thèse de Dehane ne soit pas unanimement acceptée, nous ne nous y opposerons donc pas, mais nous ne chercherons pas non plus à la justifier. Nous chercherons plutôt à montrer que la capacité innée dont elle relève ne doit pas être confondue avec une compétence qui soit déjà mathématique, et ne peut être tout au plus qu'une condition préalable à la formation d'une telle compétence.

Avant de nous y attacher, il faut ajouter néanmoins que l'hypothèse de l'accumulateur a permis de construire un modèle représentant l'activation des capacités ici en jeu. C'est un système composé par deux « réseaux de neurones » simulés sur ordinateur. Le premier consiste en « une rétine sur laquelle s'affichent des objets de taille variable » et fonctionne comme une « carte des positions occupées par ces objets » ; il « alloue à chaque objet, quelles que soient sa taille, sa forme et sa position, un nombre à peu près constant de neurones actifs. » Le second est formé par des neurones qui « n'entrent en activité que lorsque l'activité totale tombe dans un intervalle prédéfini, variable d'un neurone à l'autre » ; certains, ceux qui relèvent des nombres les plus petits, ne réagissent que lorsqu'un nombre précis d'objets est affiché ; d'autres réagissent « de façon optimale » lorsqu'un certain nombre (plus grand) d'objets est affiché, mais réagissent aussi, plus faiblement, si est affiché un nombre d'objets proche de celui-ci, ne restant inertes que lorsque le nombre d'objets affiché est très différent ; et tout ceci avec « une précision décroissante à mesure qu'on s'aventure vers les grands nombres[8]. »

Du fait d'être représenté par un tel modèle, l'accumulateur est pensé comme un organe réalisant une classification approximative des tailles des collections d'objets perçues, en les ordonnant le long d'une échelle qui, au moins au-delà de ses toutes premières marches, fonctionne comme un outil de mesure continu. Ces collections sont ainsi associées à une

---

[6] Cette thèse est énoncée, sous des formes souvent différentes, en différentes parties du livre ; on cite ici de la page 97.

[7] Cf. Dehaene (1997), p. 76.

[8] Cf. Dehaene (1997), p. 37 et, pour une présentation plus détaillée du modèle, Dehaene et Changeux (1993a) et (1993b).

sorte de grandeur interne qui est ensuite évaluée avec d'autant plus de précision que ces collections sont petites. Il reste cependant que, bien qu'on emploie le langage des nombres pour décrire le modèle, l'organe correspondant ne compte pas à proprement parler. Il se limite à distinguer entre elles des collections d'objets perçues, selon un critère qui ne se laisse qu'*a posteriori* réinterpréter comme relatif au nombre d'objets formant ces collections. Il ne peut donc à la rigueur être conçu comme un détecteur de nombres qu'à la condition de supposer que ces derniers sont déjà présents dans notre cerveau sous la forme de neurones n'attendant que d'être activés.

Pour comprendre ce point, distinguons plus précisément entre cette évaluation originaire et involontaire d'une grandeur interne et un véritable comptage. Au sens plus large de ce terme, compter signifie, nous semble-t-il, considérer l'un après l'autre les éléments d'une certaine collection d'objets perceptivement distincts, et les séparer des autres (peu importe que ce soit mentalement ou physiquement) de manière à former progressivement une collection nouvelle constituée des éléments de la collection donnée qui ont déjà été considérés. Une capacité ultérieure consiste à savoir appliquer cette procédure de manière alternée à deux collections d'objets distinguées l'une de l'autre : on considère d'abord un objet de la première collection et on le sépare des autres éléments de celle-ci ; on considère ensuite un objet de la seconde collection et on le sépare des autres éléments de celle-ci ; puis on revient à la première collection, on fait la même chose, et on passe encore à la seconde ; et ainsi de suite. Si on sait faire ceci, on est alors en condition de comparer deux collections quant à leur taille et on peut donc parvenir à distinguer des classes d'équivalence de collections composées par des collections de même taille, c'est-à-dire des collections qui s'épuisent en même temps sous l'opération de comptage alterné[9]. La possession de cette capacité de la part d'un sujet constitue, selon nous, une condition nécessaire minimale pour qu'on soit légitimé à affirmer que ce sujet sait opérer avec des nombres, du moins si le terme « nombre » est employé dans le sens dans lequel il est généralement employé en arithmétique. Imaginons maintenant qu'un sujet possédant cette capacité applique la procédure du comptage alterné à plusieurs couples de collections formés respectivement par une collection quelconque et par une collection fixe formée par des objets qu'on sait à chaque tour distinguer de tous les autres, et ayant été rangés une fois pour toutes en un certain ordre. On dira alors que ce sujet garde trace de sa considération des objets de la première collection, en associant ceux-ci l'un après l'autre aux éléments d'un système de contrôle externe. En un sens plus strict de ce terme, compter signifie, nous semble-t-il, associer d'une telle manière des collections d'objets perçus à un système de contrôle externe. Les noms et les symboles des nombres n'entrent alors dans l'acte de compter qu'en tant qu'ils renvoient aux éléments de ce système de contrôle, ou même en tant qu'ils constituent les éléments de ce système de contrôle[10].

Nous ignorons en quelle mesure les compétences nécessaires pour parvenir à compter, au second des deux sens de ce terme qu'on vient de détailler, sont innées ou acquises, et si les étapes logiques de ce chemin correspondent à des étapes évolutives dans l'éducation d'un enfant. Nous nous limitons à observer qu'il y a une différence essentielle entre associer des collections d'objets perçus à une grandeur interne et les associer à un système

[9] Il ne faut pas confondre cette compétence, ou toute autre analogue consistant en la capacité de vérifier l'équinuméricité de deux collections quelconques à l'aide d'une procédure standard avec une reconnaissance purement perceptive de la correspondance terme à terme entre les éléments de deux collections particulières, due par exemple à une certaine disposition de leurs éléments. C'est une différence sur laquelle Piaget a, entre autres, beaucoup insisté : cf. par exemple Piaget (1941).

[10] Le premier chapitre de Panza (1999) expose une arithmétique empirique élémentaire fondée sur les distinctions qu'on vient d'avancer.

de contrôle externe. Aux sens qu'ils prennent en mathématiques, les termes « nombre » et « compter » se rapportent à la seconde opération plutôt qu'à la première. Si l'on veut employer ces termes en d'autres sens, pour ainsi dire plus immédiats et plus aptes à décrire certaines de nos compétences les plus fondamentales, il faut distinguer ces sens des précédents, et ainsi admettre qu'ils ne concernent plus des objets ou des opérations qu'on puisse qualifier de mathématiques.

Or, loin de l'affaiblir, cette distinction permet de mettre la thèse de Dehaene sous sa juste lumière. Cette thèse servirait à rendre compte d'une capacité fondamentale préalable à toute forme d'arithmétique. Certes, une philosophie des mathématiques qui veuille s'accorder aux données expérimentales fournies par les sciences cognitives se doit de prendre en compte ces capacités pré-arithmétiques et de leur assigner une place dans son explication du phénomène mathématique ; mais elle se doit également de distinguer entre ces capacités innées et celles qui relèvent de la constitution de l'arithmétique en tant que système formel.

Pour illustrer un autre aspect de cette distinction cruciale, il convient de prendre en compte une autre thèse, originairement due à K. Wynn[11], que Dehaene expose dans le deuxième chapitre de son livre. D'après cette thèse, un enfant de quatre à cinq mois serait capable d'exécuter des additions et des soustractions avec des nombres très petits. Cette capacité serait révélée par des expériences suivant un protocole standard : on soumet un enfant à une scène dans laquelle des objets qu'il affectionne sont ajoutés ou soustraits les uns aux autres de différentes manières, et on évalue les attentes de celui-ci en mesurant le temps qu'il consacre à examiner la configuration résultant de ces opérations ; de cette manière on découvre par exemple que si un Mickey en peluche est montré, puis couvert d'un écran, et qu'un autre Mickey est ensuite mis derrière le même écran par un mouvement que l'enfant repère, alors ce dernier s'étonne (son temps d'attention est plus grand) si à la levée de l'écran n'apparaît qu'un seul Mickey au lieu de deux.

Avant d'en conclure que l'enfant a réalisé l'addition 1 + 1 et lui a implicitement assigné son juste résultat, c'est-à-dire 2, en montrant toute sa surprise lorsque les faits ne s'accordent pas à ce résultat, observons que selon l'hypothèse de Dehaene le comportement de l'enfant pourrait s'expliquer sans aucune nécessité de parler des nombres 1 et 2, de la somme 1 + 1, ni de son résultat. Il suffirait de supposer que lorsque l'enfant voit que le second Mickey est mis derrière l'écran, il l'associe au premier en une seule collection perçue en deux temps à l'aide d'une capacité de mémoire, de sorte que dans son accumulateur l'ensemble de neurones associé aux couples s'active. Si l'écran est levé après un temps suffisamment bref, il se peut qu'à ce moment l'ensemble de neurones en question soit encore actif. Si apparaissent alors deux Mickey l'accumulateur de l'enfant ne subit aucune variation d'état, alors qu'il en subit une si apparaît un seul Mickey. Le temps d'attention de l'enfant pourrait alors n'être rien d'autre qu'une manifestation comportementale de cette différence de dynamique cérébrale. À supposer qu'on ait expliqué ainsi les résultats expérimentaux de Wynn, serait-on encore disposé à en conclure que l'enfant a exécuté une addition ? Si la réponse est « oui » c'est qu'on emploie le terme « addition » en un sens très différent de celui qu'il prend en arithmétique.

Si on insisté sur cette différence, c'est que le langage employé par Dehaene tend souvent à l'effacer. Et le dernier chapitre de son livre semble en payer le prix. Ce dernier y avance[12] que ses résultats montrent qu'« il est tout *simplement* impossible de proposer une définition formelle univoque de ce que nous appelons "les nombres" », car ce concept de nombre serait « primitif et indéfinissable. » Il ne serait donc pas surprenant que « toutes nos

[11] Cf. Wynn (1992).

[12] Cf. Dehaene (1997), p. 264.

tentatives de définition formelle se heurtent à une circularité », telle celle relevée par Poincaré dans les définitions ensemblistes des nombres entiers positifs répercutées par Couturat[13].

Les formulations choisies par Couturat n'étaient peut-être pas irréprochables, et personne ne saurait blâmer Poincaré de son opposition au programme logiciste visant une fondation de l'arithmétique sur la théorie logique des ensembles. Pourtant, s'opposer à ce programme n'est pas la même chose que d'admettre, comme le fait Dehaene en s'appuyant sur l'autorité de Poincaré, qu'il est par exemple circulaire de définir le nombre zéro en se réclamant du terme « aucun. » Il est certain que toute définition formelle d'un objet ou d'une structure mathématique fait appel à des compétences préalables supposées être possédées par les destinataires de cette définition. Elle ne peut être de surcroît formulée qu'en présence de certaines connaissances. Ces compétences et ces connaissances sont des conditions de possibilité de la constitution d'une théorie formelle, et parmi celles-ci certaines pourraient (et devraient) être analysées en termes cognitifs : l'usage du terme « aucun » (que le logicien saurait d'ailleurs définir à son tour en faisant référence à des constantes logiques plus fondamentales) pourrait renvoyer par exemple à la capacité de distinguer des situations dans lesquelles une certaine condition est respectée d'autres situations dans lesquelles elle ne l'est pas. Mais dire ceci ne signifie pas affirmer que ces conditions de possibilité contiennent déjà la définition dont il est question, ou la rendent de toute manière inutile. Le but d'une définition n'est pas en effet de fonder ou de justifier ses propres conditions de possibilité. Les arguments de Dehaene ne seraient acceptables que s'ils s'opposaient à cette absurde prétention. Une définition ne fait qu'exploiter des compétences et des connaissances acquises pour introduire des objets formels. Et ce n'est que par cette introduction que peut commencer le jeu mathématique.

Il s'ensuit que prétendre, comme le fait Dehaene, que « point n'est besoin d'une définition formelle » car « nous savons intuitivement ce que sont les entiers naturels[14] » revient à adopter une attitude similaire à celle qu'il veut dénoncer, consistant à supposer que nos théories mathématiques, ou au moins certaines d'entre elles, décrivent une réalité qui leur est transcendante (c'est le point de vue généralement indiqué en philosophie des mathématiques par le terme « platonisme[15] »). Encore qu'il reconnaisse qu'une fois établi que les entiers naturels sont là avant toute définition, il reste « à expliquer comment les mathématiciens, sur la base des catégories de leur intuition, élaborent des constructions symboliques toujours plus abstraites[16] », Dehaene se condamne ainsi à assigner aux sciences cognitives un rôle marginal dans la résolution de ce problème. Car ces constructions sont alors envisagées comme se fondant sur des données qui tout étant déjà mathématiques ne sont guère elles-mêmes préalablement construites. Le problème de la constitution d'une théorie mathématique est ainsi abordé traditionnellement comme celui du passage d'une théorie mathématique à une autre, alors qu'il pourrait l'être comme celui de l'individuation des liens génétiques entre cette théorie, conçue comme construction déterminée, et ses conditions de possibilité. Si une partie de ces conditions relève certes de la présence d'autres théories mathématiques, une autre partie relève de compétences cognitives. Il s'ensuit qu'à la condition de l'aborder de la seconde façon, ce problème offre un terrain

[13] Cf. Poincaré (1908), l. II, ch. III, § VII.

[14] Cf. Dehaene (1997), p. 265.

[15] La confrontation d'un point de vue radicalement platoniste et d'un point de vue proche de celui de Dehaene, épousant la perspective d'une « épistémologie matérialiste forte » incluant « la description de l'appareil de connaissance et de son fonctionnement, c'est-à-dire de notre cerveau et de la manière dont il produit les objets mathématiques », fait l'objet de Changeux et Connes (1989) [la citation est tirée de la page 118].

[16] Cf. Dehaene (1997), p. 270.

d'études largement inexploré auquel les sciences cognitives pourraient apporter une contribution décisive[17].

II.

On pourrait croire que Lakoff et Núñez ont pour objectif de s'attacher à une telle contribution, car ils se proposent d'étudier « les capacités cognitives qui nous permettent de passer des habiletés numériques innées de base à une profonde et riche intelligence des mathématiques », et ceci en tenant compte du fait que « ces habiletés mathématiques avancées ne sont pas indépendantes de l'appareil cognitif employé en dehors des mathématiques », c'est-à-dire de « l'appareil conceptuel qui constitue la matière de notre langage ordinaire de tous les jours[18]. » Leur thèse principale est que ce passage est rendu possible par la métaphore conceptuelle, ou, pour être plus précis, par le « mappage [*mapping*] métaphorique », qui constitue d'ailleurs « le moyen de base par lequel la pensée abstraite est possible[19]. » C'est un « mappage unidirectionnel conduisant des entités propres à un certain domaine conceptuel aux entités correspondantes propres à un autre domaine conceptuel », dont « la fonction primaire est de nous permettre de raisonner autour de domaines relativement abstraits en utilisant la structure inférentielle de domaines relativement concrets[20]. » Ceci est possible car en un mappage métaphorique, la structure du premier domaine, le « domaine-source », est préservée dans le second, le « domaine-cible », et peut être fournie par un système « primitif », en même temps « perceptif et conceptuel », apte à fournir un « pont entre langage et raisonnement », que Lakoff et Núñez appellent « *image schema*[21]. »

Lakoff et Núñez emploient un exemple pour éclairer leur thèse. C'est l'exemple du « schéma du conteneur[22]. » C'est un *image schéma* composé de « trois parties », un intérieur, une frontière et un extérieur, parmi lesquelles s'établissent les relations qui sont propres à tout conteneur particulier. Un tel schéma constitue le domaine-source de plusieurs mappages métaphoriques. L'un de ceux-ci est la métaphore « Les Catégories Sont des Conteneurs » qui préside à notre compréhension de la notion de catégorie (ce terme étant utilisé pour indiquer ce que l'on qualifierait plus volontiers de prédicat) : une catégorie est pensée comme un conteneur ; un objet qui tombe sous cette catégorie comme un objet qui est contenu dans ce conteneur ; une sous-catégorie comme une région délimitée à l'intérieur du conteneur ; etc[23].

Dans cet exemple, le domaine-source relève d'une fonction générale propre à plusieurs systèmes dont nous possédons une perception et une compréhension directes. On dira alors que le mappage métaphorique donne lieu à une « métaphore fondatrice[24]. » Mais il

---

[17] Mais il ne faudrait pas non plus tomber ici en une autre simplification. « Les mathématiques — écrit Dehaene [cf. Dehaene (1997), p. 271] — apparaissent comme une construction humaine et, à ce titre, nécessairement imparfaite et révisable. » C'est certain. On ne saurait néanmoins faire de cette affirmation la conclusion d'une enquête cognitive. Elle ne peut être qu'un point de départ, la question complexe étant celle de comprendre comment et pourquoi une construction humaine à ce point imparfaite et révisable parvient à manifester de si grandes stabilité et fiabilité. A cette question l'étude cognitive des conditions de possibilité des théories mathématiques devrait pouvoir apporter une partie de la réponse.

[18] Cf. Lakoff et Núñez (2000), pp. 29-30 ; la traduction de l'anglais est la nôtre.

[19] Cf. Lakoff et Núñez (2000), p. 39.

[20] Cf. Lakoff et Núñez (2000), p. 42.

[21] Cf. Lakoff et Núñez (2000), p. 31.

[22] Cf, Lakoff et Núñez (2000), p. 30-34 et 43-45.

[23] Nous devons à Roberto Casati une observation révélatrice de la fiabilité des arguments de Lakoff et Núñez : il est bien rare de rencontrer des conteneurs admettant une intersection, alors que l'intersection des prédicats est une opération logique fondamentale.

[24] Cf. Lakoff et Núñez (2000), p. 53.

existe aussi des mappages métaphoriques dans lesquels le domaine-source est à son tour constitué par le domaine-cible d'un autre mappage métaphorique. Notre compréhension du domaine-source est ainsi indirecte, et le mappage métaphorique ne donne lieu qu'à une « métaphore de connexion » Si les métaphores fondatrices permettent de passer de nos compétences élémentaires à des théories mathématiques élémentaires, les métaphores de connexion permettent de construire, à partir de celles-ci, des théories de plus en plus complexes et abstraites.

Les métaphores de connexion ne sont pas le seul moyen d'étendre les théories mathématiques élémentaires. Un autre en est le « mélange [*blend*] métaphorique[25] » : une fois qu'un mappage métaphorique antérieur nous a enseigné à opérer avec les éléments de son domaine-cible, nous pouvons employer ce domaine comme une structure inférentielle connue et apprendre à raisonner à la fois sur cette structure et sur la structure primitive formant le domaine-source de ce mappage. Un exemple[26] en est l'usage conjoint d'une forme élémentaire d'arithmétique (dépourvue de multiplication), formant le domaine-cible d'une métaphore fondatrice dont le domaine-source est donné par le schéma des collections d'objets, et de ce même schéma pour « caractériser » la multiplication comme addition répétée un certain nombre de fois : les propriétés de l'addition sont assurées par la structure inférentielle du schéma des collections d'objets, alors que la structure de l'arithmétique élémentaire assure la compréhension de la clause établissant que l'addition doit être répétée un certain nombre de fois (car le terme « fois » ne saurait pas en ce contexte renvoyer directement à des collections d'objets).

Une fois éclairée la nature de ces « mécanismes » métaphoriques, il reste à établir leur fonction. Il n'est guère évident de savoir si pour Lakoff et Núñez ces derniers interviennent seulement dans le processus d'apprentissage de théories mathématiques déjà établies, ou également dans leur processus de constitution. Cette imprécision tient d'ailleurs à la démarche même des deux auteurs. Ils formulent ainsi la question qu'ils se posent : « quels concepts quotidiens et quels mécanismes cognitifs sont exactement utilisés dans la conceptualisation inconsciente des idées techniques en mathématiques, et de quelle manière les sont-ils ? ». Et ils croient pouvoir y répondre à travers ce qu'ils appellent une « analyse de l'idée mathématique[27] ». La formulation de la question exclue dès le début le recours à toute sorte d'enquête historique, tandis que la conviction de pouvoir y répondre à l'aide d'une analyse d'idées exclue le recours à une enquête empirique. Lakoff et Nüñez ne peuvent ainsi que se limiter à opérer sur des théories déjà établies en proposant de retrouver derrière ces théories un certain réseau de concepts et de le décomposer en un système de mappages et mélanges métaphoriques.

L'exemple de l'arithmétique est parlant[28]. Une forme élémentaire de celle-ci, dépourvue de multiplication et de division, est d'abord identifiée avec le domaine-cible commun de quatre métaphores fondatrices dont les domaines-source sont respectivement celui des « collections d'objets », celui de la « construction d'objets », celui des « bâtons mesureurs » et celui des « mouvements au long d'un parcours. » La métaphore « L'Arithmétique Est un Mouvement au Long d'un Parcours [*Arithmetics Is Motion Along a Path*] » consiste par exemple en le mappage suivant[29] :

Acts of moving along the path	→	Arithmetic operations [addition, soustraction]

[25] Cf. Lakoff et Núñez (2000), p. 48.
[26] Cf. Lakoff et Núñez (2000), pp. 60-62. On reviendra ci-dessous sur un exemple analogue.
[27] Cf. Lakoff et Núñez (2000), p. 29.
[28] Cf. Lakoff et Núñez (2000), pp. 50-103.
[29] Cf. Lakoff et Núñez (2000), p. 72.

A point location on the path	→	The result of an arithmetic operation
The origin, the beginning of the path	→	Zero
Point-locations on the path	→	Numbers
A point location	→	One
Further from the origin than	→	Greater than
Closer to the origin than	→	Less than
Moving from a point location *A* away from the origin, a distance that is the same as the distance from the origin to a point location *B*	→	Addition of *B* to *A*
Moving toward the origin from *A*, a distance that is the same as the distance from the origin to *B*	→	Subtraction of *B* from *A*

Une fois qu'on dispose du domaine-cible de ces métaphores fondatrices, la multiplication et la division sont définies à l'aide d'un mélange métaphorique faisant intervenir un des domaines-source de ces mêmes métaphores, par exemple ainsi[30] :

Starting from the origin, move *A* times in the direction away from the origin a distance that is the same as the distance from the origin to *B*	→	Multiplication ($A \cdot B = C$)
Starting at *C*, move toward the origin distances, of length *B* repeatedly *A* times	→	Division ($C \div B = A$)

Plus tard, d'autres mélanges métaphoriques et des métaphores de connexion permettent une extension d'une telle arithmétique élémentaire et le passage de celle-ci à d'autres théories, telles l'algèbre et l'analyse.

Nul n'est besoin d'entrer en d'autres détails pour comprendre que dans les quatre métaphores fondatrices dont il est question ce n'est pas la structure inférentielle du domaine-source qui suggère celle du domaine-cible, mais plutôt cette dernière qui nous enseigne à structurer le domaine-source de manière à pouvoir le concevoir comme une sorte de modèle approximatif[31] de l'arithmétique. Considérons par exemple la métaphore « L'Arithmétique Est un Mouvement au Long d'un Parcours. » Elle consiste en un mappage associant à l'origine d'un chemin le nombre zéro, les autres nombres à des points sur ce chemin, et l'addition et la soustraction à des mouvements au long de ce chemin[32]. Or, il est clair qu'une fois fixés les points qui vont correspondre à zéro et à un, celui qui va correspondre à deux peut être soit fixé au hasard, soit de façon à correspondre au résultat de l'addition $1 + 1$ définie comme dans le domaine-source, c'est-à-dire de telle sorte que le mouvement qui conduit du point zéro au point un est comparable, et même identifiable à un certain degré d'abstraction, à celui qui conduit du point un au point deux. Et si l'on ne choisissait pas la seconde possibilité, rien dans la structure inférentielle du domaine source ne pourrait nous assurer que $1 + 1 = 2$ et $2 – 1 = 1$. Or lorsqu'on pense au mouvement d'un objet le long d'un chemin, rien ne nous suggère que ce parcours est formé par une suite d'étapes comparables, ordonnées linéairement selon une relation de succession correspondant à l'addition du nombre un : le parcours peut être quelconque et l'objet qui le

[30] Cf. Lakoff et Níñez (2000), p. 72.
[31] Ne serait-ce pas d'ailleurs, en fin de compte, ce que signifie le terme « métaphorique » ?
[32] Cf. Lakoff et Núñez (2000), p. 72.

suit peut le faire de maintes manières, en se mouvant d'une vitesse variable, en s'arrêtant ici et là, et même en revenant quelquefois en arrière. Evidemment, rien n'empêche d'imaginer un parcours droit ou circulaire, un objet qui le suit d'un mouvement uniforme, et des marques sur ce parcours qui correspondent aux positions de cet objet après des intervalles de temps réguliers. Mais en ce cas, quelle évidence nous assure que c'est ce modèle qui a suggéré, en tant que domaine-source d'un mappage métaphorique, la structure de l'arithmétique, et non pas plutôt l'inverse ? Pour choisir parmi ces deux possibilités (ou éventuellement pour les écarter l'une et l'autre ou pour admettre les deux en des circonstances différentes), il faudrait des observations ou des considérations expérimentales, ou d'autres sortes de justifications, bref des arguments. Et ce sont justement des arguments de ce type qui sont totalement absents du livre de Lakoff et Núñez[33].

Le lecteur qui aura envie de continuer la lecture du livre de Lakoff et Núñez, en passant de l'arithmétique à l'algèbre et à la théorie des ensembles, puis à l'analyse réelle et complexe et à la géométrie analytique, pourra vérifier que ces derniers n'y font que répéter à outrance ce même geste : imaginer[34] des modèles approximatifs pour les théories mathématiques qu'ils abordent, en se laissant guider, dans l'établissement de la structure relationnelle de ces modèles, par les caractéristiques de ces mêmes théories. Et aussi ingénieux que cela puisse paraître, il est fort difficile de comprendre comment cela pourrait répondre à la question qui fournit le titre du livre : d'où viennent les mathématiques ?

Au cours de ce travail, Lakoff et Núñez consacrent deux chapitres[35] aux implications de leurs apports pour la philosophie des mathématiques. On y trouve une clef pour interpréter leur entreprise. Ils y présentent les mathématiques comme une discipline de concepts. Nous ne voulons certes pas nier que les mathématiques possèdent un contenu conceptuel. Mais il reste qu'elles ne sont une science que parce que ce contenu donne lieu à des structures formelles. Ainsi, même si l'on concède par exemple[36] que le nombre zéro est une image du point de départ d'un parcours, et que c'est grâce à ceci que $n + 0 = n$ pour tout nombre n, il reste que l'égalité $n + 0 = n$ n'est un théorème qu'à la condition de faire partie d'une structure formelle au sein de laquelle elle peut être prouvée.

On parvient ainsi à la même conclusion que pour le livre de Dehaene : la contribution des sciences cognitives à la philosophie des mathématiques ne saurait résider qu'en une étude des théories mathématiques en tant que structures formelles, qui soit cependant capable d'aller au-delà de la reproduction de leur logique interne pour aborder le processus de leur constitution.

III.

Attendu que les théories mathématiques elles-mêmes constituent le point de départ le plus naturel dont nous disposions pour mener cette étude, on peut penser que Lakoff et Núñez ont au moins fait un premier pas dans cette direction, en retrouvant derrière les théories qu'ils ont prises en compte un réseau de concepts (ce qui dans leur langage est la structure du domaine-cible) qu'ils ont ensuite associé à un autre réseau de concepts (la structure du domaine-source) dont ces théories pourraient tirer leur origine, ou qui pourrait en

---

[33] Mis à part les premiers chapitres, où il est question de répertorier rapidement le même ensemble de résultats que ceux présentés par Dehaene, on ne trouve pas, en effet, dans le livre de Lakoff et Núñez l'ombre d'une évidence expérimentale ou même simplement empirique ou historique, ni aucune autre sorte d'argument justifiant les reconstructions proposées.

[34] Nous avons choisi à propos le verbe « imaginer », car il rend bien compte de la situation décrite dans la note (33), ci-dessus.

[35] Cf. Lakoff et Núñez (2000), part V (ch. 15 et 16), pp. 335-379.

[36] Cf. Lakoff et Núñez (2000), pp. 366-367.

constituer un substrat en en rendant possible l'apprentissage. Ce n'est pourtant qu'une analyse spéculative, car elle n'est soutenue par aucune évidence empirique, ni psychologique, ni historique[37]. Comment pourrait-on alors éviter de la comparer à d'autres analyses, également spéculatives, mais d'une bien autre teneur, visant à retrouver des réseaux de concepts derrière des théories mathématiques établies ? Nous pensons en particulier à celles auxquelles nous a habitués la tradition phénoménologique qui — par leur vocation d'associer ces concepts à des chaînes d'actes psychologiques — s'apparentent aux visées des sciences cognitives : celle fondatrice de E. Husserl, dans la *Philosophie de l'Arithmétique*, ou celle à laquelle J. T. Desanti a soumis la théorie des fonctions de variable réelle dans *Les idéalités mathématiques*[38].

Cette comparaison suggère une généralisation : un apport des sciences cognitives à la philosophie des mathématiques pourrait tenir à leur participation à une analyse des théories mathématiques établies, visant à dégager, derrière celles-ci, des structures de concepts associées à des chaînes d'actes psychologiques censés intervenir dans la constitution ou dans l'apprentissage de ces théories. Il faudrait bien sûr pouvoir distinguer entre constitution et apprentissage ; clarifier la nature de l'association entre les réseaux de concepts ainsi dégagés et les actes psychologiques correspondants ; et comprendre comment ces actes pourraient intervenir, à côté d'autres, dans la constitution ou l'apprentissage des structures formelles valant comme des théories mathématiques.

La nature éminemment spéculative de cette tâche n'est guère une raison pour exclure que les sciences cognitives pourraient y fournir leur apport. Elles pourraient et devraient se charger de diriger cette recherche vers des genres de concepts qui, compte tenu de la structure cognitive de l'espèce humaine, pourraient, plus plausiblement que d'autres, intervenir dans la constitution et dans l'apprentissage des théories mathématiques.

En l'absence de toute évidence empirique, qu'elle soit historique ou psychologique, rien ne pourrait pourtant garantir la réalité de ces actes. Une manière pour dépasser le stade purement spéculatif serait alors de fournir cette évidence, par exemple sous la forme de comptes-rendus expérimentaux de certaines capacités cognitives intervenant dans des prestations reconnues comme mathématiques ou proto-mathématiques. C'est la forme des évidences mobilisées par Dehaene. Bien que ce dernier utilise volontiers le langage des concepts, il semble pourtant que plus que de la disponibilité d'un certain réseau de concepts, associés ensuite à des actes psychologiques, ces capacités relèvent directement d'un ensemble d'actes accomplis en présence d'un stimulus extérieur. Ainsi, si pour Lakoff et Núñez, de même que pour toute forme d'analyse phénoménologique, l'établissement d'un réseau de concepts constitue l'issue immédiate de la recherche, et les chaînes d'actes n'apparaissent que par le truchement d'une association ultérieure, les enquêtes expérimentales citées par Dehaene aboutissent directement à l'observation de certains actes, qui sont d'abord conçus comme révélateurs de certaines capacités, et seulement plus tard associés à des réseaux de concepts. D'une part le regard se porte d'abord sur les théories mathématiques et la recherche procède à rebours, de celles-ci vers leurs conditions de possibilité ; d'autre part le regard pointe directement vers les caractéristiques cognitives du sujet et la recherche suit la direction d'une découverte de ces capacités mathématiques ou proto-mathématiques. C'est un autre apport possible des sciences cognitives à la philosophie des mathématiques.

Si l'apport envisagé par Dehaene est sans doute de cette nature, l'approche dont relèvent les résultats qu'il cite n'est pas néanmoins la seule envisageable pour suivre cette direction.

---

[37] Cf. la note (33), ci-dessus.

[38] Cf. Husserl (1891) et Desanti (1968). Une approche différente mais néanmoins assez proche des analyses phénoménologiques des théories mathématiques est également exposée en Salanskis (1991).

Il suffit pour s'en rendre compte, en se limitant à un seul exemple, de comparer ces résultats aux thèses classiques de Piaget et de son école concernant l'acquisition des compétences mathématiques chez l'enfant[39].

La plupart des psychologues rejettent de nos jours ces résultats en dénonçant notamment le caractère non rigoureux des protocoles expérimentaux qui auraient permis de les établir. Il reste, et c'est ce qui nous intéresse ici, que les expériences de Piaget visent un but différent de celui des expériences citées par Dehaene. Elles ne se proposent pas d'observer les réactions de l'enfant face à certains stimuli sporadiques, mais sont plutôt conçues pour permettre de reconstituer les étapes de son acquisition d'une certaine « structure opératoire. » Et selon Piaget accéder à cette structure n'est pas tant pour l'enfant la reconnaître formellement, que d'organiser selon ses principes l'ensemble de ses actions : c'est d'ailleurs en ce postulat que réside toute la valeur mais également toute l'ambivalence de la tentative de Piaget.

Prenons l'exemple des nombres. Piaget croit pouvoir retrouver à différents stades du développement de l'enfant certaines conduites récurrentes — dites « de classement » et « de sériation » —, que l'enfant appliquerait indifféremment à toutes sortes d'objets divers et qui vont constituer les opérations logiques fondamentales sous-jacentes au développement de capacités plus proprement mathématiques[40]. Les conduites de classement concernent les opérations basées sur la reconnaissance de ressemblances entre les objets, et donc formellement sur l'établissement de relations d'équivalences ; les conduites de sériations concernent les opérations basées sur les dissemblances entre objets, et donc formellement sur l'établissement de relations d'ordre, le plus souvent transitives. Ces deux ensembles de conduites semblent présenter des organisations qui en permettent la formalisation en structures respectivement « de classes » et « de sériations » qui évoluent au cours du développement de l'enfant.

Piaget a, dès 1941[41], proposé des descriptions précises de l'évolution de ces structures à l'aide d'expériences appropriées. Une de ces expériences tient à la fameuse épreuve de correspondance entre deux rangées de jetons : sur une table sont disposés un tas de jetons rouges et un tas de jetons jaunes ; l'expérimentateur aligne six jetons jaunes et demande à l'enfant de placer sur la table autant de jetons rouges.

Entre 4 et 5 ans environ[42], l'enfant construirait, en serrant plus ou moins les jetons, une rangée de même longueur que celle de l'expérimentateur. Piaget appelle ce stade celui de l'« intuition simple », qui correspond pour l'évolution des structures de classes et de sériations à celui de la « quantité brute ». Une rangée de jetons y est appréhendée par l'enfant comme un tout indissociable plutôt que comme une multiplicité d'éléments distincts ; tout au plus possède-t-elle certaines qualités saillantes globales comme une longueur ou une densité, qui se dégagent lors de sa confrontation à d'autres rangées, mais ne sont encore susceptibles d'aucune coordination.

---

[39] Cf. entres autres Piaget (1941) et (1959) ; Piaget et Inhelder (1948) ; Piaget, Inhelder et Szeminska (1948) ; Piaget et Beth (1961).

[40] Nous renvoyons à Doridot (2004) pour une présentation synthétique des théories de Piaget sur le développement de l'arithmétique chez l'enfant.

[41] Cf. Piaget (1941).

[42] Les donnés citées ici sont celles répertoriés par Piaget (1941). Aujourd'hui on observe généralement un décalage des âges. J. Langer est même arrivé à soutenir qu'une sorte de « proto-logique » comportant trois structures distinctes mais opérant en succession (une structure combinatoire permettant par exemple de former et défaire des collections, une structure relationnelle comprenant les quatre opérations arithmétiques, et une structure conditionnelle permettant des opérations d'échange, corrélation et négation) est déjà présente chez l'enfant d'entre six et douze mois : cf. Langer (1980) et Houdé (1993), pp. 103-104.

En un second stade, dit de l' « intuition articulée », atteint vers 5 ou 6 ans, l'enfant établirait une correspondance terme à terme : il articulerait spatialement sa configuration de jetons en les alignant un à un aux jetons jaunes. Mais il suffirait que l'expérimentateur éloigne le dernier jeton de sa rangée pour que l'enfant renonce à l'équivalence et ajoute un ou plusieurs jetons jaunes à sa propre rangée. Cette réponse correspond pour les classes et sériations au stade de la « quantité intensive » marqué par le début de deux opérations complémentaires. Piaget appelle « sériation additive » la première, qui consiste en une décomposition du tout en parties ; elle a pour effet dans le cas des classes qu'une rangée de jetons est décomposée en éléments distincts qui acquièrent une identité propre, et dans celui des sériations que la longueur d'une rangée est perçue comme dépendant directement et uniquement des intervalles entre ses éléments constitutifs. La seconde opération consiste selon Piaget en une multiplication des qualités globales des figures les unes avec les autres, qui permet par exemple de comparer pour une rangée de jetons une augmentation de longueur à une baisse de densité.

Enfin en un troisième stade qualifié d' « opératoire » et atteint entre 7 et 8 ans, l'enfant admettrait que l'égalité est conservée même après l'éloignement du dernier jeton et quelle que soit d'ailleurs la configuration adoptée pour la première rangée. Cela ne peut se faire qu'au prix de l' « égalisation des différences » pour les classes et sériations : tous les éléments d'une classe concrète en résultent équivalents malgré leurs dispositions différentes. C'est dire que les classes et sériations accèdent enfin au domaine de la « quantité extensive » et s'organisent pour la première fois en une structure véritablement stable dont la réversibilité est l'une des caractéristiques essentielles. C'est la structure que Piaget a dénommée « groupement. »

L'étude des groupements, que Piaget a cru pouvoir isoler en de nombreux domaines opératoires, a beaucoup occupé l'école genevoise. Grize en a proposé une formalisation[43] qui fait apparaître un certain nombre de postulats restrictifs par rapport à l'axiomatique définissant un groupe au sens algébrique. Il s'est attaché à montrer que — moyennant néanmoins l'imposition de certaines contraintes formelles supplémentaires, pour tout dire assez artificielles — les axiomes de Peano caractérisant formellement l'ensemble des nombres entiers naturels sont déductibles des axiomes combinés des structures de groupement des classes et de groupement des sériations. Il en a conclu qu'à la condition que l'enfant envisage à la fois les éléments d'une configuration concrète comme supports d'un groupement de classes et d'un groupement de sériations — c'est-à-dire comme tous équivalents et néanmoins comme tous distingués par une relation d'ordre —, ses opérations sur cette configuration s'organisent en une structure analogue à celle des entiers naturels.

Aussi sommaire soit-il, cet bref exposé devrait suffire pour éclairer les ambitions des recherches de Piaget : en se proposant de décrire l'évolution des capacités opératoires de l'enfant vers une forme d'organisation stable et isomorphe à la structure des entiers positifs, celui-ci vise à décrire la genèse et la nécessité d'une arithmétique s'imposant progressivement à l'appareil cognitif comme la structure la plus à même de subsumer le maximum de situations concrètes, ce qui reviendrait à en dévoiler l'origine empirique et la nature de théorie quasi-physique. Mais ce même exposé devrait aussi révéler le caractère artificiel d'une telle reconstruction. Celle-ci semble forcer les faits expérimentaux à se conformer à une logique dont l'acquisition semble apparaître davantage comme une étape dans l'évolution historique des mathématiques que comme l'issue d'un développement psychique.

[43] L'exposé le plus complet s'en trouve en Gréco, Grize, Papert et Piaget (1960), pp. 69-96.

Si les psychologues expérimentaux contemporains s'opposent souvent à Piaget en lui reprochant de ne pas avoir su reconnaître la précocité, voire l'innéité des compétences mathématiques élémentaires, prisonnier qu'il était de protocoles expérimentaux non pertinents car biaisés notamment par l'usage d'un certain langage, la différence principale qui sépare les deux parties est ainsi plus profonde. Elle relève de deux conceptions différentes de ce que signifie « posséder des compétences mathématiques ». Alors que les premiers réduisent ces compétences à la capacité de réaliser des prestations pouvant être interprétées *a posteriori* comme des comptages ou des opérations arithmétiques simples, le second les identifie à des capacités logiques. Mais s'il nous semble que le second point de vue est plus proche d'une réelle considération des théories mathématiques, il reste que les nombres dont Piaget révèle la présence chez l'enfant restent davantage des objets psychologiques que des objets mathématiques : ils relèvent peut-être de l'introjection d'une structure opératoire devenue stable, mais ne se rapportent que très artificiellement à des théories mathématiques réelles.

Malgré leur diversité, les approches de Dehaene et de Piaget restent donc l'une et l'autre en deçà des ces théories, ne relevant que des conditions cognitives supposées préalables à leur constitution ou à leur apprentissage. Si l'on concède volontiers sans discussion qu'on apporte néanmoins par ces approches une contribution à la philosophie des mathématiques, c'est qu'on se représente ces dernières comme englobant un savoir diffus. Ce savoir est perçu comme un ensemble de capacités intellectuelles de nature et d'origine diverses et de croyances variées, telles celles que deux et trois font cinq, que la somme des angles internes d'un triangle est égal à un angle plat ou que onze est un nombre premier. La distinction entre ces capacités et ces croyances est souvent mal faite ou n'est pas faite du tout, et alors que les secondes devraient être clairement distinguées des théorèmes qui les expriment au sein d'une théorie formelle et de leurs preuves, on regarde le tout sans distinction comme faisant partie des mathématiques. La conséquence d'une telle confusion est entre autres la perte d'une représentation claire du sujet humain et réel, immergé dans une histoire, qui fait des mathématiques, les connaît ou les apprend. On lui substitue tout au plus un sujet vague et indifférencié, et l'on prend vite tendance à croire qu'une étude de l'accès de ce sujet à ce savoir diffus peut d'emblée tenir lieu d'une véritable interrogation sur le statut épistémologique des mathématiques.

Nous pensons au contraire qu'en préalable à toute tentative de contribution des sciences cognitives à la philosophie des mathématiques devrait figurer une claire distinction entre des savoirs diffus de cette sorte et les théories mathématiques véritables. On ne pourra tenter qu'à ce prix l'identification des conditions cognitives intervenant dans la constitution et l'apprentissage de ces théories.

IV.

Qu'on ait choisi d'aborder les problèmes qui nous occupent en insistant sur l'exemple de l'Arithmétique ne signifie pas que des questions analogues ne concernent pas également la Géométrie : les sciences cognitives contemporaines apporteraient d'ailleurs une contribution importante à la philosophie des mathématiques si elles pouvaient montrer que la distinction théorique et historique de ces deux champs constitue le reflet de différences dans des capacités et conditions cognitives sous-jacentes.

D'un point de vue intra-mathématique, les deux domaines ont toujours su s'enrichir mutuellement, bien que demeurant souvent distincts. Mais dans une optique fondationnelle la question d'une priorité de l'un ou de l'autre a été récurrente au cours des siècles et reste encore aujourd'hui ouverte. On écoute par exemple aujourd'hui des voix s'élevant contre le monopole des approches formalistes, syntaxiques et finitaires des mathématiques et invoquant à ce propos non seulement les limitations intrinsèques bien connues des formalismes, mais également des résultats très récents révélant entre autres des liens profonds entre la sémantique de certains systèmes logiques et la géométrie des systèmes dynamiques, le rôle essentiel des théories de l'ordre et des arbres jusque dans la preuve de certains théorèmes finitaires en théorie des nombres, et plus généralement la prégnance irréductible d'une forme d'intuition du continu spatial et de ses propriétés dans les procédures de preuves mathématiques[44]. Autour de Jean Petitot s'est développé de surcroît le projet d'une « physique du sens » ou d'une « phénoménologie naturalisée[45] » visant à rendre compte en termes cognitifs de cette priorité de la géométrie. Ces chercheurs visent par exemple à expliquer en vertu de quelles caractéristiques de l'esprit humain certaines représentations géométriques se trouvent privilégiées par rapport à d'autres. Le champ de ces recherches est assez vaste et tire entre autres profit des recherches contemporaines en physiologie : les résultats de A. Berthoz[46] sont ainsi par exemple cités pour montrer que pour un sujet l'espace physique se constitue d'abord comme un réseau de codages et de représentations analogiques utiles à l'action, permettant la constitution d'invariants cognitifs appelés à devenir plus tard des invariants conceptuels. La question est ensuite posée des relations entre l'émergence de cet espace physique et la constitution de l'objectivité de l'espace géométrique.

La problématique des origines cognitives de la géométrie remonte cependant à H. Poincaré. Dans le chapitre IV de *La science et l'hypothèse*, celui-ci se posait la question suivante[47] : « si l'idée de l'espace géométrique ne s'impose pas à notre esprit, si d'autre part aucune de nos sensations ne peut nous la fournir, comment a-t-elle pu prendre naissance ? » C'est une question qui résume une problématique que Poincaré a abordée en de nombreuses occasions, en parvenant à des conclusions assez concordantes[48].

Pour répondre à cette question, Poincaré part de deux prémisses. D'abord, il distingue la géométrie en tant que simple « cadre de distribution[49] » de nos sensations et représentations de la géométrie en tant que théorie mathématique, et il nie qu'autant la première que la seconde puissent être conçues comme des « formes *a priori* s'imposant à notre sensibilité[50]. » D'après lui « des êtres dont l'esprit serait fait comme le nôtre et qui auraient les mêmes sens que nous, mais qui n'auraient reçu aucune éducation préalable, pourraient recevoir d'un monde extérieur convenablement choisi des impressions telles qu'ils seraient amenés à construire une géométrie autre que celle d'Euclide[51]. » Ensuite, il maintient que les cadres de nos représentations, c'est-à-dire les composantes visuelle, tactile et motrice de notre « espace représentatif[52] » sont induites par les actions séparées de la vue, du toucher et des sensations musculaires.

La réponse que Poincaré fournit à sa question est elle aussi composée de deux volets. Le premier est résumé ainsi[53] : « aucune de nos sensations, isolée, n'aurait pu nous conduire à

---

44 Nous nous référons en particulier à G. Longo et à ses collègues intégrant le groupe de travail sur géométrie et cognition de l'Ecole Normale Supérieure de Paris : cf. entre autres Longo (1999), (2002), (2004) et Bailly et Longo (2004).

45 Ces expressions servent de titres à deux livres : Petitot (1992) et Petitot et al. (1998).

46 Cf. Berthoz (1997).

47 Cf. Poincaré (1902), pp. 82-83 [éd. de 1968].

48 Cf. entre autres Poincaré (1902), chapitres III-V ; (1905), chapitres III-IV ; (1908), livre. II, chapitre I ; (1913), IXème texte (pp. 131-155 [éd. de 1963]).

49 Cf. Poincaré (1908), l. II, cap. I, § V.

50 Cf. Poincaré (1905), ch. IV, § 6.

51 Cf. Poincaré (1902), ch. IV, p. 77 [éd. de 1968].

52 Cf. Poincaré (1902), ch. IV, p. 81 [éd. de 1968].

53 Cf. Poincaré (1902), ch. IV, p. 83 [éd. de 1968].

l'idée de l'espace, nous y sommes amenés seulement en étudiant les lois suivant lesquelles ces sensations se succèdent. » Le second concerne la manière en laquelle on doit entendre le verbe « amener » : encore que « l'expérience joue un rôle indispensable dans la genèse de la géométrie[54] », celle-ci n'est pas une science expérimentale ; la comparaison de nos sensations se limite à nous permettre d'isoler une « classe particulière de phénomènes que nous appelons déplacements[55] », alors que la géométrie ne naît que lorsque nous parvenons à idéaliser ces phénomènes en les concevant comme éléments d'une structure que nous leur imposons — en particulier une structure de groupe —, en la choisissant parmi d'autres structures analogues comme étant la plus « commode » au but d'une étude de ces mêmes phénomènes.

Autant les deux prémisses que la réponse possèdent un contenu empirique. Il n'empêche cependant qu'au lieu de chercher à justifier expérimentalement ces prémisses et cette réponse Poincaré se soit limité à les asseoir sur des expériences de pensée dont le contenu empirique est seulement imaginé. En particulier la description du passage des lois des déplacements, ainsi qu'elles se manifestent à notre expérience, à leur idéalisation comme éléments d'une structure de groupe reste hautement spéculative, et dépend d'une sorte de confiance métaphysique en une capacité de l'« esprit » dont n'est fournie aucune caractérisation précise.

L'exemple de Poincaré fut suivi, quelques années plus tard, par J. Nicod[56]. La perspective de Nicod est cependant assez différente. Celui-ci part en effet d'une critique de la notion de commodité de Poincaré : celui-ci n'aurait considéré que la commodité qui dérive de la simplicité de la structure interne d'une théorie, alors qu'il aurait été plus conforme à son projet de considérer la simplicité de la relation qui s'instaure entre les entités géométriques et les entités sensibles dont elles sont une idéalisation. Il est en effet possible qu'un système logiquement très simple ne s'adapte que fort mal à représenter une certaine réalité sensible, alors qu'un système plus complexe le fasse avec plus de simplicité.

Cette critique n'est que la conséquence d'une différence plus profonde : bien que Poincaré, dit Nicod, prétende nier qu'on puisse se représenter un espace indépendant des êtres qui y prennent place, il s'obstine à penser à la géométrie comme à une « science de l'espace », au lieu de l' « appliquer directement […] aux choses réelles[57]. » Or, au sens de Nicod, une géométrie des « choses réelles » ne saurait être qu'une structure d'axiomes que satisfont ces choses, c'est-à-dire une théorie abstraite et générale de leurs relations concrètes et donc une science physique. Pour étudier la manière en laquelle une telle science peut naître de nos sensations, Nicod propose de simplifier le problème : il imagine des « expériences simplifiées[58] », propres à des êtres dotés d'un nombre très limité de facultés sensibles s'appliquant selon des conditions fixées *a priori* et vivant en des mondes dotés d'une structure très simple ; et il se demande à quelles sortes de géométries ces êtres seraient parvenus.

Comme Poincaré, Nicod ne se sert donc que d'expériences de pensées et n'accomplit qu'une analyse logique de certaines conditions fixées arbitrairement. C'est lui-même qui le reconnaît : « dans chacun des mondes que nous posons, nous examinons l'ordre qu'il y a, non la part qu'en découvrirait une intelligence, une mémoire, une curiosité déterminées[59]. » Autant dire que les expériences sensibles dont il est question, ainsi que les constructions

---

54 Cf. Poincaré (1902), ch. IV, p. 93 [éd. de 1968].
55 Cf. Poincaré (1902), ch. IV, p. 87 [éd. de 1968].
56 Cf. Nicod (1923) ; cf. aussi, pour une approche similaire, Russell (1914) et (1927).
57 Cf. Nicod (1923), p. 23 [éd. de 1962].
58 Cf. Nicod (1923), p. 75 [éd. de 1962].
59 Cf. Nicod (1923), p. 78 [éd. de 1962].

théoriques qu'elles induisent, n'ont aucun sujet et qu'il serait même difficile de leur en assigner un. Le point de vue de Nicod permet ainsi d'éliminer d'emblée le difficile problème de la recherche d'un corrélat psychologique de ce qui n'était pour Poincaré qu'une faculté de l'esprit permettant de choisir entre différentes idéalisations possibles, mais il le fait en transformant le problème de l'édification d'une géométrie en un problème purement sémantique derrière lequel il est difficile de trouver un substrat psychologique.

Il reste que les considérations de Poincaré et de Nicod suggèrent une recherche portant sur les rapports entre nos structures sensorielles et nos théories géométriques, à laquelle les sciences cognitives pourraient donner un contenu empirique. Il ne s'agit pas, tout simplement, d'étendre à la géométrie l'approche décrite ci-dessus à propos de l'arithmétique en discutant les thèses de Dehaene et de Piaget ; il s'agit plutôt d'étudier de quelle manière le fonctionnement même de nos sens conduit à l'émergence de certains invariants perceptifs décrits par la suite comme représentant la structure de notre expérience et transformés, par un processus d'abstraction dont il reste à comprendre la nature psychologique, en des théories mathématiques. On peut cependant, *mutatis mutandis*, avancer, du moins à l'encontre de Poincaré, la même critique que celle formulée ci-dessus à l'égard de Piaget : il semble confondre une étape de l'évolution historique de la géométrie avec l'issue d'un développement psychique.

On ne saurait ainsi prolonger le programme de Poincaré et de Nicod en direction d'un véritable apport des sciences cognitives à la philosophie des mathématiques qu'à la condition de savoir distinguer entre un savoir proto-géométrique diffus et les diverses théories géométriques, et de s'attacher davantage à la recherche des origines et des conditions de possibilité déterminées de ces dernières qu'à une reconstruction imaginaire de l'avènement du premier.

V.

Une approche similaire par de nombreux points, bien que suivant des directions très différentes de celles de Poincaré et Nicod, a été tentée par P. Maddy[60] à propos de la théorie des ensembles. Le propos de cette dernière est d'apporter une solution à l'un des problèmes les plus classiques de la philosophie des mathématiques, celui de notre relation épistémique aux objets mathématiques, et de se servir d'arguments de nature cognitive, empruntés surtout à Piaget et à D. Hebb[61], pour soutenir bel et bien que nous avons une perception directe de certains objets mathématiques, à savoir de certains ensembles.

Il ne s'agit pas seulement d'affirmer que les éléments de certains ensembles d'objets empiriques, par exemple l'ensemble des pommes contenues dans un certain panier, entrent en une certaine relation causale avec nos appareils sensoriels comme un tout unitaire, mais également que grâce à cette interaction nous acquérons des croyances, que ces croyances concernent proprement ces ensembles, et que ceux-ci sont donc causalement responsables de la génération de ces croyances. Pour justifier cette thèse, Maddy[62] observe que plusieurs résultats expérimentaux, tels ceux cités par Dehaene, montrent que les plus élémentaires de nos croyances numériques sont purement perceptives ; et elle ajoute que du fait du rôle que jouent les ensembles dans nos théories mathématiques, la manière la plus convenable de caractériser les porteurs des propriétés numériques dont relèvent ces croyances est de les identifier avec des ensembles. Elle décrit de surcroît un processus cérébral possible (inspiré des théories de D. Hebb) qui, à la suite d'expériences répétées avec des ensembles (composés d'un nombre limité d'objets de taille moyenne), produirait des transformations

[60] Cf. Maddy (1980) et (1990).
[61] Cf. Hebb (1949) et (1980).
[62] Cf. Maddy (1990), pp. 58-67.

structurelles dans notre cerveau et porterait ainsi à la constitution d'un véritable « détecteur neuronal d'ensembles[63] », ce qui reviendrait à nous fournir le concept de ces ensembles. Un processus ultérieur du même type nous porterait ensuite à acquérir la capacité de se former des croyances non inférentielles caractéristiques des ensembles que nous percevons, c'est-à-dire des croyances générales — élémentaires et primitives — à propos de ceux-ci. Ces croyances formeraient une évidence originaire fournissant une première justification aux axiomes les plus élémentaires de la théorie des ensembles. À cette évidence s'en ajouterait ensuite une autre provenant de « sources théoriques » et qui nous conduirait à l'édification complète de cette théorie[64], dont une part essentielle tiendrait aux conséquences de cette dernière et en particulier à ce qui, selon Maddy, serait sa fonction principale : fournir un contexte de re-formulation pour les théories mathématiques connues[65].

Cet argument se réclame de manière essentielle du succès de la théorie des ensembles, et de son rôle (réel ou prétendu) dans l'organisation et la fondation de l'arithmétique et d'autres théorie mathématiques. On pourrait donc s'y s'opposer en observant que la pratique mathématique réelle accorde et a accordé à la théorie des ensembles un rôle bien plus marginal que celui que l'on a souvent prétendu au cours des discussions philosophiques, en se limitant à faire un usage massif de quelques notions et notations ensemblistes. Mais ce serait manquer le point crucial de l'argument de Maddy qui pourrait, nous semble-t-il, se suffire de cet usage massif (et ce serait aussi méconnaître qu'encore que la référence explicite à ZFC ou à d'autres théories ensemblistes soit souvent absente des textes mathématiques, le substrat ensembliste y est pour la plupart tacitement présupposé). La faiblesse de cet argument est ailleurs. Admettons en effet que notre structure cognitive soit telle que nous percevons des systèmes d'objets séparés les un des autres de façon unitaire, c'est-à-dire comme un tout. Il reste à savoir si ce tout peut être conçu et décrit comme un ensemble. Si cela ne se justifie, comme c'est le cas de cet argument, qu'en se réclamant d'une part de la disponibilité, parmi nos théories mathématiques, de la théorie des ensembles (ou même, plus sobrement, d'une conceptualisation ou d'un langage ensemblistes), et d'autre part du rôle central joué par cette théorie, cette conceptualisation ou ce langage dans notre univers mathématique, alors on ne peut ensuite, sous peine d'une flagrante circularité, en tirer que la différence entre ensembles proprement dits et collections génériques d'objets, induite par l'axiomatique de la théorie des ensembles, résulte d'une origine perceptive. Ainsi, même si nous concédons que l'argument de Maddy démontre que les plus élémentaires des propriétés que cette axiomatique assigne aux ensembles dépendent d'un contact perceptif originaire avec des ensembles, nous devons ajouter que ces propriétés ne sont que celles que les ensembles partagent avec toutes sortes de collections d'objets. Les ensembles que nous percevons et dont nous nous formons des croyances perceptives ne sont donc que des ancêtres très éloignés des ensembles qui interviennent dans la théorie mathématique du même nom, la différence entre les deux étant justement celle qui sépare une catégorie que nous utilisons pour rendre compte de nos expériences perceptives d'un objet mathématique.

Dans le meilleur des cas, Maddy se retrouve ainsi, pour la théorie des ensembles, au point exact où se trouvent Piaget et Dehaene pour l'arithmétique et Poincaré et Nicod pour la géométrie : elle a montré du doigt certains invariants perceptifs proto-ensemblistes, mais n'a guère étudié le rôle joué par ces invariants dans la constitution de la théorie des ensembles. Encore une fois c'est donc la confusion entre théories mathématiques et mathématiques en tant que savoir diffus qui empêche d'avancer.

---

[63] Cf. Maddy (1990), p. 65.
[64] Cf. Maddy (1990), p. 107.
[65] Maddy a particulièrement insisté sur ce point en (1997).

VI.

Il reste que l'argument de Maddy cache la solution de la difficulté. Pour rendre compte de l'évidence qu'il faut ajouter à celle de nature perceptive pour justifier la totalité des axiomes de la théorie des ensembles, cette dernière se réclame[66] en effet de l'état de la discussion sur la fondation de cette théorie en 1908, c'est-à-dire à l'époque de la parution du premier article de Zermelo en proposant une axiomatisation[67]. Cela revient à reconnaître que la constitution de cette théorie est un fait historique, et qu'elle est l'affaire de quelques mathématiciens travaillant en conditions déterminées plutôt que la réalisation d'un processus cognitif propre à l'espèce. Et si, comme nous le pensons, il en est ainsi, alors seule l'histoire peut rendre compte de cette constitution et l'expliquer.

Cela ne constitue bien sûr qu'un exemple parmi d'autres qui seraient également possibles : la constitution d'une théorie mathématique, soit-elle l'arithmétique de Peano, la géométrie de Hilbert ou la théorie des catégories, nous semble difficilement concevable autrement que comme un processus historique, tout du moins historiquement situé et déterminé. Rendre compte de cette constitution est aussi, au moins en partie (et nous croyons en grande part) un travail historique. Ce travail n'est néanmoins pas étranger aux préoccupations de la philosophie des mathématiques ; il répond même au problème fondamental que pose celle-ci, à savoir, nous semble-t-il, celui de la nature des théories mathématiques, nature qu'il ne nous semble pas possible de dévoiler sans éclairer aussi les origines de ces théories. Rien n'empêche de surcroît que les sciences cognitives contribuent à leur tour à la résolution de ce problème ; celle-ci sera même d'autant mieux conduite qu'on saura distinguer les gestes constitutifs d'objets nouveaux des capacités cognitives qui les rendent possibles.

Nous n'avons considéré que certaines de ces capacités : celles qui relèvent de compétences et de structures pré-mathématiques, dont les théories mathématiques les plus élémentaires semblent être une idéalisation formelle. Nous les avons de plus considérées comme un bagage de l'espèce, dû d'une part à son patrimoine génétique et d'autre part à l'évolution individuelle à laquelle chacun de ses membres est naturellement soumis. Cela ne constitue pourtant qu'une très petite partie des conditions cognitives intervenant dans la constitution et dans le fonctionnement des théories mathématiques. Il en est d'autres qui concernent par exemple l'emploi d'objets perceptifs au sein de ces théories, tels les symboles ou d'autres sortes d'objets physiques servant de représentations des objets mathématiques[68], ou le rôle de la visualisation[69], ou encore la possibilité de reconnaître des circonstances particulières comme celles dans lesquelles un objet mathématique est exhibé ou une preuve est achevée. Et d'autres encore qui concernent des capacités propres à des individus éduqués en contextes historiques et sociaux particuliers, marqués par exemple par l'affirmation d'autres théories mathématiques ou par l'effort de les apprendre.

Une première version de notre article, assez proche de la présente, a été écartée d'une autre publication à la suite d'un rapport négatif. Le rapporteur (anonyme) a expliqué ses raisons, et sur certains points il nous a même convaincus de la nécessité d'une révision.

---

[66] Cf. surtout Maddy (1997).

[67] Cf. Zermelo (1908).

[68] M. D Resnik a par exemple développé une conception des mathématiques comme une « science de *patterns* », d'après laquelle il est possible de tirer des information au sujet de *patterns* abstraits à partir de la considération des « *templates* » concrets qui les représentent : cf. Resnik (1999), en particulier ch. 10, pp. 201-223. Plus généralement C. S. Peirce pensait que les mathématiques ne sont rien d'autre que l'activité de tirer des conclusions universelles à partir de la considération de diagrammes particuliers : sur cet aspect de la pensée de Peirce, cf. Marietti (2001).

[69] Cf. Giaquinto (1992), (1993) et (1994).

Nous ne saurions le blâmer pour son jugement. Mais celui-ci nous a néanmoins semblé dériver d'une mésentente du but que nous poursuivions ici. Il nous paraît donc important, en guise de conclusion, de revenir sur ce but et de tenter de l'éclairer. Le jugement négatif du rapporteur aurait été largement pertinent si notre but avait été celui d'exposer une sorte de philosophie cognitive des mathématiques. Cependant ce n'est nullement le cas. Non seulement nous n'avons nullement souhaité procéder à une telle exposition, mais plus encore nous soutenons qu'une telle philosophie n'est au présent nullement disponible. Si l'on entend l'expression « philosophie cognitive des mathématiques » en un sens fort, nous ne souhaitons pas, d'ailleurs, qu'elle le devienne dans un futur plus ou moins proche. Nous n'avons, pour notre part, que cherché à réfléchir sur certains exemples, (choisis en fonction de nos connaissances et de ce que fut leur impact), d'applications de considérations d'ordre cognitif à des thématiques du ressort de la philosophie des mathématiques. Et nous avons, au fil de cette réflexion, cherché à dévoiler certains malentendus à notre sens cruciaux, et qui manifestent la grande distance qui a séparé ces applications de tous les apports qu'on serait en droit d'attendre des sciences cognitives quant à la compréhension des mathématiques, ainsi qu'à la résolution des problèmes philosophiques qui leur sont liés. Nous nous sommes efforcés en particulier d'indiquer une perspective qui nous semble fructueuse : celle de la recherche des conditions cognitives de constitution des théories mathématiques. Nous terminerons en observant que cette recherche ne peut être conduite qu'en liaison stricte avec des recherches historiques et logiques, visant quant à elles à la reconstruction d'autres conditions, respectivement contingentes et générales de cette constitution. C'est la raison pour laquelle, tout en insistant sur la nécessité d'une collaboration, et même d'une intégration entre philosophie et histoire des mathématiques et sciences cognitives, nous nous éloignons avec décision d'un programme visant à transformer la philosophie des mathématiques en une philosophie cognitive conçue comme une branche ou une application des sciences cognitives.

Références bibliographiques

Bailly, F. et Longo G. (2004) « Incomplétude et incertitude en Mathématiques et en Physique », in P. Parrini et L. M. Scarantino (eds.), *Il pensiero filosofico di Giulio Preti*, Guerini & associati, Milano, 2004, pp. 305-340.

Berthoz, A. (1997) *Le sens du mouvement*, Odile Jacob, Paris, 1997.

Changeux, J.-P. et A. Connes (1989) *Matière à pensée*, Odile Jacob, Paris, 1989.

Dehaene, S. et Changeux, J.-P. (1993a) « Pensée logico-mathématique et modèles neuronaux des fonctions cognitives. L'exemple des capacités numériques », *in* Houdé et Miéville (1993), pp. 123-146.

Dehaene, S. et Changeux, J.-P. (1993b) « Development of Elementary Numerical Abilities : a Neuronal Model », *Journal of Cognitive Neuroscience*, **5**, 1993, pp. 390-407.

Dehaene, S. (1997) *La bosse des maths*, Odile Jacob, Paris, 1997 [version anglaise : *The Number Sense : How the Mind Creates Mathematics*, Oxford Univ. Press, New York, 1997].

Desanti, J. T. (1968) *Les idéalités mathématiques : recherches épistémologiques sur le développement de la théorie des fonctions de variables réelles*, éd. du Seuil, Paris, 1968.

Doridot, F. (2004) « Genèse psychologique du système des nombres et formalisation de l'arithmétique », *Sciences et techniques en perspective*, II série, vol. **8**, fascicule 1, 2004, pp. 57-71.

Giaquinto, M. (1992) .« Visualising as a Means of Geometrical Discovery », *Mind and Language*, **7**, 1992, pp. 382-401.

Giaquinto, M. (1993) « Visualising in Arithmetic », *Philosophy and Phenomenological Research*, **53**, 1993, pp. 385-396.

Giaquinto, M. (1994) « Epistemology of Visual Thinking in Elementary Real Analysis », *British Journal of Philosophy of Science*, **45**, 1994, pp. 789-813.

Gréco, P., Grize, J. P., Papert, S. et Piaget, J. (1960) *Problèmes de la construction du nombre*, P.U.F., Paris, 1960.

Hebb, D. (1949) *The Organisation of Behavior*, John Wiley and Sons, New York, 1949.

Hebb, D. (1980) *Essay on Mind*, Lawrence Erlbaum Associates, Hillsdale, 1980.

Houdé (1993) « La référence logico-mathématique en psychologie. Entre méthode universelle et rationalité arrogante », *in* Houdé et Miéville (1993), pp. 47-119.

Houdé, O. et Miéville, D. (1993) (eds.) *Pensée logico-mathématique*, P.U.F., Paris, 1993.

Husserl, E. G. (1891*) Philosophie der Arithmetik. Psychologische und logische Untersuchungen*, Erster Band, R. Stricker, Halle-Saale, 1891.

Lakoff, G. et Núñez, R. E. (2000) *Where Mathematics Comes From. How the Embodied Mind Brings Mathematics into Being*, Basic Books, New York, 2000.

Langer J. (1980) *The Origins of logic : six to twelve months*, Academic Press, London, New York, 1980.

Longo G. (1999) *Géométrie et Cognition*, éd. électronique : http://www.di.ens.fr/~longo/geocogni.html.

Longo G. (2002) « On the proofs of some formally umprovable propositions and Prototype Proofs in Type Theory », *Notes in Computer Science*, **2277**, 2002, 160-180.

Longo G. (ed). (2004) *Géométrie et Cognition*, Numéro Spécial de la *Revue de Synthèse*, à paraître en 2004.

Maddy, P. (1980) « Perception and Mathematical Intuition », *The Philosophical Review*, **89**, 1980, pp. 163-196.

Maddy, P. (1990) *Realism in Mathematics*, Clarendon Press, Oxford, 1990.

Maddy, P. (1997) *Naturalism in Mathematics*, Clarendon Press, Oxford, 1997.

Marietti, S. (2001) *Icona e diagramma : il segno matematico in Charles Sanders Peirce*, LED, Milano, 2001.

Nicod, J. (1923) La géométrie dans le monde sensible, Alcan, Paris, 1923 [nouvelle édition : P.U.F., Paris, 1962].

Panza, M. (1999) *Nombres. Éléments de mathématiques pour philosophes*, Diderot, Paris, 1999.

Petitot, J. (1992) *Physique du Sens*, Editions du CNRS, Paris, 1992.

Petitot, J.et al., (eds) (1998) *Naturalizing Phenomenology: issues in contemporary Phenomenology and Cognitive Sciences*, Stanford University Press, Stanford, 1998.

Piaget, J. (1941) *La genèse du nombre chez l'enfant* (avec le concours de A. Szeminska et d'autres sept collaborateurs), Delachaux et Niestlé, Neuchâtel et Paris, 1941 [nombreuses éditions successives].

Piaget, J. (1959) *La Genèse des structures logiques élémentaires. Classifications et sériations* (avec le concours B. Inheld), Delachaux et Niestlé, Neuchâtel et Paris, 1959 [nombreuses éditions successives].

Piaget, J. et E. W. Beth (1961) *Épistémologie mathématique et Psychologie. Essai sur les relations entre la logique formelle et la pensée réelle*, P.U.F., Paris, 1961.

Piaget, J. et B. Inhelder (1948) *La Représentation de l'espace chez l'enfant* (avec le concours de dix-huit collaborateurs). P.U.F., Paris, 1948 [nombreuses éditions successives].

Piaget, J., B. Inhelder et A. Szeminska (1948) *La Géométrie spontanée de l'enfant* (avec le concours de seize collaborateurs), P.U.F., Paris, 1948 [2ème éd., 1973].

Poincaré, H. (1902) *La science et l'hypothèse*, Flammarion, Paris, 1902 [nombreuses éditions successives].

Poincaré, H. (1905) *La valeur de la science*, Flammarion, Paris, 1905 [nombreuses éditions successives].

Poincaré, H. (1908) *Science et méthode*, Flammarion, Paris, 1908 [nombreuses éditions successives].

Poincaré, H. (1913) *dernières pensées*, Flammarion, Paris, 1913 [nombreuses éditions successives].

Resnik, M. D. *Mathematics as a Science of Patterns*, Oxford Univ. Press, Clarendon Press, 1999.

Russell, B. (1914) *Our Knowledge of the External Word as a Field for Scientific Method in Phylosophy*, Allen & Unwin, London, 1914.

Russell, B. (1927) *The analysis of Matter*, Harcourt Brace, New York, 1927.

Salanskis, J.-M. (1991) *L'herméneutique formelle : l'infini, le continu, l'espace*, éd. du CNRS, Paris, 1991.

Wynn K. (1992) « Addition and Subtraction by Human Infants », *Nature*, **358**, 1992, pp. 749-750.

Zermelo, E. (1908) « Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre. I », *Mathematische Annalen* **65**, 1908, pp. 261-281.