



**HAL**  
open science

## À l'origine des théories mathématiques

Marco Panza

► **To cite this version:**

Marco Panza. À l'origine des théories mathématiques. Sciences et techniques en perspective, 2003, 2nd ser., 7, pp.197-204. halshs-00116764v1

**HAL Id: halshs-00116764**

**<https://shs.hal.science/halshs-00116764v1>**

Submitted on 27 Nov 2006 (v1), last revised 27 Aug 2018 (v2)

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# À l'origine des théories mathématiques

*Marco Panza*

22 février 2002

La question des rapports entre l'histoire et la philosophie des sciences a été maintes fois posée, et en plusieurs occasions on en a tiré la conclusion que la collaboration réciproque de ces disciplines est une condition indispensable de leur développement, pourvu qu'on veuille distinguer la première d'une chronique plus ou moins fidèle d'événements ou d'une table synoptique de théories, et on veuille éviter que la seconde perde de vue son objet pour se réduire à un simple exercice formel.

Cela n'empêche que, dans leur grande majorité, les recherches historiques et philosophiques concernant la science soient aujourd'hui conduites de manière largement indépendante les unes des autres. D'un côté, une grande partie de l'histoire des sciences semble avoir trouvé la manière de se distinguer de la pure érudition en s'intégrant au large mouvement des *social studies* et en cherchant ainsi sa légitimation conceptuelle du côté de la reconstruction du phénomène de l'innovation scientifique comme un phénomène relevant d'une sorte de négociation politique, plus ou moins explicite et consciente, des savoirs disponibles. D'autre côté, une partie également importante de la philosophie des sciences semble se partager entre deux approches classiques qui restent malgré tout majoritaires, se poursuivant l'une et l'autre en deçà de toute préoccupation historique : une recherche formelle abstraite concernant des aspects méthodologiques ou structurels de la connaissance scientifique en général ; un

ensemble de considérations de nature fondamentale concernant la formation logique de quelques disciplines ou théories particulières. Entre ces deux extrêmes, il faut citer deux autres approches classiques qui continuent à garder une place importante, surtout dans les pays latins : l'histoire, dite « interne » des théories scientifiques, avec ses outils expérimentés consistant en analyses de textes et comparaisons entre ceux-ci ; et l'histoire de la pensée scientifique.

En concevant la pensée scientifique comme une sorte de cadre méthodologique ou plus en général épistémologique (comme l'on dit souvent, surtout en France) dirigeant de manière plus ou moins explicite les recherches et les réflexions scientifiques, cette dernière semble se présenter à l'état actuel comme le terrain le plus fertile pour un rencontre entre des compétences et des curiosités historiques et des problématiques et des préoccupations philosophiques concernant la science. Il reste néanmoins que la fertilité de ce terrain, sa vocation de lieu de rencontre entre l'histoire et la philosophie des sciences, dépend en grande partie de la mutilation des parties le plus proprement techniques des théories scientifiques. Cette mutilation est rendue possible d'un présupposé de taille : l'existence dans le corpus de la science de deux niveaux séparables, un plus général consistant en une pensée, l'autre plus particulier et ancillaire par rapport au premier, consistant en la mise en œuvre technique des programmes sélectionnés par cette pensée. Ce n'est alors qu'au premier de ces niveaux que le mariage entre histoire et philosophie des sciences se réalise, se présentant d'ailleurs pour l'essentiel comme un mariage entre histoire des sciences et histoire de la philosophie, ou, comme l'on l'a dit quelques fois, histoire de la philosophie des sciences.

Il me semble que celle-ci n'est guère la seule manière de garantir la possibilité d'une collaboration entre histoire et philosophie des sciences. Plus que cela, il

me semble que la manière la plus féconde pour réaliser cette collaboration est de concevoir cette dernière comme une véritable unification de problématiques, d'intentions et de méthodes. Le but de la note présente est d'indiquer les lignes générales d'un tel programme d'unification pour ce qui concerne le domaine de ma propre recherche, l'histoire et la philosophie des mathématiques.

Le point de départ d'un tel programme est donné par une constatation fort simple, mais souvent ignorée : si l'on pense la philosophie des mathématiques comme la philosophie de quelque chose, c'est-à-dire qu'on prend à la lettre le terme « philosophie des mathématiques », alors les seuls objets possibles dont on dispose pour cette philosophie sont ces mêmes théories mathématiques qui devraient aussi constituer l'objet de l'histoire des mathématiques, les théories qui ont été réellement constituées au cours de l'histoire.

La principale difficulté autant de la philosophie que de l'histoire des mathématiques correspond à la difficulté de bien cerner ces objets : il s'agit pour cela d'assigner un statut précis aux théories mathématiques et de fixer donc leurs critères d'identité. Cette difficulté préalable a deux aspects qui encourent distincts sur le plan logique ne peuvent qu'être abordés en tant qu'aspects complémentaires d'une seule et même difficulté : il s'agit d'établir ce qu'on entend en général comme une théorie mathématique et de comprendre quels objets réels tombent sous ce concept.

Penser que ces deux aspects relèvent de deux disciplines séparées ou en tout cas distinctes entre elles serait comme penser que le problème de caractériser une espèce animale et celui de reconnaître les individus appartenant à cette espèce aient trait à deux investigations séparables. Affirmer que ce n'est pas

ainsi signifie donc à mon sentiment penser les théories mathématiques comme des objets qui entretiennent avec l'acte qui vise à le connaître des rapports dont la nature logique est au moins partiellement analogue à celle des rapports qui lient un objet naturel à une science naturelle. En d'autres termes, selon ma perspective, l'unité d'histoire et philosophie des mathématiques devrait donner lieu à un domaine de recherche que l'on devrait considérer, pour ce qui est des relations à ses objets, comme analogue à une science naturelle sous beaucoup d'aspects ; dans ce domaine, la place des objets naturels serait alors prise par des objets historiques : les théories mathématiques.

Cette substitution d'objets historiques à des objets naturels a évidemment des conséquences de taille. Une de celles-ci, sans doute la principale, concerne les relations entre la nature de l'objet et le processus de sa constitution. C'est exactement en ce processus qui réside en effet l'identité même d'un objet historique, c'est-à-dire que les critères d'identité d'un objet historique, en ce cas une théorie mathématique, tiennent à ce processus.

On peut considérer les mathématiques comme une activité humaine, portant sur des objets que cette activité crée et étudie en vue de certains buts. Une théorie mathématique sera alors définie comme une structure formée par un ensemble d'objets (le domaine de la théorie) et une famille de procédures d'inférence, définies sur ces objets et aptes à conduire de la donnée de ces objets à la détermination de leurs propriétés et relations<sup>1</sup>. Le processus qui

---

<sup>1</sup>Selon le sens avec lequel j'utilise cette expression, une théorie mathématique ne doit donc pas être conçue ni comme une région ou une portion du savoir mathématique, ni comme un système d'énoncés, liés entre eux par une chaîne déductive. Je dis qu'un objet mathématique est donné lorsqu'il est défini (explicitement ou implicitement) et qu'il est caractérisé de telle sorte qu'on sache le reconnaître comme tel et qu'on possède les moyens pour en déterminer les propriétés et relations. Il n'est donc pas possible de donner un objet mathématique, sans

conduit à l'établissement d'une théorie mathématique s'identifie donc à une certaine succession d'actes qui a conduit à la constitution d'un certain domaine d'objets, en fixant, entre autres choses, les procédures portant sur ces objets, aptes à en déterminer les propriétés et les relations. Il y a donc deux séries d'objets distincts, qu'il ne faut pas confondre : les théories mathématiques, qui sont des objets historiques étudiés par l'histoire et la philosophie des mathématiques considérées comme une seule discipline, et les objets qui constituent les domaines de ces théories, qui sont des objets mathématiques étudiés par ces théories elles-mêmes et donc par les mathématiques<sup>2</sup>.

Il ne devrait pas être nécessaire de le souligner, mais il vaut mieux le faire, compte tenu des dégénérescences métaphysiques qui, au cours des siècles, ont accompagné le débat philosophique à propos des mathématiques : les actes qui conduisirent à la constitution des théories mathématiques et les hommes qui accomplirent ces actes furent des actes et des hommes particuliers, des êtres finis, ne possédant que les facultés que nous possédons, vivant et agissant dans des conditions déterminées. Leurs actes constituent donc une histoire et si l'on parle aussi d'histoire pour l'étude de ces actes ce n'est qu'à la suite d'une convention linguistique qui ne doit pas prêter à confusion, une convention qui

---

se réclamer de la fixation de ces procédures d'inférence. Il s'ensuit que les deux composants d'une théorie mathématique ne doivent pas être pensés comme étant séparables l'un de l'autre. Tel est aussi le cas d'autres structures. Qu'on pense par exemple à la définition axiomatique de  $\mathbb{N}$  : les nombres naturels sont définis, comme tels, en tant qu'arguments d'une application qui associe à chacun d'eux son successeur ; néanmoins on dit de  $\mathbb{N}$  qu'elle est une structure formée par un ensemble et une application définie sur cet ensemble.

<sup>2</sup> Naturellement, l'histoire et la philosophie des mathématiques portent aussi leur regard vers les objets mathématiques constituant les domaines des théories qu'elles étudient, en étudiant leur origine et leur statut. Cette étude n'est pourtant pas interne à ces théories, mais regarde ces dernières de l'extérieur, en considérant ces objets comme des composants de celles-ci.

fait que l'on parle d'histoire l'histoire à la rigueur l'on devrait plutôt parler d'histoire graphique.

On pourrait supposer que l'étude de ces actes reste où puisse rester comme tel séparé d'autres études qu'on pourrait qualifier de philosophiques, en justifiant donc la séparation dont j'ai fait état au début entre histoire (au sens d'histoire graphique, évidemment) et philosophie des mathématiques. En effet, cela est possible. La preuve en est qu'une telle séparation est acceptée au sein de plusieurs programmes de recherche qu'on a suivis et qu'on continue à suivre. Mais il me reste tout autant la possibilité de rejeter cette possibilité et de suivre de ce fait un programme qui est différent de ceux-ci.

Je ne pratique pas d'abord une philosophie des mathématiques visant à l'établissement des rapports (souvent extrinsèques, sinon imaginaires) entre des systèmes où des thèses philosophiques et des productions mathématiques, comme a par exemple prétendu le faire L. Brunschvicg dans *Les étapes de la philosophie mathématique*. Je ne me consacre pas non plus à m'émanciper les mathématiques, c'est-à-dire à reconnaître dans leur évolution où dans leur structures des manifestations particulières d'une loi où d'une logique fixées à l'avance, comme l'on fait, par exemple, sous des formes différentes, les néopositivistes d'un côté et Lakatos de l'autre. Je laisse à d'autres le soin d'explorer des théories scientifiques d'une manière qui serait censée être plus proche de la sensibilité d'un philosophe, par exemple à la manière d'une dialectique phénoménologique abstraite, comme l'on fait, différemment l'un de l'autre, A. Lautman et J. T. Desanti. Je ne m'attache pas à chercher de dévoiler la nature véritable des objets où du langage des mathématiques, à explorer la possibilité d'une sémantique convenable pour ce langage, en poursuivant par ce biais le but de montrer en général le statut logique véritable des mathématiques

et/`u de ses `bjets, c`mme cherche à le faire la phil` s` phie des mathématique d'inspirati` n analytique. Enfin, je ne cr` is guère que la « vraie phil` s` phie des mathématiques » s` it installée à l'intérieur de l'activité mathématique, s` us la f` rme d'une ` rientati` n ` u d'une attitude, dites « épistém` l` giques », qui g` uvernent et inspirent la pr` ducti` n mathématique, c`mme l` nt dit un grand n` mbre d'hist` riens qui se veulent « sensibles aux pr` blématiques phil` s` phiques ».

Ce que dans m` n pr` gramme il y a de phil` s` phique tient à deux perspectives qui diffèrent de celles-ci s` us maints respects et qui ne se laissent pas séparer des perspectives hist` riques.

En premier lieu, il me semble imp` ssible d'étudier les thé` ries mathématiques sans disp` ser d'une caractérisati` n générale de la n` ti` n de thé` rie mathématique. Il ne s'agit pas d'une caractérisati` n préalable, ainsi que le définiti` n d'une n` uvelle espèce animale n'est pas préalable à l` bservati` n d'individus qui appartiennent à cette espèce. Mais ce n'est pas n` n plus une simple descripti` n d`bjets particuliers se présentant d'emblée d'eux mêmes c`mme des thé` ries mathématiques. Il s'agit plutôt de se d` ter d'une catég` rie interprétative apte à rendre p` ssible la délimitati` n d'un champ d'études visant des `bjets réels, se présentant c`mme tels — c'est-à-dire c`mme des thé` ries mathématiques — grâce à la disp` nibilité d'une telle n` ti` n.

À la différence de la n` ti` n d'une espèce animale, la n` ti` n de thé` rie mathématique n'a pas cependant une p` rtée ni uniquement ni principalement classificat` ire. S'il y a un sens dans lequel ` n peut dire que les individus particuliers qui appartiennent à une espèce animale s` nt déjà là avant la définiti` n de cette espèce c`mme des individus et d` nc c`mme des `bjets distincts d'autres `bjets, de s` rte que le pr` blème du naturaliste est avant t` ut



celui d'assigner à ces objets une place dans une classification et donc de prévoir cette place à côté d'autres, il me semble que ce même sens ne nous permette pas d'affirmer que les théories mathématiques particulières, pensés comme des objets historiques, soient là comme des individus déjà constitués comme tels avant qu'ils ne soient reconnus comme des théories mathématiques. Une théorie mathématique est un système qui ne se laisse reconnaître comme un individu historique qu'une fois qu'on dispose de la notion générale sous laquelle cet individu tombe comme un représentant.

J'insiste sur le fait que je parle ici de ces théories comme des individus historiques, car il est évident qu'en un autre sens une théorie mathématique se laisse reconnaître et déterminer comme telle sans qu'on dispose d'une notion générale de théorie mathématique, autrement on ne pourrait pas parler en sens précis, pour ne faire que deux exemples, de théorie des groupes ou de théorie de la mesure au cours d'un cours de mathématique qu'on n'ait pas abordé au préalable la question du statut et de la nature d'une théorie mathématique. Tout simplement que le sens qu'on donne au terme « théorie » est dans ce dernier cas différent de ce que j'assigne à ce terme lorsque j'affirme qu'une théorie mathématique est un objet historique. Dit en bref, c'est un sens relevant des mathématiques comme un *corpus* disciplinaire : les théories mathématiques sont reconnues comme des fragments de ce *corpus* et sont enseignées et apprises comme telles. Si l'on pense en revanche les mathématiques comme une activité humaine, et qu'on veut étudier les théories mathématiques en tant qu'objets constitués au cours de cette activité, alors on ne peut pas se limiter à se réclamer du *corpus* disciplinaire actuel des mathématiques pour identifier ces objets.

La caractérisation la plus précise possible de la notion générale de théorie mathématique conçue comme un objet historique et de toutes les notions dont on doit se servir pour parvenir à cette caractérisation constitue ainsi la première perspective plus proprement philosophique de mon programme. Il ne sera pas nécessaire de répéter que cette perspective ne se laissera pas poursuivre en opposition à une perspective ouvertement historique, ou même séparément de celle-ci.

La seconde perspective plus proprement philosophique de mon programme concerne l'étude des caractères propres de l'activité mathématique qui fait de celle-ci une activité humaine particulière. Comme cette activité produit des théories mathématiques et étudie les objets constituant les domaines de ces théories, cela revient à étudier des caractéristiques propres qui distinguent les théories mathématiques de toute autre production humaine, en particulier intellectuelle. C'est ma manière de concevoir un des problèmes classiques de la philosophie occidentale, celui du statut des mathématiques. Considéré de cette manière, ce problème ressemble en un sens à un problème propre d'une science empirique, car il vise la compréhension des traits spécifiques d'une réalité donnée, encore qu'à différence de l'objet d'une science empirique cette réalité soit, comme je l'ai dit, une réalité historique.

Pour avancer le long de cette deuxième perspective, il me semble convenable de partir d'une observation de Kant : dans les mathématiques, l'universel se présente *in concreto*. Je crois aussi que Kant avait raison lorsqu'il affirmait que ceci dépend de l'intervention d'une intuition. Mais, à la différence de Kant, j'insiste sur le fait que toute intuition est une relation cognitive à un objet, et qu'il n'y a donc pas d'*a priori* synthétique sans objets purs. Le *concreto* des mathématiques est donné par une structure d'objets que le mathématicien

constitue de différentes manières, par le truchement de la fixation des conditions d'identité et d'individuation d'une invariance sous une variété de manifestations symboliques. La compréhension des traits distinctifs d'une théorie mathématique en tant qu'objet historique consiste pour l'essentiel dans le dégagement de cette structure d'objets, et dans la reconstruction de la succession d'actes qui ont conduit à leur constitution et des motivations qui, en justifiant ces actes, montrent les raisons d'être de cette théorie, nous disent pourquoi elle est comme elle est. C'est par l'accomplissement de cette reconstruction que l'on remonte à l'origine d'une théorie mathématique et que l'on montre comment elle participe à une connaissance.

Celle-ci est, je crois, une recherche qu'on devrait s'accorder à qualifier de philosophique, encore que la philosophie n'a ici aucune prétention de compléter, de donner un sens, de fonder, de justifier, de valider, de dégager des réalités ou des richesses cachées ; tout simplement, elle vise à remonter à l'origine. En un sens, c'est la perspective d'un kantisme non-transcendental, la perspective de la recherche des enchaînements d'actes qui ont amené, cas par cas — à travers un processus complexe qu'on ne saurait ni résumer ni renfermer dans un schéma —, à la constitution de différents domaines d'objets. Ce kantisme partage l'idée forte de la philosophie critique, celle qui pense la connaissance comme étant une constitution. Mais il refuse de cette philosophie autant la fiction du sujet transcendantal que la submission de la science aux conditions universelles de possibilité de la connaissance. Il cherche, plutôt que la condition de possibilité de la connaissance en général, les conditions de réalité des connaissances en particulier.

Cette recherche, à l'exigence plus proprement philosophique, se marie d'emblée à une exigence directement historique constitue le cœur de mon

programme. Elle ne l'épuise pas pourtant. Il reste en effet à surmonter la spécificité d'une étude visant des théories mathématiques particulières pour chercher, à travers la comparaison et la mise en relief des invariances, de comprendre ce qui est propre aux théories mathématiques en tant que telles. La réflexion philosophique sur les mathématiques en tant que forme de connaissance se présente alors, de même point de vue, comme une généralisation d'études particulières. Mais comme ces études se fondent à leur tour sur la disponibilité d'une notion générale de théorie mathématique, cette généralisation n'a pas l'aspect d'une simple induction par énumération (qui n'est d'ailleurs que très rarement à l'œuvre dans les sciences empiriques elles-mêmes). Elle se présente plutôt comme l'élaboration d'hypothèses explicatives mises à l'épreuve d'une vérification historique. À son tour cette vérification ne se réduit pas à une simple évaluation de la compatibilité entre des faits historiques donnés en tant que tels et des conjectures portées sur ceux-ci, en tenant plutôt à l'appréciation du pouvoir explicatif de ces hypothèses, c'est-à-dire de leur capacité à transférer des données documentaires en des objets historiques.

On pourrait craindre qu'un programme comme celui-ci courre le risque de la circularité. C'est un risque effectif ; mais je crois aussi que c'est un risque inévitable pour toute recherche qui, comme la mienne, vise à étudier des phénomènes réels, car la réalité est en même temps l'objet et le produit de la connaissance. Se soustraire à ce risque signifie aussi abandonner d'emblée toute prétention explicative, pour se limiter à la construction de systèmes cohérents mais dépourvus d'un contenu réel.