Une note sur un théorème de point-fixe

Pascal Gourdel

▶ To cite this version:

Pascal Gourdel. Une note sur un théorème de point-fixe. 2006. halshs-00118919

HAL Id: halshs-00118919

https://shs.hal.science/halshs-00118919

Submitted on 7 Dec 2006

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Centre d'Economie de la Sorbonne
UMR 8174

Cahiers de la MSE

Une note sur un théorème de point-fixe

Pascal GOURDEL

2006.59

CENTRE NATIONAL DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

Maison des Sciences Économiques, 106-112 boulevard de L'Hôpital, 75647 Paris Cedex 13
http://mse.univ-paris1.fr/Publicat.htm

ISSN : 1624-0340

Une note sur un théorème de point-fixe

Pascal Gourdel*

5 février 2006

Résumé

Nous présentons ici un théorème d'existence d'éléments maximaux pour une correspondance dont les composantes sont hémi-continues supérieurement par rapport à une partie des variables et qui vérifie par rapport aux autres l'une des conditions suivantes : (i) semi-continues inférieurement si l'espace est de dimension finie, (ii) semi-continues inférieurement et à valeurs fermées si l'espace est complet. (iii) à images inverses ouvertes. Ce théorème généralise les résultats de Gale and Mas-Colell (1975-1979), celui de Bergstrom (1975) et étend à un cadre de dimension infinie celui de Gourdel (1995).

Mots clés : Point-fixe, élément maximal, hémi-continuité supérieure, théorèmes de sélection.

Abstract

We present a theorem on the existence of a maximal element for a correspondence which is upper hémi-continuous in some variables and which satisfies with respect to the other ones one the following conditions : (i) lower semi-continuous if the space has a finite dimension, (ii) lower semi-continuousif the space is complete. (iii) open fibers. This theorem generalizes the result of Gale and Mas-Colell (1975-1979) and the one of Bergstrom (1975) and extend to the infinite dimensional setting the result of Gourdel (1995).

Keywords : Fixed-point, maximal element, upper hémi-continuous, selection theorems.

endogenous endowments.

JEL Classification : C02, C60.

AMS Classification : 54H25, 47H10, 55M20.

*CNRS–CES, UMR CNRS 8174, Université Paris 1, 106-112 boulevard de l'Hôpital, 75647 Paris Cedex 13, FRANCE ; gourdel@univ-paris1.fr

1 Définitions et résultat

Définition 1.1 *Soit X un espace métrique, Y un espace vectoriel normé et T une correspondance de X dans Y. T est hémi continue supérieurement si pour tout $p \in Y^*$, l'application $x \to \sup_{y \in T(x)} \langle p, y \rangle$ est semi-continue supérieurement.*

$$\forall p \in Y^*,\ \forall \alpha \in \mathbb{R}, \quad \{x \in X \mid \sup_{y \in F(x)} \langle p, y \rangle < \alpha\} \text{ est ouvert}$$

Proposition 1 *Soit T une correspondance de X métrique dans E espace vectoriel normé. Alors,*

i) si T est h.c.s., le domaine de T est fermé,

ii) Si T est s.c.s. alors elle est h.c.s.

iii) Si Y est de dimension finie, si T est h.c.s. à valeurs convexes compactes et si $T(X)$ est borné, alors T est s.c.s.

Démonstration. *i*) On remarque que pour tout p, le point x n'appartient pas au domaine si et seulement si $\sup_{y \in T(\overline{x})} \langle p, y \rangle = -\infty$. Puisque T est h.c.s., on a

$$\forall p \in Y^*,\ \forall \alpha \in \mathbb{R}, \quad \{x \in X \mid \sup_{y \in T(x)} \langle p, y \rangle < \alpha\} \text{ est ouvert.}$$

En particulier, pour $p = 0$, l'ensemble $\{x \in X \mid \sup_{y \in T(x)} \langle 0, y \rangle < -1\}$ qui est le complémentaire du domaine de T est ouvert.

ii) Soient $p \in Y^*$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\overline{x} \in X$ tels que $\sup_{y \in T(x)} \langle p, y \rangle < \alpha$. Il existe un nombre réel β tel que $\sup_{y \in T(x)} \langle p, y \rangle < \beta < \alpha$. Ce qui implique que $T(\overline{x})$ appartient à l'ouvert $\{y \in Y \mid \langle p, y \rangle < \beta\}$. Donc, il existe un voisinage $V_{\overline{x}}$ de $\overline{x}$ tel que si $x \in V_{\overline{x}}$, alors $T(x) \subset \{y \in Y \mid \langle p, y \rangle < \beta\}$. Donc si $x \in V_{\overline{x}}$, alors $\sup_{y \in T(x)} \langle p, y \rangle \leq \beta < \alpha$. Ce qui prouve que $\{x \in X \mid \sup_{y \in T(x)} \langle p, y \rangle < \alpha\}$ est un ensemble ouvert.

iii) Soit M tel que $T(X) \subset B(0, M)$. Par l'absurde, si T n'est pas s.c.s., il existerait $\overline{x} \in X$, V un ouvert contenant $T(\overline{x})$ et une suite convergente (x_n) vers $\overline{x}$ tels que $T(x_n) \not\subset V$. Puisque $T(\overline{x})$ est compact, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $T(\overline{x}) + \overline{B}(0, \varepsilon) \subset V$. On choisit y_n un élément de $T(x_n) \setminus V$. A fortiori, $y_n \notin T(\overline{x}) + \overline{B}(0, \varepsilon)$ Par un argument de séparation, il existe p_n de norme 1, tel que $\sup_{y \in T(\overline{x}) + \overline{B}(0,\varepsilon)} \langle p_n, y \rangle < \langle p_n, y_n \rangle$. Par un argument de compacité, on peut supposer que $y_n \to y \in Y$ et que $p_n \to p$ de norme 1. En passant à la limite, on en déduit $\sup_{y \in T(\overline{x})} \langle p, y \rangle + \varepsilon \leq \langle p, y \rangle$. Pour n assez grand, on a $\sup_{y \in T(x_n)} \langle p_n, y \rangle < \langle p, y \rangle - 2\varepsilon/3$, $\|p_n - p\| < \varepsilon/(3M)$ donc $|\langle p_n, y_n \rangle - \langle p, y \rangle| < \varepsilon/3$. Il est facile de montrer que $\sup_{y \in T(x_n)} \langle p_n, y \rangle < (\langle p, y \rangle - 2\varepsilon/3) + \varepsilon/3$. en particulier $\langle p_n, y_n \rangle < \langle p, y \rangle - \varepsilon/3$. D'où la contradiction. $\square$

Vu la définition de l'hémi continuité supérieure qui ne fait intervenir que la fonction support des valeurs de T, on en déduit que si T est h.c.s., alors $\operatorname{co} T$ et $\overline{\operatorname{co}} T$ sont h.c.s. Ce résultat n'est pas vrai pour les correspondances s.c.s.

Théorème 1.1 *Soit m et n deux entiers positifs éventuellement nuls. Soit $X = \prod_{i=1}^{m+n} X_i$, où, pour chaque i, X_i est non vide convexe compact d'un espace vectoriel normé E^i. Soit F_i $(i = 1, \ldots, m)$ m correspondances s.c.i. de*

X dans X_i à valeurs convexes à valeurs éventuellement vides, soit F_i ($i = m+1, \ldots, m+n$) n correspondances h.c.s. de X dans X_i à valeurs convexes compactes éventuellement vides On suppose de plus que pour chaque $i = 1, \ldots, m$ la correspondance F_i vérifie l'une des conditions suivantes,

- *F_i à valeurs inverses ouvertes ;*
- *F_i est à valeurs fermées et E^i complet ;*
- *E^i est de dimension finie.*

Alors, il existe $x^* = (x_i^*)$ in X, tel que :
pour chaque i, soit $x_i^* \in F_i(x^*)$ ou bien $F_i(x^*)$ est vide.

Démonstration. En application de la propriété de paracompacité, on énonce le résultat suivant qui est en fait une extension de l'énoncé de Cellina de 1969. La formulation de Cellina correspondait au cadre des correspondances scs.

Lemme 1.1 (Cellina 1969) *Soit A un sous ensemble fermé d'un espace métrique X, soit Y un espace vectoriel normé et Γ une correspondance h.c.s. à valeurs convexes compactes non vides. Il existe une correspondance $\tilde{\Gamma}$ de X dans* $\operatorname{co}\Gamma(A)$ *h.c.s. à valeurs convexes compactes non vides.*

Preuve du lemme. On considère la famille d'ouverts $(U_a)_{a\in A}$ définie par

$$U_a = \{x \in X \setminus A \mid d(x,a) < 2d(x,A)\}.$$

Il est facile de montrer que la famille constitue un recouvrement ouvert de l'espace métrique $X \setminus A$ donc par propriété de paracompacité, il existe une partition continue de l'unité localement finie faiblement subordonnée à ce recouvrement. $(\alpha_a)_{a\in A}$. La correspondance $\tilde{\Gamma}$ est définie de la façon suivante par

$$\tilde{\Gamma}(x) = \begin{cases} \Gamma(x) & \text{si } x \in A \\ \sum_{a\in A} \alpha_a(x)\Gamma(a) & \text{si } x \notin A \end{cases}$$

Par construction, $\tilde{\Gamma}$ est une correspondance de X dans $\operatorname{co}\Gamma(A)$ à valeurs convexes compactes non vides. Il reste à justifier que $\tilde{\Gamma}$ est h.c.s. sur X. Soit $\overline{x} \in X$ et $(p, \beta) \in Y^* \times \mathbb{R}$ tels que

$$\sup_{y\in\tilde{\Gamma}(\overline{x})} \langle p, y\rangle < \beta.$$

Premier cas $\overline{x} \notin A$. Il existe un voisinage $V_{\overline{x}}$ de $\overline{x}$ et un ensemble fini $A_{\overline{x}}$ tel que pour tout x de $V_{\overline{x}}$ et pour tout a n'appartenant pas à $A_{\overline{x}}$, $\alpha_a(x) = 0$. Localement, $\tilde{\Gamma}$ coïncide avec G où $G(x) = \sum_{a\in A_{\overline{x}}} \alpha_a(x)\Gamma(a)$. La correspondance G est de graphe fermé à valeurs compactes, elle est donc s.c.s. et d'après la proposition 1, elle est également h.c.s. en $\overline{x}$. Donc il existe un voisinage $W_{\overline{x}}$ de $\overline{x}$ tel que pour tout x de $W_{\overline{x}}$, on ait $\sup_{y\in\tilde{\Gamma}(x)}\langle p, y\rangle < \beta$.

Second cas $\overline{x} \in A$. Puisque Γ est h.c.s., il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout a de $B(\overline{x}, 3\varepsilon) \cap A$, on ait $\sup_{y\in\Gamma(a)}\langle p, y\rangle < \beta$. On va montrer pour tout x de $B(\overline{x}, \varepsilon)$, on a $\sup_{y\in\tilde{\Gamma}(x)}\langle p,y\rangle < \beta$. Si x est dans A, le résultat est évident. Si x n'est pas dans A, on remarque que $\alpha_a(x) > 0$ implique que

$$d(\overline{x},a) \leq d(\overline{x},x) + d(x,a) \leq \varepsilon + 2d(x,A) \leq \varepsilon + 2d(x,\overline{x}) < 3\varepsilon.$$

Donc si $\alpha_a(x) > 0$, alors $\sup_{y\in\Gamma(a)}\langle p,y\rangle < \beta$. Par définition de $\tilde{\Gamma}$, on en déduit $\sup_{y\in\tilde{\Gamma}(a)}\langle p,y\rangle < \beta$. $\square$

Nous pouvons démontrer le théorème. Pour tout $i = 1,\dots,m$, soit $U_i = \{x \in X \mid F_i(x) \neq \emptyset\}$. Comme F_i est s.c.i., U_i est ouvert. Nous appliquons le théorème de sélection (voir par exemple Florenzano ou les papiers originaux de Michael) correspondant à l'hypothèse faite sur F_i. Il existe une sélection continue f_i de U_i dans X_i de la correspondance F_i. On prolonge f_i à l'espace X tout entier en une correspondance $\tilde{F}_i$ définie par $\tilde{F}_i(x) = \{f_i(x)\}$ si $x \in U_i$ et $\tilde{F}_i(x) = X_i$ si $x \notin U_i$. Comme U_i est ouvert, on vérifie aisément que $\tilde{F}_i$ est s.c.s. donc h.c.s. à valeurs convexes compactes non vides.

Pour $i = m+1,\dots,m+n$, on pose V_i le domaine de F_i, Puisque les ensembles V_i sont fermés, on peut appliquer le théorème d'extension de Cellina (lemme 1.1) afin d'étendre en des correspondances $\tilde{F}_i$ à valeurs convexes compactes non vides.

En appliquant le théorème de Kakutani à F de X dans X définie par $\tilde{F}(x) = \prod_{i=1}^{m+n}\tilde{F}_i(x)$, nous en déduisons l'existence d'un point fixe de $\tilde{F}$ et on montre facilement qu'il vérifie les conclusions du théorème. $\square$

Remarque 1.1 *L'idée de considérer des correspondances pour partie scs, pour partie sci est apparue dans la thèse de Gourdel (1994), voir par exemple l'article de 1995, le cadre considéré était celui des espaces euclidiens. Ce résultat fut étendu par Lefebvre dans sa thèse (2000) au cas à images ouvertes dans des espaces de dimension infinie. Ici, on a formulé le résultat en termes de correspondances hcs et donné une version se rapportant aux trois résultats de sélection.*

Comme corollaires immédiats, on peut citer les résultats suivants.

Corollaire 1.1 *Soit X un sous-ensemble convexe compact non vide d'un espace vectoriel normé et T une correspondance à images inverses ouvertes et à valeurs convexes de X dans lui-même. Alors, il existe $\overline{x} \in X$ tel que $T(\overline{x})$ est vide ou $\overline{x} \in T(\overline{x})$.*

Corollaire 1.2 *Soit X un sous-ensemble convexe compact non vide de $\mathbb{R}^n$ et T une correspondance s.c.i. de X dans lui-même. Alors, il existe $\overline{x} \in X$ tel que $T(\overline{x})$ est vide ou $\overline{x} \in \operatorname{co} T(\overline{x})$.*

La notion d'éléments maximaux a un sens lorsque la correspondance T représente un ordre. Dans ce cas, elle est irreflexive ce qui signifie que $x \notin \operatorname{co} T(x)$ pour tout $x \in X$. Alors, la conclusion devient $T(\overline{x})$ est vide ce qui signifie qu'il n'existe pas d'élément supérieur à $\overline{x}$.

Nous pouvons maintenant énoncer le théorème de Gale et Mas-Colell qui est très utilisé pour démontrer l'existence d'un équilibre compétitif dans une économie avec des préférences non transitives et non complètes.

Corollaire 1.3 *(Gale et Mas-Colell) Soit $(X_i)_{i\in I}$ une famille finie de sous-ensembles convexes compacts non vides de $\mathbb{R}^{n_i}$ et, pour tout $i \in I$, soit T_i une correspondance s.c.i. de $X = \prod_{i\in I} X_i$ dans X_i. Alors, il existe $\overline{x} \in X$ tel que, pour tout $i \in I$, $T_i(\overline{x})$ est vide ou $\overline{x}_i \in \operatorname{co} T(\overline{x}_i)$.*

2 Corollaires

Nous commençons par un résultat très utilisé dans la théorie économique pour montrer l'existence d'un prix d'équilibre sur les marchés. On peut prouver ce résultat de différentes manières.

Théorème 2.1 *(Lemme de Debreu-Gale-Nikaido) Soit ζ, une correspondance semi-continue supérieurement à valeurs convexes, compactes, non vides de S_{n-1}, le simplexe de $\mathbb{R}^n$, dans $\mathbb{R}^n$. On suppose que pour tout $p \in S_{n-1}$, et tout $x \in \zeta(p)$, $p \cdot x \leq 0$. Alors, il existe $p^* \in S_{n-1}$ tel que $\zeta(p^*) \cap -\mathbb{R}^n_+ \neq \emptyset$.*

Démonstration. Puisque la correspondance ζ est s.c.s. à valeurs convexes compactes, l'ensemble $\zeta(S_{n-1})$ est borné par α. On définit $F : S_{n-1} \times \overline{B}(0,\alpha) \to S_{n-1} \times \overline{B}(0,\alpha)$ par

$$\begin{cases} F_1(p,x) = \{q \in S_{n-1} \mid q \cdot x > 0\} \\ F_2(p,x) = \zeta(p) \end{cases}$$

La correspondance F vérifie trivialement les hypothèses du théorème 1.1 dans la mesure où F_1 est de graphe ouvert donc s.c.i., F_1 est à valeurs convexes et l'on est en dimension finie.

Il existe donc un couple (p^*, x^*) qui vérifie

$$\begin{cases} p^* \in F_1(p^*,x^*) \text{ ou } F_1(p^*,x^*) \text{ est vide;} \\ F_2(p^*,x^*) = \zeta(p^*). \end{cases}$$

Par hypothèse puisque $p^* \cdot x^* \leq 0$, on en déduit que $F_1(p^*,x^*)$ est vide, c'est à dire pour tout $q \in S_{n-1}$, $q \cdot x^* \leq 0$. En prenant successivement comme vecteur q chacun des vecteurs de base, on en déduit que $x^* \in -\mathbb{R}^n_+$. Donc le théorème est démontré. □

Théorème 2.2 *(Théorème de non-séparation.) Soit E un espace vectoriel normé et X un sous-ensemble compact, convexe, non vide de E. On se donne une correspondance F h.c.s. de X dans E à valeurs non vides et vérifiant la condition suivante appelée condition tangentielle (sortante) :*

$$(CT') \; \forall p \in E^*, \; \forall x \in \partial_p X, \; \exists y \in F(x) : \langle p, y\rangle \geq 0.$$

Alors, il existe $\overline{x} \in X$ tel que $0 \in \overline{\operatorname{co}} F(\overline{x})$.

Remarque 2.1 *On n'a pas supposé que F est à valeurs convexes fermées. Il est à noter cependant que si F est h.c.s., la correspondance $G = \overline{co}F$ définie par $(\overline{co}F)(x) = \overline{co}F(x)$ est également h.c.s. et vérifie la même condition tangentielle.*
Démonstration. *La preuve est nettement plus facile dans le cas particulier de la dimension finie.*

On pose compte-tenu de la remarque $G = \overline{co}F$, on veut montrer que G possède un point critique. On va démontrer le résultat par l'absurde. Si le résultat n'est pas vrai, pour tout x de X, par un théorème de séparation, il existe $p \in E^*$ tel que $\sup\{\langle p, y\rangle \mid y \in G(x)\} < 0$. On remarque que p peut être normalisé et donc appartenir à $\overline{B}$ la boule unité fermée de E^* (muni de la topologie faible-étoile $\sigma(E', E)$). On rappelle que $\overline{B}$ est un compact convexe (voir par exemple, Schwartz 1970).

On définit la correspondance Φ de $X \times \overline{B}$ dans lui-même par

$$\begin{cases} \Phi_1(x,p) = \{x' \in X \mid \langle p, x'\rangle > \langle p, x\rangle\} \\ \Phi_2(x,p) = \{q \in \overline{B} \mid \sup\{\langle q, y\rangle \mid y \in G(x)\} < 0\} \end{cases}$$

Il est clair que Φ_1 et Φ_2 sont à images convexes. De plus en dimension finie, Φ_1 est de graphe ouvert donc à images inverses ouvertes, mais même en dimension infinie, on peut vérifier que Φ_1 reste à images inverses ouvertes. Puisque $G = \overline{co}F$ est h.c.s., Φ_2 à images inverses ouvertes. On remarque que Φ_2 est à valeurs non vides tandis que Φ_1 est à valeurs éventuellement vides. D'après le théorème 1.1, il existe $(\overline{x}, \overline{p})$ tel que

$$\begin{cases} \overline{x} \in \Phi_1(\overline{x}, \overline{p}) \text{ ou } \Phi_1(\overline{x}, \overline{p}) = \emptyset \\ \overline{p} \in \Phi_2(\overline{x}, \overline{p}) \end{cases}$$

Par construction, $\overline{x} \in \Phi_1(\overline{x}, \overline{p})$ est impossible ("irreflexivité"), donc $\forall x' \in C$, $\langle p, x'\rangle \leq \langle \overline{p}, x\rangle$, ce qui signifie que $\overline{x} \in \partial_{\overline{p}} X$. En utilisant la condition tangentielle sortante, on en déduit alors que $\sup\{\langle \overline{p}, y\rangle \mid y \in G(\overline{x})\} \geq 0$, ce qui entraîne $\overline{p} \notin \Phi_2(\overline{x}, \overline{y}, \overline{p})$, d'où la contradiction.

Références

[1] Florenzano Monique, L'équilibre économique général transitif et intransitif : problèmes d'existence, Editions du CNRS, Paris, 1981.

[2] D. Gale and A. Mas-Colell, an equilibrium existence theorem for a general model without ordered preferences, J. Math. Econom., vol.2, pp 9–15, 1975.

[3] D. Gale and A. Mas-Colell, Corrections to an equilibrium existence theorem for a general model without ordered preferences, J. Math. Econom., vol. 6, pp. 297–298, 1979.

[4] Gourdel Pascal, "Existence of intransitive equilibria in non-convex economies", *Set-Valued Analysis*, volume 3, n. 4, (1995) 307-337.

[5] Kakutani S., "A generalization of Brouwer's fixed point theorem, Duke Math. J., vol.8, 1941, pp. 457–459.

[6] Michael E., Continuous selections I. Annals of Mathematics, 63 :361–382, 1956.

[7] Michael E., Continuous selections III. Ann. of Math., 65 :375–390, 1957.

[8] Michael E., A survey of continuous selections. In A. Dold and B. Eckman, editors, Set-valued mappings, selections and topological properties of 2^X, Lecture Notes in Math.171, pages 54–58. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1970.