



HAL
open science

Existence d'un équilibre de Nash dans un jeu discontinu

Jean-Marc Bonnisseau, Pascal Gourdel, Hakim Hammami

► **To cite this version:**

Jean-Marc Bonnisseau, Pascal Gourdel, Hakim Hammami. Existence d'un équilibre de Nash dans un jeu discontinu. 2005. halshs-00173781

HAL Id: halshs-00173781

<https://shs.hal.science/halshs-00173781>

Submitted on 20 Sep 2007

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



CERMSEM

UMR CNRS 8095

C
a
h
i
e
r
s
de
la
M
S
E

**Existence d'un équilibre de Nash
dans un jeu discontinu**

Jean-Marc BONNISSEAU, CERMSEM

Pascal GOURDEL, CERMSEM

Hakim HAMMAMI, CERMSEM

2005.99



Existence d'un équilibre de Nash dans un jeu discontinu

J.M. BONNISSEAU *, P. GOURDEL † H. HAMMAMI ‡

19 décembre 2005

Résumé

Nous présentons une preuve plus simple et indépendante du théorème 3.1 de Reny [1] qui montre l'existence d'un équilibre de Nash dans un jeu discontinu et dans un espace vectoriel topologique séparé. On utilise une hypothèse de meilleure réponse sécurisée plus forte que celle de Reny, mais qui coïncide si la fonction de paiement est semi-continue supérieurement comme dans le deuxième exemple de Reny [1]. Notre preuve est basée sur une version du théorème de Fan-Browder d'existence d'élément maximal du à Deguire et Lassonde [2], tandis que Reny a utilisé une approximation de la fonction de paiement discontinue par une suite de fonctions continues (voir lemme 3.5 [1]). Reny montre l'existence d'un équilibre de Nash à l'aide d'une suite d'équilibres en stratégie mixte obtenus dans le cas continu par les résultats classiques.

Mots-clés : Jeu discontinu, meilleure réponse sécurisée, équilibre de Nash, paiement sécurisé, théorème Fan Browder.

1 Énoncés

Soit E un espace vectoriel topologique séparé et $I = \{1, \dots, N\}$. On considère un jeu G à N joueurs, chaque joueur $i \in I$ possède un ensemble de stratégie X_i , sous ensemble non vide compact de E , et une fonction de paiement bornée u_i de X dans \mathbb{R} où $X = \prod_{i=1}^N X_i$. Sous ces conditions G est appelé un jeu compact. On note $u : X \rightarrow \mathbb{R}^N$ le vecteur des fonctions de paiement défini par

$$u(x) = (u_1(x), \dots, u_N(x)), X_{-i} = \prod_{j \neq i, j=1}^N X_j \text{ et } x_{-i} = (x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_N) \in X_{-i}.$$

Si les X_i sont convexes pour tout i et $u_i(\cdot, x_{-i})$ est quasiconcave sur X_i pour tout $x_{-i} \in X_{-i}$, on dit que le jeu $G = (X_i, u_i)_{i=1}^N$ est quasiconcave.

Définition 1.1 *Un joueur i peut sécuriser le paiement α en $x_{-i} \in X_{-i}$ (ou par abus de langage en $x \in X$) s'il existe $\bar{x}_i \in X_i$ et un voisinage U de x_{-i} telle que $u_i(\bar{x}_i, x'_{-i}) \geq \alpha, \forall x'_{-i} \in U$.*

*CERMSEM, M.S.E., Université de Paris 1 Panthéon-Sorbonne. 106-112 Boulevard de l'Hôpital, 75647 Paris cedex 13, France. E-mail adress: Jean-Marc.Bonnisseau@univ-paris1.fr

†CERMSEM, M.S.E., Université de Paris 1 Panthéon-Sorbonne. 106-112 Boulevard de l'Hôpital, 75647 Paris cedex 13, France. E-mail adress: pascal.gourdel@univ-paris1.fr

‡CERMSEM, M.S.E., Université de Paris 1 Panthéon-Sorbonne. E-mail adress: hammami.hakim@univ-paris1.fr

Définition 1.2 Un jeu $G = (X, u)$ est “à meilleure réponse sécurisée” si pour tout x^* de X tel que x^* n’est pas un équilibre, il existe un joueur i qui peut sécuriser en x_{-i}^* un paiement strictement supérieur à $u_i^{**}(x^*) = \limsup_{z \rightarrow x^*} u_i(z)$.

Remarque 1.1 La définition précédente d’un jeu “à meilleure réponse sécurisée” est énoncé avec $\limsup u(x)$ qui n’est pas forcément dans la fermeture du graphe de u (sauf si la fonction de paiement est continue ou semi-continue supérieurement). Cette définition nous permet d’avoir une preuve claire et plus facile en utilisant des résultats de point fixe mais elle est plus forte que la définition de Reny [1] : le jeu G est “à meilleure réponse sécurisée” si pour tout (x^*, u^*) de Γ tel que x^* n’est pas un équilibre, il existe un joueur i qui peut sécuriser en x^* un paiement strictement supérieur à u_i^* .

Supposons que le jeu G vérifie la définition d’un jeu “à meilleure réponse sécurisée” décrite ici. Soit (x^*, u^*) appartenant à Γ tel que x^* n’est pas un équilibre. Pour tout i , $u_i^* \leq \limsup_{z \rightarrow x^*} u_i(z)$ donc d’après la définition 1.2, le jeu G est à meilleure réponse sécurisée au sens de Reny.

Dans le deuxième exemple de Reny[1] consacré à l’existence d’équilibre de walras dans une économie d’échange, la fonction de paiement est semi-continue supérieurement, donc cet exemple rentre dans le champ d’application de notre théorème.

Théorème 1.1 Pour tout jeu $G = (X, u)$ compact, quasiconcave et à meilleure réponse sécurisée, il existe un équilibre de Nash.

Ce théorème à été prouvé dans un espace vectoriel topologique non séparé par RENEY [1] en 1998. En discrétisant l’ensemble des stratégies X et avec un lemme d’approximation de la fonction de paiement par une suite de fonctions continues, il montre l’existence d’une suite d’équilibre qui tend vers un équilibre de Nash. En fait, il montre l’existence d’un équilibre de Reny (selon la terminologie introduite dans la définition 1.3) (x^*, u^*) . Ce qui implique que x^* est un équilibre de Nash sous l’hypothèse de better-reply secure [1].

Définition 1.3 Le couple (x^*, u^*) est appelé un équilibre de Reny ssi $(x^*, u^*) \in \Gamma$ et pour tout $i \in I$ on a $\sup_{x_i \in X_i} u_i(x_i, x_{-i}^*) \leq u_i^*$.

Avec cette définition, on peut remarquer que la preuve de Reny permet trivialement de montrer le résultat suivant :

Théorème 1.2 Pour tout jeu $G = (X, u)$ compact, quasiconcave avec une fonction de paiement semi-continue inférieurement par rapport à la deuxième variable, il existe un équilibre de Reny.

2 Preuve

Avant de démontrer le théorème, on va introduire des régularisations des fonctions u_i et établir certaines de leurs propriétés.

2.1 Outils pour la preuve du Théorème 1.1

Soit $x \in X$, on note $\mathcal{V}(x_{-i})$ l'ensemble des voisinages de x_{-i} et on pose

$$\underline{u}_i(x_i, x_{-i}) = \sup_{U \in \mathcal{V}(x_{-i})} \inf_{x'_{-i} \in U} u_i(x_i, x'_{-i}) = \liminf_{x'_{-i} \rightarrow x_{-i}} u_i(x_i, x'_{-i})$$

Remarquons que la fonction \underline{u}_i n'est que la régularisation de notre fonction de paiement par rapport aux autres joueurs et pour une stratégie $x \in X$ fixée.

Lemme 2.1 a) Pour tout $x_i \in X_i$, la fonction $\underline{u}_i(x_i, \cdot) : X_{-i} \rightarrow \mathbb{R}$ est semi-continue inférieurement.
b) Pour tout $x_{-i} \in X_{-i}$, la fonction $\underline{u}_i(\cdot, x_{-i}) : X_i \rightarrow \mathbb{R}$ est quasiconcave.
c) la fonction u^{**} est s.c.s sur X .

Preuve. a) $\forall x_i \in X_i$, $\underline{u}_i(x_i, x_{-i}) = \liminf_{z \rightarrow x_{-i}} u_i(x_i, z)$ donc la fonction $\underline{u}_i(x_i, \cdot) : X_{-i} \rightarrow \mathbb{R}$ est la régularisée s.c.i de la fonction $u_i(x_i, \cdot)$. C'est la plus grande fonction s.c.i qui minore $u_i(x_i, \cdot)$. (voir par exemple [3] paragraphe 4.2 page 18)

b) Pour tout $x_{-i} \in X_{-i}$ et pour tout $c \in \mathbb{R}$, montrons que $\{y_i \in X_i \mid \underline{u}_i(y_i, x_{-i}) \geq c\}$ est un ensemble convexe.

Soient $\xi_i \in \{y_i \in X_i \mid \underline{u}_i(y_i, x_{-i}) \geq c\}$, $\beta_i \in \{y_i \in X_i \mid \underline{u}_i(y_i, x_{-i}) \geq c\}$ et montrons que $\forall \lambda \in [0, 1]$ on a : $\lambda \xi_i + (1 - \lambda) \beta_i \in \{y_i \in X_i \mid \underline{u}_i(y_i, x_{-i}) \geq c\}$.

$$\begin{aligned} \xi_i \in \{y_i \in X_i \mid \underline{u}_i(y_i, x_{-i}) \geq c\} &\Leftrightarrow \exists U \in \mathcal{V}(x_{-i}^*) \mid \inf_{x'_{-i} \in U} u_i(\xi_i, x'_{-i}) \geq c \\ \beta_i \in \{y_i \in X_i \mid \underline{u}_i(y_i, x_{-i}) \geq c\} &\Leftrightarrow \exists V \in \mathcal{V}(x_{-i}^*) \mid \inf_{x'_{-i} \in V} u_i(\beta_i, x'_{-i}) \geq c \end{aligned}$$

On pose $W = U \cap V$ (W est un voisinage de x_{-i}^*). Montrons que $\forall \lambda \in [0, 1]$ on a

$$\inf_{x'_{-i} \in W} u_i(\lambda \xi_i + (1 - \lambda) \beta_i, x'_{-i}) \geq c$$

Soit $x'_{-i} \in W$ et $\lambda \in [0, 1]$. La fonction $u_i(\cdot, x'_{-i})$ est quasiconcave alors :

$\Omega = \{z_i \in X_i \mid u_i(z_i, x'_{-i}) \geq c\}$ est un ensemble convexe contenant ξ_i et β_i . D'où $u_i(\lambda \xi_i + (1 - \lambda) \beta_i, x'_{-i}) \geq c$. Donc $\inf_{x'_{-i} \in W} u_i(\lambda \xi_i + (1 - \lambda) \beta_i, x'_{-i}) \geq c$.

c) Pour tout $i \in I$, la fonction u_i^{**} est la régularisée s.c.s de la fonction u_i . C'est la plus petite fonction s.c.s qui majore u_i . ■

Lemme 2.2 Un joueur i peut sécuriser un paiement strictement supérieur à $\alpha \in \mathbb{R}$ en $x_{-i}^* \in X_{-i}$ ssi $\sup_{x_i \in X_i} \underline{u}_i(x_i, x_{-i}^*) > \alpha$.

Preuve. D'après la définition 1.1, un joueur i peut sécuriser un paiement strictement supérieur à $\alpha \in \mathbb{R}$ en $x_{-i}^* \in X_{-i}$ si :

$$\exists \beta > \alpha, \bar{x}_i \in X_i \text{ et } U \in \mathcal{V}(x_{-i}^*) \text{ tel que } u_i(\bar{x}_i, x'_{-i}) \geq \beta \quad \forall x'_{-i} \in U$$

$$\Leftrightarrow \exists \beta > \alpha \text{ et } \bar{x}_i \in X_i \text{ tel que } \sup_{U \in \mathcal{V}(x_{-i}^*)} \inf_{x'_{-i} \in U} u_i(\bar{x}_i, x'_{-i}) \geq \beta$$

$$\Leftrightarrow \exists \beta > \alpha \text{ tel que } \sup_{x_i \in X_i} \underline{u}_i(x_i, x_{-i}^*) \geq \beta > \alpha. \quad \blacksquare$$

Lemme 2.3 Soit G un jeu à meilleure réponse sécurisée :

S'il existe $x^* \in X$ tel que pour tout $i \in I$, on a $\sup_{x_i \in X_i} \underline{u}_i(x_i, x_{-i}^*) \leq u_i^{**}(x^*)$ alors x^* est un équilibre de Nash.

Preuve. Supposons par l'absurde que x^* n'est pas un équilibre de Nash. D'après la définition 1.2, il existe un joueur i qui peut sécuriser un paiement strictement supérieur à $u_i^{**}(x^*)$ en x_{-i}^* . D'après le lemme 2.2 $\sup_{x_i \in X_i} \underline{u}_i(x_i, x_{-i}^*) > u_i^{**}(x^*)$, d'où la contradiction. ■

Théorème 2.1 (Fan-Browder compétitif) Soit E un espace vectoriel topologique séparé, soit J un ensemble quelconque d'indices, on suppose que pour tout $i \in J$:

- (1) X_i un sous ensemble convexe compact non vide de E .
- (2) $F_i : X = \prod_{i \in J} X_i \rightarrow X_i$ est une correspondance à valeur convexe et à image inverse ouverte.

Alors l'une des alternatives suivantes est vérifiée :

- (A) Il existe $i \in J$ et $x^* \in X$ tel que $x_i^* \in F_i(x^*)$.
- (B) Il existe $x^* \in X$ tel que pour tout $i \in J$, $F_i(x^*) = \emptyset$.

Preuve. Cette formulation est une application directe de [2] théorème 3a page 4. On remarque que ce théorème peut être étendu au cas d'un espace non séparé¹. Les auteurs ont formulé leur résultat dans ce cadre parce qu'il constitue le champ classique d'application. ■

Soit $F_i(x) = \{\xi_i \in X_i \mid \underline{u}_i(\xi_i, x_{-i}) > u_i^{**}(x)\}$. On remarque que pour tout $i \in I$ et quelque soit $x \in X$ on a $u_i^{**}(x) \geq u_i(x)$. Par conséquent chacune des correspondances F_i est irréflexive : pour tout $x \in X$, $x_i \notin F_i(x)$, ce qui exclut l'alternative (A).

Lemme 2.4 Pour tout $i \in I$, la correspondance F_i est à valeur convexe et à image inverse ouverte.

Preuve. a) Montrons que la correspondance F_i est à valeur convexe.

Pour tout $i \in I$, $F_i(x^*) = \bigcap_{\varepsilon_i > 0} \{\xi_i \in X_i \mid \underline{u}_i(\xi_i, x_{-i}^*) \geq u_i^{**}(x^*) + \varepsilon_i\}$. D'après le lemme 2.1 (b) c'est un ensemble convexe.

b) Montrons que la correspondance F_i est à image inverse ouverte, c'est à dire que $\forall \xi_i \in X_i$, $\{x^* \in X \mid \xi_i \in F_i(x^*)\}$ est un ouvert.

$$\begin{aligned} \{x^* \in X \mid \xi_i \in F_i(x^*)\} &= \{x^* \in X \mid u_i^{**}(x^*) < \underline{u}_i(\xi_i, x_{-i}^*)\} \\ &= \{x^* \in X \mid 0 < \underline{u}_i(\xi_i, x_{-i}^*) - u_i^{**}(x^*)\} \end{aligned}$$

¹Si E est un e.v.t. non séparé, on considère $H = \bigcap_{V \text{ voisinage de } 0} V$. On démontre que H est un e.v. et que $\tilde{E} = E/H$

est un e.v.t séparé. Si F vérifie les hypothèse (1) et (2) dans E alors on peut définir \tilde{F} par : soit \bar{x} la classe d'équivalence de $x \in \prod_{i \in I} X_i$, on pose $\tilde{F}_i(\bar{x}) = \bigcup_{x' \in \bar{x}} \text{classe d'équivalence de } F_i(x')$. On a alors, \tilde{F} vérifie (1) et (2) dans \tilde{E} , ce qui permet d'obtenir la conclusion dans E . On trouve une autre preuve de Fan Browder qui inclut le cas non séparé dans un manuscrit de Lassonde [8].

Pour tout $i \in I$ et pour un ξ_i fixé, on pose $h_i(x^*) = \underline{u}_i(\xi_i, x_{-i}^*)$. D'après le lemme 2.1, la fonction h_i (respectivement u_i^{**}) est s.c.i (respectivement s.c.s) donc la fonction $g_i(x) = h_i(x) - u_i^{**}(x)$ est s.c.i (voir par exemple [3] la proposition I.45 page 18). Par suite $\{x^* \in X \mid \xi_i \in F_i(x^*)\} = \{x^* \in X \mid 0 < g_i(x^*)\}$ est un ensemble ouvert. ■

2.2 Preuve du Théorème 1.1

En appliquant le théorème de Fan-Browder compétitif à la famille de correspondance F_i (irréflexive, à valeurs convexe et à image inverse ouverte), il existe $\bar{x} \in X$ tel que pour tout $i \in I$, $F_i(\bar{x}) = \emptyset$, c'est à dire $\underline{u}_i(\xi_i, \bar{x}_{-i}) \leq u_i^{**}(\bar{x})$, $\forall i \in I$ et $\forall \xi_i \in X_i$, donc on a $\sup_{\xi_i \in X_i} \underline{u}_i(\xi_i, \bar{x}_{-i}) \leq u_i^{**}(\bar{x})$, $\forall i \in I$. D'après le lemme 2.3, \bar{x} est un équilibre de Nash. ■

3 Perspective

On remarque que la définition de “meilleure réponse sécurisée” utilisée dans cet article, peut se généraliser sous la forme suivante :

Définition 3.1 *Un jeu $G = (X, u)$ est “à meilleure réponse sécurisée par rapport à une fonction $v : X \rightarrow \mathbb{R}^N$ ” si pour tout x^* de X tel que x^* n'est pas un équilibre, il existe un joueur i qui peut sécuriser en x_{-i}^* un paiement strictement supérieur à $v_i(x^*)$.*

La définition précédente permet de généraliser le théorème 1.2 sous la forme :

Théorème 3.1 *Soit $u^{**} : X \rightarrow \mathbb{R}^N$ une fonction semi-continue supérieurement et telle que pour tout $x \in X$ qui n'est pas un équilibre de Nash, $u^{**}(x) \geq \underline{u}(x)$. Pour tout jeu $G = (X, u)$ compact, quasiconcave et à meilleure réponse sécurisée par rapport à u^{**} , il existe un équilibre de Nash.*

Preuve. La preuve est identique à celle du théorème 1.1, puisque ce sont les seules propriétés de la fonction u^{**} utilisées. ■

Soit $u^{**} : X \rightarrow \mathbb{R}^N$ une fonction semi-continue supérieurement et telle que pour tout $(x, u) \in \Gamma$ pour lequel x n'est pas un équilibre de Nash, $u \geq u^{**}(x) \geq \underline{u}(x)$. L'existence d'une telle fonction vérifiant la définition 3.1 permettrait de généraliser la définition de better reply security de Reny [1] et par suite le théorème 3.1 de Reny.

Références

- [1] P.J. Reny (1998) : “On the Existence of Pure and Mixed Strategy Nash Equilibria in Discontinuous Games”. *Econometrica*. **vol.67**, 1029-1056.
- [2] P. Deguire et M. Lassonde (1995) : “Familles Sélectantes”. **TMNA 5**, 261-269.
- [3] D. Azé (1997) : “Éléments d’analyse convexe et variationnelle”. *Ellipses*. Paris.
- [4] D. Fudenberg, and J. Tirole (1991) : “Game Theory”. *Cambridge*. MA : MIT Press.
- [5] G. Carmona (29 september 2003) : “On the Existence of Equilibria in Discontinuous Games : Three Counterexamples”. *Universidade Nova de Lisboa*.
- [6] G. Tian and J. Zhou (1992) : “The Maximum Theorem and the Existence of Nash Equilibrium of (Generalized) Games without Lower Semicontinuities”. *Journal of Mathematical Analysis and Applications* **166**, 351-364.
- [7] J. Rupert and J. Gatti (2005) : “A Note on the Existence of Nash Equilibrium in Games with Discontinuous Payoffs”. CWPE 0510.
- [8] M. Lassonde 2004 : “Minimax and Fixed Points”. Communication privée.