HAL
open science

La persistance dans les marchés financiers

Dominique Guegan

To cite this version:

Dominique Guegan. La persistance dans les marchés financiers. Banque & Marchés, 2007, 90, pp.34 - 43. halshs-00179269

HAL Id: halshs-00179269

https://shs.hal.science/halshs-00179269v1

Submitted on 15 Oct 2007

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

La Persistance dans les marchés financiers

Dominique Guégan
Université Paris 1 Panthéon-Sorbonne
Centre Économique de la Sorbonne*
dguegan@univ-paris1.fr

I Introduction

Quand on évoque la notion de persistance, qu'en est-il réellement ? De quelle persistance parle-t-on ? Comment peut-on la mesurer ? Quel lien existe-t-il entre la persistance et la volatilité ? Quel est son impact sur le marché d'une manière générale ? Quel rôle peut-elle jouer dans la gestion des risques ? Toutes ces questions sont d'actualité et nous allons nous efforcer d'y répondre tout au long de notre papier.

Dans un article récent très intéressant, Aftalion et Poncet (2004) posent le problème de la volatilité sur les marchés et son rôle essentiel pour comprendre la finance, l'économie et les sciences de gestion. Il nous semble utile d'ajouter à leur point de vue, une approche complémentaire et interactive basée sur le phénomène de persistance si souvent décrit, et parfois remis en cause, dans les données économiques et financières.

Nous allons donc dans ce papier préciser ce qu'est cette notion de long terme, son impact sur les marchés et les difficultés rencontrées pour la mesurer en particulier quand elle se confond avec d'autres faits stylisés. En effet, nous savons qu'une éventuelle confusion lors d'une modélisation entraîne des dommages importants à la fois pour les prévisions et le calcul des risques.

Sur les marchés, les rentabilités espérées des actifs négociés dépendent étroitement de la modélisation « au plus juste » de ces actifs. La prise en compte de leur volatilité, qui permet une connaissance de leur comportement de court terme, ne doit pas être dissociée de l'existence éventuelle d'un comportement de long terme. En effet, les flux futurs correspondant nécessitent une bonne connaissance de cette variable de long terme, en particulier pour des couvertures de long terme. Nous verrons par la suite que ce comportement de long terme peut aussi être dû à une mauvaise prise en compte de comportements de court terme autres que la volatilité. Les risques encourus, en ne prenant pas en compte cette composante de long terme, peuvent être dommageables, surtout dans la perspective de la mise en place des accords de Bâle II (1996) et plus précisément du "*Capital Adequacy Ratio*" pour les banques. Rappelons que le comité de Bâle a souhaité à l'origine mettre l'accent sur la gestion des risques. Le calcul du risque réellement encouru par les établissements n'est pas définitif et plusieurs points de contradiction apparaissent encore dans les discussions. L'un des éléments importants de ces accords est le calcul du risque du portefeuille de crédit, d'où la nécessité de disposer d'un « bon » modèle de portefeuille. Nous nous attachons ici à faire le lien entre une modélisation correcte des séries caractérisant un portefeuille et le modèle de copule associé au portefeuille qui va correspondre à sa distribution multivariée, et permettre au praticien d'obtenir une possible mesure du risque pour ce portefeuille.

Le phénomène de persistance, ou longue mémoire, ou long terme, qui nous intéresse ici, a été étudié dès 1966 par Granger, précisant déjà « que les évènements qui affectent l'économie sur une longue période sont plus importants que ceux qui l'affectent sur une courte période », et dans son article, l'auteur distingue clairement ce qui relève de la tendance, du long terme et de la saisonnalité. Déjà une question importante était de savoir comment mesurer ce phénomène et comment l'intégrer de manière judicieuse dans l'analyse des données économiques et financières : l'analyse spectrale apparaissant comme un outil privilégié dans ce contexte (Granger et Engle, 1983).

Quand on relit l'article de Granger (1966), la problématique de base posée par ce papier est la prise en compte de l'existence d'une tendance en moyenne dans des données économiques, phénomène qui est lié à celui de la non-station-

* 106 b^d de L'hopital - 73013 Paris France

narité des séries. Or notons que, si la longue mémoire ou persistance existe réellement, celle-ci va se maintenir dans les données, dès que l'on aura pris en compte la tendance (ou la saisonnalité) à l'aide d'un filtre ou d'une régression linéaire. Depuis les années soixante-dix une littérature assez importante s'est développée (en termes de tests principalement) pour différencier ce qui relevait d'un comportement de non stationnarité en moyenne d'un comportement de longue mémoire. Mais ces deux phénomènes sont structurellement différents. En effet, si l'existence d'une tendance dans une série est visible « à l'œil nu » sur la trajectoire, un comportement de long terme y est totalement invisible.

Une notion issue de la physique, et que l'on retrouve dans la littérature économique, fait aussi référence à des phénomènes de persistance : il s'agit de l'hystérésis. Ce terme utilisé à l'origine pour décrire des phénomènes spécifiques en ferromagnétisme, (Weiss, 1907), a plusieurs définitions qui peuvent correspondre à des situations sensiblement différentes. Étant donné un instant initial connu et un filtre causal F, appelé « *rate-dependent memory operator* », une entrée va agir sur une sortie à travers ce filtre. Si ce filtre crée de l'hystérésis, son action est irréversible, dissipative et suivant la vitesse avec laquelle il agit, plusieurs comportements peuvent être observés. Ainsi l'hystérésis peut provoquer dans certains cas un comportement de long terme, et les modèles proposés par les physiciens et les mathématiciens sont nombreux et dépendent d'hypothèses assez fortes, (Visitin, 1988), qui ne correspondent pas aux comportements que nous souhaitons étudier ici.

Ainsi nous voyons que l'étude d'un comportement de long terme fait surgir naturellement la notion de non stationnarité en moyenne, souvent liée à celle de « unit root », et à la marge la notion d'hystérésis. Afin de rendre notre exposé le plus simple possible, nous ne nous intéresserons pas ici à ces deux notions que sont la non stationnarité et l'hystérésis souhaitant ne parler de longue mémoire que dans un cadre de stationnarité et de réversibilité.

Récemment un autre débat a vu le jour : il s'agit de l'apparition d'un certain type de comportement de longue mémoire produit par des modèles présentant des sauts et des changements d'états. Or, si la volatilité est présente dans des données économiques ou financières, il en est de même des sauts ou des changements d'état (expansion ou récession au sein du PIB, haute et de basse volatilité sur les actifs financiers, ruptures sur les prix lors d'annonces d'évènements spécifiques (faillite, guerre, etc.)). Il est donc naturel de regarder ce que ces types de non-linéarités induisent sur une série.

Depuis 40 ans, la longue mémoire est présente dans les esprits chargés de modéliser les données économiques et financières, nous ne pourrons donc pas ici être exhaustifs dans notre analyse. Nous allons nous limiter aux points suivants, à savoir présenter les notions de longue mémoire les plus courantes et décrire leur prise en compte à l'aide de modèles paramétriques utilisables par les praticiens. Nous aborderons ensuite le problème de la longue mémoire créée de manière artificielle et son impact sur l'analyse des données économiques et financières.

Nous montrerons que parfois l'analyse de la volatilité se confond avec celle de la mémoire longue. Ceci nous amènera à revenir sur le problème de la non-stationnarité et à nous interroger sur un certain nombre de pratiques qui pourraient être remises en cause vue leur manque de robustesse. Nous montrerons comment ces discussions et les modélisations de prix proposées peuvent être utilisées pour la gestion des risques dans les entreprises et les institutions financières.

II Les notions de mémoire longue

Prenons l'exemple du prix d'un cours observé à intervalle de temps régulier et notons X(t) ses valeurs sur une période de temps donnée (t = 1, ..., T). Nous allons supposer que ces prix ne présentent pas de tendance linéaire (on a alors une stationnarité à l'ordre un) et même s'ils présentent de la volatilité (ce qui se remarque par des agrégats sur la trajectoire), nous allons leur associer une fonction d'autocorrélation, notée ρ_x, définie $\forall h \in Z$ par :

$$\rho_x(h) = \frac{\gamma_x(h)}{\gamma_x(0)},$$

où $\gamma_x(.)$ est la fonction d'autocovariance associée aux observations. En présence du seul fait stylisé relatif à la volatilité, rappelons que la fonction d'autocorrélation ρ_x décroît assez rapidement vers zéro.

Grâce aux observations X(t),{t = 1, ..., T}, on peut calculer la corrélation empirique $\widehat{\rho}_x(h) = \frac{\widehat{\gamma}_x(h)}{\widehat{\gamma}_x(0)}$, à partir de la covariance empirique définie par, :

$$\widehat{\gamma}_x(h) = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T-h}(X(t)-X_T)(X(t+h)-X_T), \qquad (1)$$

où $X_T = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} X(t)$.

Formellement la décroissance rapide vers zéro de la covariance s'écrit, $\gamma_X(h) \approx Cr^h$, $\forall h \in Z$, avec $|r| < 1$ et C est une constante. Dans ce cadre-là, on dit que les prix du cours étudié sont à mémoire courte et nous avons $\sum_{\infty}^{\infty}|\gamma_X(h)| < \infty$. Notons que cette dernière relation est vérifiée pour une large classe de processus, comme les modèles ARMA, GARCH, SETAR, Bilinéaires, à changements de régimes, etc., (Guégan, 1994). On peut donc constater que cette décroissance rapide vers zéro ne conduit pas à une identification simple du modèle sous jacent aux prix observés puisqu'elle est vérifiée par un grand nombre de modèles linéaires et non linéaires.

Par ailleurs, on peut envisager d'autres comportements de la fonction de covariance. En particulier, on peut avoir une fonction d'autocovariance vérifiant la relation suivante $\sum_{-\infty}^{\infty}|\gamma_X(h)| = \infty$. Ceci signifie alors que les prix restent positivement corrélés pendant très longtemps. Pour des prix vérifiant cette propriété, on parlera de comportement de mémoire

longue. La mémoire courte signifie donc que les prix ne sont corrélés que sur des périodes de temps très courtes, en général un ou deux retards, à la différence de ce qui se passe en présence de mémoire longue.

Afin d'appréhender au mieux le concept de longue mémoire, suivant Granger, nous allons nous placer dans le domaine spectral. En effet, si l'existence d'une mémoire longue se caractérise par une décroissance « lente » vers zéro de la fonction d'autocorrélation, elle se caractérise de manière beaucoup plus spectaculaire par l'explosion de la densité spectrale en une ou plusieurs fréquences. Cela provient de la définition même de ce concept que nous rappelons maintenant très rapidement. Si l'on peut associer à des données stationnaires X(t) une fonction d'autocovariance $\gamma_x(.)$, alors on peut montrer, sous des hypothèses assez simples, que l'on a l'égalité suivante :

$$f_X(\lambda) = \sum_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda\tau}\gamma_X(\tau),\ \forall\lambda \in [-\pi, \pi.].. \qquad (2)$$

La fonction $f_x(.)$ correspond à la densité spectrale associée aux données X(t). Remarquons que dans l'expression (2), la somme $\sum_{-\infty}^{\infty}\gamma_X(h)$ intervient. Ainsi, si cette somme n'est pas finie, la densité spectrale devient singulière, en particulier en zéro. C'est ce comportement qui va caractériser l'existence de longue mémoire.

À partir de ces deux outils : covariance et densité spectrale, nous allons maintenant définir la notion de longue mémoire. Nous disons que :

1 - Des données stationnaires X(t) possédant une fonction d'autocovariance $\gamma_x(.)$, présentent un comportement de longue mémoire au sens de la covariance, avec une vitesse de convergence d'ordre d, avec 0 < d < 1/2, si :

$$\gamma_x(h) \approx C(d)h^{(2d-1)}, \text{ quand } h \to \infty, \qquad (3)$$

où C(d) est une constante qui dépend de d.

2 - Des données stationnaires X(t) possédant une densité spectrale $f_x(.)$, présentent un comportement de longue mémoire d'ordre d, au sens de la densité spectrale, avec 0 < d < 1/2, s'il existe au moins une fréquence $\lambda_0 \in [-\pi, \pi]$ telle que :

$$f_X(\lambda) \approx C|\lambda - \lambda_0|^{(-2d)}, \text{ quand } \lambda \to \lambda_0 \qquad (4)$$

pour tout $0 < C < \infty$.

Dans la littérature, d'autres définitions de mémoire longue existent, en particulier celle basée sur le comportement asymptotique de la variance des sommes partielles des données observées. C'est la suivante :

3 - Des données stationnaires X(t) présentent un comportement de longue mémoire au sens de la variance d'Allan si la variance des sommes partielles est telle que :

$$\text{var}[S_T] \approx \frac{C}{T^{(1-2d)}}$$

où C est une constante, 0 < d < 1/2 et où $S_T = \sum_{t=1}^{T} X(t)$.

Malheureusement cette dernière définition s'avère peu utile dans la pratique. Une autre définition repose sur le concept de mélangeance qui permet de rendre des données asymptotiquement indépendantes, (Rosenblatt, 1956), mais cette approche est elle aussi difficile à utiliser dans la pratique car on ne sait pas tester la notion de mélangeance sur des données observées. Notons que toutes ces définitions ne sont pas équivalentes. On peut montrer que des données qui ont un comportement de longue mémoire au sens de la covariance, ne l'ont pas forcément au sens de la densité spectrale. Néanmoins, des données peuvent l'avoir dans les deux sens. Les données qui présentent de la longue mémoire en covariance, avec une certaine vitesse de convergence, auront aussi un comportement de longue mémoire au sens de Allan, mais d'autres données n'auront pas forcément ce comportement. Des données dont la loi est stationnaire peuvent avoir un comportement de longue mémoire en loi, mais actuellement ce résultat n'est établi que pour des données gaussiennes. Ainsi, nous voyons que les définitions relatives à la longue mémoire utilisées deci delà dans la littérature ne reposent pas sur les mêmes notions et ne sont, en aucun cas, équivalentes. Il existe néanmoins une « hiérarchie » d'un point de vue statistique. En effet, si l'on sait étudier le comportement de la fonction de covariance et de la densité spectrale à partir d'un ensemble d'observations, il est beaucoup plus difficile d'étudier le comportement de leur somme partielle, (Guégan, 2005).

Ici nous proposons de mesurer l'existence de dépendance longue entre les prix, en estimant le paramètre de mémoire longue d qui apparaît dans les expressions (3) et (4). Ce paramètre permet de quantifier la vitesse de décroissance du pseudo-cycle que l'on observe sur les prix. Son estimation peut être réalisée à partir de méthodes non paramétriques, mais il apparaît souvent plus utile de l'estimer grâce aux modèles présentant les comportements décrits précédemment. Cette dernière approche s'avère plus utile dès que l'on veut faire des prédictions ou de la gestion de risques de portefeuilles.

III Les modèles paramétriques de la longue mémoire

La mesure de la longue mémoire sur les prix repose principalement sur l'étude de la vitesse de décroissance de la fonction de covariance de ces prix. Nous savons que si la décroissance est lente, elle peut être causée par la non stationnarité en tendance de la série des prix. Par exemple, les séries de production en économie, telles que le PIB ou l'indice de la production industrielle, ou les séries de prix d'actifs en finance, présentent une fonction d'auto-corrélation qui décroît très lentement. Ce comportement peut alors être modélisé par un modèle de régression. Ici, nous allons supposer que cette tendance a déjà été prise en compte et que les prix sont stationnaires en tendance. Ainsi si la corrélation de long terme se maintient sur les prix, plusieurs stratégies existent.

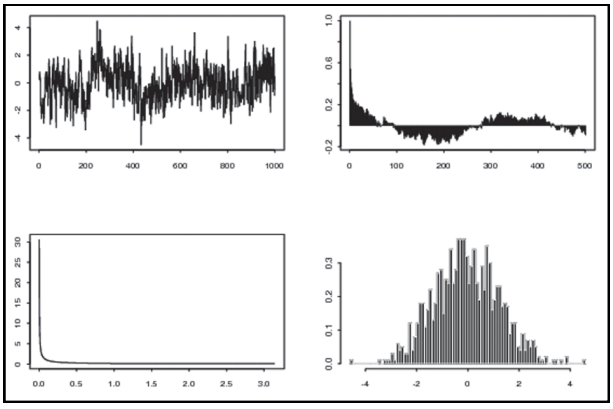
Une première approche consiste à utiliser les processus de type ARMA, développés par Box et Jenkins (1976).

Pour cela on augmente le nombre des ordres des polynômes autorégressifs et moyenne mobile. Cette méthode se heurte rapidement au grand nombre de paramètres à estimer qui a pour conséquence une perte importante du nombre de degrés de liberté entre les prix, mais aussi à l'utilisation d'approximations trop fortes sur les estimations des paramètres.

Une représentation parcimonieuse des prix à dépendance de long terme a vu le jour au début des années 1980 grâce aux travaux de Granger et Joyeux (1980) et Hosking (1981). Ces auteurs ont introduit les modèles fractionnaires FI(d) qui permettent de tenir compte de la longue mémoire grâce au seul paramètre d qui peut prendre des valeurs réelles dans l'intervalle ouvert]0,1[. Les données X(t) sont dites intégrées d'ordre d fractionnaire si, quand on leur applique le filtre $(I-B)^d$ avec d dans]0,1[, elles sont asymptotiquement faiblement stationnaires. Ceci signifie qu'il existe une forte dépendance, à l'instant t, entre les observations X(t) et X(t + k), pour un entier k relativement grand. Ici l'opérateur B correspond à l'opérateur retard appliqué aux prix, BX(t) = X(t – 1).

Très souvent les données présentent une pseudo-saisonnalité liée à cette dépendance de long terme. Il est possible de la modéliser à partir d'une généralisation du filtre précédent. Ce filtre est connu sous le nom de filtre de Gegenbauer et est égal à $(I-2uB+B^2)^d$, avec $|u| < 1$. À la différence du filtre $(I-B)^d$ il va permettre de prendre en compte l'explosion de la densité spectrale en une autre fréquence que zéro, ici $\cos^{-1}(u)$. Notons que l'explosion de la densité spectrale en zéro signifie l'existence d'un cycle infini tandis que l'explosion en une autre fréquence précise la pseudo-périodicité caractérisant les prix. Si maintenant plusieurs pseudo-périodes coexistent sur la période observée pour les prix X(t), on utilise de préférence le filtre $\prod_{i=1}^{k}(I-2u_iB+B^2)^{d_i}$. Il permet de supposer que k speudo-saisonnalités coexistent (journalière, hebdomadaire, mensuelle, trimestrielle, etc.), chacune étant pondérée par son propre coefficient de mémoire longue.

Figure 1. **Trajectoire, fonction d'autocorrélation, densité spectrale et histogramme d'un Processus $(I-B)^d = X(t) = \varepsilon(t)$, où $\varepsilon(t)$ est un bruit blanc gaussien**



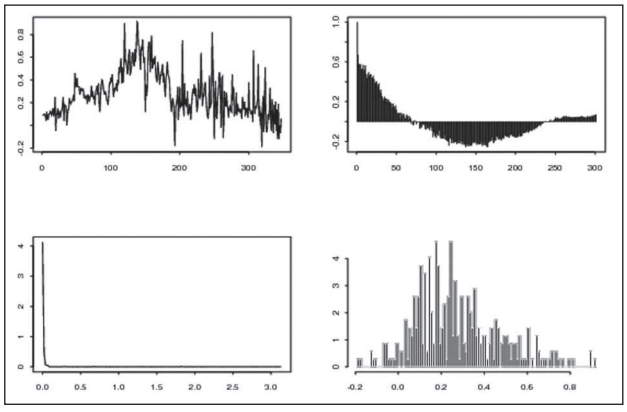
Le modèle paramétrique construit à partir de ce dernier filtre et appliqué sur les prix fournit des résidus stationnaires et non corrélés si l'on est en présence de longue mémoire. On l'appelle le modèle de Gegenbauer à k facteurs. Appliqué aux prix X(t), il s'écrit :

$$\prod_{i=1}^{k}(I-2u_iB+B^2)^{d_i}X(t) = \varepsilon(t), \qquad (5)$$

où k est un nombre entier fini, $|u_i| < 1$ pour i = 1, ..., k, $0 < d_i < 1/2$, i = 1, ..., k et où $\varepsilon(t)$, $(t \in Z)$, est un bruit blanc de variance constante finie σ_ε^2. Pour i = 1, ..., k, les fréquences $\lambda_i = \cos^{-1}(u_1)$ sont appelées les fréquences de Gegenbauer. Elles correspondent, aux pseudo-cycles caractérisant les données et aux explosions observées sur la densité spectrale des prix. Quand k = 1, d = 1 et $u_1 = 1$ on retire une tendance stochastique sur les prix et on obtient un bruit blanc. Quand k = 1 on obtient un processus de Gegenbauer à un facteur et si $u_1 = 1$, on retrouve le processus FI (2d) de Granger et Joyeux (1980) et Hosking (1981). En ce sens, les processus de Gegenbauer à k facteurs constituent une large classe de processus à mémoire longue. Ces modèles ont été introduits et étudiés successivement par Gray, Zhang et Woodward (1989), Giraitis et Leipus (1995), Woodward, Cheng et Gray (1998) et Ferrara et Guégan (2001).

Sur la figure 1, nous présentons quelques graphes caractéristiques d'un modèle FI(d), avec d = 0.4. La trajectoire est stationnaire en moyenne, la fonction d'autocorrélation ne décroît pas rapidement vers zéro et sa densité spectrale explose en zéro. Sur la figure 2, nous avons représenté l'index de consommation (CPI) stationnarisé sur la période de janvier 1970 à décembre 1998. Pour une étude plus complète de cette série, on renvoie à Guégan (2003). Cette série est stationnaire en moyenne, sa fonction d'autocorrélation est similaire à celle de la figure 1. Il en est de même de la densité spectrale. Ainsi, La modélisation proposée en (5) apparaît conforme à une certaine réalité et peut trouver son application dans la modélisation de certains indices économiques ou produits financiers.

Figure 2. **Trajectoire, fonction d'autocorrélation, densité spectrale et histogramme de l'index de consommation (CPI) stationnarisé sur la période 01/07/1970 - 30/11/1998**



Si les données de prix présentent des corrélations de long terme, nous pouvons, à partir de l'approche décrite précédemment, trouver le filtre qui va nous permettre de les rendre indépendantes. Une telle modélisation nous permet d'une part de proposer des prévisions de long terme pour ces prix (à la différence des modèles de régression linéaire ou non linéaire, comme les modèles de volatilité). Elle nous permet aussi, à partir des résidus ainsi obtenus, de définir une stratégie assez simple de gestion des risques de ces prix caractérisant un portefeuille. En effet dès que la loi de ces résidus est connue, on peut leur associer une mesure de risque comme la Valeur à Risque définie en (14), (Dias et Embrechts (2004) et Caillault et Guégan (2006) pour des exemples d'applications). Pratiquement, on procède la manière suivante, à partir des résidus, on estime leur distribution et on associe à chaque actif une mesure de risque. Si maintenant on considère un ensemble d'actifs constituant un portefeuille, on va calculer la distribution multivariée du portefeuille. Celle-ci sera obtenue grâce aux distributions des résidus. En effet, on va ajuster une copule à la distribution empirique du portefeuille via les distributions marginales précédemment calculées. Ceci sera détaillé dans le paragraphe VII.

IV Les modèles à sauts et leur comportement de long terme

En économie et en finance, le comportement des agents diffère suivant que l'on se trouve en période d'expansion ou de récession. La consommation des ménages est sensible à l'activité économique. Il en est de même de l'investissement des entreprises, et l'on sait bien que la croissance permet une diminution du chômage alors que la tendance s'inverse dès qu'une récession s'annonce. Les investissements des entreprises vont ainsi être sensibles aux comportements de certains indices économiques. De même les marchés vont réagir différemment en période de crise, entraînant une augmentation de la volatilité des prix des actifs. Dans ce cas, les séries peuvent sembler non stationnaires alors qu'elles sont marquées par des faits structurels qui peuvent être pris en compte par des modèles intégrant certaines non linéarités.

Les modèles à changements de régimes ont été introduits afin de prendre en compte l'existence de changements structurels non visibles à l'œil nu dans les données économiques étudiées. L'idée de base de ces modèles repose sur le fait que les données sont localement linéaires avec des paramètres qui changent suivant l'état dans lequel on est, ainsi une certaine non stationnarité semble inhérente aux données et donc aux modèles considérés.

La manière dont on établit le lien entre l'évolution d'une série et les régimes ou les sauts qui la caractérisent peut se faire de plusieurs manières. On peut se servir d'une variable observable, c'est le cas des processus SETAR (Tong, 1990), ou utiliser une variable inobservable qui suit par exemple un processus Markovien (Hamilton, 1988) ou non-Markovien (Collet et Ladoucette, 2004). Une question latente pour ces modèles Markoviens ou semi-Markoviens revient à supposer que le choc qui crée ce changement de structure peut être transitoire ou non. On va alors construire des modèles avec sauts dont l'impact sera plus ou moins long suivant que le choc utilisé est permanent, stochastique ou variant au cours du temps.

C'est en cela que les modèles structurels avec chocs peuvent présenter des comportements de court ou de long terme. Les caractéristiques de ces chocs auront aussi un impact plus ou moins grand sur les données observées, suivant qu'ils apparaissent régulièrement avec une variance faible ou très rarement avec une variance assez forte tout en intervenant de manière aléatoire. Les modèles de type SETAR ne permettent pas de modéliser de tels comportements. Nous allons donc considérer des modèles évoluant en fonction de variables transitoires non internes au modèle dont l'impact sur les prix ou les indices peut se faire de manière aléatoire.

Considérons donc un prix X(t) auquel on associe un modèle s'exprimant comme la somme d'une moyenne $\mu(t)$ et d'un bruit $\varepsilon(t)$:

$$X(t) = \mu(t) + \varepsilon(t) . \tag{6}$$

Il n'est pas très difficile de comprendre qu'un changement d'état apparaît sur le niveau du prix ou de l'indice si l'on permet à la variable $\mu(t)$ d'avoir plusieurs comportements. Par exemple la variable $\mu(t)$ peut prendre la valeur 0 ou 1 suivant un schéma préétabli. On a alors 2 états (expansion, récession). C'est la façon de changer de niveau qui peut rendre le modèle plus ou moins complexe et créer les comportements que l'on cherche à modéliser. Ainsi ces changements peuvent avoir lieu avec une certaine probabilité p, et la loi sous jacente va induire différents types de comportements. Si cette probabilité p est petite les prix changent souvent d'état et le modèle présente une forme de volatilité et un comportement de mémoire courte. Si la probabilité p est grande alors les prix restent longtemps dans un état et cela peut induire une fonction d'autocorrélation qui décroît lentement vers zéro. On peut alors supposer que les prix suivent un modèle FI(d), (Granger et Terasvirta, 1999 et Granger, Spear et Ding, 2000). On peut aussi supposer que les changements d'état vont dépendre de l'état précédent en utilisant la matrice de transition P d'une chaîne de Markov s(t) qui agit sur la variable $\mu(t)$. Cette variable que l'on note alors formellement $\mu_{s(t)}$ est caractérisée par la matrice de transition de la chaîne de Markov s(t).

Cette matrice de transition P est définie par :

$$P = \begin{bmatrix} p_{00} & 1-p_{00} \\ 1-p_{11} & p_{11} \end{bmatrix} \tag{7}$$

où p_{ij} sont des probabilités fixes a priori, avec p_{ij} = P[s(t) = j|s(t – 1) = i], $0 < p_{ij} < 1$, i, j = 0,1 et $\sum_{j=0}^{1} p_{ij} = 1$. À partir d'une telle matrice de transition, on obtient le modèle à changement de régime introduit par Hamilton (1988) pour étudier les taux d'intérêt américains. Ces modèles sont connus pour avoir une fonction d'autocorrélation à décroissance exponentielle, identique à celle d'un GARCH, (Timmermann, 2000).

Maintenant on peut contraindre ces probabilités p_{ij} et les rendre aléatoires. Supposons par exemple que dans l'expression (7),

$$p_{00} = 1 - c_0 T^{-\delta 0}, p_{11} = 1 - c_1 T^{-\delta 1}, \qquad (8)$$

où δ_0 et δ_1 sont des paramètres positifs. Alors le temps de séjour dans l'un des états est une fonction de la longueur de l'échantillon T et de la valeur des p_{ij}. Sous les conditions (8), on peut montrer que la variance de la somme partielle des observations X(t) se comporte comme :

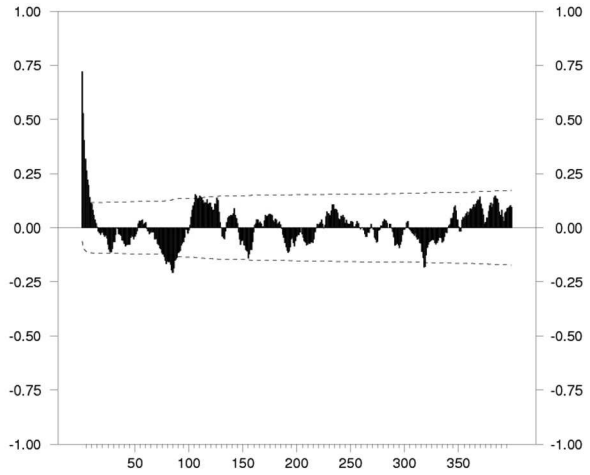
$$\mathrm{var}\left[\sum_{t=1}^{T} X(t)|\right] \approx CT^{\max(\min(\delta_0, \delta_1) - |\delta_0 - \delta_1 + 1, 1)|}, \qquad (9)$$

où C est une constante, (Diebold et Inoue, 2001 et Breidt et Hsu, 2002). On obtient ainsi un comportement de longue mémoire de type Allan, mais on n'a pas un comportement de longue mémoire en covariance. Évidemment le comportement correspondant à la condition (8) est assez artificiel. Dans la pratique, on ne sait pas le détecter. Il nous indique que, pour des sous périodes, il y a un phénomène de persistance dans les données observées.

On peut bien sûr imaginer d'autres types de comportements pour le modèle (6). Par exemple, en mettant une loi binomiale sur la variable $\mu(t)$ et en « jouant » sur la probabilité p de cette loi. Dans ce cas-là, on va moduler la capacité des prix à rester plus ou moins longtemps dans un état particulier. Maintenant, si on veut prendre en compte à la fois l'existence d'une tendance stochastique sur les prix (pour éviter de les stationnariser), et l'existence de sauts, on peut mettre un modèle de marche aléatoire sur la variable aléatoire $\mu(t)$ et un comportement spécifique sur le bruit $\varepsilon(t)$, par exemple une loi binomiale avec une probabilité p spécifique, ou bien une chaîne de Markov ou semi-Markovienne avec une matrice de transition ad hoc. On se rapproche alors du modèle « mean-plus-noise » ou du modèle « Stop-break » étudiés par plusieurs auteurs (Chen et Tiao, 1990, Granger et Hyung, 1999, Smith, 2003 et Collet, Guégan et Wolff, 2005). Le modèle (6) est un modèle à mémoire courte mais l'introduction de lois spécifiques sur les variables $\mu(t)$ et $\varepsilon(t)$ permet de créer des temps de séjour longs dans chaque état et provoque un comportement de mémoire longue en covariance. Pour une revue détaillée de certains de ces modèles, (Guégan, 2005).

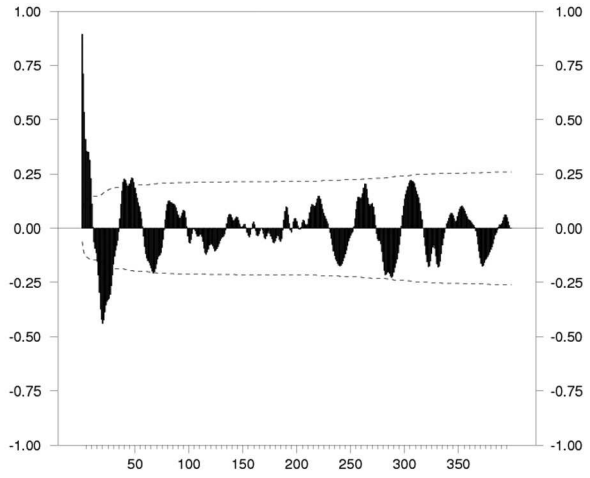
L'intérêt de ces modèles est qu'ils montrent que l'influence de bruits structurels sur le niveau d'une série ou sur le niveau de sa variance (et donc sur sa volatilité) peut être source de persistance. On observe ainsi que des prix dont le comportement semble dépendre d'informations de court terme (probabilité d'être dans l'état précédent par exemple), risquent d'être modélisés par des processus de long terme, comme ceux introduits en (5) à cause du comportement spécifique de leur fonction d'auto-corrélation. En effet, s'il n'y a pas trop de sauts dans la série, un phénomène de persistance s'installe qui se traduit par une fonction d'auto-corrélation qui n'arrive pas à décroître rapidement vers zéro. Par exemple, la figure (3) montre la fonction d'auto-corrélation d'un processus à deux changements de régime.

Figure 3. **Fonction d'auto-corrélation d'un processus à deux changements de régime**



On s'attend à ce qu'elle décroisse exponentiellement vite vers zéro, alors qu'en réalité elle est comparable à celle d'un processus à mémoire longue, voir la figure 4. Malgré tout, cette confusion peut parfois être source d'intérêt, car on peut montrer qu'un processus de long terme calé sur des données issues d'un modèle à changement de régime à mémoire courte, fournit parfois de meilleures prévisions. Pour de plus amples détails, (Guégan et Rioublanc, 2005). Concernant la gestion des risques de court terme, cette confusion peut être préjudiciable. En effet, la loi des résidus sera différente induisant un biais sur la mesure du risque associée.

Figure 4. **Fonction d'auto-corrélation d'un processus de Gegenbauer à deux facteurs**



V Comportement de long terme et volatilité

Aftalion et Poncet (2004) ont étudié l'existence d'un lien possible entre la volatilité des marchés et le comportement de long terme. Ils ont analysé un grand nombre de documents où, sur différents exemples de données économiques et financières, on montre les changements structurels sur une longue période à partir de chocs économiques, sociaux, politiques, etc. (paragraphe III de Aftalion et Poncet, 2004).

L'approche privilégiée ici est totalement différente de celle de ces deux auteurs. En effet, nous nous questionnons sur les dommages provoqués, en termes de prévisions ou de risques, lorsqu'une confusion dans la modélisation apparaît si volatilité et persistance coexistent. Il s'agit pour nous de savoir si l'on peut modéliser ces deux comportements au sein d'un même modèle. Les précédents auteurs ont d'ailleurs remarqué, qu'à partir d'une modélisation GARCH, les changements de régime de la volatilité provoquaient une grande variabilité des paramètres du modèle en question. On pourrait être tenté de prendre en compte cette instabilité par les modèles du type (6), mais ceux – ci ne résolvent pas, de part leur structure, le problème de la persistance. Plusieurs approches sont alors possibles.

C'est à partir d'études empiriques que la forte dépendance des rendements a été mise en évidence, en particulier à partir de transformations telles que la valeur absolue ou le carré de ces rendements, transformations qui ne supprimaient pas les caractéristiques propres de volatilité (« *clustering* », distributions à queue lente, etc.) Les modèles proposés dans la littérature sont des modèles de type ARCH avec une volatilité conditionnelle qui présente un comportement de longue mémoire. On peut résumer les travaux ayant associé à la fois volatilité et longue mémoire à l'aide d'un modèle synthétique que l'on applique ici aux rendements r(t) des prix X(t) :

$$r(t) = \sigma(t)\eta(t), \qquad (10)$$

où

$$\sigma(t) = (I-F)g(r(t)), \qquad (11)$$

avec η un bruit blanc. Le filtre (I – F) peut par exemple être celui utilisé dans l'expression (5) et la fonction g(.) n'importe quelle transformation appliquée aux rendements. Ces modèles englobent, entre autre, les travaux de Ding, Granger et Engle (1993, 1996), Baillie, Bollerslev et Mikkelsen (1996) et Guégan (2000). Ces modèles privilégient l'existence de longue mémoire à celle de volatilité, tout en faisant cohabiter les deux comportements. Ces modèles expriment le fait que si les rendements présentent de la longue mémoire en covariance alors celle-ci existe aussi sur le processus de volatilité. Si toutefois la volatilité présente une tendance en moyenne, ce qui arrive parfois quand l'impact d'un choc a un pouvoir exponentiel sur la volatilité des prix, alors le modèle précédent ne pourra pas être utilisé.

Un modèle très intéressant, mais difficile à mettre en œuvre pratiquement, a été suggéré par Giraitis, Robinson et Surgailis (1999). Ces auteurs proposent de mettre sur la variance conditionnelle $\sigma^{\delta}(t)$, où $\delta \in N$, un modèle ARCH infini avec des paramètres à décroissance lente. Dans l'expression (11), $g(r(t)) = r(t)^{\delta}$ et (I – F) est un filtre ARCH (∞). Les rendements suivent alors le modèle (10) avec :

$$\sigma^{\delta}(t) = a + \sum_{j=1}^{\infty} b_j r^{\delta}(t-j), \qquad (12)$$

où a > 0, $b_j \geq 0$, j = 1, 2, ... L'intérêt de ce modèle est que le comportement induit repose sur le comportement de la fonction de covariance dont la structure peut être très riche. Elle va dépendre du comportement des paramètres b_j et éventuellement de leur vitesse de convergence vers zéro car ce sont eux qui vont contrôler la vitesse de convergence de la fonction de covariance.

Ainsi on peut obtenir une structure de covariance proche de celle d'un processus de longue mémoire, (Zaffaroni, 2004). Il existe bien sûr d'autres modèles, par exemple les modèles de volatilité stochastique décrits par Robinson (2001) ou les modèles IGARCH, Bollerslev (1986). Ces derniers sont à la frontière de la non-stationnarité. En effet, un choc sur la variance conditionnelle a un effet qui ne s'élimine pas asymptotiquement.

VI La non stationnarité à l'ordre deux des séries économiques et financières

Que se passe-t-il réellement lorsque l'on a à la fois de la longue mémoire et de la volatilité ? Nous avons vu que si les séries présentent de la longue mémoire, celle-ci ne peut pas être confondue avec une non-stationnarité en moyenne. Donc la série est faiblement stationnaire. Si la série présente de la volatilité, la variance de cette série évolue avec le temps et alors la série présente une non stationnarité à l'ordre deux et formellement on ne peut plus parler de faible stationnarité. Cette stationnarité apparaîtra localement. De même si une série présente quelques sauts ou de nombreux sauts (ce qui va être assimilé à de la volatilité), la série ne peut pas être faiblement stationnaire, puisqu'il peut y avoir changement de niveau ou de variance sur les données. Les statistiques utilisées en pratique pour estimer la volatilité ou la longue mémoire perdent de leur robustesse et de leur pouvoir discriminant dès lors que les séries sont non stationnaires. Une telle situation peut amener à estimer un paramètre de longue mémoire d ayant une valeur comprise entre 0 et 1/2 alors que les données sont à mémoire courte. On crée ainsi ce fameux phénomène de « spurious » longue mémoire et les tests ne sont pas à l'abri de ce type d'erreur, (Lima et Crato, 1994).

Dans un papier très intéressant, Mikosch et Starica (1999) montrent que si l'on considère, à partir d'une suite d'observations de prix, $X(1), \ldots X(T)$, des sous suites $X^j(t)$ dont les moyennes sont différentes, alors la fonction d'auto-covariance pour un h assez grand devient constante et le périodogramme tend à exploser pour des fréquences proches de zéro. Ainsi on est amené à supposer que la série est à mémoire longue alors qu'en fait on analyse une série à mémoire courte localement dont des sous ensembles d'observations ont des moments non conditionnels différents.

Si nous considérons un échantillon d'observations de taille T dont on suppose qu'il est gouverné par une même distribution, et si on construit r sous ensembles $X^1(t), X^2(t), \ldots, X^r(t)$ à partir de ces observations avec des distributions marginales différentes, alors l'échantillon d'origine $(X(1), \ldots X(T))$ ne peut pas être stationnaire. Si nous associons maintenant à chaque sous ensemble $X^j(t)$ un nombre positif p_j, tel que $\sum_{j=1}^{r} p_j = 1$, si les moyennes de chaque sous ensemble $X^j(t)$ diffèrent et si les covariances $\gamma_{X^j(t)}(h)$

décroissent exponentiellement vite vers zéro quand $h \to \infty$, alors la covariance empirique $\widehat{\gamma}_{X(t)}(h)$ pour h grand est une constante strictement positive égale à $p_i\, p_j (E[X^j(t)] - E[X^i(t)])^2$, pour $1 \le i < j \le r$.

Ainsi, le périodogramme devient grand pour de petites fréquences quand $T \to \infty$. Ce type de résultat peut facilement être appliqué à un modèle GARCH(1,1). Il semble donc que la non stationnarité de la variance non conditionnelle est une source possible de la décroissance lente de la fonction d'autocovariance empirique alors que la forte volatilité dans le long terme est mesurée par un modèle ARCH. C'est le même type de comportement que nous pouvons observer avec des modèles à changements de régime tels que (6). La non-stabilité de la distribution des séries étudiées peut donc être la source de nombreuses confusions, en particulier induire une modélisation non adéquate des prix et des rendements qui rendrait caduque toute mesure de risque basée sur cette modélisation.

VII Gestion des risques financiers ou de crédits

Revenons maintenant à la gestion des risques de portefeuille et considérons un portefeuille V constitué de plusieurs indices $X^j(t)$, j = 1, ..., n. Ces indices ne sont pas indépendants entre eux, ce qui représente une grande difficulté pour calculer une mesure correcte du risque associée à ce portefeuille. Supposons donc que chaque indice ou actif, à l'instant t soit modélisable par un modèle dynamique tel que (5) ou (6), on peut alors récupérer pour ces actifs des résidus supposés indépendants. À partir de ce constat nous allons proposer une stratégie qui permet de résoudre le calcul de la mesure du risque de façon satisfaisante à partir de la distribution des résidus obtenus lors d'une modélisation de type (5) ou (6).

Rappelons que dès 1988, le comité de supervision des banques réuni à Bâle a défini des règles afin d'établir un contrôle sur le capital des banques lié à leurs actifs. Les règles reposaient sur un système simple correspondant à des poids associés aux risques avec un ratio correspondant à 8 % du capital considéré. Afin de pallier aux biais provoqués par ces règles assez rigides, dès 1996 il a été demandé aux institutions financières de disposer de modèles internes fiables leur permettant de se couvrir vis-à-vis des risques de marchés. Ces modèles devaient répondre à un certain nombre d'exigences correspondant au « capital Adequacy Ratio ». Il s'est agi, bien entendu de définir une protection minimale pour ces banques, en vue de promouvoir la stabilité et l'efficacité du système financier. Plusieurs stratégies ont été développées. Ici nous allons nous focaliser sur une des mesures popularisée par Riskmetrics, voir Morgan (1996). Il s'agit de la Valeur à Risque (VaR) qui mesure la perte maximale potentielle d'un portefeuille pour une probabilité donnée sur une période de temps prédéterminée. C'est une mesure statistique simple puisque, pour un α donné (1 %, 5 %), elle correspond au quantile de la probabilité P_θ associée au portefeuille à l'instant t :

$$\alpha = P_\theta[V_t < VaR_{\alpha,\, t}]\,. \qquad (14)$$

Cette mesure de risque, grâce à sa facilité de compréhension, peut être utilisée dans de nombreuses circonstances : pour contrôler les traders, pour définir des stratégies internes et externes de gestion des entreprises et elle est actuellement reconnue à la fois par les organismes officiels et le secteur privé, comme outil de mesures de risques. Dans le domaine privé le groupe des « Trente » incluant des banquiers et des acteurs des marchés de dérivatives utilise la VaR comme mesure de gestion des risques.

Quand on calcule cette VaR, on fait un calcul de prévisions. On peut alors utiliser bien entendu les modèles de volatilité décrits en détail par Aftalion et Poncet (2004), (Caillault et Guégan, 2005, pour une application), mais si l'on veut aussi prendre en compte la persistance dans les données (au-delà de la volatilité), les résidus obtenus à partir des modèles de type (5) ou (6) permettent de résoudre ce problème.

Partant de là, la question est de savoir ce que l'on fait dans le cas d'un portefeuille constitué de plusieurs actifs. L'étude de chaque actif va nous fournir des résidus indépendants. Nous aurons ainsi à notre disposition plusieurs suites de résidus correspondants aux actifs du portefeuille. Ces suites de résidus ne sont pas indépendantes entre elles. Elles ne peuvent pas être caractérisées, a priori, par des corrélations dans la mesure où les actifs constituant le portefeuille ne sont pas corrélés linéairement. Il est donc nécessaire d'avoir une approche plus globale pour modéliser la complète dépendance entre les différents actifs. Celle-ci va nous être fournie par la distribution jointe P_θ des actifs $X^j(t)$, j = 1, ..., n constituant le portefeuille V. Cette distribution nous permettra alors de calculer la VaR associée à ce portefeuille. Nous allons de fait calculer cette VaR à partir de la distribution des résidus obtenus après modélisation des actifs. Pour calculer la distribution multivariée qui approche au mieux la distribution jointe des actifs, nous allons utiliser le concept de copule qui va permettre d'estimer la loi P_θ du portefeuille. Nous introduisons maintenant cette notion.

Une copule est une distribution jointe n-dimensionnelle définie sur l'intervalle $[0,1]^n$ pour un vecteur aléatoire de dimension n composé de variables aléatoires uniformes définies sur [0,1]. Si on note X = $(X^1, \ldots, X^n)$ un vecteur aléatoire de dimension n dont la distribution est notée F_X et F_{X^i} la loi associée à chaque composante X^i, alors il existe une copule $C_\theta : [0,1]^n \to [0,1]$ telle que, $\forall (x^1, \ldots, x^n) \in [0,1]^n$:

$$F_X(x^1, \ldots, x^n) = C_\theta(F_{x1}(x^1), \ldots, F_{X^n}(x^n))\,. \qquad (15)$$

De plus, si toutes les lois F_{X^i}, pour i = 1, ...,n, sont continues, alors la copule C_θ est unique et est donnée par, $\forall (u^1, \ldots, u^n) \in [0,1]^n$ par :

$$C_\theta(u^1, \ldots, u^n) = F_X(F_{X^1}^{-1}(u^1), \ldots, F_{X^n}^{-1}(u^n))\,. \qquad (16)$$

La copule C_θ apparaît comme la loi jointe du vecteur $(F_{X^1}, \ldots, F_{X^n})$. Si toutes les lois F_{X^1}, pour i = 1, ..., n ont des

densités continues, la densité jointe du vecteur **X** existe et est définie comme :

$$f_X(x^1, \ldots, x^n) = f_{X^1}(x^1) \ldots f_{X^n}(x^n) c_\theta^{1 \ldots 1}(F_{X^1}(x^1), \ldots, F_{X^n}(x^n)), \quad (17)$$

où

$$c_\theta^{1, \ldots 1}(u^1, \ldots, u^n) = \frac{\delta^n}{\delta u^1, \ldots, \delta u^n} C_\theta(u^1, \ldots, u^n).$$

Il existe un grand nombre de copules, voir Joe (1997) et Nielsen (1999). L'étude statistique d'un portefeuille va permettre de s'orienter vers différentes sous-classes de copules. On s'intéressera, en particulier, à l'existence d'une asymétrie possible dans la distribution multivariée ce qui pourra correspondre à l'existence de co-mouvements entre les actifs, en fonction de l'existence de chocs positifs ou négatifs. Ceci nous amènera alors à faire une étude spécifique sur les comportements « de queue » des distributions.

Pour une étude détaillée de ces comportements, on renvoie à Caillault et Guégan (2006). L'estimation statistique des copules a donné lieu maintenant à de nombreux papiers avec mise au point des codes adéquats. Ceci devrait permettre une utilisation plus courante de cette approche dans les institutions financières, (Genest, van den Goorbergh et Werker, 2003 et Dias et Embrechtz, 2004).

Ainsi dès que la loi de probabilité jointe P_θ des actifs, et donc celle du portefeuille correspondant, est connue au travers de la copule C_θ et des marginales de chaque actif, on peut résoudre l'équation (14). Pour un α donné et un horizon à préciser, on obtient le quantile $VaR_{\alpha, t}$ comme possible mesure de risque associée au portefeuille V. La démarche est similaire dans le cas des risques de crédits pour lesquels on utilisera des copules conditionnelles relativement à l'échéance des crédits, (Patton, 2001). Dans la présentation précédente, nous nous sommes placés à un instant t donné fixe pour lequel l'estimation de la copule est obtenue au vu des observations jusqu'à cet instant t. Il est possible de travailler de manière dynamique et de faire varier le temps t, (Fermanian et Wegkamp, 2004, Caillault et Guégan, 2005 et Guégan et Zhang, 2006). On peut alors disposer d'une gestion dynamique des différents risques pour l'institution qui nous intéresse.

VIII Conclusion

Dans ce papier, nous montrons que l'existence de persistance dans les données financières et économiques peut facilement être prise en compte à partir de modèles paramétriques, ce qui permet d'obtenir des résidus sur lesquels une gestion des risques peut être entreprise de manière robuste. Nous indiquons comment cette persistance peut être provoquée par des phénomènes spécifiques caractérisant les séries comme l'existence de sauts, et comment elle peut induire une modélisation erronée qui pourrait compromettre une bonne gestion des risques. Enfin nous insistons sur le fait que la présence de volatilité dans les séries n'est pas contradictoire avec l'existence de persistance et que ces deux faits stylisés peuvent être modélisés en même temps.

Notons que ce papier concerne essentiellement la notion de persistance au sens de la covariance et n'englobe pas tous les phénomènes de persistance que l'on peut observer sur les données comme nous l'avons indiqué au paragraphe 2.

Le dernier paragraphe de ce papier insiste sur le fait que la gestion d'un portefeuille constitué d'actifs non indépendants peut tirer un grand profit de l'approche décrite ici. En effet, lorsque l'on s'interroge sur la dépendance existant entre deux indices, par exemple à travers les problèmes de la contagion ou la propagation de chocs systémiques, celle-ci peut se faire en utilisant les modèles développés précédemment. Lors d'une première étape, pour chaque actif on obtient une modélisation plus « juste » des prix et on récupère des résidus blancs et indépendants. Dans une seconde étape, on peut calculer la distribution des résidus et en l'associant à une copule bien ajustée, on obtient la distribution du portefeuille correctement calibrée. Enfin, grâce à cette copule (ajustée via les marginales estimées des résidus et la distribution empirique jointe du portefeuille), on peut obtenir une mesure du risque du portefeuille la plus juste possible.

BIBLIOGRAPHIE

Aftalion F., P. Poncet, 2004, *La volatilité*, Banques et Marchés, 69, 50-56.

Baillie R. T., T. Bollerslev, H.O. Mikkelsen, 1996, *Fractionally integrated generalized autoregressive conditional heteroskedasticity*, Journal of Econometrics, 74, 3-30.

Basel Committe on Banking supervision, 1996, *Amendment to the capital accord to incorporate market risks*, Committee report 24, Basel committee on banking supervision, Basel, Switzerland.

Bollerslev T., 1986, *Generalized autoregressive conditional heteroscedasticity*, J. of Economics, 31, 302-327.

Box G.E.P., J. Jenkins, 1976, *Time Series Analysis : Forecasting and Control*, Holden day, NY.

Breidt F.J., N.J. Hsu, 2002, *A class od nearly long memory time series model*, Empirical Journal of finance, 18, 265-281.

Caillault C., D. Guégan, 2006, *Forecasting VaR and Expected Shortfall using Dynamical Systemes : a Risk Managment Strategy*, to appear in Frontiers in Finance.

Caillault C., D. Guégan, 2005, *Empirical estimation of tail dependence using copulas. Application to Asian markets*, Quantitative Finance, 5, 489-501.

Chen C., G.C. Tiao, 1990, *Random Level-Shift Time Series Models, ARIMA Approximations and Level-Shift Detection*, Journal of Business and Economic Statistics, 8, 83-97.

Collet J., S. Ladoucette, 2004, *A new kind of switching process : the periodic switching process*, Eurandom Report 2004-03, The University of Eindhoven, The Netherlands.

Collet J., D. Guégan, R. Wolff, 2005, *Some statistical characteristics of the periodical switching process*, Preprint QUT, Australia.

Dias A., P Embrechts, 2004, *Dynamic copula models for multivariate high-frequency data in finance,* in Risk Measure for the 21 st Century, G. Szegoe ed., Wiley Finance Series, 16, 321-335.

Diebold F.X., A. Inoue, 2001, *Long memory and regime switching*, J. of Econometrics, 105, 131-159.

Ding Z., C.W.J. Granger, R. F. Engle, 1993, *A long memory property of stock market returns and a new model*, Journal of Empirical Finance, 1, 83-106.

Ding Z., C.W.J. Granger, 1996, *Modelling volatility persistence of speculative returns : a new approach*, Journal of Econometrics, 73, 185-215.

Fermanian J.D., M. Wegkamp, 2004, *Time dependent copulas*, Preprint CREST, Paris.

Ferrara L., D. Guégan, 2001, *Comparaison of parameter estimation in cyclical long memory time series*, in Developments in Forecast Combination and Portfolio Choice, C. Dunis, J. Timmermann eds., 8, 179-195, J. Wiley.

Genest C., R.W.J. van der Goorbergh, B. Werker, 2003, *Multivariate option pricing using dynamical copula models*, W.P. 2003-12, Tilburg University, The Netherlands.

Giraitis L., R. Leipus, 1995, *A generalized fractionally differencing approach in long memory modelling,* Lithuanian Math. Journal, 35, 65-81.

Giraitis L., Robinson P., Surgailis D., 1999, *A model for long memory conditional heteroscedasticity*, Ann. Appl. Prob., 20, 1-20.

Granger C.W.J., 1966, *The typical Spectral Shape of an Economic Variable*, Econometrica, 34, 150-161.

Granger C.W.J., R. Joyeux, 1980, *An introduction to long memory time series and fractional differencing*, Journal of time series analysis, 1, 15-29.

Granger C.W.J., R. Engle, 1983, *Applications of Spectral Analysis in Econometrics*, Handbook of Statistics, 3, 93-109.

Granger C.W.J., N. Hyung, 1999, *Occasional structural breaks and long memory*, Discussion paper, 99-14, University of san Diego, USA.

Granger C.W.J., T. Terasvirta, 1999, *A simple nonlinear time series model with missleading linear properties*, Economic Letters, 62, 161- 165.

Granger C.W.J., S. Spear, Z. Ding, 2000, *Stylized facts on the temporal and distributional properties of absolute returns : an update*, in « Statistics and Finance : an interface », eds. W.S. Chan, W.K. Li, H. Tong, Imperial College Press, 97-120.

Gray H.L., N. Zhang, A. Woodward, 1989, *On generalized Fractional Processes*, Journal of Time series Analysis, 10, 233-257.

Guégan D., 1994, *Séries chronologiques non linéaires à temps discret*, Economica, Paris, France.

Guégan D., 2000, *A new model : the k -factor GIGARCH process*, Journal of Signal Processing, 4, 265-271.

Guégan D., 2003, *A prospective study of the k -factor Gegenbauer processes with heteroscedastic errors and an application to inflation rates*, Finance India, XVII, 165-197.

Guégan D., 2005, *How can we define the concept of long memory ? An Econometric survey,* Econometrics Review, 24, (2).

Guégan D., S. Rioublanc, 2005, *Regime switching models : real or spurious long memory*, Note de recherche MORA-IDHE 02-2005, Ecole Normale Supérieure de Cachan, France.

Guégan D. et J. Zhang, 2006, *Change analysis of dynamic copula for measuring dependence in multivariate financial data*, WP 2006-06, CES – Cachan, France.

Hamilton J.D., 1988, *Rational Expectations Econometric Analysis of Change in Regime : An Investigation of the Term Structure of Interest Rates*, Journal of Economic Dynamics and Control, 12, 385-423.

Hosking J.R.M., 1981, *Fractional differencing*, Biometrika, 68, 1, 165-176.

Joe H., 1997, *Multivariate models and dependence concepts*, Chapman and Hall, London

De Lima P., N. Crato, 1994, *Long range dependence in the conditional variance of stock returns*, Economic letters, 45, 281-285.

Mikosch T., C. Starica, 1999, *Change of structure in financial time series, long range dependence and the GARCH model*, Manuscript, Dept. of Stat., University of Pennsylvania.

Morgan J.P., 1996, Riskmetrics, Technical Document, 4th edition.

Nielsen R., 1999, *An introduction to copulas*, Vol. 139, lecture Notes in statistics, Springer Verlag, New York.

Patton A., 2001, *Modelling time varying exchange rate dependence using copulas*, UCSD WP 2001-09, USA.

Robinson P.M., 2001, *The memory of stochastic volatility models*, Journal of Econometrics, 101, 195-218.

Rosenblatt M., 1956, *A central limit theorem and a strong mixing condition*, Proceedings of the national Academy of Sciences, 42, 43-47.

Smith A., 2003, *Level Shifts and the Illusion of Long Memory in Economic Time series*, Preprint Univ. Of California.

Timmermann A., 2000, *Moments of Markov switching models*, Journal of econometrics, 96, 75-111.

Visitin A, 1988, *Mathematical models for hysteresis*, in Topics in Nonsmooth Mechanics,

(J.J. Moreau, P.D Panagiotopoulos, G. Strang eds.), Birkhauser, Basel, 295-326.

Weiss P., 1907, *L'hypothèse du champ moléculaire et la propiété ferromagnétique*, J. Physique, 6, 661-690.

Woodward W.A., A.C. Cheng, H.L. Gray, 1998, *A k - factor GARMA long memory model*, Journal of Time series Analysis, 19, 485-504.

Zaffaroni P., 2004, *Stationarity and memory of ARCH(∞) models*, Econometric theory, 20, 147-160.