



HAL
open science

Sur la notion de complétude d'une théorie physique

Michel Paty

► **To cite this version:**

Michel Paty. Sur la notion de complétude d'une théorie physique. Fleury, N; Joffily, S; Martins Simoes; J. A. and Troper;. Leite Lopes Feschrift. A pioneer physicist in the third world [ouvrage offert à J. Leite Lopes en l'honneur de son soixante-dixième anniversaire], World Scientific Publishers, Singapore, p. 143-164, 1988. halshs-00189812

HAL Id: halshs-00189812

<https://shs.hal.science/halshs-00189812>

Submitted on 22 Nov 2007

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Sur la notion de complétude d'une théorie physique

par

MICHEL PATY*

en hommage à J. Leite Lopes

* Equipe REHSEIS, CNRS, Paris.

in Fleury, N. ; Joffily, S.; Martins Simões, J.A. and Troper, A. (eds), *Leite Lopes Festschrift. A pioneer physicist in the third world* [ouvrage offert à J. Leite Lopes en l'honneur de son soixante-dixième anniversaire], World Scientific Publishers, Singapore, 1988, p. 143-164.

Sur la notion de complétude d'une théorie physique

par

MICHEL PATY

Equipe REHSEIS, CNRS, Paris

en hommage à J. Leite Lopes

*La complétude au sens formel.- L'acception intuitive de "complétude" en physique.
- L'apparition de la complétude en mécanique quantique dans l'argument EPR. -
La complétude et le formalisme mathématique en mécanique quantique.- En
manière de conclusion.*

1

LA COMPLÉTUDE AU SENS FORMEL.

1.1. En arrière-plan de toute interrogation sur la notion de complétude relativement à un système théorique, de quelque nature qu'il soit, nous savons que se tiennent certains résultats de la logique et de la métamathématique, et les noms de Gödel et de Tarski, par exemple, s'imposent à l'esprit. Bien que la complétude en physique soit d'une nature très différente, il est utile, ne serait-ce que pour s'en démarquer, de s'arrêter quelques instants sur cette acception qui possède l'avantage d'une définition précise. Dans un article relatif aux résultats obtenus par lui aux environs de 1930, Tarski propose une sorte de définition élémentaire, dans le langage courant, de la complétude formelle: "On a l'habitude de dire d'une théorie déductive qu'elle est complète lorsque chaque problème se laissant formuler dans le langage de cette théorie est aussi décidable sur le terrain de celle-ci ou, en d'autres termes, lorsque chaque énoncé (statement) de la théorie donnée est soit démontrable soit réfutable dans la théorie même."¹

¹ Tarski [1939]. Cet article est relatif aux résultats obtenus par Tarski aux environs de 1930.

Après avoir énuméré les systèmes déductifs qui se révèlent complets (en l'occurrence, certains systèmes du calcul propositionnel, de l'algèbre de Boole, la théorie de l'addition des nombres entiers), Tarski remarque que "Toutes ces théories possèdent une structure logique élémentaire et un contenu mathématique pauvre". En effet, les variables qui interviennent dans ces théories "appartiennent à un seul type logique", et "tous les concepts logiques proviennent des parties les plus élémentaires de la logique mathématique : le calcul des propositions et le calcul restreint des prédicats."² Cette constatation n'est pas infirmée (ou, du moins, elle l'est très peu), par les résultats de Tarski montrant la complétude de certains systèmes élémentaires en algèbre classique et en géométrie traditionnelle ; au surplus, le résultat obtenu à la même époque, en 1931, par Gödel, limite désormais considérablement les possibilités de complétude des systèmes déductifs.

Parlant des travaux de Gödel, Tarski écrit, dans le même texte : "Aucune théorie déductive ne peut être complète si, à l'intérieur de ses frontières, la théorie de l'addition et de la multiplication des nombres entiers peut être établie, et si en même temps certaines présuppositions supplémentaires concernant, entre autres, la consistance de la théorie donnée sont satisfaites. La portée de ce résultat s'étend à de nombreuses théories (...)"³. Le théorème de Gödel stipule que, étant donné un système cohérent quelconque d'axiomes arithmétiques, il y a des énoncés arithmétiques vrais qui ne peuvent pas être obtenus par déduction de l'ensemble des axiomes: "Il y a au moins une formule bien formée, dans n'importe quel système adéquat pour axiomatiser l'arithmétique, qui n'est pas décidable dans le système, même si on la sait juste (vraie) pour d'autres raisons". Cet énoncé constitue le premier théorème d'incomplétude de Gödel. Le second théorème d'incomplétude s'énonce, quant à lui, de la manière suivante : "La cohérence d'un système ne peut pas être prouvée à l'intérieur de ce système lui-même."⁴

1.2. La complétude est un concept qui appartient aux problèmes des fondements des mathématiques et de la logique. On ne s'attend pas nécessairement à le voir apparaître en physique dont le cas est bien entendu différent : moins encore que la logique ou que les mathématiques, elle ne peut être théoriquement fermée (comme on le voit par l'évolution, ou le progrès, des théories, et comme le rend manifeste, même dans le cas des théories les plus abstraites et formalisées, le recours aux réponses de l'expérimentation) ; sauf à supposer que cette science, de nature essentiellement hypothético-déductive, puisse être un jour l'objet d'une axiomatisation "complète" (ou très poussée), sous-entendant par là, à l'horizon de la physique, sa mathématisation totale⁵.

Si l'on parle très rarement de complétude à propos de la théorie physique, c'est bien probablement parce qu'un tel horizon apparaît hors d'atteinte ; lorsqu'on en parle, c'est dans un sens qui semble à première vue très éloigné de

² Tarski [1939], p. 205-206.

³ Tarski [1939], p. 209.

⁴ Gödel [1931]. Voir aussi Nagel and Newman [1959].

⁵ Sur ce point, voir Paty [1984].

celui que nous venons d'évoquer. On trouve cependant ce terme dans un certain nombre de textes de physiciens, en dehors même des domaines où il est assez fréquemment utilisé aujourd'hui (la physique quantique et la relativité générale), sur lesquels nous allons revenir. Par exemple, Pierre Duhem, dans *La Théorie physique, son objet, sa structure*, parle de complétude dans le sens d'exhaustivité des lois ou des faits par le système de la représentation théorique⁶. D'une manière générale, sans que les termes *complet*, *complétude*, soient nécessairement utilisés, on rencontre, à propos de la physique, sous d'autres dénominations, et avec d'autres préoccupations que celles évoquées pour la logique, l'invocation de propriétés de la théorie qui pourraient avoir à faire avec ce que recouvre, à un degré plus ou moins grand, l'idée de complétude. Une théorie qui serait complète, cela pourrait être une théorie exhaustive, ou achevée, ou unifiée. Par *exhaustivité*, on entend généralement le recouvrement d'une classe donnée de phénomènes, de faits, par des lois, des modèles ou des théories. Par *achèvement* (comme on dit une théorie achevée), l'exhaustivité par rapport à toutes les classes possibles de phénomènes dans un domaine donné (par exemple, la théorie électromagnétique par rapport à l'ensemble des phénomènes électromagnétiques et optiques...), qu'elle soit ou non acquise, et le but est précisément de parvenir à une formulation qui aît une telle propriété. Par *unification*, on désigne la voie qui mène à une théorie unique, traitant dans un seul schéma organique l'ensemble des théories particulières et des phénomènes qui leur sont relatifs.

Il serait souhaitable d'étudier, à travers l'histoire des théories physiques, la manière dont ces catégories ressortent de la structure profonde des théories, ou dont elles sont invoquées, de manière explicite ou implicite, par les physiciens, en fonction du programme qu'ils se proposent d'accomplir. L'approfondissement de la notion de *complétude* nous réserverait peut-être à cet égard quelque vue originale sur les problèmes, non pas *méta-physiques* (comme on dit *métamathématique*), mais *épistémologiques* de la structure de la théorie, de son objet, du rapport de la théorie à son objet. Bien que nous soyons ici apparemment éloignés de la complétude au sens de la métalogue et de la métamathématique, il n'est pas interdit de penser que les considérations sur ce type de problématique (de Tarski et Gödel ainsi que de leurs prédécesseurs) entretiennent peut-être malgré tout avec elle (la complétude envisagée pour les théories physiques) quelque connexion qui, pour n'être pas immédiate, n'en serait pas moins significative.

D'une manière générale, la *complétude au sens de la théorie physique* (un sens qu'il nous appartient maintenant de préciser) ne pourrait-elle être un concept épistémologique opératoire dans la constitution de la théorie, ou dans son évaluation ? Que doit-on (ou que peut-on) entendre par "complétude au sens de la théorie physique" ? Le terme, je l'ai dit, est très peu employé. Il l'est cependant de manière intensive dans un domaine bien circonscrit de la physique contemporaine, celui des "fondements de la mécanique quantique", *fondements* étant à entendre dans un sens physique et pas seulement épistémologique, et c'est précisément dans des considérations physiques (c'est-à-dire de problèmes ou de phénomènes physiques) que le terme de complétude est utilisé. Il s'agit là d'un domaine particulier, restreint,

⁶ Duhem [1906], ed. 1981, p. 24, p. 313.

sinon quant à sa portée, du moins quant à ses applications (théoriques), un peu "à côté" du flux le plus important des recherches actuelles en physique quantique (lesquelles comprennent aussi bien la physique atomique que la théorie quantique des champs). Dans ce domaine, chaque article ou contribution utilise comme terminologie obligatoire - en manière de sacrifice à un rituel ? - l'expression de "complétude de la mécanique quantique", et se situe par rapport à cette question, argumentant soit en faveur, soit contre cette complétude, sous-entendant dans tous les cas que *la complétude est une condition requise pour une bonne théorie*. La signification du terme est supposée aller de soi, et on l'entend, dans les contributions concernées, dans une acception qui semble intuitive. Mais cette notion est-elle intuitive ? On parle donc de complétude en supposant l'idée acquise, l'exigence requise, mais on ne définit pratiquement jamais ce que cela signifie, ce que "complétude" veut dire d'une manière générale. Ceci, du moins, à quelques exceptions près, celles des premiers protagonistes du débat où cette question prend son origine, et je m'attarderai tout à l'heure sur l'une des plus significatives d'entre elles.

2

L'ACCEPTION INTUITIVE DE "COMPLÉTUDE" EN PHYSIQUE.

2.1. Cependant, la signification la plus courante attachée à l'emploi du terme de complétude est liée à l'idée d'une représentation statistique : ceci, en raison du caractère probabiliste des prédictions de la mécanique quantique.

Lorsque, en physique classique, on rencontre des probabilités, ou des dispersions statistiques, il est supposé qu'une connaissance plus précise, plus complète, les éliminerait. C'est un axiome de la mécanique classique que "en augmentant la précision des mesures, on pourrait, pour n'importe quel système, réduire la dispersion des effets mesurés en-dessous de n'importe quelle quantité arbitrairement petite"⁷. En mécanique classique, "on suppose que l'élément statistique, quand il apparaît, reflète tout simplement notre connaissance incomplète de l'état du système", mais en mécanique quantique, ce n'est pas le cas, il y a "un élément statistique irréductible"⁸.

Pour les uns, qui dit probabilité dit statistique, et qui dit statistique dit qu'il manque des éléments d'information. On peut espérer qu'il sera un jour possible de compléter la théorie seulement statistique et de parvenir à des prédictions certaines, non probabilistes, comme en physique classique. Pour les autres (certains distinguent, mais pas toujours, le caractère probabiliste et le caractère statistique), ce caractère probabiliste ou statistique est impossible à réduire. Il n'entache pas le caractère complet de la théorie, c'est-à-dire que la mécanique quantique, théorie en vigueur, nous dit le maximum sur les phénomènes de ce qu'une théorie pourra jamais nous dire - du moins par rapport à son domaine actuel d'application - : -soit parce que l'on ne vise jamais qu'une connaissance pratique, et que celle-ci se satisfait

⁷ Jauch [1968], p. 72.

⁸ Jauch [1968], p. 72.

de statistiques ; - soit pour des raisons plus profondes qui étayent la justification du calcul des probabilités comme fondamental (complémentarité au sens de Bohr, réalisme probabiliste, etc ...)

2.2. Ce lien entre une problématique de la complétude et le caractère probabiliste des prédictions de la théorie quantique s'est trouvé en réalité distendu par des développements relativement récents dans ce même domaine des fondements de la mécanique quantique, où les termes du débat désormais classique entre Einstein et Bohr se sont trouvés revivifiés par le théorème de Bell sur la non-séparabilité locale et ses tests expérimentaux. Ce qui s'est trouvé obtenu en conclusion de ces développements, c'est l'irréductibilité d'une propriété des systèmes quantiques comme de la théorie qui les représente, la mécanique quantique, propriété bien distincte de l'"indéterminisme probabiliste"⁹ de cette dernière, à savoir la non-localité, ou inséparabilité, ou non-séparabilité locale.

C'est en examinant, sous l'angle de l'analyse épistémologique, l'évolution du problème depuis l'argument EPR (1935), jusqu'à Bell (1964) et aux expériences de corrélation à distance (1970-1982), et en ayant considéré, avec la plupart des auteurs, la "complétude" ou non de la théorie dans un sens intuitif supposé aller de soi, que je me suis pour ma part tardivement posé la question de savoir ce que l'on entendait au juste par "complétude". Le doigt étant mis sur la non-localité plutôt que sur l'indéterminisme, se posait encore la question de savoir si une théorie non-locale (non séparable localement) était malgré tout complète. La complétude apparaissait dès lors dissociée de manière visible de son acception intuitive qui la reliait à la notion de statistique. De cet abandon corrélatif de l'acception intuitive et vague de "complétude" se dégage la nécessité de prendre en compte la question en elle-même : *qu'entend-on par une "théorie complète" ?*

2.3. Une telle interrogation peut prendre deux directions. La première serait de tenter de caractériser d'une manière générale, systématique, ce que peut être une théorie (physique) complète en considérant des auteurs significatifs et des exemples de théories physiques (au cours de l'histoire, par exemple : la mécanique newtonienne est-elle complète ? ou, actuellement : la thermodynamique, la théorie de la relativité, la théorie quantique des champs, etc.). La deuxième direction possible serait de retourner à nouveau à l'origine du débat qui aboutissait ainsi, aujourd'hui, comme nous venons de le noter, à re-poser en de nouveaux termes la notion de complétude, et de tenter d'analyser comment ce concept s'est trouvé intervenir.

Je commencerai par cette seconde voie, en examinant la formulation de l'argument EPR sous cet angle, et en montrant quel lien elle entretient avec une définition formelle (tant du point de vue de la logique que ce celui de l'expression mathématique) de la complétude. Cette élucidation devrait permettre d'aborder d'une manière plus précise la question de la complétude dans la première direction, sur laquelle je m'en tiendrai ici à quelques indications générales.

⁹ Paty [1986].

Ce que je voudrais surtout montrer dans ce qui suit, c'est la manière dont, à partir d'une diversité d'acceptions d'origines diverses, le terme de "complétude" semble désormais s'établir en concept épistémologique, c'est-à-dire désignant une qualification précise (voire des qualifications) de la théorie physique relativement à sa structure comme à l'objet qu'elle se propose de décrire.

3

L'APPARITION DE LA COMPLÉTUDE EN MÉCANIQUE QUANTIQUE
DANS L'ARGUMENT EPR.

3.1. Bien que le terme (et l'idée) de théorie complète aît fait son apparition à propos de la physique quantique bien avant l'article d'Einstein, Podolsky et Rosen de 1935 (désigné ci-après par EPR)¹⁰, c'est à ce dernier que nous nous arrêterons ici en premier lieu, en raison de la signification particulière du terme qui s'y trouve donnée ainsi que de l'importance de ce travail dans les débats qui ont suivi et qui ont tous été concernés, en fin de compte, sous des approches diverses, par la question de la complétude de la mécanique quantique.

Un aspect particulièrement intéressant à cet égard de l'article EPR est sa préoccupation de définir de façon très précise les concepts utilisés (dans le souci de démarquer les considérations physiques de leurs interprétations philosophiques, et notamment de celle de Copenhague). Le terme de complétude est défini d'une façon qui ne se confond pas avec l'acception intuitive en termes de probabilité (il ne s'agit pas *a priori* de compléter l'indéterminisme probabiliste par des propositions supplémentaires) : c'est d'autre chose qu'il est question dans la notion de complétude ; plus profondément, cette notion porte sur la structure même de la théorie et de ses propositions. Cela étant, qui va être précisé, la question de la complétude ou de l'incomplétude entretient malgré tout un lien avec le caractère de la théorie d'être irréductiblement probabiliste. Mais ce lien est une conséquence et non une position *a priori* : du moins apparaît-il ainsi dans l'argument EPR, aussi bien que dans toutes (ou pratiquement toutes) les autres contributions d'Einstein au débat sur la mécanique quantique et son interprétation¹¹.

Les auteurs de l'article EPR s'attachent à définir sans ambiguïté (ou avec le moins d'ambiguïté possible) deux notions dont l'emploi est décisif dans leur argumentation parce qu'elles octroient une signification au problème posé : la *théorie complète*, la *réalité physique*. Ces deux notions portent généralement une charge philosophique, voire métaphysique, mais il est cependant possible de les employer en physique à condition de délimiter le sens qu'on leur y octroie¹². La notion de réalité est certainement la plus difficile à circonscrire dans ce sens et, dès le premier paragraphe de leur article, les auteurs prennent le soin de distinguer entre la *réalité extérieure, objective* (dont le présupposé ontologique sous-tend cependant

¹⁰ Einstein, Podolsky, Rosen [1935].

¹¹ Paty [en préparation].

¹² Cf., p. ex., la lettre d'Einstein à Schrödinger du 19.6.1935 (Archives Einstein). Voir Paty [en préparation].

leurs conceptions), et la *réalité conceptuellement représentée*, celle qui concerne la physique : "*Any serious consideration of a physical theory must take into account the distinction between the objective reality, which is independent of any theory, and the physical concepts with which the theory operates.*" Cette distinction évite les objections contre le réalisme naïf qui les identifie.

La phrase qui suit concerne la correspondance entre les deux, indiquant clairement que la représentation conceptuelle, à laquelle on en reste en considérant la théorie physique, est cependant tournée vers l'extérieur, visant à saisir quelque chose de cette réalité objective : "*These concepts are intended to correspond with the objective reality, and by means of these concepts we picture this reality to ourselves*". Le problème de la complétude théorique va être précisément, tout en restant à l'intérieur de la considération de la théorie, celui de la correspondance avec la réalité extérieure simplement visée. Il ne s'impose, de fait, que si l'on est préoccupé d'une théorie parvenue à un stade suffisamment avancé; sans quoi l'on pourrait se contenter d'exiger de la théorie qu'elle soit correcte. Einstein et ses collaborateurs écrivent : "*It is only in the case in which positive answers may be given to both of these questions [la première: "is the theory correct?"; la seconde: "Is the description given by the theory complete?"], that the concepts of the theory may be said to be satisfactory*". La précision donnée dans ce sens par l'article EPR est intentionnelle de la part des auteurs, puisque, dans leur conclusion, il ne s'agira pas de mettre en doute la validité de la mécanique quantique, mais seulement son caractère "définitif", du moins celui de ses propositions et concepts fondamentaux, allégué dès 1927 par ses promoteurs de la théorie¹³.

Ce que les auteurs se proposent, dans l'article EPR, c'est de voir si la mécanique quantique répond à une exigence minimale de complétude, considérée comme nécessaire pour une théorie satisfaisante. Il s'agit d'une *condition de complétude*, formulée de la façon suivante : "Chaque élément de la réalité physique doit avoir une contrepartie dans la théorie physique". Pour en juger, il convient de définir, tout en restant à l'intérieur de la théorie (en raison de la distinction signalée plus haut), ce qu'il faut entendre par *élément de réalité physique*. Pour cela, un critère est proposé, qui en reste à la considération de la théorie elle-même, indépendamment, selon les auteurs, de toute "considération philosophique a priori" . Ce critère est le suivant : "*If, without in any way disturbing a system, we can predict with certainty (i.e. with probability equal to unity) the value of a physical quantity, then there exists an element of physical reality corresponding to this physical quantity*".¹⁴ Il s'agit, dans l'esprit des auteurs, d'un *critère minimal*, qui n'épuise pas toutes les qualifications de ce que l'on peut entendre par *réalité physique*, mais dont le caractère simplement raisonnable devrait s'accorder aussi bien avec les "idées de la mécanique classique comme de la mécanique quantique sur la réalité". Il constitue une manière de préserver l'utilisation du terme *réalité* (physique) sans quitter la physique pour la philosophie. Par rapport à la théorie, ce

¹³ Born et Heisenberg [1927] : "Nous tenons la *mécanique des quanta* pour une théorie complète, dont les hypothèses fondamentales physiques et mathématiques ne sont plus susceptibles de modification".

¹⁴ Einstein, Podolsky, Rosen [1935]. Souligné par les auteurs.

critère peut être traduit dans un langage opérationnel : il peut être, en quelque sorte, exprimé en termes de *l'objet de la théorie physique*, au sens d'une définition de type logique et non pas ontologique.

3.2. En mettant en avant de la manière la plus explicite le critère de réalité physique et l'exigence de complétude, Einstein et ses collaborateurs rapportent le problème de la complétude théorique ainsi définie à la considération du rapport de la théorie à son objet, l'objet de la théorie étant ce qui la suscite (ce à quoi elle vise à l'aide de ses propres moyens, conceptuels, théoriques) et ce qui la détermine. La relation ainsi comprise du couple théorie-objet est de type logique. Comme elle ne prend en compte que les caractères minimaux (pour ainsi dire logiques eu égard à la théorie en son état) de l'objet physique que la théorie peut décrire, elle n'épuise pas l'ensemble des déterminations possibles de cet objet, et, par là, elle distingue la théorie dans son état, assimilée à ses propositions fondamentales, ses concepts, son formalisme, et la théorie que l'on peut imaginer dans un état plus avancé, dont l'objet correspondra à des propriétés élargies. Ce sens précis et circonscrit de la complétude n'épuise donc pas toutes les acceptions possibles du terme, et nous discuterons plus loin d'une acception plus contraignante. Appelons la complétude entendue au sens de l'article EPR *complétude dans le premier sens, ou dans le sens minimal*.

L'argumentation d'EPR s'efforce, ces définitions étant posées, de montrer le caractère incomplet de la mécanique quantique en examinant le traitement théorique que cette dernière propose d'un système physique simple. Toutefois, pour rendre opératoire le critère de réalité physique invoqué, le système est envisagé de manière telle que l'on puisse être immédiatement affranchi de la difficulté de la perturbation, par la mesure, du système considéré : d'où le choix d'un système de particules indépendantes mais corrélées. La démonstration des auteurs repose en fait sur une hypothèse d'abord tacite, ensuite explicitée, celle de la *séparabilité* des systèmes corrélés, qui est en réalité contraire à la formulation de la mécanique quantique, comme Bohr ¹⁵, puis d'autres le montreront. L'inséparabilité, ou non-séparabilité locale, étant une propriété inscrite dans le formalisme de la mécanique quantique, l'argument EPR ne démontre pas l'incomplétude de la mécanique quantique dans le sens considéré. Son effet a été autre que le but initial visé par ses auteurs ; pour autant, il ne fut pas moins fécond, puisque c'est à partir des développements qu'il a suscités, que la *non-séparabilité locale* a été établie comme *propriété physique*, et non plus simplement comme une simple propriété mathématique du formalisme¹⁶. Nous pouvons considérer qu'un autre de ses effets a été de poser le problème de la complétude en des termes nouveaux : ceux de la complétude au premier sens. Indiquons que, dans ces termes mêmes, il demeure, pour la mécanique quantique, un problème encore non résolu : celui de la théorie de la mesure, qui, jusqu'à nouvel ordre, laisse ouverte la question de sa complétude ou non.

¹⁵ *Ibid.* Souligné par les auteurs.

¹⁶ Bohr [1935]. Voir, par ex. Jammer [1974], Paty [1985].

Dans l'argument EPR, le problème de la complétude de la mécanique quantique est évidemment celui du caractère complet de la représentation d'un système physique se trouvant dans un état donné par la fonction d'onde (ou vecteur d'état). Comme l'article le rappelle : "*In quantum mechanics it is usually assumed that the wave function does contain a complete description of the physical reality of the system in the state to which it corresponds*".

Cette considération nous renvoie à la question du formalisme de la fonction d'onde représentative de l'état d'un système. Du point de vue de ce formalisme, la fonction d'onde est un vecteur d'un espace de Hilbert, et sa détermination est complète, au sens cette fois-ci de la complétude des espaces vectoriels, si elle correspond à la définition d'un ensemble complet d'observables qui commutent dont elle soit fonction propre. Ce sens, rapporté à une définition strictement mathématique, apparaît bien différent de celui qui précède. Il est facile de voir, cependant, que leur indépendance n'est pas totale.

La relation éventuelle, que ce n'est pas le lieu ici d'expliciter, tient à la signification physique du formalisme de la mécanique quantique. Aussi bien dans les définitions et le raisonnement d'Einstein, Podolsky et Rosen que dans la réplique de Bohr, l'insistance est mise, et ce fait n'est pas indifférent, sur le formalisme mathématique de la théorie. Ce formalisme est plus fondamental avec la théorie quantique qu'avec aucune autre théorie (à l'exception sans doute de la relativité générale) : il imprègne tous les raisonnements, et des notions qui semblaient purement mathématiques, telles que, par exemple les vecteurs dans un espace de Hilbert, ou les opérateurs agissant sur eux, se voient désormais importées, avec toutes leurs implications, dans la théorie physique, au point d'imposer leurs caractères qui semblaient jusqu'alors les plus abstraits. Telle est la force de prédictivité proprement physique de ce formalisme, qu'une propriété comme la non-séparabilité des états quantiques peut en être déduite en raison de la seule propriété de superposition des éléments d'un espace vectoriel ¹⁷¹⁷).

J.M. Jauch, par exemple, parle du "nouveau rôle assigné aux mathématiques dans les théories physiques modernes", depuis la faillite du modèle mécaniste en physique, et estime que cette mathématique, devenue plus complexe et raffinée, plus intimement liée à la formulation de la physique, a comme "acquis une espèce d'indépendance" : "*For instance, the basic physical notion of general covariance obtained its perfect expression only in the absolute differential calculus of Ricci and Levi-Civita. Quantum mechanics can only be formulated correctly by adopting formal techniques from functional analysis, notably the theory of Hilbert space*" ¹⁸¹⁸).

¹⁷ Voir, p. ex., Paty [1986]. Sur la mathématisation et la prédictivité en physique, voir Paty [1988].

¹⁸ Jauch [1968], p. 70.

EN MÉCANIQUE QUANTIQUE.

En examinant le formalisme mathématique de la mécanique quantique et les conditions de son édification, on pourrait peut-être voir d'une manière plus précise le lien éventuel de l'idée de complétude au sens mathématique de la théorie des espaces vectoriels à la complétude au sens de la théorie physique elle-même. Je m'en tiendrai ici à invoquer quelques expressions très caractéristiques et suggestives de traités fondamentaux de mécanique quantique. Indiquant que l'on obtient un *ensemble complet d'observables qui commutent* lorsqu'on a épuisé la détermination des degrés de liberté de la fonction d'onde développée comme une série de fonctions propres simultanées des opérateurs à signification physique qui commutent entre eux, D. Bohm écrit, dans son livre classique *Quantum theory*: "*The most detailed possible information is obtained by specifying all of the associated expansion coefficients. It is only when we have a complete commuting set that the specification of the wave function is unambiguous*"¹⁹). Si nous retournons aux sources, c'est-à-dire à l'établissement du formalisme de la mécanique quantique dans les années 1928-1930, nous voyons l'introduction de ces concepts chez Dirac²⁰, chez von Neumann²¹: chez le premier, d'un point de vue plus physique, sans souci de rigueur mathématique absolue, chez le second d'un point de vue radicalement formalisé. On n'oubliera pas non plus l'ouvrage d'Hermann Weyl²²). Mais c'est dans le livre de Dirac que l'on trouve le premier exposé du formalisme dans une présentation axiomatique: les notions premières sont celles d'*états*, décrits par des fonctions ψ (de carré sommable, définies dans l'espace de Hilbert) et d'*observables*, décrivant les grandeurs physiques (c'est en fait von Neumann qui identifie l'espace des vecteurs ψ à l'espace de Hilbert). C'est dans ce même ouvrage de Dirac qu'est introduite la notion d'"*ensemble complet d'observables qui commutent*".

Quant à von Neumann, il montre, en étudiant les espaces de Hilbert (développés par ce dernier en 1904-1910), l'équivalence de leur formalisme à celui de la mécanique ondulatoire de Schrödinger et à celui de la mécanique des matrices de Heisenberg. C'est à lui que l'on doit la présentation axiomatisée du formalisme de la mécanique quantique, dont la première proposition édicte précisément qu'à chaque système physique correspond un espace de Hilbert \mathbb{H} dont les vecteurs (vecteurs d'état ou fonctions d'onde) décrivent complètement les états du système. On trouve, d'autre part, dans l'ouvrage de Weyl, des considérations sur la complétude des représentations de groupes qui font voir ici encore combien la notion mathématique de complétude imprègne la formalisation de la théorie physique (en l'occurrence, la mécanique quantique) dès son origine et pour ainsi dire dans son essence même.

¹⁹ Bohm [1951], p. 376-377. Voir aussi, par ex. Bogolubov, Logunov, Todorov [1969], p. 152-153.

²⁰ Dirac [1930]. Par exemple, dans l'édition de 1981: "*We define a complete set of states to be a set such that any state is dependent on them ...*", et Dirac montre que l'on peut conclure que les états propres de l'opérateur linéaire qui représente la variable dynamique "forment un ensemble complet" (p. 36).

²¹ Von Neumann [1931]. Voir en part. p. 24, 34, 38, la caractérisation de l'espace de Hilbert. Von Neumann renvoie notamment à l'ouvrage de Courant et Hilbert, *Methoden der mathematischen Physik*, Berlin, 1939.

²² Weyl [1928].

3.3. En rattachant - du moins comme une de ses sources possibles - l'origine de la notion de complétude en physique quantique - avec le terme - à la formulation mathématique de la théorie en termes d'espace de Hilbert, nous la rapportons en définitive à la complétude des espaces vectoriels, notion développée en mathématiques avec les espaces complets de Fréchet, les espaces topologiques et métriques de Hausdorff, les espaces vectoriels normés complets de Banach, sans compter les développements ultérieurs²³. Mais la notion de complétude des espaces vectoriels est elle-même une extension - par généralisation à des ensembles abstraits d'éléments de nature quelconque - de la complétude en théorie des nombres : complétude de l'ensemble des réels par Dedekind, à l'aide de la notion de *coupure*, qui permet de compléter, sans adjonction d'éléments étrangers, l'ensemble des rationnels, pour parvenir à un ensemble continu, comme la droite.

Je voudrais retenir ici, comme inhérente à la notion de complétude même dans son sens mathématique très précis, cette idée de parvenir, par une opération formalisée interne à la théorie, à un recouvrement total sans adjonction d'éléments étrangers. C'est cette idée, préliminaire à toute recherche de formalisme, soit en mathématiques, soit en logique, soit dans les théories représentatives de nature hypothético-déductive, qui sert, me semble-t-il, de fil directeur commun aux recherches ou aux interrogations sur la complétude dans ces différents domaines.

Dans la mesure où elle a connu un succès important en mathématiques, et où la théorie mathématique des espaces vectoriels (complets) est transportée en physique, il n'est pas étonnant que l'on puisse poser, dans cette discipline, et en premier lieu à propos de la mécanique quantique, la question de la complétude d'une manière, sinon exactement semblable, du moins apparentée, et en tout cas plus générale. Semblable, nous avons suggéré de quelle façon. Plus générale, d'une part parce qu'il existe, en physique, une tendance à poser les prémisses de la théorie - c'est-à-dire ses principes - d'une manière axiomatique, et qu'il n'est pas aberrant d'y appliquer - jusqu'à un certain point - des formulations logiques - par exemple, le calcul propositionnel, voire la *logique quantique*. D'autre part parce que, comme contrepartie de cette mathématisation assez radicale, nous nous trouvons, en physique, face aux phénomènes, aux faits, à cette "réalité physique" que nous n'aurons, avec les auteurs EPR, garde d'oublier, et que le rapport de cette théorie mathématisée au monde des phénomènes se pose aussi en termes de "recouvrement complet" - éventuel - sans adjonction d'éléments étrangers. Ce qui, bien entendu, suppose une structure forte de la théorie que l'on a en vue, et dont le degré de mathématisation pourrait bien être une mesure.

5

EN MANIÈRE DE CONCLUSION.

²³ Avec les travaux de von Neumann, André Weil, Jean Dieudonné, Alexandre Grothendieck. Sur l'histoire des espaces complets, voir Dugac [1984].

Il resterait à étudier le deuxième sens de la complétude d'une théorie physique, qui est celui de l'achèvement et de l'unification, par lequel on aboutirait à une détermination totalement hypothético-déductive de la théorie physique fondamentale : les hypothèses elle-mêmes seraient, pour ainsi dire, fixées par une nécessité interne - sauf peut-être la plus fondamentale et fondatrice. Cette complétude idéale serait telle qu'"il n'existerait pas de constantes arbitraires" - dans les lois ne figureraient que des constantes totalement déterminées de façon rationnelle -, selon une formulation d'Einstein ; ou encore, selon Eddington, "la nature serait mesurée à sa propre jauge" - il en escomptait, pour sa part, que l'unité fondamentale de grandeur dans la nature serait le rayon de l'électron, ou, ce qui revient au même selon lui, celui de l'Univers²⁴. C'est la complétude au deuxième sens - le premier étant celui discuté dans l'article EPR -, et elle demanderait de longs développements qui dépassent le cadre du présent travail. La complétude entendue dans ce sens concerne non plus seulement l'objet logique de la théorie restreinte à son cadre, mais l'objet ultimement visé, l'élément et la totalité. C'est encore à Einstein que nous devons des indications claires sur cette acception plus générale, cette fois non plus à propos de la mécanique quantique, mais en relation au développement de son programme d'une théorie du champ unifié. Il est significatif - et c'est tout ce que nous en dirons ici - que les tendances actuelles de la physique des particules soient orientées vers une préoccupation de ce type.

Il resterait enfin à aborder un dernier problème, qui serait en quelque sorte le couronnement épistémologique de la question de la complétude : celui de l'interprétation, auquel elle ne manque pas de renvoyer. Mais, là encore, il y faudrait de longs développements. Contentons-nous, en manière de conclusion, d'indiquer que cette complétude ou clôture épistémologique, portant sur les significations, peut s'exprimer ainsi : c'est la théorie et nulle autre instance qui nous fournit l'interprétation physique des concepts et des propositions théoriques elles-mêmes. Il n'en va ainsi, au mieux, que de façon approchée - comme, d'ailleurs, pour le deuxième sens précédemment envisagé de la complétude -, mais n'est-il pas vrai que tel est le projet que les physiciens se proposent, et que c'est en référence à une exigence de ce genre que l'on évalue les mérites de telle ou telle théorie ? La question de la complétude, entendue dans ses différents sens, est donc peut-être beaucoup plus fondamentale qu'on ne le soupçonnait, et la complétude se trouve peut-être désormais à compter au nombre des concepts épistémologiques les plus féconds.

BIBLIOGRAPHIE.

- BOGOLUBOV, N.N.; LOGUNOV, A.A. and TODOROV, I.T. [1969]. *Introduction to axiomatic quantum field theory*, re- ed., Benjamin, Reading (Mass.), 1975.
- BOHM, David [1951]. *Quantum theory*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, 1951.
- BOHR, Niels [1935]. Can quantum-mechanical description of physical reality be considered complete ?, *Physical Review* 48, 1935, 696-702.

²⁴ Pour plus de détails, voir Paty [à paraître].

- BORN, Max et HEISENBERG, Werner [1927]. La mécanique des quanta, in *Electrons et photons. Rapports et discussions du Cinquième Conseil de physique Solvay, Bruxelles, 24-29 octobre 1927*, Gauthier-Villars, Paris, 1928, 143-181.
- DIRAC, Paul A. M. [1930]. *The principles of quantum mechanics*, 1930 ; 4th ed. revised, 1958 ; Clarendon Press, Oxford, 1981.
- DUGAC, Pierre [1984]. Histoire des espaces complets, *Revue d'histoire des sciences*, 37, 3-28.
- DUHEM, Pierre [1906]. *La théorie physique. Son objet, sa structure*, ré-éd., Vrin, Paris, 1981.
- EINSTEIN, Albert ; PODOLSKY, Boris ; and ROSEN, Nathan [1935]. Can quantum-mechanical description of physical reality be considered complete ?, *Physical Review*, 47, 777-780.
- GÖDEL, Kurt [1931]. Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme I, *Monatshete für Mathematik und Physik*, 38, 1931, 173-198.
- JAMMER, Max [1974]. *The philosophy of quantum mechanics. The interpretations of quantum mechanics in the historical perspective*, Wiley and sons, New York, 1974.
- JAUCH, Joseph M. [1968]. *Foundations of quantum mechanics*, Addison-Wesley, Reading (Mass.), 1968.
- NAGEL, Ernest and NEWMAN, James R. [1959]. *Gödel's proof*, Routledge and Kegan Paul, London, 1959.
- NEUMANN, John von [1931]. *Les fondements mathématiques de la mécanique quantique* (original allemand, 1931), trad. fr. par Alexandre Proca, Presses universitaires de France, Paris, 1947.
- PATY, Michel [1984]. Mathématisation et accord avec l'expérience, *Fundamenta scientiae* 5, 1984, 31- 50.
- PATY, Michel [1985]. Einstein et la complémentarité au sens de Bohr : du retrait dans le tumulte aux arguments d'incomplétude, *Revue d'histoire des sciences*, 38, 325-351.
- PATY, Michel [1986]. La non-séparabilité locale et l'objet de la théorie physique, *Fundamenta scientiae* 7, 1986, 47- 87.
- PATY, Michel [1988]. *La matière dérobée. L'appropriation critique de l'objet de la physique contemporaine*, Archives contemporaines, Paris, 1988.
- PATY, Michel [à paraître]. Remarques épistémologiques sur l'objet commun de la physique des particules et de la cosmologie, in Audouze, Jean ; Musset, Paul et Paty, Michel (dirs.), *Les particules et l'univers. La rencontre de la physique des particules, de l'astrophysique et de la cosmologie*, Presses Universitaires de France, Paris, sous presse.
- PATY, Michel [en préparation]. *Einstein philosophe. La physique comme pratique philosophique*.
- TARSKI, Alfred 1939. La complétude de l'algèbre et de la géométrie élémentaires, in Tarski, A., *Logique, sémantique, métamathématique (1922-1944)*, trad. fr. sous la direction de G. Granger, Armand Colin, Paris, 1974, vol. 2.
- WEYL, Hermann [1928]. *Gruppentheorie und Quantenmechanik*; engl. transl., *The theory of groups and quantum mechanics*, from the 2nd ed. by H.P. Robertson, Methuen, 1931 ; Dover publ., New-York, 1950.

