Monopole, stratégies multiproduit et incitation à la recherche et développement

Jean-Marc Bonnisseau, Hend Ghazzai

▶ **To cite this version:**

Jean-Marc Bonnisseau, Hend Ghazzai. Monopole, stratégies multiproduit et incitation à la recherche et développement. 2005. halshs-00193974

HAL Id: halshs-00193974
https://shs.hal.science/halshs-00193974

Submitted on 5 Dec 2007

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Distributed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License

UNIVERSITÉ PARIS 1 – PANTHÉON - SORBONNE –

CERMSEM

UMR CNRS 8095

Cahiers de la MSE

Monopole, stratégies multiproduit et incitation à la recherche et développement

Jean-Marc BONNISSEAU, CERMSEM

Hend GHAZZAI, CERMSEM

2005.25

CENTRE NATIONAL DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

Maison des Sciences Économiques, 106-112 boulevard de L'Hôpital, 75647 Paris Cedex 13

http://mse.univ-paris1.fr/Publicat.htm

ISSN : 1624-0340

Monopole, stratégies multiproduit et incitation à investir en recherche et développement

Jean-Marc BONNISSEAU*
Hend GHAZZAI*

* Université Paris I, CERMSEM, 106-112 boulevard de l'Hopital, 75647 Paris Cedex 13, France; jean-marc.bonnisseau@univ-paris1.fr, hend.ghazzai@malix.univ-paris1.fr

Janvier 2005

RESUME :

Dans un modèle de différenciation verticale où les consommateurs sont uniformément distribués par rapport à leurs intensités de préférence pour la qualité et par rapport à leurs revenus, nous cherchons la stratégie optimale d'un monopole naturel: le nombre de qualités offertes, les qualités choisies et leurs prix. En absence de coûts de production, nous trouvons que les stratégies optimales du monopole sont telles que les consommateurs qui ont le même revenu achètent la même qualité. Le monopole ne discrimine jamais par rapport aux intensités de préférence pour la qualité. Le maximum de profit du monopole correspond à la production d'une seule qualité, la plus haute, si les intensités de préférence pour la qualité sont très faibles. Dans ce cas, il sert tous les consommateurs. Sinon, la stratégie optimale correspond à la production d'une infinité de qualités. Toutefois, selon les paramètres du modèle, le monopole peut soit servir tous les consommateurs, soit ne pas servir les consommateurs à faible revenu. Si la qualité haute n'est pas suffisamment élevée le monopole n'arrive pas à extraire tout le surplus des consommateurs "riches". On en déduit une incitation à la recherche et développement afin d'améliorer la qualité.

Mots-clés: Monopole, Différenciation verticale, Stratégie multiproduit

1 Introduction

Chaque firme offre aujourd'hui une gamme étendue de produits correspondant à différentes qualités vendues à des prix différents. L'objectif de ce travail est d'étudier les stratégies des firmes mutliproduit et les facteurs économiques qui poussent ces firmes à adopter ces stratégies: la différence de revenus entre les consommateurs, la différence de leurs intensités de préférence pour la qualité ou les deux facteurs à la fois.
La question a été partiellement traitée par Gabszewicz Shaked, Sutton et Thisse [5] dans un modèle de différenciation verticale avec des consommateurs ayant des dispositions à payer différentes. Le monopole a le choix de produire une ou plusieurs qualités. Il a été démontré, que dans un contexte de monopole naturel, il est préférable pour le monopole d'offrir le maximum de qualités possible si le segment des revenus est suffisamment large par rapport au segment des qualités. Sinon le monopole offre la qualité la plus haute.
Bonnisseau et Lahmandi-Ayed [3] ont considéré un modèle de Mussa et Rosen où les consommateurs sont continûment distribués par rapport à leurs intensités de préférence pour la qualité. Dans le cas d'un monopole naturel et lorsque les consommateurs ont des revenus identiques, les auteurs montrent que le monopole n'a pas intérêt à offrir plus d'un produit. En revanche, quand les consommateurs sont divisés en deux populations ayant la

même fonction d'utilité mais deux revenus différents, il est montré qu'il est préférable pour le monopole d'offrir deux qualités si le segment des revenus est suffisamment large par rapport au segment des qualités.
Acharyya [1], étudie un modèle de Mussa et Rosen où il fait la différence entre la disposition à payer et les revenus des consommateurs. En effet, contrairement aux travaux de Gabszewicz Shaked, Sutton et Thisse [5], les revenus introduisent une contrainte budgétaire pour les consommateurs. Dans certains cas, le prix d'un bien ne dépasse pas la disposition à payer d'un consommateur mais dépasse son revenu. Il a étudié l'impact d'une telle contrainte budgétaire sur l'offre d'un monopole. Il trouve que le monopole peut adopter une stratégie multiproduits même lorsque les consommmateurs ont la même disposition à payer (mêmes préférences pour la qualité).
Dans ce papier, nous examinons le comportement d'un monopole lorsque les consommateurs sont uniformément distribués par rapport à leurs intensités de préférence pour la qualité et par rapport à leurs revenus. Il s'agit de trouver la stratégie optimale à adopter par le monopole lui permettant de maximiser son profit: le nombre de qualités à offrir, quelles qualités offrir et à quels prix. Comme dans Acharrya [1], il existe une différence entre les revenus des consommateurs et leur disposition payer pour une certaine qualité. On démontre que la contrainte budgétaire influence l'offre du monopole. En effet, On trouve que pour toute stratégie optimale du monopole, les consommateurs qui ont le même revenu achètent nécessairement la même qualité. De plus, le monopole ne discrimine jamais par rapport aux intensités de préférence pour la qualité. Une stratégie optimale du monopole correspond à la production d'une seule qualité si les intensités de préférence pour la qualité sont faibles c'est à dire si les consommateurs n'accordent pas suffisamment d'importance à la qualité. Sinon le monopole offre une infinité de qualités. Dans ce cas, le monopole peut ne pas servir les consommateurs "pauvres". De plus, si la qualité haute n'est pas suffisammant élevée, le monopole n'arrive pas à extraire le surplus des consommateurs "riches".
Le monopole pourrait extraire tout le surplus des consommateurs "riches" s'il améliorait sa qualité maximale. Ainsi, une stratégie multiproduit peut inciter à la recherche et développement. Le monopole pourrait améliorer son profit s'il invente une meilleure qualité.
Nous décrivons dans la première section de ce papier le modèle. Dans la deuxième section, nous étudions les caractéristiques des prix et des qualités correspondant à une stratégie optimale du monopole naturel offrant n qualités actives. Dans la troisième section, nous déterminons le nombre optimal de qualités à produire. Dans la quatrième section, nous trouvons les qualités et les prix optimaux et nous discutons le lien entre les stratégies multiproduits et l'incitation à l'investissement en recherche et développement. Nous terminons par la conclusion et la proposition de quelques extensions.

2 Le modèle

On considère un modèle de différenciation verticale proposé par Mussa et Rosen (1978). Un consommateur peut, soit acheter une unité de produit de

qualité q au prix p, soit ne rien acheter. Il est caractérisé par son intensité de préférence pour la qualité θ et son revenu y. L'utilité d'un consommateur (θ, y) est représentée par:

$$V(\theta, y) = \begin{cases} y - p + \theta q & \text{si} \quad -p + \theta q \geq 0 \\ y & \text{sinon} \end{cases}$$

Un consommateur n'achète que si $p \leq y$ et $-p + \theta q \geq 0$. La première inégalité indique qu'un consommateur ne peut acheter que si son revenu le lui permet. Le revenu, dans ce modèle, n'a qu'un effet de contrainte, contrairement au modèle utilisé par Gabsewicz et Al [5] où il a un effet direct sur l'utilité. La deuxième indique qu'un consommateur achète s'il y a une amélioration de son utilité après achat. Le prix du bien acheté ne doit pas dépasser θq qui représente le prix maximal pour lequel un consommateur d'intensité de préférence θ achète la qualité q. θq représente ainsi la disposition à payer d'un consommateur (θ, y) pour la qualité q.

Les consommateurs sont uniformément répartis sur $[\underline{\theta}, \overline{\theta}] \times [\underline{y}, \overline{y}]$, $[\underline{\theta}, \overline{\theta}]$ étant le segment des intensités de préférence pour la qualité et $[\underline{y}, \overline{y}]$ étant le segment des revenus. $\underline{y}$ et $\underline{\theta}$ sont strictement positifs.

On se place dans le cadre d'un monopole naturel où la condition $\overline{\theta} < 2\underline{\theta}$ assure l'existence d'une seule firme sur le marché [2]. En effet, une firme désirant entrer dans un marché où $\overline{\theta} < 2\underline{\theta}$ et qui est déjà occupé par une autre firme aurait une part de marché nulle. Le monopole naturel offre une ou plusieurs qualités appartenant à $[\underline{q}, \overline{q}]$. On suppose que les coûts de production du monopole sont nuls. Il s'agit d'étudier les stratégies optimales du monopole. Une stratégie optimale correspond au choix d'un nombre de qualités, des qualités à produire parmi toutes les qualités possibles et de leurs prix afin de maximiser le profit du monopole. Dans la section suivante, le nombre de qualités produites par le monopole est fixé à n. Le monopole propose un catalogue de produits $((q_i, p_i)_{i=1..n})$. Les qualités q_i sont telles que $q_1 < q_2 < ..q_n$ et sont vendues aux prix respectifs $p_1, p_2, ..p_n$. Le catalogue ne comprend que des qualités actives, c'est à dire des qualités qui ont une demande non nulle. [1]. Il est clair que dans ce cas on a forcément $p_i < p_j$ si $i < j$ sinon la qualité q_j serait préférée à q_i par tous les consommateurs et par conséquent q_i serait inactive.

Un consommateur (θ, y) choisit parmi les qualités q_i proposées aux prix $p_i \leq y$ la qualité qui maximise son utilité. L'utilité d'un consommateur (θ, y) est supérieure à y (le consommateur achète) s'il existe $i \in \{1, .., n\}$ tel que $\theta \geq \frac{p_i}{q_i}$ et $p_i \leq y$. $\frac{p_i}{q_i}$ représente l'intensité de préférence pour la qualité à partir de laquelle les consommateurs sont prêts à acheter la qualité q_i.
Le problème du consommateur (θ, y) peut s'écrire comme suit:

[1] On ne s'intéresse qu'aux qualités actives car le profit du monopole reste inchangé s'il met sur le marché des qualités inactives

$$\begin{cases} \max\limits_{i\in\{1,..,n\}} y - p_i + q_i\theta \\ -p_i + \theta q_i \geq 0 \\ p_i \leq y \end{cases}$$

S'il n'existe pas i tel que $\theta \geq \frac{p_i}{q_i}$ et $p_i \leq y$ alors le consommateur (θ, y) n'achète aucune qualité proposée.

S'il existe, le consommateur marginal indifférent entre la qualité q_i et la qualité q_{i+1} est celui qui a la même utilité en achetant q_i ou q_{i+1}. Notons $\widehat{\theta}_i$ son intensité de préférence pour la qualité. On a donc $y - p_i + \widehat{\theta}_i q_i = y - p_{i+1} + \widehat{\theta}_i q_{i+1}$ d'où $\widehat{\theta}_i = \frac{p_{i+1}-p_i}{q_{i+1}-q_i}$. Il est clair que si un consommateur (θ, y) est tel que $\theta < \widehat{\theta}_i$ alors il préfère (q_i, p_i) à (q_{i+1}, p_{i+1}). Si θ est tel que $\theta > \widehat{\theta}_i$ alors le consommateur préfère (q_{i+1}, p_{i+1}) à (q_i, p_i).

Exemple: Supposons que le monopole propose un catalogue à deux qualités (q_1, p_1), (q_2, p_2). Le problème du monopole est alors le suivant: $\max\limits_{p_1,p_2,q_1,q_2} \Pi = p_1 D_1 + p_2 D_2$ où D_1 et D_2 sont les demandes respectives des qualités q_1 et q_2. Les consommateurs indifférents entre acheter la qualité q_1 et acheter la qualité q_2 sont caractérisés par $\widehat{\theta}_1 = \frac{p_2-p_1}{q_2-q_1}$. Les consommateurs qui sont prêts à acheter la qualité q_1 sont ceux qui ont un revenu y supérieur à p_1 et une intensité de préférence pour la qualité supérieure à $\frac{p_1}{q_1}$. D_1 et D_2 s'écrivent de plusieurs manières selon p_1, p_2, q_1 et q_2. Par exemple, si p_1 et p_2 sont supérieurs à $\underline{y}$ et $\widehat{\theta}_1 > \tilde{\theta} = \max(\frac{p_1}{q_1}, \underline{\theta})$ alors on a $D_1 = (\overline{y} - p_1)(\widehat{\theta}_1 - \tilde{\theta}) + (p_2 - p_1)(\overline{\theta} - \widehat{\theta}_1)$ et $D_2 = (\overline{y} - p_2)(\overline{\theta} - \widehat{\theta}_1)$. La première partie de D_1 correspond aux consommateurs de faibles intensités de préférence pour la qualité qui préfèrent (q_1, p_1) à (q_2, p_2) et ont le revenu nécessaire pour acheter q_1. La deuxième partie de D_1 correspond aux consommateurs qui préfèrent (q_2, p_2) à (q_1, p_1) mais qui n'ont pas le revenu nécessaire pour acheter q_2. D'autres cas peuvent se présenter: si p_1 et p_2 sont supérieurs à $\underline{y}$ et $\widehat{\theta}_1 \leq \tilde{\theta} = \max(\frac{p_1}{q_1}, \underline{\theta})$, on aura $D_1 = (p_2 - p_1)(\overline{\theta} - \tilde{\theta})$ et $D_2 = (\overline{y} - p_2)(\overline{\theta} - \tilde{\theta})$. Dans ce cas, tous les consommateurs preférent (q_2, p_2) à (q_1, p_1) mais seuls ceux qui ont un revenu supérieur à p_2 peuvent acheter q_2.
La figure 1 montre la répartition de la demande sur $[\underline{y}, \overline{y}] \times [\underline{\theta}, \overline{\theta}]$ pour différentes valeurs de (q_1, p_1) et (q_2, p_2). La partie grise représente les consommateurs qui n'achètent pas soit parce qu'ils ont une faible intensité de préférence pour la qualité, soit parce que leurs revenus sont faibles (inférieurs à p_1).

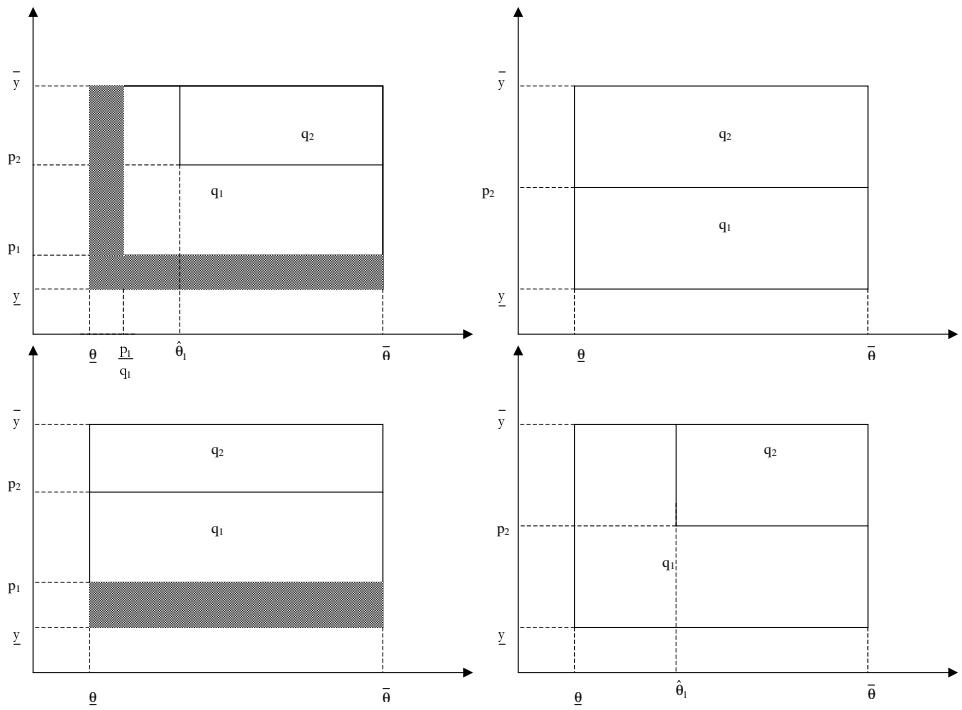

Figure 1: Différentes répartitions de la demande selon l'offre du monopole pour $n = 2$

La figure 1 montre que les demandes pour les qualités q_i peuvent prendre plusieurs formes selon le catalogue offert par le monopole. Le but de la section suivante est de trouver l'expression des demandes D_i donc du profit pour une stratégie optimale du monopole et lorsque le nombre de qualités actives est fixé à n.

3 Analyse d'une stratégie optimale pour un nombre fixé de qualités

On suppose dans cette partie qu'il existe une stratégie du monopole avec $n \geq 2$ qualités actives. On montre que les stratégies optimales du monopole offrant n qualités actives sont nécessairement comme suit: les consommateurs qui ont le même revenu achètent la même qualité (Figure 3). Vue la forme de la demande pour chaque qualité, on appellera ces stratégies les stratégies en "bandes". Dans les trois lemmes qui suivent nous donnons les propriétés que doit vérifier le catalogue $((q_i, p_i)_{i=1,..n})$ pour une stratégie

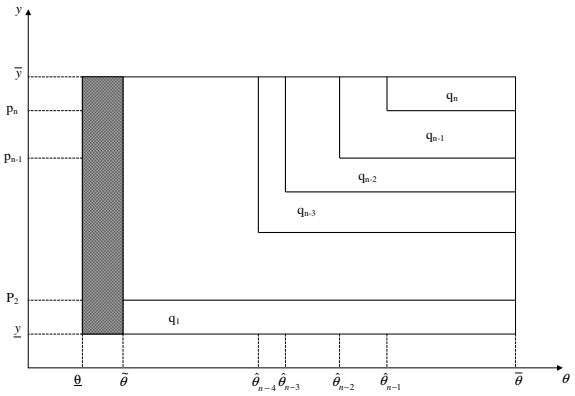

Figure 2: Stratégie en L

optimale du monopole. On pose $\tilde{\theta} = \max(\underline{\theta}, \frac{p_1}{q_1})$. Nous montrons dans le lemme 1 que si pour une stratégie optimale du monopole nous avons $\frac{p_1}{q_1} > \underline{\theta}$ c'est à dire $\tilde{\theta} = \frac{p_1}{q_1}$ alors pour tout $i = 2, .., n$ on a $\frac{p_1}{q_1} \leq \frac{p_i}{q_i}$. Ce lemme indique que tous les consommateurs tels que leur intensité de préférence pour la qualité est comprise entre $\underline{\theta}$ et $\tilde{\theta}$ n'achètent aucune qualité et ce indépendamment de leurs revenus et que tous les consommateurs qui ont une intensité de préférence pour la qualité supérieure à $\tilde{\theta}$ et un revenu supérieur à p_1 achètent. Dans le lemme 2, on restreint les stratégies optimales à deux sortes de stratégies: les stratégies en L (Définition 1) et les stratégies en "bandes" (Définition 2) . Finalement, dans le lemme 3 nous montrons que le monopole n'a pas intérêt à mettre plus d'un prix inférieur à $\underline{y}$. Ainsi, pour une stratégie optimale seul le prix de la qualité la plus basse peut être inférieur à $\underline{y}$ ce qui détermine si le monopole exclut les consommateurs à faibles revenus ou pas.
La démarche des démonstrations est toujours la même. Nous raisonnons par l'absurde en supposant qu'il existe une stratégie optimale qui ne vérifie pas la propriété à démontrer et nous construisons une nouvelle stratégie en agissant sur les qualités ou les prix qui conduit à un profit supérieur du monopole.

Définition 1 *On appelle stratégie en L, les stratégies du monopole qui vérifient la propriété suivante: Il existe $\widehat{\theta}_i$ vérifiant $\tilde{\theta} < \widehat{\theta}_i < \overline{\theta}$ et pour tout $j \in \{i, .., n-2\}$ on a $\widehat{\theta}_j \leq \widehat{\theta}_{j+1}$.*

La répartition de la demande des qualités sur $[\tilde{\theta}, \overline{\theta}] \times [\underline{y}, \overline{y}]$ explique l'appellation de stratégie en L.

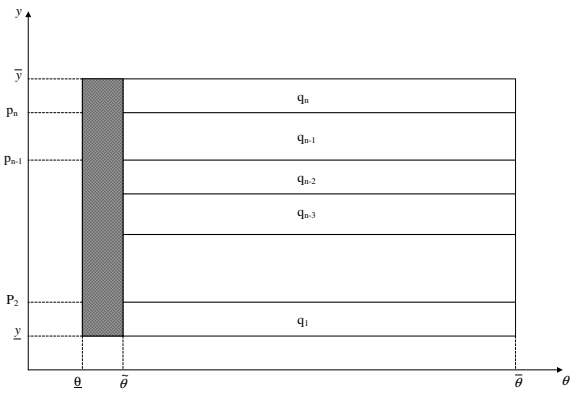

Figure 3: Stratégie en "bandes"

Définition 2 *On appelle stratégie en "bandes", les stratégies du monopole qui vérifient la propriéte suivante:* $\widehat{\theta}_i \leq \tilde{\theta}$ *pour tout* $i = 1, .., n-1$.

Lemme 1 *Si le monopole a une stratégie optimale telle que* $\frac{p_1}{q_1} > \underline{\theta}$ *alors on a* $\frac{p_1}{q_1} \leq \frac{p_i}{q_i}$ *pour tout* $i \in \{1, .., n\}$.

Preuve. Soit $I = \{i | \frac{p_i}{q_i} < \frac{p_1}{q_1}\}$. Supposons que I est non vide. Nous démontrons que la stratégie du monopole peut être améliorée et par conséquent n'est pas optimale.
On pose $i_0 = \underset{i \in I}{\operatorname{argmin}}\{\frac{p_i}{q_i}\}$. On a nécessairement $i_0 \geq 2$.
Pour tout $i < i_0$ on remplace q_i par des qualités q_i' tel que $\frac{p_i}{q_i'} = \frac{p_{i_0}}{q_{i_0}}$. On a donc $\frac{p_1}{q_1'} = \frac{p_2}{q_2'} = ... = \frac{p_{i_0}}{q_{i_0}}$.
Pour tout $i < i_0$, on a $q_i < q_i' < q_{i_0}$ donc $q_i' \in [\underline{q}, \overline{q}]$. En effet, pour $i \in \{1, .., i_0\}$ on a $\frac{p_i}{p_{i_0}} = \frac{q_i'}{q_{i_0}}$ et comme $p_i < p_{i_0}$ (les qualités q_i sont actives) on a $q_i' < q_{i_0}$. Il est clair que $q_i < q_i'$ car $\frac{p_i}{q_i} \geq \frac{p_i}{q_i'} = \frac{p_{i_0}}{q_{i_0}}$. On a aussi $q_1' < q_2' < .. < q_{i_0}$ car $p_1 < p_2 < .. < p_{i_0}$.
On distingue 2 cas: $p_2 > \underline{y}$ et $p_2 \leq \underline{y}$.
Premier cas: $p_2 > \underline{y}$
La variation de profit obtenue avec la nouvelle stratégie vérifie: $\Delta\Pi \geq p_1(p_2 - \max(p_1, \underline{y}))(\frac{p_1}{q_1} - \max(\underline{\theta}, \frac{p_{i_0}}{q_{i_0}}))$.

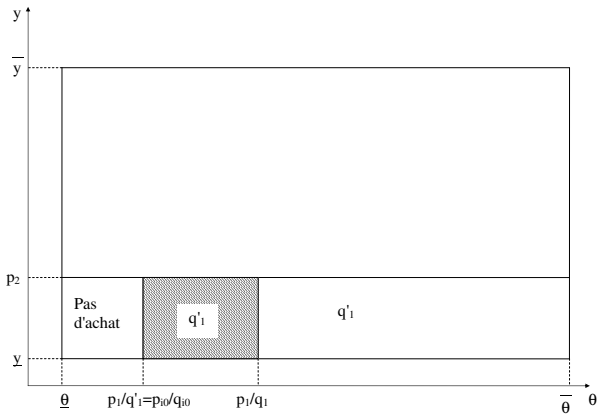

Figure 4: Augmentation de la demande pour les consommateurs ayant un revenu inférieur à p_2

La partie droite de l'inégalité représente l'accroissement du profit du monopole résultant de la nouvelle demande pour la qualité $q'_1 > q_1$. Certains consommateurs qui n'achetaient pas la qualité q_1 au prix p_1 vont acheter la qualité supérieure q'_1 au prix p_1. D'où une variation du profit positive.

La partie en gris de la figure 4 représente l'accroissement de la demande pour la qualité la plus basse suite à la nouvelle stratégie pour les consommateurs ayant un revenu inférieur à p_2. Les consommateurs qui ont un revenu appartenant à $[p_2, p_{i_0}[$ et une intensité de préférence pour la qualité supérieure à $\frac{p_{i_0}}{q_{i_0}}$ achètent la plus haute qualité que leur revenu le leur permet (des calculs simples permettent d'établir que $\frac{p_{i_0}}{q_{i_0}} = \frac{p_{i+1}-p_i}{q'_{i+1}-q'_i}$ pour tout $i < i_0$). Ainsi avec la nouvelle stratégie soit ils gardent le même choix de qualité, soit ils changent vers une qualité supérieure. Les consommateurs ayant un revenu supérieur à p_{i_0} et une intensité de préférence pour la qualité supérieure à $\frac{p_{i_0}}{q_{i_0}}$ achètent la qualité q_{i_0} ou une qualité supérieure. Il clair que cette stratégie améliore le profit du monopole puisque certains consommateurs qui n'achetaient pas vont acheter. D'autres vont choisir une qualité supérieure ou garder le même choix de qualité.

Deuxième cas: $p_2 \leq \underline{y}$

Dans ce cas on a $p_1 < p_2 \leq \underline{y}$. On montre d'abord que $2 \notin I$. Supposons que $2 \in I$ c'est à dire que $\frac{p_2}{q_2} < \frac{p_1}{q_1}$. Par des calculs simples on obtient l'inégalité: $\frac{p_2-p_1}{q_2-q_1} < \frac{p_2}{q_2} < \frac{p_1}{q_1}$ et pour tout $\theta \geq \max(\frac{p_2}{q_2}, \underline{\theta})$ les consommateurs d'intensité de préférence pour la qualité θ préfèrent q_2 à q_1 et ont le revenu nécessaire

pour acheter q_2 ($p_2 < \underline{y}$), ce qui contredit que la qualité q_1 est active. D'où $p_2 \leq \underline{y}$ implique $2 \notin I$ (Plus généralement on montre que si $p_i < \underline{y}$ alors $i \notin I$).
On montre maintenant que la nouvelle stratégie améliore le profit du monopole. On a $i_0 > 2$. Comme $2 \notin I$ on a $\frac{p_2}{q_2} \geq \frac{p_1}{q_1}$. L'hypothèse q_1 est active implique $\frac{p_2}{q_2} > \frac{p_1}{q_1}$ sinon on a $\frac{p_2-p_1}{q_2-q_1} = \frac{p_2}{q_2} = \frac{p_1}{q_1}$ et tous les consommateurs préféreront q_2 à q_1 et ont les moyens d'acheter q_2. Par des calculs simples on a $\frac{p_2-p_1}{q_2-q_1} > \frac{p_2}{q_2} > \frac{p_1}{q_1}$. Avec la nouvelle stratégie on a $\frac{p_1}{q_1'} = \frac{p_2}{q_2'} = \frac{p_2-p_1}{q_2'-q_1'}$ d'où tous les consommateurs préférent q_2' à q_1' et ont les moyens d'acheter q_2'. Ainsi la qualité q_1' est inactive et la variation de profit du monopole est positive puisque les consommateurs qui achetaient la qualité q_1 au prix p_1 achètent la qualité q_2' au prix p_2 ou une qualité supérieure. Les autres consommateurs gardent le même choix ou achètent une qualité supérieure à celle qu'ils achetaient avant. ■

En augmentant les qualités basses sans changer les prix, le monopole augmente sa demande puisqu'il récupère une partie des consommateurs qui préféraient ne pas acheter les qualités initialement proposées par le monopole. D'autres consommateurs achètent des qualités supérieures aux qualités qu'ils achetaient initialement.
Du lemme 1 on déduit que les consommateurs (θ, y) qui achètent sont tel que $(\theta, y) \in [\tilde{\theta}, \overline{\theta}] \times [\max(p_1, \underline{y}), \overline{y}]$. Nous avons ainsi déterminé la part du marché du monopole, c'est à dire les consommateurs qui achètent. Il s'agit dans le lemme suivant de déterminer la forme de la demande pour chaque qualité. On s'intéresse dans le lemme 2 aux stratégies avec $n \geq 3$ qualités actives et on démontre que les stratégies optimales sont soit en L ou en "bandes". Il est clair que pour $n = 2$, les stratégies possibles sont en L ou en "bandes" selon $\widehat{\theta}_1$.

Lemme 2 *Si pour une stratégie optimale du monopole il existe i_0 tel que $\tilde{\theta} < \widehat{\theta}_{i_0} < \overline{\theta}$ alors $\widehat{\theta}_i < \widehat{\theta}_{i+1}$ pour tout $i \in \{i_0, .., n-2\}$.*

Preuve. Soit $J = \{j \in \{1, ..n-2\} | \tilde{\theta} < \widehat{\theta}_j < \overline{\theta} \text{ et } \widehat{\theta}_{j+1} \leq \widehat{\theta}_j\}$. Si J est non vide on démontre que la stratégie du monopole peut être améliorée et par conséquent n'est pas optimale.
On pose $j_0 = \min J$. On a $\tilde{\theta} < \widehat{\theta}_{j_0} < \overline{\theta}$ et $\widehat{\theta}_{j_0+1} \leq \widehat{\theta}_{j_0}$.
Les consommateurs (θ, y) tels que $\theta < \widehat{\theta}_{j_0+1}$ préfèrent q_{j_0} à q_{j_0+1} et q_{j_0+1} à q_{j_0+2}.
Les consommateurs (θ, y) tels que $\theta \in [\widehat{\theta}_{j_0+1}, \widehat{\theta}_{j_0}]$ préfèrent q_{j_0} à q_{j_0+1} et q_{j_0+2} à q_{j_0+1}.
Les consommateurs (θ, y) tels que $\theta > \widehat{\theta}_{j_0}$ préfèrent q_{j_0+2} à q_{j_0+1} et q_{j_0+1} à q_{j_0}. [2]

[2] $\widehat{\theta}_{j_0+1}$ peut être inférieure à $\tilde{\theta}$ dans ce cas q_{j_0+2} est préférée à q_{j_0+1} par tous les consommateurs. Les consommateurs (θ, y) tels que $\theta \in [\tilde{\theta}, \widehat{\theta}_{j_0}]$ préfèrent q_{j_0} à q_{j_0+1} et les

On va déterminer la demande pour q_{j_0+1}. On démontre d'abord que $p_{j_0+2} > \underline{y}$. Supposons que $p_{j_0+2} \leq \underline{y}$. Dans ce cas, pour tout $y \in [\underline{y}, \overline{y}]$ on a $y \geq p_{j_0+2}$ donc tous les consommateurs peuvent acheter q_{j_0+2} et pour tout $\theta \in [\tilde{\theta}, \overline{\theta}]$ la qualité q_{j_0+1} n'est jamais préférée donc est inactive. D'où $p_{j_0+2} > \underline{y}$

Des consommateurs ayant un revenu $y \geq p_{j_0+2}$ n'achètent jamais la qualité q_{j_0+1} car elle n'est jamais préférée (quelque soit θ).
Des consommateurs ayant un revenu $y < p_{j_0+1}$ n'ont pas les moyens d'acheter q_{j_0+1}.
Si $y \in [\max(\underline{y}, p_{j_0+1}), p_{j_0+2}[$, on a $\widehat{\theta}_j < \widehat{\theta}_{j_0}$ pour tout $j < j_0$ car $j_0 = \min J$ et pour tout $j > j_0$, $\widehat{\theta}_j$ n'intervient pas dans le choix des consommateurs de revenus $y \in [\max(\underline{y}, p_{j_0+1}), p_{j_0+2}[$ car ils ne peuvent pas acheter des qualités supérieures à q_{j_0+1}. Donc les consommateurs ayant une intensité de préférence pour la qualité $\theta \in [\widehat{\theta}_{j_0}, \overline{\theta}]$ et un revenu $y \in [\max(\underline{y}, p_{j_0+1}), p_{j_0+2}[$ sont les seuls qui achètent q_{j_0+1}.

Le monopole peut changer de stratégie et augmenter son profit en remplaçant q_{j_0+1} par une qualité supérieure $q'_{j_0+1} \in]q_{j_0+1}, q_{j_0+2}[$ sans changer p_{j_0+1}. Dans ce cas, $\widehat{\theta}'_{j_0} = \frac{p_{j_0+1} - p_{j_0}}{q'_{j_0+1} - q_{j_0}} < \widehat{\theta}_{j_0}$. Le changement de $\widehat{\theta}_{j_0+1}$ n'influence pas le choix des consommateurs ayant un revenu supérieur à p_{j_0+2}. Les seuls consommateurs qui changent leur choix sont ceux qui appartiennent à $[\max(\underline{y}, p_{j_0+1}), p_{j_0+2}[\times[\widehat{\theta}'_{j_0}, \widehat{\theta}_{j_0}]$ qui passent de la qualité q_{j_0} au prix p_{j_0} à la qualité q'_{j_0+1} au prix p_{j_0+1}. Tous les autres consommateurs gardent le même choix de qualité que celui de la stratégie initiale. Le profit du monopole ainsi obtenu est supérieur à son profit initial et la stratégie initiale n'est pas optimale. ■

Ainsi, si pour une stratégie optimale il existe $i \in \{1, .., n-1\}$ tel que $\widehat{\theta}_i \in [\tilde{\theta}, \overline{\theta}]$ alors, d'après le lemme 2 cette stratégie, est en L. Ceci nous permet de restreindre les stratégies otimales à deux stratégies possibles: les stratégies en L et les stratégies en "bandes". Dans le lemme suivant on démontre que pour une stratégie optimale, seul le prix de la qualité la plus basse peut être inférieur à $\underline{y}$.

Lemme 3 *$p_2 > \underline{y}$ pour toute stratégie optimale du monopole.*

Preuve. Supposons que $p_2 \leq \underline{y}$. Comme par hypothèse les n qualités sont actives on a $\widehat{\theta}_1 > \tilde{\theta}$ (sinon la qualité q_1 est inactive puisque tous les consommateurs tel que $\theta \geq \tilde{\theta}$ préférent q_2 et ont les moyens de l'acheter) et $\widehat{\theta}_1 < \widehat{\theta}_2 < .. < \widehat{\theta}_{j-1} < ..\widehat{\theta}_{n-1}$ d'après le lemme 2.

---

consommateurs (θ, y) tels que $\theta > \widehat{\theta}_{j_0}$ préfèrent q_{j_0+1} à q_{j_0}

En vendant la qualité q_1 au prix p_2, la qualité q_1 devient inactive et la différence de profit du monopole s'écrit:

- Si $\frac{p_1}{q_1} > \underline{\theta}$ alors on a $\frac{p_2}{q_2} > \frac{p_1}{q_1}$ car d'après le lemme 1 on a $\frac{p_2}{q_2} \geq \frac{p_1}{q_1}$ et s'il y a égalité la qualité q_1 serait inactive. La variation du profit du monopole est $\Delta\Pi = (\overline{y} - \underline{y})[(\frac{p_2-p_1}{q_2-q_1} - \frac{p_2}{q_2})(p_2 - p_1) - p_1(\frac{p_2}{q_2} - \frac{p_1}{q_1})] = (\overline{y} - \underline{y})\frac{(p_2q_1-p_1q_2)^2}{q_1q_2(q_2-q_1)} > 0$.
  $(\overline{y} - \underline{y})(\frac{p_2-p_1}{q_2-q_1} - \frac{p_2}{q_2})(p_2 - p_1)$ représente le gain du monopole généré par les consommateurs qui changent de q_1 vers q_2 et $(\overline{y} - \underline{y})p_1(\frac{p_2}{q_2} - \frac{p_1}{q_1})$ représente la perte du monopole dûe à la perte de certains consommateurs qui achetaient q_1 mais préfèrent ne pas acheter q_2. La variation globale est positive.

- Si $\frac{p_1}{q_1} \leq \underline{\theta}$ et $\frac{p_2}{q_2} \leq \underline{\theta}$, le raisonnement est plus simple puisque tous les consommateurs qui achetaient q_1 à p_1 achètent q_2 à p_2 et on a $\Delta\Pi = (\overline{y} - \underline{y})(\frac{p_2-p_1}{q_2-q_1} - \underline{\theta})(p_2 - p_1) > 0$.

- Si $\frac{p_1}{q_1} \leq \underline{\theta}$ et $\frac{p_2}{q_2} > \underline{\theta}$, on a $\Delta\Pi = (\overline{y} - \underline{y})[(\frac{p_2-p_1}{q_2-q_1} - \frac{p_2}{q_2})(p_2 - p_1) - p_1(\frac{p_2}{q_2} - \underline{\theta})] > (\overline{y} - \underline{y})[(\frac{p_2-p_1}{q_2-q_1} - \frac{p_2}{q_2})(p_2 - p_1) - p_1(\frac{p_2}{q_2} - \frac{p_1}{q_1})] > 0$.
  Comme dans le premier cas, il y a un gain de profit généré par les consommateurs qui changent de q_1 vers q_2 et une perte dûe à la perte de certains consommateurs qui achetaient q_1 mais préfèrent ne pas acheter q_2. La variation globale est positive.

■

Ainsi le monopole n'a aucun intérêt à mettre plus d'un prix inférieur à $\underline{y}$. Pour une stratégie optimale du monopole seul le prix de la qualité basse peut être inférieur à $\underline{y}$ ce qui détermine le choix du monopole quant à la satisfaction ou non des consommateurs "pauvres".

Etant données les caractéristiques des prix et des qualités des stratégies optimales du monopole, nous montrons dans ce qui suit, que les stratégies optimales vérifient nécéssairement la propriété suivante: les consommateurs ayant le même revenu achètent la même qualité. Ces stratégies sont en "bandes" et vérifient $\widehat{\theta}_i \leq \tilde{\theta}$ pour tout $i = 1, .., n-1$. Pour une stratégie en "bandes", tous les consommateurs d'intensité de préférence $\theta \in [\tilde{\theta}, \overline{\theta}]$ classent de la même manière les qualités. En effet, q_n est préférée à q_{n-1}, préférée à q_{n-2},...,préférée à q_1. Ce sont donc uniquement les revenus des consommateurs qui déterminent le choix de la qualité. D'où l'importance de la contrainte budgétaire.

Proposition 1 *Les stratégies optimales du monopole sont nécessairement en "bandes".*

Preuve. Considérons une stratégie en L: il existe $i \in \{1, .., n-1\}$ tel que $\widehat{\theta}_i > \tilde{\theta}$. On montre que cette stratégie peut être améliorée en agissant sur le prix p_n de la qualité q_n.
D'après le lemme 2, on a forcément $\widehat{\theta}_{n-1} > \tilde{\theta}$.

- Premier cas: $n > 2$
  Soit $p'_n = p_{n-1} + \tilde{\theta}(q_n - q_{n-1})$ le nouveau prix de la qualité q_n. On a $\underline{y} < p_{n-1} < p'_n < p_n$. En effet, $p_n = p_{n-1} + \widehat{\theta}_{n-1}(q_n - q_{n-1}) > p_{n-1} + \tilde{\theta}(q_n - q_{n-1}) = p'_n$. On a de manière évidente que $p'_n > p_{n-1}$ vu l'expression de p'_n. De plus $p_{n-1} > \underline{y}$ d'après le lemme 3. Quand le monople fixe ce prix tous les consommateurs appartenant à $[\tilde{\theta}, \overline{\theta}] \times [p'_n, \overline{y}]$ achètent la qualité q_n au prix p'_n. La figure 5 montre les zones où il y a gain de profit pour le monopole et les zones où il y a perte de profit. La variation du profit du monopole après la diminution du prix de la qualité q_n s'écrit:
  $\Delta\Pi = -[p_n - p_{n-1} - \tilde{\theta}(q_n - q_{n-1})][\overline{y} - p_n][\overline{\theta} - \widehat{\theta}_{n-1}] + \tilde{\theta}(q_n - q_{n-1})[p_n - p_{n-1} - \tilde{\theta}(q_n - q_{n-1})][\overline{\theta} - \widehat{\theta}_{n-1}] + [\sum_{i+1 \leq j \leq n-1} (\widehat{\theta}_j - \widehat{\theta}_{j-1})(p'_n - p_j)][\overline{y} - p_{n-1} - \tilde{\theta}(q_n - q_{n-1})] + [p'_n - p_i](\widehat{\theta}_i - \tilde{\theta})[\overline{y} - p_{n-1} - \tilde{\theta}(q_n - q_{n-1})]$

  En remplaçant p'_n par sa valeur et en utilisant le fait que p_j est inférieur à p_{n-1} pour tout $j \leq n-1$, on a:

  $\Delta\Pi \geq -[p_n - p_{n-1} - \tilde{\theta}(q_n - q_{n-1})][\overline{y} - p_n][\overline{\theta} - \widehat{\theta}_{n-1}] + \tilde{\theta}(q_n - q_{n-1})[p_n - p_{n-1} - \tilde{\theta}(q_n - q_{n-1})][\overline{\theta} - \widehat{\theta}_{n-1}] + [\sum_{i+1 \leq j \leq n-1} (\widehat{\theta}_j - \widehat{\theta}_{j-1})][p_{n-1} + \tilde{\theta}(q_n - q_{n-1}) - p_{n-1}][\overline{y} - p_{n-1} - \tilde{\theta}(q_n - q_{n-1})] + [p_{n-1} + \tilde{\theta}(q_n - q_{n-1}) - p_{n-1}][\widehat{\theta}_i - \tilde{\theta}][\overline{y} - p_{n-1} - \tilde{\theta}(q_n - q_{n-1})]$

  En arrangeant les termes et en mettant $p_n - p_{n-1} - \tilde{\theta}(q_n - q_{n-1})$ en facteur on obtient finalement:
  $\Delta\Pi \geq [p_n - p_{n-1} - \tilde{\theta}(q_n - q_{n-1})][(\overline{\theta} - \widehat{\theta}_{n-1})(\tilde{\theta}(q_n - q_{n-1}) - (\overline{y} - p_n)) + \tilde{\theta}(\overline{y} - p_{n-1} - \tilde{\theta}(q_n - q_{n-1}))]$

  Comme $p_n - p_{n-1} - \tilde{\theta}(q_n - q_{n-1}) > 0$, cherchons le signe de $\Delta(\widehat{\theta}_{n-1}) = (\overline{\theta} - \widehat{\theta}_{n-1})(\tilde{\theta}(q_n - q_{n-1}) - (\overline{y} - p_n)) + \tilde{\theta}(\overline{y} - p_{n-1} - \tilde{\theta}(q_n - q_{n-1}))$.
  En remplaçant p_n par $\widehat{\theta}_{n-1}(q_n - q_{n-1}) + p_{n-1}$ on a:

  $\Delta(\widehat{\theta}_{n-1}) = (\overline{\theta} - \widehat{\theta}_{n-1})((\widehat{\theta}_{n-1} + \tilde{\theta})(q_n - q_{n-1}) - \overline{y} + p_{n-1}) + \tilde{\theta}(\overline{y} - p_{n-1} - \tilde{\theta}(q_n - q_{n-1}))$.

  $\Delta(\widehat{\theta}_{n-1})$ est quadratique concave en $\widehat{\theta}_{n-1}$. De plus, on a $\Delta(\overline{\theta}) = \tilde{\theta}(\overline{y} - p_{n-1} - \tilde{\theta}(q_n - q_{n-1})) > 0$ et $\Delta(\tilde{\theta}) = (\overline{\theta} - \tilde{\theta})\tilde{\theta}(q_n - q_{n-1}) + (2\tilde{\theta} -$

$\overline{\theta})(\overline{y}-p_{n-1}-\tilde{\theta}(q_n-q_{n-1})>0$ car $2\tilde{\theta}\geq 2\underline{\theta}>\overline{\theta}$ (condition de monopole naturel). Ainsi pour tout $\widehat{\theta}_{n-1}\in]\tilde{\theta},\overline{\theta}[$, on a $\Delta(\widehat{\theta}_{n-1})>0$ d'où $\Delta\Pi>0$. Le monopole arrive à améliorer sa stratégie en diminuant p_n.

- Deuxième cas: $n=2$
  On adopte la même stratégie en choisissant $p_2'=p_1+\tilde{\theta}(q_2-q_1)$. Si $p_2'\geq\underline{y}$ on retrouve les mêmes calculs et résultats qu'au premier cas.
  Sinon, la qualité q_1 devient inactive et comme $p_2=p_1+\widehat{\theta}_1(q_2-q_1)$, on a:
  $\Delta\Pi=-(\widehat{\theta}_1-\tilde{\theta})(q_2-q_1)(\overline{y}-p_1-\widehat{\theta}_1(q_2-q_1))(\overline{\theta}-\widehat{\theta}_1)+\tilde{\theta}(q_2-q_1)(p_1+\widehat{\theta}_1(q_2-q_1)-\underline{y})(\overline{\theta}-\widehat{\theta}_1)+\tilde{\theta}(q_2-q_1)(\overline{y}-\underline{y})(\widehat{\theta}_1-\tilde{\theta})$
  Le signe de Π est le signe de $\phi=-(\widehat{\theta}_1-\tilde{\theta})(\overline{y}-p_1-\widehat{\theta}_1(q_2-q_1))(\overline{\theta}-\widehat{\theta}_1)+\tilde{\theta}(p_1+\widehat{\theta}_1(q_2-q_1)-\underline{y})(\overline{\theta}-\widehat{\theta}_1)+\tilde{\theta}(\overline{y}-\underline{y})(\widehat{\theta}_1-\tilde{\theta})$.
  En divisant le troisième terme de ϕ en deux parties on a:
  $\phi=-(\widehat{\theta}_1-\tilde{\theta})(\overline{y}-p_1-\widehat{\theta}_1(q_2-q_1))(\overline{\theta}-\widehat{\theta}_1)+\tilde{\theta}(p_1+\widehat{\theta}_1-\underline{y})(\overline{\theta}-\widehat{\theta}_1)+\tilde{\theta}(\overline{y}-p_1-\widehat{\theta}_1(q_2-q_1))(\widehat{\theta}_1-\tilde{\theta})+\tilde{\theta}(p_1+\widehat{\theta}_1(q_2-q_1)-\underline{y})(\widehat{\theta}_1-\tilde{\theta})$
  En regroupant le premier et le troixième termes de ϕ et le deuxième et quatrième termes et en factorisant on obtient:
  $\phi=(\overline{y}-p_1-\widehat{\theta}_1(q_2-q_1))(\tilde{\theta}+\widehat{\theta}_1-\overline{\theta})+(p_1+\widehat{\theta}_1(q_2-q_1)-\underline{y})\tilde{\theta}(\overline{\theta}-\tilde{\theta})>0$.
  La variation du profit du monopole est donc strictement positive et avec la nouvelle stratégie seule la qualité q_2 est active.

Ainsi, pour tout p_n tel que $\widehat{\theta}_{n-1}\in]\tilde{\theta},\overline{\theta}[$ la différence de profit du monopole qui diminue le prix p_n jusqu'à $p_{n-1}+\tilde{\theta}(q_n-q_{n-1})$ est positive. Une stratégie en L n'est donc pas optimale. ■

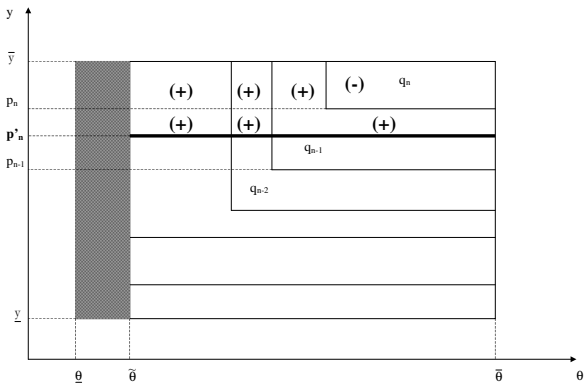

Figure 5: Variation du profit du monopole suite à la diminution de p_n

Comme les seules stratégies optimales possibles sont les stratégies en L et les stratégies en "bandes" et comme nous venons de démontrer que les stratégies en L ne sont pas optimales, les seules stratégies optimales possibles du monopole sont en "bandes". Les consommateurs classent de la même manière les qualités: q_n est préférée à q_{n-1}, q_{n-1} est préférée à q_{n-2},..,q_2 est préférée à q_1. Ils achètent la plus haute qualité que leur revenu leur permet d'acheter. Dans la section suivante, nous nous intéressons au nombre de qualités optimal pour le monopole.

4 Nombre optimal de qualités

Il s'agit dans cette partie de trouver le nombre optimal de qualités que le monopole doit produire. Nous montrons que le monopole ne produit qu'une seule qualité si les intensités de préférences pour la qualité sont faibles, c'est à dire si les consommateurs n'accordent pas une très grande importance à la qualité. En revanche, si les intensités de préférence pour la qualité sont suffisamment élevées, le monopole offre une infinité de qualités.
Le but de la proposition 2 est de démontrer que lorsque $\underline{\theta} \leq \frac{y}{\bar{q}}$, c'est à dire lorsque les intensités de préférence sont très faibles, ou encore la qualité haute n'est pas suffisamment élevée, le monopole n'a aucun intérêt à offrir plus d'une qualité. En effet, on suppose que le monopole offre au moins deux qualités et on démontre dans ce cas qu'il n'existe pas de stratégie en "bandes" optimale avec $n \geq 2$ qualités actives.

Proposition 2 *Si $\underline{\theta} \leq \frac{y}{\bar{q}}$ alors la stratégie optimale du monopole consiste à offrir une seule qualité.*

Preuve. Supposons qu'il existe une stratégie optimale en "bandes" du monopole avec la production $n \geq 2$ qualités actives. Deux cas sont possibles:

- $\frac{p_i}{q_i} \leq \underline{\theta}$ pour tout $i = 1, .., n$. Dans ce cas $\frac{p_i}{q_i}$ doivent être choisis de telle sorte que tous les $\frac{p_{i+1}-p_i}{q_{i+1}-q_i}$ soient inférieurs à $\underline{\theta}$ sinon la stratégie n'est plus en "bandes".
- $\frac{p_i}{q_i} = \frac{p_1}{q_1} \geq \underline{\theta}$ pour tout $i = 1, .., n$.

Comme toutes les qualités sont actives, nous avons forcément $p_2 > \underline{y}$ (lemme 3). D'où $\frac{p_2}{q_2} > \frac{\underline{y}}{\overline{q}} \geq \underline{\theta}$. Ainsi, pour cette stratégie en "bandes", nous avons $\frac{p_1}{q_1} = \frac{p_i}{q_i} > \frac{\underline{y}}{\overline{q}} \geq \underline{\theta}$.

Le profit du monopole s'écrit:

$$\Pi = \begin{cases} (\overline{\theta} - \frac{p_1}{q_1})[p_1(p_2 - p_1) + C] & \text{si} \quad p_1 \geq \underline{y} \\ (\overline{\theta} - \frac{p_1}{q_1})[p_1(p_2 - \underline{y}) + C] & \text{si} \quad p_1 < \underline{y} \end{cases}$$

avec C une constante indépendante de p_1.
Cherchons le prix p_1 optimal pour cette stratégie. Le profit du monopole est continu en fonction de p_1 et on a $\frac{\partial \Pi}{\partial p_1} < 0$ sur $]0, \overline{y}[$. Or comme $p_1 > \frac{\underline{y}}{\overline{q}} q_1$, le profit du monopole n'admet pas de maximum avec les n qualités actives. En effet, en diminuant p_1 jusqu'a $\frac{\underline{y}}{\overline{q}} q_1$, on désactive les qualités $q_1, q_2, .., q_{n-1}$ puisque une qualité q_i telle que $i \in \{1, ..n\}$ sera vendue à un prix égal à $\underline{y}\frac{q_i}{\overline{q}}$ qui est inférieur à $\underline{y}$ et tous les consommateurs tels que $\theta \geq \tilde{\theta}$ préfèrent q_n et ont les moyens de l'acheter . ■

Nous montrons dans la suite que pour $\underline{\theta} > \frac{\underline{y}}{\overline{q}}$, c'est à dire pour des intensités de préférence pour la qualité suffisamment élevées, ou encore une qualité $\overline{q}$ suffisamment élevée, une stratégie optimale du monopole correspond à la production d'une infinité de qualités. On démontrera tout d'abord que les stratégies optimales consistent à offrir au moins deux qualités (lemme 4) avant d'énoncer la proposition.

Lemme 4 *Si $\frac{\underline{y}}{\overline{q}} < \underline{\theta}$ alors une stratégie du monopole qui consiste à produire une seule qualité est toujours dominée par une stratégie en "bandes" du monopole avec la production de deux qualités actives.*

Preuve. Nous distinguons quatre cas selon p_1 et q_1 et nous construisons une stratégie en "bandes" avec deux qualités actives qui donne un meilleur profit. Soit (q_{1_0}, p_{1_0}) l'offre du monopole. On a $\tilde{\theta} = \max(\underline{\theta}, \frac{p_{1_0}}{q_{1_0}})$

- Si $q_{1_0} \neq \overline{q}$ et $p_{1_0} \geq \underline{y}$ alors la nouvelle stratégie consiste à offrir $(q_1 = q_{1_0}, p_1 = p_{1_0})$ et $(q_2, p_2 = p_{1_0} + \tilde{\theta}(q_2 - q_{1_0}))$. Le choix de q_2 doit garantir que $p_{1_0} < p_2 < \overline{y}$ pour que les deux qualités soit actives. Ceci implique que q_2 doit appartenir à $]q_{1_0}, \min(\overline{q}, q_{1_0} + \frac{\overline{y}-p_{1_0}}{\tilde{\theta}})[$ qui est

clairement non vide. La variation du profit est positive puisque les consommateurs ayant un revenu supérieur à p_2 vont acheter q_2 au lieu de q_1.

- Si $q_{1_0} \neq \overline{q}$ et $p_{1_0} < \underline{y}$ alors:
  - Si $p_{1_0} \geq \underline{\theta} q_{1_0}$, on a $\tilde{\theta} = \frac{p_{1_0}}{q_{1_0}}$ et on adopte la même stratégie que dans le cas précédent. Pour que q_1 reste active, on doit avoir $\underline{y} < p_2 < \overline{y}$ d'où $q_2 \in]q_{1_0} + \frac{\underline{y} - p_{1_0}}{\tilde{\theta}}, \min(\overline{q}, q_{1_0} + \frac{\overline{y} - p_1}{\tilde{\theta}})[$. On vérifie bien que l'intervalle auquel doit appartenir q_2 et non vide car $q_{1_0} + \frac{\underline{y} - p_{1_0}}{\tilde{\theta}} \leq q_{1_0} + \frac{\underline{y}}{\tilde{\theta}} - q_{1_0} \leq \frac{\underline{y}}{\underline{\theta}} < \overline{q}$
  - Si $p_{1_0} < \underline{\theta} q_{1_0}$ alors la nouvelle stratégie consiste à offrir $(q_1 = q_{1_0}, p_1 = \underline{\theta} q_{1_0})$ et $(q_2, p_2 = \underline{\theta} q_2)$. q_2 doit être choisie de telle façon que $\underline{y} < p_2 < \overline{y}$ c'est à dire $q_2 \in] \max(q_{1_0}, \frac{\underline{y}}{\underline{\theta}}), \min(\overline{q}, \frac{\overline{y}}{\underline{\theta}})[$. Cet intervalle est non vide car on a $q_{1_0} < \frac{\underline{y}}{\underline{\theta}} < \overline{q}$.

- Si $q_{1_0} = \overline{q}$ et $p_{1_0} > \underline{y}$ alors la nouvelle stratégie consiste à offrir $(q_2 = \overline{q}, p_2 = p_{1_0})$ et $(q_1, p_1 = p_{1_0} - \tilde{\theta}(\overline{q} - q_1))$. Le choix de q_1 doit garantir $p_1 > 0$. Ceci implique que q_1 doit appartenir à $] \max(\underline{q}, \overline{q} - \frac{p_{1_0}}{\tilde{\theta}}), \overline{q}[$ qui est non vide. La variation du profit est positive car des consommateurs qui n'achetaient pas vont acheter la qualité q_1.

- Si $q_{1_0} = \overline{q}$ et $p_{1_0} \leq \underline{y}$ alors $\tilde{\theta} = \underline{\theta}$ car $\frac{\underline{y}}{\overline{q}} < \underline{\theta}$. La nouvelle stratégie consiste à offrir $(q_1, p_1 = \underline{y})$ et $(q_2 = \overline{q}, p_2 = \underline{y} + \underline{\theta}(\overline{q} - q_1))$. Le choix de q_1 doit garantir que $\tilde{\theta} = \underline{\theta}$ et $p_2 < \overline{y}$ d'où q_1 doit appartenir à $] \max(\underline{q}, \frac{\underline{y}}{\underline{\theta}}, \overline{q} - \frac{\overline{y} - \underline{y}}{\underline{\theta}}), \overline{q}[$ qui est non vide car $\frac{\underline{y}}{\underline{\theta}} < \overline{q}$. Cette stratégie améliore clairement le profit du monopole puisque les consommateurs qui achetaient tous au prix $p_{1_0} \leq \underline{y}$ vont soit acheter la qualité q_1 à un prix supérieur au prix initial, soit acheter une qualité supérieure q_2 au prix p_2.

■

Ainsi, si $\frac{\underline{y}}{\overline{q}} < \underline{\theta}$ les stratégies optimales du monopole consistent à produire au moins deux qualités. Nous montrons en fait que la stratégie optimale du monopole consiste à produire une infinité de qualités.

Proposition 3 *Si $\frac{\underline{y}}{\overline{q}} < \underline{\theta}$ alors la stratégie optimale du monopole consiste à produire une infinité de qualités.*

Preuve. Considérons un monopole ayant une stratégie en "bandes" avec $n \geq 2$ qualités actives. Les prix de la stratégie en "bandes" avec n qualités actives vérifient: $\widehat{\theta}_i = \frac{p_{i+1} - p_i}{q_{i+1} - q_i} \leq \tilde{\theta}$ pour tout $i = 1, .., n-1$. Le monopole

peut améliorer son profit en rajoutant à son catalogue le produit ($q = \alpha q_{i+1} + (1-\alpha)q_i, p = \alpha p_{i+1} + (1-\alpha)p_i$) avec $\alpha \in]0,1[$. Sa nouvelle stratégie est toujours en "bandes". En effet, on a $\frac{p_{i+1}-p}{qi+1-q} = \frac{p-p_i}{q-q_i} = \frac{p_{i+1}-p_i}{q_{i+1}-q_i} \leq \tilde{\theta}$. Le monopole augmente son profit car les consommateurs appartenant à $[\alpha p_{i+1} + (1-\alpha)p_i, p_{i+1}] \times [\tilde{\theta}, \overline{\theta}]$ changent leur choix de (q_i, p_i) à (q, p). Tous les autres consommateurs gardent le même choix.
Ce raisonnement est valable pour tout $i \in \{1, ..n-1\}$ et tout $\alpha \in]0,1[$. Le monopole a donc intérêt à offrir un continium de qualités. Il augmente son profit en segmentant complètement le marché des consommateurs ayant un revenu entre $\max(p_1, \underline{y})$ et p_n. ■

Dans la section suivante, nous déterminons dans les deux cas $\frac{\underline{y}}{\overline{q}} \geq \underline{\theta}$ et $\frac{\underline{y}}{\overline{q}} < \underline{\theta}$ les qualités et les prix optimaux.

5 Qualités et prix optimaux

Il s'agit de déterminer les qualités produites par le monopole et les prix de ces qualités dans les deux cas suivants: production d'une seule qualité et production d'une infinité de qualités.

5.1 Le monopole produit une seule qualité: $\frac{\underline{y}}{\overline{q}} \geq \underline{\theta}$

Pour $\frac{\underline{y}}{\overline{q}} \geq \underline{\theta}$ la stratégie du monopole consiste à offrir une seule qualité. Par la proposition 4, on caratérise complètement la stratégie optimale du monopole.

Proposition 4 *Si $\underline{\theta} \leq \frac{\underline{y}}{\overline{q}}$ alors la stratégie optimale du monopole consiste à offrir la qualité la plus haute $\overline{q}$ au prix $\underline{\theta}\overline{q}$. Il sert tous les consommateurs et son profit est $\Pi = \underline{\theta}\overline{q}(\overline{\theta} - \underline{\theta})(\overline{y} - \underline{y})$*

Preuve. Le profit du monopole produisant une seule qualité s'écrit:

$$\Pi = \begin{cases} p_1(\overline{\theta} - \frac{p_1}{q_1})(\overline{y} - p_1) & \text{si } p_1 > \underline{y} \\ p_1(\overline{\theta} - \frac{p_1}{q_1})(\overline{y} - \underline{y}) & \text{si } \underline{\theta}q_1 < p_1 \leq \underline{y} \\ p_1(\overline{\theta} - \underline{\theta})(\overline{y} - \underline{y}) & \text{si } p_1 \leq \underline{\theta}q_1 \end{cases}$$

Le profit du monopole est continu en p_1. Par des calculs simples de dérivées, on montre que le profit du monopole est croissant pour $p_1 \in [0, \underline{\theta}q_1]$ et décroissant pour $p_1 \in [\underline{\theta}q_1, \overline{y}]$. Le maximum du profit est donc atteint en $p_1 = \underline{\theta}q_1$ qui est strictement inférieur à $\underline{y}$ de plus $\tilde{\theta} = \underline{\theta}$ donc tous les consommateurs achètent. Le profit du monopole est donc $\Pi = \underline{\theta}q_1(\overline{\theta} - \underline{\theta})(\overline{y} - \underline{y})$. Il est maximal en $q_1 = \overline{q}$. ■

5.2 Le monopole produit une infinité de qualité: $\frac{y}{\overline{q}} < \underline{\theta}$

Si $\frac{y}{\overline{q}} < \underline{\theta}$, le monopole offre une infinité de qualités. Nous étudions dans cette section le cas limite d'une stratégie en "bandes" avec n qualités actives, c'est à dire les stratégies en "bandes " avec production d'une infinité de qualités. En effet, nous avons montré à la proposition 3 que si le monopole a une stratégie en "bandes" avec n qualités actives, il a toujours intérêt à offrir toutes les qualités intermédiaires entre la qualité la plus basse et la qualité la plus haute. On note (q_m, p_m) le produit de qualité minimale q_m vendu au prix p_m et (q_M, p_M) le produit de qualité maximale q_M vendu au prix p_M. Les variables de décisions du monopole sont donc p_m,q_m, p_M et q_M. Il s'agit dans la suite de trouver p_m,q_m, p_M et q_M qui maximisent le profit du monopole. Nous trouvons que la maximisation du profit du monopole ne conduit en aucun cas à une discrimination par rapport aux intensités de préférence pour la qualité. Nous avons donc $\tilde{\theta} = \underline{\theta}$ quelque soient les paramètres du modèle. Nous trouvons que dans certains cas, le monopole ne sert pas les consommateurs "pauvres" et qu'il n'arrive pas à extraire tout le surplus des consommateurs " riches" si sa qualité haute n'est pas suffisamment élevée (Figure 10). Le lemme suivant donne une condition sur le prix p_m de la qualité basse pour toute stratégie optimale du monopole.

Lemme 5 *Si $\frac{y}{\overline{q}} < \underline{\theta}$ alors pour toute stratégie optimale du monopole on a nécessairement $p_m \geq \underline{y}$*

Preuve. Supposons que p_m est strictement inférieur à $\underline{y}$. Dans ce cas, toutes les qualités ayant un prix p vérifiant $p_m \leq p < \underline{y}$ sont inactives. En effet, la stratégie est en "bandes" et les consommateurs classent de la même manière les qualités. Ils achètent la qualité la plus haute que leur revenu leur permet d'acheter donc les qualités achetées ont un prix supérieur à $\underline{y}$. ■

Le problème du monopole s'écrit:

$$(P)\begin{cases} \max\limits_{(q_m,p_m,p_M,q_M)} \Pi = (\overline{\theta} - \max(\underline{\theta}, \frac{p_m}{q_m}))[\int_{p_m}^{p_M} pdp + p_M(\overline{y} - p_M)] \\ \underline{y} \leq p_m < p_M \leq \overline{y} \\ \underline{q} \leq q_m < q_M \leq \overline{q} \\ p_M - p_m \leq \max(\underline{\theta}, \frac{p_m}{q_m})(q_M - q_m) \end{cases}$$

La première contrainte provient du lemme 5 et assure que toutes les qualités sont actives. La troisième contrainte indique qu'on peut complètement segmenter le marché des consommateurs de revenus entre p_m et p_M (stratégie en "bandes"). L'expression du profit du monopole ne dépendant pas directement de q_M (q_M intervient dans les contraintes). On peut résoudre le

problème du monopole pour q_M fixé. Le problème du monopole s'écrit alors:

$$(P(q_M)) \begin{cases} \max\limits_{(q_m,p_m,p_M)} \Pi = (\overline{\theta} - \max(\underline{\theta}, \frac{p_m}{q_m}))[\int_{p_m}^{p_M} pdp + p_M(\overline{y} - p_M)] \\ \underline{y} \leq p_m < p_M \leq \overline{y} \\ \underline{q} \leq q_m < q_M \\ p_M - p_m \leq \max(\underline{\theta}, \frac{p_m}{q_m})(q_M - q_m) \end{cases}$$

On peut diviser le système de contraintes en deux sous-systèmes $(S(q_M))$ et $(S'(q_M))$ correspondant respectivement à $\max(\underline{\theta}, \frac{p_m}{q_m}) = \underline{\theta}$ et $\max(\underline{\theta}, \frac{p_m}{q_m}) = \frac{p_m}{q_m}$.

$$(S(q_M)) : \begin{cases} \underline{y} \leq p_m < p_M \leq \overline{y} \\ \underline{q} \leq q_m < q_M \\ \frac{p_M - p_m}{\underline{\theta}} + q_m \leq q_M \\ p_m \leq \underline{\theta} q_m \end{cases}$$

$$(S'(q_M)) : \begin{cases} \underline{y} \leq p_m < p_M \leq \overline{y} \\ \underline{q} \leq q_m < q_M \\ \frac{p_M}{p_m} q_m \leq q_M \\ p_m > \underline{\theta} q_m \end{cases}$$

Lemme 6 *Si $\frac{\underline{y}}{\overline{q}} < \underline{\theta}$ alors la qualité q_M optimale pour le monopole est $q_M^* = \overline{q}$*

Preuve. Il suffit de remarquer que tout triplet (q_m, p_m, p_M) satisfaisant les contraintes de $(S(q_M))$ (ou de $(S'(q_M))$) satisfait aussi les contraintes de $(S(\overline{q}))$ (ou de $(S'(\overline{q}))$). Ainsi, q_M optimal est $\overline{q}$ car on maximise le profit du monopole sur l'espace le plus grand possible en choisissant $\overline{q}$. ■

Dans ce qui suit, nous allons d'abord résoudre le problème du monopole soumis aux contraintes $(S(\overline{q}))$, puis résoudre le problème du monopole soumis aux contraintes $(S'(\overline{q}))$. Nous comparerons ensuite les solutions données par les deux problèmes.

Le problème du monopole soumis aux contraintes $(S(\overline{q}))$ s'écrit:

$$\begin{cases} \max\limits_{(q_m,p_m,p_M)} \Pi = (\overline{\theta} - \underline{\theta})[\int_{p_m}^{p_M} pdp + p_M(\overline{y} - p_M)] \\ \underline{y} \leq p_m < p_M \leq \overline{y} \\ \underline{q} \leq q_m < \overline{q} \\ p_M - p_m \leq \underline{\theta}(\overline{q} - q_m) \\ p_m \leq \underline{\theta} q_m \end{cases}$$

Lemme 7 *Si (p_m, q_m, p_M) vérifie les contraintes $(S(\overline{q}))$ alors $p_M - \underline{\theta}\overline{q} \leq 0$.*

Preuve. Si (p_m, q_m, p_M) solution de $(S(\overline{q}))$ alors on a: $\max(\underline{y}, p_M - \underline{\theta}\overline{q} + \underline{\theta} q_m) \leq p_m \leq \underline{\theta} q_m$. Donc $p_M - \underline{\theta}\overline{q} + \underline{\theta} q_m \leq \underline{\theta} q_m$, d'où le résultat. ■

Trouvons les triplets (q_m, p_m, p_M) solutions du problème du monopole soumis aux contraintes $(S(\overline{q}))$.

Proposition 5 *Si* $\underline{y} < \underline{\theta}\overline{q}$ *alors* (q_m, p_m, p_M) *qui maximisent le profit du monopole soumis aux contraintes* $(S(\overline{q}))$ *sont comme suit:*

- *si* $\overline{y} - \underline{\theta}\overline{q} \leq 0$ *alors* $p_M^* = \overline{y}$
  - *Si* $\underline{y} > \overline{y} - \underline{\theta}\overline{q} + \underline{\theta}\underline{q}$ *alors* ${p^*}_m = \underline{y}$ *et* ${q^*}_m \in [\max(\underline{q}, \frac{\underline{y}}{\overline{\theta}}), \overline{q} - \frac{\overline{y}-\underline{y}}{\underline{\theta}}]$. *Le profit que le monopole réalise dans ce cas est* $\Pi = (\overline{\theta} - \underline{\theta})\frac{\overline{y}^2 - \underline{y}^2}{2}$.
  - *Si* $\underline{y} \leq \overline{y} - \underline{\theta}\overline{q} + \underline{\theta}\underline{q}$ *alors* ${p^*}_m = \overline{y} - \underline{\theta}\overline{q} + \underline{\theta}\underline{q}$ *et* ${q^*}_m = \underline{q}$. *Le profit que le monopole réalise dans ce cas est* $\Pi = (\overline{\theta} - \underline{\theta})\frac{\overline{y}^2 - (\overline{y} - \underline{\theta}\overline{q} + \underline{\theta}\underline{q})^2}{2}$
- *Si* $\overline{y} - \underline{\theta}\overline{q} > 0$ *alors* $p_M^* = \underline{\theta}\overline{q}$
  - *Si* $\underline{y} > \underline{\theta}\underline{q}$ *alors* $p_m^* = \underline{y}$ *et* $q_m^* = \frac{\underline{y}}{\overline{\theta}}$. *Le profit que le monopole réalise dans ce cas est* $\Pi = (\overline{\theta} - \underline{\theta})[\frac{(\underline{\theta}\overline{q})^2 - \underline{y}^2}{2} + \underline{\theta}\overline{q}(\overline{y} - \underline{\theta}\overline{q})]$
  - *Si* $\underline{y} \leq \underline{\theta}\underline{q}$ *alors* $p_m^* = \underline{\theta}\underline{q}$ *et* $q_m^* = \underline{q}$. *Le profit que le monopole réalise dans ce cas est* $\Pi = (\overline{\theta} - \underline{\theta})[\frac{(\underline{\theta}\overline{q})^2 - (\underline{\theta}\underline{q})^2}{2} + \underline{\theta}\overline{q}(\overline{y} - \underline{\theta}\overline{q})]$

Preuve. Des calculs simples de dérivées du profit Π du monopole par rapport à p_M et par rapport à p_m montrent que le profit est croissant en fonction de p_M et décroissant en fonction de p_m. Les figures 6 et 7 représentent, pour $p_M < \underline{\theta}\overline{q}$ fixé, les couples (p_m, q_m) solutions de $(S(\overline{q}))$. On a deux cas différents: $\underline{y} \geq p_M - \underline{\theta}\overline{q} + \underline{\theta}\underline{q}$ et $\underline{y} < p_M - \underline{\theta}\overline{q} + \underline{\theta}\underline{q}$. Pour maximiser son profit, le monopole doit choisir (q_m, p_m) dans la partie grise qui représente l'ensemble de solutions de $(S(\overline{q}))$ pour $p_M < \underline{\theta}\overline{q}$ fixé tel que p_m soit le plus petit possible (tous les couples (q_m, p_m) appartenant à l'ensemble de solutions de $(S(\overline{q}))$ vérifient $\frac{p_m}{q_m} \leq \underline{\theta}$).
Comme Π est croissant en fonction de p_M on choisit $p_M^* = \overline{y}$ si $\overline{y} \leq \underline{\theta}\overline{q}$ sinon $p_M^* = \underline{\theta}\overline{q}$. ■

Résolvons le problème du monopole lorsqu'il est soumis aux contraintes du système $(S'(\overline{q}))$. Le problème du monopole s'écrit:

$$\begin{cases} \max\limits_{(q_m, p_m, p_M)} \Pi = (\overline{\theta} - \frac{p_m}{q_m})[\int_{p_m}^{p_M} pdp + p_M(\overline{y} - p_M)] \\ \underline{y} \leq p_m < p_M \leq \overline{y} \\ \underline{q} \leq q_m < \overline{q} \\ \frac{p_m}{q_m} \geq \frac{p_M}{\overline{q}} \\ p_m \geq \underline{\theta} q_m \end{cases}$$

Nous pouvons encore écrire le problème du monopole soumis à $(S'(\overline{q}))$ comme suit:

$$\begin{cases} \max\limits_{(q_m, p_m, p_M)} \Pi = (\overline{\theta} - \frac{p_m}{q_m})[\int_{p_m}^{p_M} pdp + p_M(\overline{y} - p_M)] \\ \max(\underline{y}, \frac{p_M}{\overline{q}} q_m, \underline{\theta} q_m) \leq p_m < p_M \leq \overline{y} \\ \underline{q} \leq q_m < \overline{q} \end{cases}$$

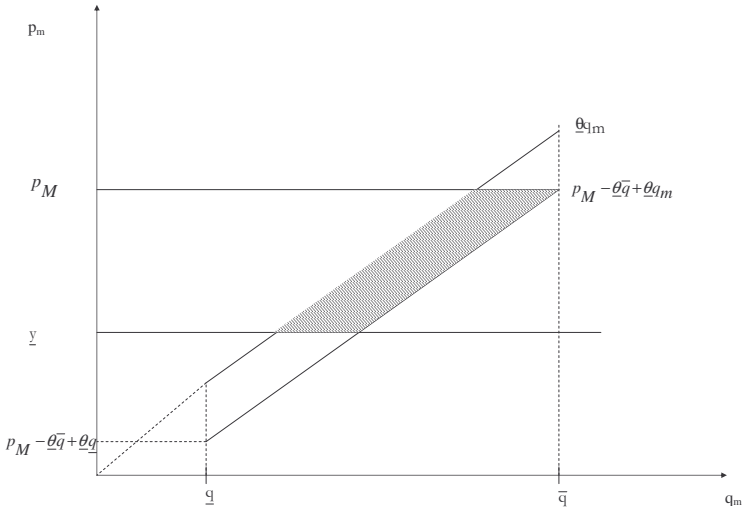

Figure 6: Solutions du système $(S(\overline{q}))$ lorsque $\underline{y} > p_M - \underline{\theta}\overline{q} + \underline{\theta}\underline{q}$

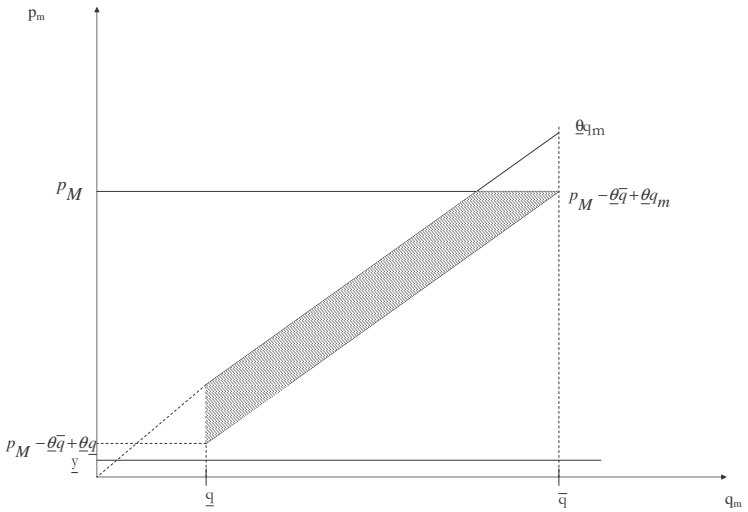

Figure 7: Solutions du système $(S(\overline{q}))$ lorsque $\underline{y} \leq p_M - \underline{\theta}\overline{q} + \underline{\theta}\underline{q}$

On peut diviser le système de contrainte $S'(\overline{q})$ en deux sous-systèmes $S'_1(\overline{q})$ et $S'_2(\overline{q})$ correspondant respectivement à $p_M \geq \underline{\theta}\overline{q}$ et $p_M \leq \underline{\theta}\overline{q}$.

$$(S'_1(\overline{q})) : \begin{cases} \max(\underline{y}, \frac{p_M}{\overline{q}} q_m) \leq p_m < p_M \leq \overline{y} \\ \underline{q} \leq q_m < \overline{q} \\ p_M \geq \underline{\theta}\overline{q} \end{cases}$$

$$(S'_2(\overline{q})) : \begin{cases} \max(\underline{y}, \underline{\theta} q_m) \leq p_m < p_M \leq \overline{y} \\ \underline{q} \leq q_m < \overline{q} \\ p_M \leq \underline{\theta}\overline{q} \end{cases}$$

Dans ce qui suit, nous allons résoudre le problème du monopole soumis aux contraintes $S'_1(\overline{q})$ puis résoudre le problème du monopole soumis aux contraintes $S'_2(\overline{q})$. Nous aurons ainsi la solution du problème du monopole soumis aux contraintes $S'(\overline{q})$.

Si $\overline{y} < \underline{\theta}\overline{q}$ aucun triplet (q_m, p_m, p_M) ne vérifie les contraintes $S'_1(\overline{q})$. Résolvons le problème du monopole soumis à $S'_1(\overline{q})$ lorsque $\overline{y} \geq \underline{\theta}\overline{q}$.

Lemme 8 *Pour $p_M \geq \underline{\theta}\overline{q}$ fixé, les couples (q_m, p_m) qui maximise le profit du monopole soumis à $(S'_1(\overline{q}))$ sont comme suit:*

- *Si $\underline{y} > \frac{p_M}{\overline{q}}\underline{q}$ alors ${p^*}_m = \underline{y}$, ${q^*}_m = \frac{\underline{y}}{p_M}\overline{q}$ et $\tilde{\theta} = \frac{p_M}{\overline{q}} \geq \underline{\theta}$. Le profit que le monopole réalise dans ce cas est $\Pi = (\overline{\theta} - \frac{p_M}{\overline{q}})(\frac{{p_M}^2 - \underline{y}^2}{2} + p_M(\overline{y} - p_M))$.*

- *Si $\underline{y} \leq \frac{p_M}{\overline{q}}\underline{q}$ alors ${p^*}_m = \frac{p_M}{\overline{q}}\underline{q}$, ${q^*}_m = \underline{q}$ et $\tilde{\theta} = \frac{p_M}{\overline{q}} \geq \underline{\theta}$. Le profit que le monopole réalise dans ce cas est $\Pi = (\overline{\theta} - \frac{p_M}{\overline{q}})(\frac{{p_M}^2}{2}(1 - (\frac{\underline{q}}{\overline{q}})^2) + p_M(\overline{y} - p_M))$*

Preuve. Des calculs simples de dérivées du profit Π du monopole par rapport à p_m et par rapport à $\tilde{\theta} = \frac{p_m}{q_m}$ montrent que le profit du monopole est décroissant en fonction de p_m et en fonction de $\tilde{\theta}$. D'après les figures 8 et 9 , on a deux cas différents: $\underline{y} > \frac{p_M}{\overline{q}}\underline{q}$ et $\underline{y} \leq \frac{p_M}{\overline{q}}\underline{q}$. Ainsi, pour $p_M \geq \underline{\theta}\overline{q}$ fixé, le monopole doit choisir (q_m, p_m) dans la partie grise qui représente l'ensemble des solutions de $(S'_1(\overline{q}))$ tels que p_m soit le plus petit possible et q_m le plus grand possible de manière à avoir $\frac{p_m}{q_m}$ le plus petit possible ($\frac{p_m}{q_m} \geq \underline{\theta}$ pour toutes les solutions de $(S'_1(\overline{q}))$. ■

Lemme 9 *Le choix optimal pour le prix p_M de la qualité maximale lorsque le monopole maximise son profit sous les contraintes $(S'_1(\overline{q}))$ est $p^*_M = \underline{\theta}\overline{q}$. Les profits que le monopole réalise dans ce cas sont:*

- *Si $\underline{y} > \underline{\theta}\underline{q}$ alors $\Pi = (\overline{\theta} - \underline{\theta})[\frac{(\underline{\theta}\overline{q})^2 - \underline{y}^2}{2} + \underline{\theta}\overline{q}(\overline{y} - \underline{\theta}\overline{q})]$*

- *Si $\underline{y} \leq \underline{\theta}\underline{q}$ alors $\Pi = (\overline{\theta} - \underline{\theta})[\frac{(\underline{\theta}\overline{q})^2 - (\underline{\theta}\underline{q})^2}{2} + \underline{\theta}\overline{q}(\overline{y} - \underline{\theta}\overline{q})]$*

Preuve. On vérifie facilement que le profit du monopole donné par le lemme 8 est continu en p_M et strictement décroissant en p_M. On choisit donc $p_M^* = \underline{\theta}\overline{q}$. ■

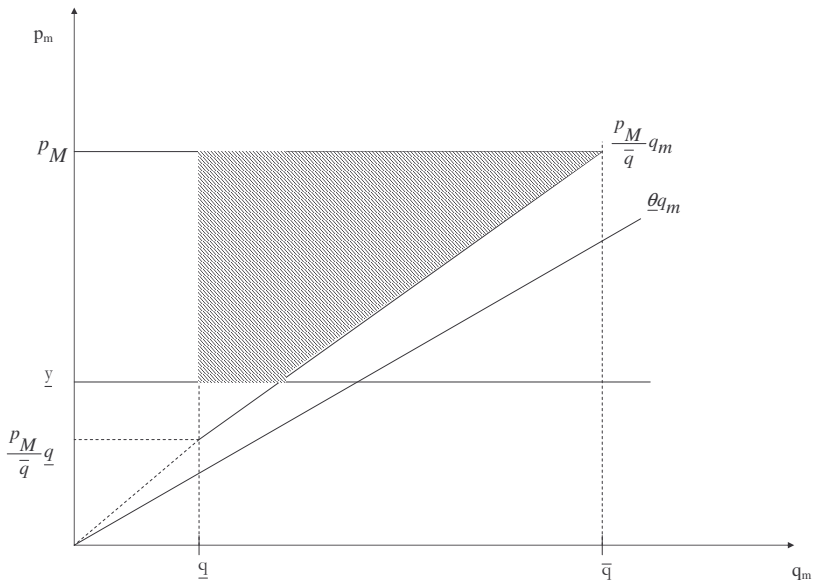

Figure 8: Solutions du système $(S_1'(\overline{q}))$ lorsque $\underline{y} > \frac{p_M}{\overline{q}} \underline{q}$

La résolution du problème du monopole lorsqu'il est soumis aux contraintes $(S_1'(\overline{q}))$ donne exactement les mêmes résultats que ceux obtenus par la proposition 5 lorsque $\overline{y} > \underline{\theta}\overline{q}$. Résolvons le problème du monopole lorsqu'il est soumis aux contraintes $(S_2'(\overline{q}))$. Comme pour le cas précédent, le profit du monopole est décroissant en fonction de p_m et en fonction de $\tilde{\theta}$. On a ainsi le lemme suivant:

Lemme 10 *Pour $p_M \leq \underline{\theta}\overline{q}$ fixé, les couples (q_m, p_m) qui maximisent le profit du monopole soumis aux contraintes $(S_2'(\overline{q}))$ sont comme suit:*

- *Si $\underline{y} > \underline{\theta}\underline{q}$ alors $p_m^* = \underline{y}$ et $q_m^* = \frac{\underline{y}}{\overline{\theta}}$. Le profit que le monopole réalise dans ce cas est $\Pi = (\overline{\theta} - \underline{\theta})(\frac{p_M^2 - \underline{y}^2}{2} + p_M(\overline{y} - p_M))$*
- *Si $\underline{y} \leq \underline{\theta}\underline{q}$ alors $p_m^* = \underline{\theta}\underline{q}$ et $q_m^* = \underline{q}$. Le profit que le monopole réalise dans ce cas est $\Pi = (\overline{\theta} - \underline{\theta})(\frac{p_M^2 - (\underline{\theta}\underline{q})^2}{2} + p_M(\overline{y} - p_M))$*

Preuve. On raisonne sur des figures analogues aux figures 8 et 9 en intervertissant les droites $y = \underline{\theta} q_m$ et $y = \frac{p_M}{\overline{q}} q_m$. ■

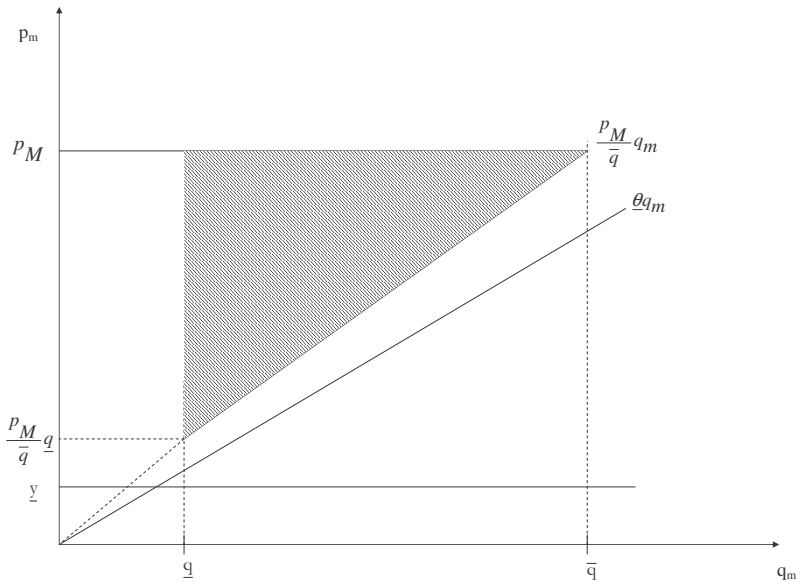

Figure 9: Solutions du système $(S_1'(\overline{q}))$ lorsque $\underline{y} \leq \frac{p_M}{\overline{q}} \underline{q}$

Lemme 11 *le choix optimal du prix p_M de la qualité maximale lorsque le monopole maximise son profit sous les contraintes $(S_2'(\overline{q}))$ est: $p_M^* = \min(\overline{y}, \underline{\theta}\overline{q})$. Les profits que le monopole réalise dans ce cas sont:*

- *Si $\overline{y} \leq \underline{\theta}\overline{q}$ et $\underline{y} > \underline{\theta}\underline{q}$ alors $\Pi = (\overline{\theta} - \underline{\theta})\frac{\overline{y}^2 - \underline{y}^2}{2}$*
- *Si $\overline{y} \leq \underline{\theta}\overline{q}$ et $\underline{y} \leq \underline{\theta}\underline{q}$ alors $\Pi = (\overline{\theta} - \underline{\theta})\frac{\overline{y}^2 - (\underline{\theta}\overline{q})^2}{2}$*
- *Si $\overline{y} \geq \underline{\theta}\overline{q}$ et $\underline{y} > \underline{\theta}\underline{q}$ alors $\Pi = (\overline{\theta} - \underline{\theta})[\frac{(\underline{\theta}\overline{q})^2 - \underline{y}^2}{2} + \underline{\theta}\overline{q}(\overline{y} - \underline{\theta}\overline{q})]$*
- *Si $\overline{y} \geq \underline{\theta}\overline{q}$ et $\underline{y} \leq \underline{\theta}\underline{q}$ alors $\Pi = (\overline{\theta} - \underline{\theta})[\frac{(\underline{\theta}\overline{q})^2 - (\underline{\theta}\underline{q})^2}{2} + \underline{\theta}\overline{q}(\overline{y} - \underline{\theta}\overline{q})]$*

Preuve. Directe. Les profits donnés par le lemme 10 sont croissants en fonction de p_M ■

Il s'agit maintenant de comparer les profits des lemmes 9 et 11 du monopole soumis respectivement aux containtes $(S_1'(\overline{q}))$ et $(S_2'(\overline{q}))$ à ceux obtenus dans la proposition 5, c'est à dire lorsque le monopole maximise son profit soumis aux contraintes $(S(\overline{q}))$.

Lemme 12 *Les solutions du problème du monopole soumis à $(S_1'(\overline{q}))$ et $(S_2'(\overline{q}))$ sont dominées par les solutions du problème du monopole soumis à $(S(\overline{q}))$.*

Preuve. Il est facile de voir que lorsque $\overline{y} \geq \underline{\theta}\overline{q}$ nous obtenons les mêmes profits quelque soit le système de contraintes considéré.
Si $\overline{y} \leq \underline{\theta}\overline{q}$ aucun triplet (q_m, p_m, p_M) ne vérifie les contraintes de $S_1'(\overline{q})$. Comparons alors les solutions du problème du monopole soumis à $(S(\overline{q}))$ et $(S_2'(\overline{q}))$.

- Si $\underline{y} > \underline{\theta}\underline{q}$ alors $\underline{y} > \overline{y} - \underline{\theta}\overline{q} + \underline{\theta}\underline{q}$ les profits du monopole sont les mêmes qu'il soit soumis à $(S_2'(\overline{q}))$ ou $(S(\overline{q}))$.

- Si $\overline{y} - \underline{\theta}\overline{q} + \underline{\theta}\underline{q} < \underline{y} \leq \underline{\theta}\underline{q}$ alors $\overline{y}^2 - \underline{y}^2 \geq \overline{y}^2 - (\underline{\theta}\underline{q})^2$. Le profit du monopole lorsqu'il est soumis aux contraintes $(S(\overline{q}))$ est supérieur à son profit lorsqu'il est soumis aux contraintes $(S_2'(\overline{q}))$.

- Si $\underline{y} \leq \overline{y} - \underline{\theta}\overline{q} + \underline{\theta}\underline{q}$ alors comme $\overline{y} - \underline{\theta}\overline{q} + \underline{\theta}\underline{q} \leq \underline{\theta}\underline{q}$, on a $\overline{y}^2 - (\overline{y} - \underline{\theta}\overline{q} + \underline{\theta}\underline{q})^2 \geq \overline{y}^2 - (\underline{\theta}\underline{q})^2$. Le profit du monopole lorsqu'il est soumis aux contraintes $(S(\overline{q}))$ est supérieur à son profit lorsqu'il est soumis aux contraintes $(S_2'(\overline{q}))$.

■

Si $\underline{\theta} > \frac{\underline{y}}{\overline{q}}$, les stratégies optimales du monopole ainsi que son profit sont donc données par la proposition 5.

5.3 Synthèse des résultats

Dans la figure 10, nous représentons la demande adressée au monopole dans le plan (θ, y) lorsque $\underline{\theta} > \frac{\underline{y}}{\overline{q}}$.
On remarque que le monopole ne discrimine jamais par rapport aux intensités de préférence pour la qualité. Dans les cas 1 et 2, on a $\overline{y} < \underline{\theta}\overline{q}$, la qualité $\overline{q}$ est suffisamment élevée et le monopole segmente complètement le marché des consommateurs ayant un revenu entre p_m et $\overline{y}$. Dans le cas 1, le monopole sert tous les consommateurs car le segment des qualités est suffisamment large. Dans le cas 2, le monopole élimine les consommateurs à faibles revenus.
Dans les cas 3 et 4, on a $\overline{y} \geq \underline{\theta}\overline{q}$, le prix de la qualité maximale est $p_M = \underline{\theta}\overline{q}$. Tous les consommateurs ayant un revenu entre $\underline{\theta}\overline{q}$ et $\overline{y}$ achètent la qualité $\overline{q}$ et le monopole n'arrive pas à extraire tout le surplus des consommateurs "riches". Dans le cas 3, le revenu bas est suffisamment élevée ($\underline{y} > \underline{\theta}\underline{q}$) et le monopole sert tous les consommateurs ayant un revenu entre $\underline{y}$ et $\overline{y}$. Dans le cas 4, le revenu bas est très faible ($\underline{y} \leq \underline{\theta}\underline{q}$) et le monopole élimine les consommateurs ayant un revenu inférieur à $\underline{\theta}\underline{q}$.

Le maximum de profit du monopole est réalisé dans le cas 1 de la figure 10 lorsque la qualité haute et suffisamment élevée ($\underline{\theta}\overline{q} > \overline{y}$) et lorsque la largeur du segment des qualités est suffisament grande par rapport à la largeur du segment des revenus ($\overline{q} - \underline{q} > \frac{\overline{y} - \underline{y}}{\underline{\theta}}$).

On s'intéresse dans ce qui suit aux actions possibles du monopole qui lui permettraient d'atteindre le profit qu'il réalise dans le cas 1. En effet, il s'agit d'étudier les possibilités d'investissement en recherche et développement du monopole. L'investis- sement en recherche et développement correpond dans notre cas à l'élargissement du segment des qualités $[\underline{q}, \overline{q}]$ qui peut se faire de deux manières différentes: le monopole peut élargir le segment des qualités par "le haut", en devenant capable de produire toutes les qualités comprises entre $\overline{q}$ et la nouvelle qualité haute $\overline{\overline{q}}$ ou encore le monopole peut élargir le segment des qualités par "le bas" en produisant toutes les qualités comprises entre la nouvelle qualité basse $\underline{\underline{q}}$ et $\underline{q}$.
Dans le cas 2, le monopole ne sert pas les consommateurs "pauvres" car le segment des qualités n'est pas assez large. Il peut élargir son segment de qualités des deux manières possibles par "le haut" ou par le "bas" avec $\overline{y} - \underline{\theta}\overline{\overline{q}} + \underline{\theta}\underline{q} = \underline{y}$ ou $\overline{y} - \underline{\theta}\overline{q} + \underline{\theta}\underline{\underline{q}} = \underline{y}$. Toutes les qualités du nouveau segment seront actives et tous les consommateurs seront servis.
Dans le cas 3, le monopole doit élargir le segment des qualités par le "haut" car la qualité haute n'est pas suffisamment élevée. Il suffit d'avoir $\overline{y} = \underline{\theta}\overline{\overline{q}}$ pour retrouver le cas 1.
Dans le cas 4, un élargissement du segment des qualités par le "haut" est indispensable pour extraire le surplus des consommateurs riches. On retrouve dans un premier temps le cas 2. Ensuite, le monopole peut choisir entre élargir le segment des qualités par le "haut" ou par le "bas" pour satisfaire la demande de tous les consommateurs.
Il est à noter que lorsque $\underline{\theta}\overline{q}$ est inférieur ou égal à $\underline{y}$, c'est à dire lorsque le monopole ne produit que la qualité haute, l'investissement en recherche et développement se fait en élargissant le segment des qualités par le "haut" car la qualité $\bar{q}$ n'est pas suffisamment élevée. Ceci permet de passer dans un premier temps au cas 3 puis au cas 1.
On remarque que, quelque soit le cas considéré, le monopole peut n'avoir recours qu'à un élargissement par le "haut" du segment des qualités. Il est clair que le monopole n'investira en recherche et développement que lorsque les coûts d'investissement sont inférieurs au gain de profit du monopole.

Dans les cas 1 et 2 les couples (q, p) du catalogue du monopole sont liés par la relation $p(q) = \overline{y} - \underline{\theta}\overline{q} + \underline{\theta}q$. La qualité q achetée par un consommateur (θ, y) et $q = \overline{q} - \frac{\overline{y}-y}{\underline{\theta}}$ et le surplus du consommateur (θ, y) qui achète est $\theta q = \theta(\overline{q} - \frac{\overline{y}-y}{\underline{\theta}})$. Ainsi, l'investissement par le "bas" du monopole dans le cas 2 n'améliore pas le surplus des consommateurs qui achetaient, mais améliore uniquement le surplus des consommateurs qui n'achetaient pas avant l'élargissement du segment des revenus. Par contre, un élargissement par le "haut" améliore le surplus de tous les consommateurs.

Dans les cas 3 et 4, la relation vérifée par les couples (q, p) du catalogue est $p(q) = \underline{\theta}q$. La qualité achetée par un consommateur (θ, y) avec $y < \underline{\theta}\overline{q}$ est $\frac{y}{\underline{\theta}}$ et le surplus du consommateur est $\frac{\theta}{\underline{\theta}}y$. Si $y \geq \underline{\theta}\overline{q}$, les consommateurs achètent la qualité $\overline{q}$ est leur surplus s'écrit $y + (\theta - \underline{\theta})\overline{q}$. L'investissement en

recherche et développement par un élargissement par le "haut" dans les cas 3 et 4 permet seulement d'améliorer l'utilité des consommateurs de revenu $y > \underline{\theta}\overline{q}$. Les autres consommateurs achètent la même qualité et gardent la même utilité $\frac{\theta}{\underline{\theta}}y$.

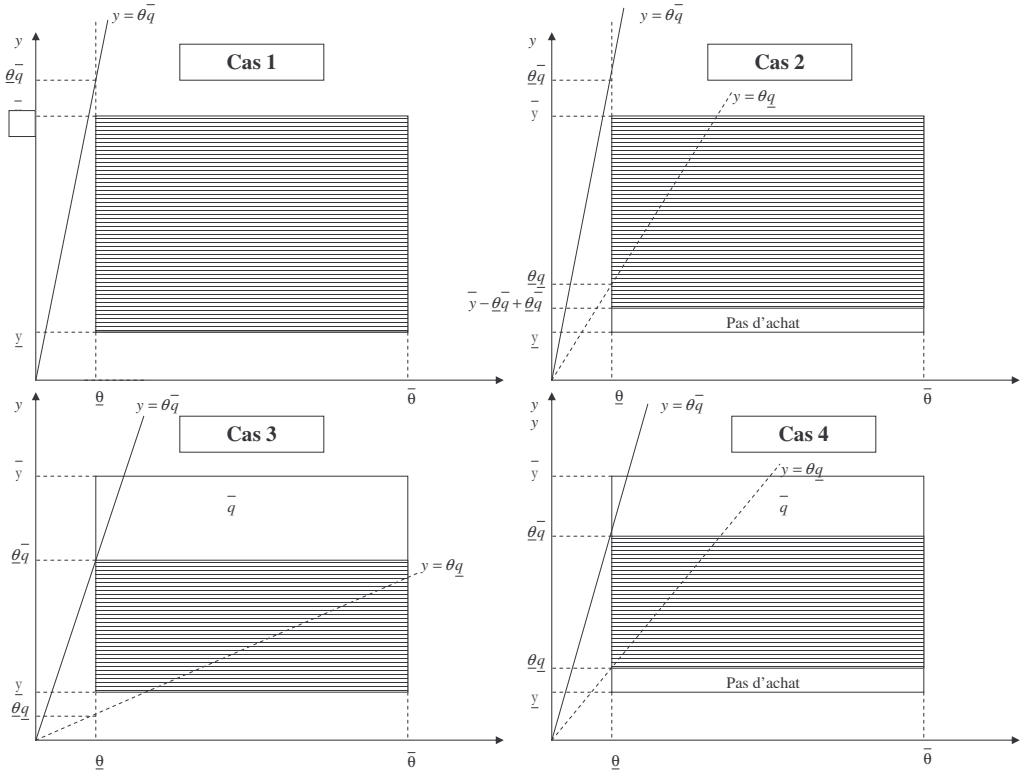

Figure 10: Répartition de la demande selon les paramètres du modèle

6 Conclusion

Nous avons caractérisé dans ce papier les stratégies optimales d'un monopole naturel lorsque les consommateurs ont des revenus différents et des intensités de préférence pour la qualité différentes et lorsque le monopole n'a pas de coûts de production. Nous trouvons que les stratégies optimales sont en "bandes": les consommateurs ayant le même revenu achètent la même qualité. Si les intensités de préférence pour la qualité sont très faibles, ou encore la qualité haute n'est pas suffisamment élevée, le monopole offre la qualité la plus haute et sert tous les consommateurs. Sinon, il offre une infinité de qualités et peut ne servir qu'une partie des consommateurs en

éliminant les consommateurs "pauvres". Si la qualité haute est très élevée, le monopole arrive à extraire le surplus de tous les consommateurs qui achètent car il segmente complètement le marché des consommateurs ayant un revenu entre p_m et $\overline{y}$. Sinon, il n'arrive pas à extraire le surplus des consommateurs riches puisque à partir d'un certain revenu, les consommateurs achètent la qualité haute, d'où une incitation à la recherche et développement. Comme les stratégies optimales sont en "bandes", la différence des intensités de préférence pour la qualité seule n'explique pas l'adoption d'une stratégie multiproduit par le monopole [3] mais combinée à une différence des revenus elle conduit à l'adoption d'une stratégie multiproduits. D'où l'importance de la contrainte budgétaire de notre modèle.
Nous pouvons facilement étendre ce travail au cas d'un monopole naturel produisant avec coût marginal fixe. Ceci reviendrait simplement à un changement de variables. D'autres pistes pourraient être explorées pour compléter le travail. L'étude de la stratégie du monopole en termes de recherche et développement pour élargir le segment des qualités en tenant compte des coûts de R&D èt l'introduction d'un coût de production dépendant de la qualité produite constituent un prolongement naturel du présent papier.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Acharyya R, Income distribution, pooling menu and quality distortion, mimeo, University of Rocheter (1998).

[2] Anderson S.P, A. De Palma, and J.F.Thisse, Discrete choice theory of product differentiation, The MIT Press, Cambridge, Mass:305-316 (1992).

[3] Bonnisseau J.M, R Lahmandi-Ayed, Multiproduct firms in vertically differentiated markets. Cahiers de la Maison des Sciences Economiques 2002, 119. Université de Paris 1.

[4] Gabszewicz J.J, Blue and red cars or blue cars only? a note on product variety, Economica, **50**, 203-206 (1983)

[5] Gabszwicz J.J, A.Shaked, J.Sutton and J.F.Thisse, Segmenting the market: the monopolist's optimal product mix, Journal of Economic Theory, **39 (2)**, 273-289 (1986)

[6] Lahmandi-Ayed R.,Natural Oligopolies: a vertical diffenciation model, International Economic Review, **41**, **4**, 971-987 (2000)