

La production des faits en didactique des mathématiques

Claire Margolinas

▶ **To cite this version:**

Claire Margolinas. La production des faits en didactique des mathématiques. Séminaire du LIREST, 2000, Paris, France. pp.33-55. halshs-00421847

HAL Id: halshs-00421847
https://shs.hal.science/halshs-00421847

Submitted on 4 Oct 2009

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Margolinas, C. (2000). La production des faits en didactique des mathématiques. *Actes du séminaire du LIREST*, 33-55.

La production des faits en didactique des mathématiques

par
Claire MARGOLINAS, IUFM d'Auvergne
et Equipe de didactique des mathématiques, Laboratoire Leibniz, Grenoble

Dans ce séminaire, je chercherai à répondre à la commande de traiter brièvement de la production des faits en didactique des mathématiques. Je commencerai par placer la question d'un point de vue très général en plaçant la didactique des mathématiques comme champ scientifique et les faits comme interfaces entre plans scientifique et pratique. Je restreindrai ensuite l'exposé à l'analyse des situations de classes ordinaires, en montrant rapidement les outils principaux de cette analyse : théorie des situations, et en particulier structuration du milieu. Je montrerai alors sur un exemple comment ces analyses fonctionnent, et je conclurai sur les faits et les phénomènes que j'aurai pu mettre ainsi en évidence.

A. La didactique des mathématiques comme champ scientifique

Dans un séminaire transdisciplinaire, il me semble nécessaire de commencer par situer la didactique des mathématiques, par une tentative de définition :

> « La didactique des mathématiques se place ainsi dans le cadre des sciences cognitives comme la science des conditions spécifiques de la diffusion des connaissances mathématiques utiles au fonctionnement des institutions humaines. » (p.52) Brousseau (1994)

Dans cette définition donnée par Brousseau, le qualificatif « mathématique » apparaît de façon essentielle, ce qui semble naturel : la didactique s'est en effet fondée, par rapport à la pédagogie, en fondant sa spécificité et sa légitimité sur le caractère fondamental du savoir en jeu, et pas seulement de la relation entre les acteurs. Pour autant, ce caractère naturel doit être interrogé (voir Chevallard 1991, postface) : peut-on dans cette définition remplacer « mathématiques » par « disciplines scientifiques » ? Doit-on le remplacer, selon les besoins, par « algèbre » ou par « équation du premier degré » ?

Certains concepts de didactique des mathématiques peuvent sembler très généraux (« contrat didactique », « situation didactique », par exemple), ce qui ne veut pas dire qu'ils fassent partie de paradigmes d'autres didactiques : s'agit-il d'un problème historique de constitution de paradigme (on retrouve le même problème non seulement d'une discipline à l'autre mais d'un pays à l'autre) ou d'une spécificité fondamentale d'une didactique par rapport à une autre (voir Tsoumpelis et Gréa 1995) ?

J'ouvre ici des questions que je n'entends pas refermer… Pour faire avancer la question, j'introduis pour ma part la définition d'un *concept didactique* : Un concept peut-être qualifié de *didactique* si, quand il est *appliqué* (à l'analyse ou la construction de situation, par exemple), il produit des *résultats spécifiques des savoirs en jeu.*

L'exemple le plus évident est celui de « contrat didactique », concept très général qui va produire en situation des énoncés spécifiques des savoirs en jeu. Par exemple, dans la suite de l'exposé, on verra que l'analyse du contrat didactique dans cette situation met en relief une connaissance spécifique: « en géométrie, il faut faire des dessins ».

B. Les faits comme interfaces entre plan scientifique et plan pratique

Ayant placé la didactique des mathématiques, j'ai besoin maintenant de préciser ce que j'entends par « fait ».

1. Un petit modèle général

Les discours en général, sur l'enseignement en particulier, me semblent relever de deux plans différents, que j'appelle ici plan théorique et plan pratique. Selon ces deux plans, les discours n'ont ni les mêmes fonctionnements ni les mêmes fonctions.

Dans le plan que j'appelle « pratique », on peut émettre des *opinions* sur tel ou tel sujet. La plupart du temps (que le sujet en soit conscient ou non) ces opinions sont le fruit d'une *idéologie* (sans que ce terme soit ici péjoratif) qui les organise. Parmi ces opinions, certaines sont vérifiables (dans le domaine de la logique, on parlerait d'assertion) j'appellerai ces opinions vérifiables des *affirmations*. Enfin, parmi ces affirmations, certaines sont vérifiées positivement, je parlerai alors de *faits*.

Symétriquement, on peut décrire un plan « théorique », dont les éléments s'organisent de façon analogue. Une *théorie* est une structure cohérente qui permet de produire des *déclarations* dans un domaine spécifique. Une théorie ne permet jamais de produire des déclarations sur toute la réalité, mais seulement sur une partie.

Grossièrement, on peut dire que plus cette partie est grande et plus la théorie est puissante. Un *paradigme* un ensemble cohérent de théories. La cohérence d'un paradigme ne s'obtient pas facilement, il faut connaître notamment l'articulation des théories. J'appelle *phénomène* un fait qui peut être produit par une théorie.

Dans ce petit modèle, je place donc les faits dans ce que j'appelle le « plan pratique », à l'interface avec le « plan théorique » dans lequel les faits prennent valeur de phénomène.

2. Incompréhensions au sujet des faits

Les faits sont dans l'interface, ils peuvent être identifiés par des *observations* dans le plan pratique, alors qu'ils sont identifiés par une *construction* dans le plan scientifique.

Ces faits ne sont pas nécessairement les mêmes! Les praticiens pressent les scientifiques d'expliquer certains faits qui ne sont pas identifiables comme des phénomènes. Réciproquement les scientifiques identifient des phénomènes qui ne sont pas reconnus comme des faits dans le champ pratique.

L'identification des faits peut donc se faire selon plusieurs logiques : on peut collecter des faits dans le plan pratique, ou bien on peut produire des faits dans le plan théorique. Quand ces deux identifications se rejoignent, les « praticiens » et les « théoriciens » ont l'impression de « se comprendre ».

Dans l'exposé qui suit, on se placera dans le plan théorique, ce qui oblige à caractériser les éléments théoriques, mais on veillera également, dans l'étude d'un exemple, à pointer les faits identifiés ou identifiables dans le plan pratique.

C. Généralités sur l'analyse des situations

1. Le point de vue de la théorie des situations de Brousseau

Dans cet exposé, c'est la théorie des situations de Brousseau (voir Brousseau 1998, où l'on trouvera réunis la plupart des textes fondamentaux) qui sert de base à notre travail. J'ai par ailleurs (Margolinas 1993) défendu l'idée que cette théorie est au cœur du paradigme de la didactique des mathématiques (de « l'école française »).

Le postulat de départ de cette théorie est que le sujet agit toujours « en situation ». Le mot « situation » ne doit pas être identifié à celui de « tâche » (voir Sarrazy 1997). Les psychologues, qui utilisent ce vocabulaire, considèrent bien qu'une *même tâche* peut être présentée suivant *plusieurs modalités*. Or deux situations sont différentes si les stratégies appropriées à la résolution du problème ne sont pas les mêmes. Ainsi la « même tâche » peut correspondre à des situations différentes, par exemples si les conditions matérielles diffèrent et que ces différences impliquent des différences de stratégie de résolution.

2. Construction et analyse

La théorie des situations a été tout d'abord (1970-1990) utilisée pour la *construction* de situations (l'ingénierie didactique, voir Artigue 1988). Parallèlement, ce sont les stratégies des élèves qui furent étudiées, alors que l'enseignant était mis entre parenthèses. Dans les expérimentations, il devait se "retirer" pour permettre l'observation de situations "quasi-isolées".

Depuis les années 1990, les didacticiens des mathématiques se mettent à observer dans des classes "ordinaires", qui n'ont pas été organisées dans un but expérimental, et parallèlement l'enseignant devient un sujet d'étude (voir Margolinas et Perrin Glorian 1997 pour un historique court et Blanchard-Laville, Chevallard et Schubauer-Leoni 1996 pour un colloque épistolaire de cette période). Mes recherches s'inscrivent dans ce cadre.

L'étude de classes "ordinaires" est très complexe du point de vue méthodologique, du moins quand on s'y intéresse aux phénomènes didactiques. En effet, ans l'étude des classes "ordinaires", *le problème est de déterminer dans quelle(s) situation(s) se trouve(nt) le(s) sujet(s).* Cette détermination va demander l'élaboration de techniques spécifiques, car la situation constitue un modèle qui n'est guère identifiable pour les acteurs de celle-ci.

3. Analyses a priori, préalable, a posteriori

L'analyse a priori est une analyse théorique qui ne dépend pas des faits d'expérience (de la contingence). Il y a autant d'analyses a priori que de théories, de technologies, et de techniques à la disposition du chercheur. *L'analyse préalable* est une analyse a priori particulière: elle a lieu *avant* une observation ou une expérience. *L'analyse a posteriori* est une analyse qui replace les faits contingents dans le cadre crée par l'analyse a priori.

Les analyses a priori et a posteriori sont des modèles, leur différence de nature peut être reflétée par des différences de termes employés.

Analyse a priori	Observable	Stratégie	Choix
	Observation		
Analyse a posteriori	Observé	Procédure	Décision

Chaque notion a un correspondant dans l'analyse a priori et dans l'analyse a posteriori. Même si ce vocabulaire est difficile à fixer, il est intéressant d'en retenir le principe. Il s'agit d'une heuristique et pas d'un cadre rigide. Ce tableau est à compléter: sujet/élève, etc.

4. Observation en classes ordinaires

Dans l'observation en classe ordinaire, l'analyse préalable est très rarement possible. On doit d'abord en quelque sorte « préparer » l'analyse a priori : on extrait un élément de l'observation, par exemple le texte d'un problème posé, ou un énoncé oral. A chaque question posée, correspond une phase de conclusion (Margolinas 1992), au cours de laquelle sont déterminés les caractères juste ou faux des réponses avancées. Ces séquences (question/conclusion) déterminent des épisodes, plus ou moins longs, plus ou moins emboîtés. Ce premier tri permet de repérer les épisodes les plus longs, ou les plus « significatifs ». On passe alors à la phase d'analyse a priori, pour un épisode donné, déterminé par l'étude d'une question donnée.

On analyse a priori la ou les situation(s) déterminées par la question posée, on détermine en particulier les stratégies possibles, et les choix du professeur. On détermine les observables, par exemple, pour l'élève: les réponses possibles, l'utilisation d'un instrument, l'existence d'un certain tracé ; en ce qui concerne le maître: interventions possibles du maître qui change de situation (ce qu'on verra aujourd'hui).

L'analyse a posteriori découle de la précédente : on repère les observés correspondant aux actions de l'élève et du professeur. On détermine les situations effectivement établies dans la classe (et en conséquence les connaissances susceptibles d'avoir été apprises).

D. Analyse de situation: théorie et techniques

1. Concepts de base de la théorie des situations de Brousseau

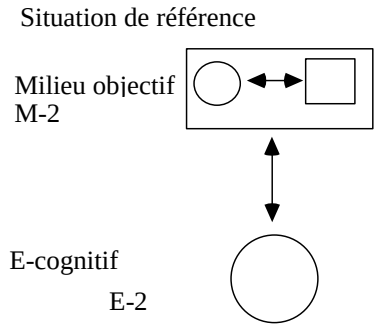
Le mot « situation », employé seul, n'est pas défini, il est en quelque sorte un « terme primitif » de cette théorie. On considère que le sujet agit toujours "en situation", ce qui comprend à la fois les objets et l'environnement auquel il est soumis, mais également les intentions perçues de celui qui organise, le cas échéant, les actions de ce sujet. Une métaphore classique pourra éclairer notre point de vue : un observateur décrit les mouvements complexes d'un rat : il tourne à gauche, puis à droite, puis de nouveau à gauche, etc. L'observateur attribue ces mouvements à des qualités particulières du rat… jusqu'au jour où il découvre le labyrinthe transparent dans lequel celui-ci évolue !

Une situation comprend au minimum un sujet (et donc ses connaissances) et un « milieu », système antagoniste du sujet, auquel il se confronte. La notion de milieu est complexe (Brousseau 1990), et c'est l'étude de sa structuration qui oriente mes travaux actuellement (Margolinas 1994, Margolinas 1995, Comiti, Grenier, Margolinas 1996). C'est justement la structuration du milieu qui va nous fournir une *technique d'analyse* dont je vais parler dans la suite de l'exposé

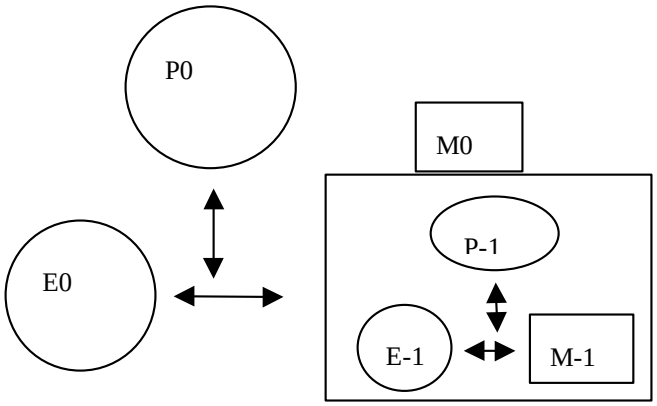
Le concept de *situation adidactique* est, avec le concept de milieu, un concept central de la théorie. Sans développer, il nous suffit pour le propos du présent article de dire qu'une situation adidactique est l'image en classe d'une situation non didactique (dans laquelle rien n'est organisé pour qu'un sujet apprenne) relativement à un savoir donné. Dans le modèle de la situation adidactique, le sujet n'est contraint que par celle-ci, il est libéré de l'intention d'être enseigné ainsi que de son intention d'apprendre. Dans l'observation de classe ordinaire, ce modèle permet d'éclairer en retour ce qui dépend des contraintes didactiques.

2. Une technique: analyse par la structuration du milieu

Brousseau (1990) a proposé une structure « récursive » pour le milieu, qu'on nomme souvent « l'oignon ». Il s'agit de considérer des situations englobées les unes dans les autres, la situation la plus intérieure constituant le milieu de la situation suivante, ce qui donne dans un niveau assez simple, S-2, situation « de référence », un seul sujet en interaction avec un milieu composé de la situation S-3 (on y voit un sujet représenté par un cercle en interaction avec un milieu représenté par un carré).



A un autre niveau, plus complexe, comme S0, situation didactique, on y voit deux sujets, le professeur P0 et l'élève E0, en interaction entre eux et avec un milieu M0, lui-même composé d'une interaction (le milieu M-1 étant lui-même le fruit de plusieurs situations emboîtées).



J'ai développé l'idée de structuration du milieu pour prendre en compte la situation de l'élève mais également celle du professeur, dans une présentation « en tableau », qui considère toujours à chaque niveau un emboîtement, Sn=Mn-1.

M+3 M de construction		P+3 P-noosphérien	S+3 S-noosphérienne
M+2 M de projet		P+2 P-constructeur	S+2 S-de construction
M+1 M –didactique	E+1 E-réflexif	P+1 P-projeteur	S+1 S de projet
M0 *M d'apprentissage*	*E0* *Elève*	*P0* *Professeur*	*S0* *S-didactique*
M-1 M de référence	E-1 E-apprenant	P-1 P-observateur	S-1 S-d'apprentissage
M-2 M – objectif	E-2 E-agissant		S-2 S de référence
M-3 M - matériel	E-3 E-objectif		S-3 S-objective

Les phénomènes identifiables avec cette technique qui dérive de la structuration du milieu sont les déterminations des situations des élèves et des professeurs.

E. Un exemple

1. Résultat de l'analyse a priori du point de vue de l'élève

En juin 1997, j'ai observé le travail de trois enseignantes ayant préparé ensemble le scénario d'un chapitre de niveau 4ème. La première leçon a été observée dans les trois classes.

D'après la concertation entre les enseignantes, le déroulement suivant est prévu: après un travail individuel d'au moins dix minutes sur feuille (voir annexe 1) on demande le même travail en groupe sur un transparent à compléter. Il est prévu ensuite une mise en commun.

Cette leçon a deux objectifs: revoir les symétries, découvrir translation et rotation. Le cours sur translation et rotation (à ce niveau d'étude il s'agit d'une simple introduction) est prévu sous forme d'une fiche polycopiée préexistant à la leçon.

Le résultat principal de l'analyse du texte du problème est l'existence de *multiples interprétations possibles* et de leurs filiations.

> La consigne est formée de trois phrases, que l'on va distinguer pour la nécessité de l'analyse: (a) Voici dix situations[1]. (b) Pour chacun des 10 cas comment obtient-on la figure $\mathcal{B}$ à partir de la figure $\mathcal{A}$? (c) Regroupe les situations analogues. Cette consigne a fait l'objet d'une discussion longue et approfondie dans le groupe de travail des professeurs, en particulier du fait des contraintes du programme (le mot "transformation" semble à exclure de ce point de vue).

L'analyse "ascendante" va conduire à considérer des interprétations de plus en plus complexe de cette consigne et de l'ensemble des signes présents sur la feuille distribuée.

Au niveau le plus élémentaire (S-3)

> Milieu M-3
>
> Lecture de la phrase (a) Reconnaissance de *deux* figures et de leurs noms $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$

Cette lecture est très élémentaire sauf éventuellement pour 4 et 6, configurations dans lesquelles on peut ne voir qu'une figure. Il est clair que si un élève ne peut faire au moins cette interprétation très élémentaire du problème, il restera "bloqué" pour le reste de la séance. On peut considérer également

> Lecture de la phrase (b) comme : «associer les figures $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$».
>
> (S-3): *l'élève associe visuellement les figures $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ dans différentes configurations.*

Ces associations visuelles peuvent être assez variées, en voici un exemple (il existe d'autres solutions): configuration 1: les figures glissent l'une sur l'autre; configuration 2: les figures pivotent l'une sur l'autre; configuration 3: les figures sont retournées; configuration 4: les figures sont emboîtées; configuration 5: les figures sont croisées; configuration 6: les figures sont emboîtées; configuration 7: les figures pivotent et glissent l'une sur l'autre; configuration 8: les figures se suivent; configuration 9: les figures sont en miroir; configuration 10: les figures pivotent l'une sur l'autre.

> Le savoir en jeu à ce niveau est très élémentaire, on peut dire qu'il s'agit d'imaginer le résultat du déplacement d'une figure.

On remarque qu'un élève peut s'arrêter à ce niveau de situation, et donner sa réponse qui, étant donné les associations que j'ai considérées, sera donc (2-10) et (4-6) (c'est le cas du groupe de Stéphane dans la classe de Danièle).

Il est peu vraisemblable que les élèves s'arrêtent massivement à ce niveau, en particulier car ils savent (connaissance du contrat didactique) qu'en géométrie il faut faire des constructions. Cette connaissance implique qu'une réponse recevable par le professeur ne peut être donnée à ce niveau. Les associations issues de la situation précédente pourront resurgir au cours de la leçon (c'est le cas, beaucoup d'élèves et certains professeurs évoquent ces associations "dynamiques" entre figures) mais une nouvelle interprétation de la consigne va donc être recherchée.

> Situation S-2 (M-2 = S-3)
>
> Nouvelle lecture de la phrase (b): "construire des liens entre les figures $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ "
>
> Identification des points identiques dans les figures
>
> *(S-2) l'élève trace (*effectivement *ou mentalement) les liens entre points identiques des figures $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$.*

Le résultat obtenu est donc le tracé des liens dans toutes les configurations (j'invite le lecteur à les effectuer sur le texte de l'annexe 1, certains tracés révèlent des surprises…).

> Le savoir en jeu à ce niveau est, là encore, très élémentaire, puisque, si l'on exclue les connaissances motrices nécessaires au tracé, il s'agit d'identifier un point dans le "référent" donné par une figure, selon plusieurs positions de cette figure.

---

[1] Sauf dans les transcriptions de la séance, j'utiliserai le mot « configuration » à la place de « situation », réservé comme mot-clé de l'analyse.

On remarque que les figures utilisées ne sont pas symétriques, ce qui facilite le travail (par exemple le point situé "dans la queue du poisson" "du côté le plus court" doit être relié avec le point ayant les mêmes caractéristiques dans l'autre figure). Contrairement à la situation précédente, aucune réponse à la question (c) n'est possible dans cette situation, puisque les tracés ne constituent pas en eux-mêmes des regroupements de configurations. L'élève qui s'arrêterait dans cette situation aurait sans doute le sentiment de ne pas avoir terminé.

Situation S-1 (M-1 = S-2 : nouveaux tracés)

Que peut faire à partir de ces tracés, qui constituent de nouvelles structures visuelles à interpréter?

C'est ici qu'interviennent les connaissances antérieures (éventuelles) des élèves concernant les symétries axiales et centrales. On a également ici des connaissances en voie de constitution concernant les translations et les rotations, dans la mesure où les liens entre figures permettent de caractériser les transformations. A ce niveau (-1) on va trouver de nouveau deux interprétations possibles du problème posé, ce qui conduit à autant de situations possibles. Visuellement, on peut considérer ceci comme des "bifurcations" dans la structuration du milieu (voir Comiti, Grenier et Margolinas 1995 pour un exemple de "dédoublement", dans une situation moins complexe, voir annexe 2 pour une schématisation des bifurcations dans cet exemple).

Une bifurcation dans les situations.

Nouvelle lecture de (b) : "nommer les configurations"

L'intervention des connaissances antérieures des élèves (programmes d'école élémentaire, de sixième et de cinquième) devraient permettre aux élèves de nommer les symétries axiales et les symétries centrales (dans la situation, c'est rarement le cas, au grand dam des professeurs!). D'autre part, si le contrat didactique ne l'interdit pas, les élèves peuvent également (en s'appuyant sur les associations visuelles (S-3) ou sur le résultat des tracés (S-2)), chercher des noms originaux pour les configurations (dans la situation, on trouve par exemple comme noms originaux pour les translations: déplacement, perspective, comme noms originaux pour les rotations: centrale et symétrie centrale).

Nouvelle lecture de (c): regroupe les configurations sous un même nom.

Cette nouvelle lecture permet à l'élève de répondre au problème.

La situation (S-1) est donc dans ce cas: l'élève regroupe sous un même nom les configurations obtenues par l'ajout des tracés reliant les points identiques.

Les connaissances mathématiques sont, soit des connaissances antérieures des élèves (symétries), soit la reconnaissance de différents « dessins »

On remarque que les regroupements opérés dans cette situation devraient être corrects, seuls les noms peuvent ne pas l'être.

Bifurcation par intervention d'une connaissance du contrat :

En géométrie, on doit remarquer (et éventuellement coder sur le dessin) les perpendicularités, les parallélismes, les égalités de longueurs et parfois d'angles.

On obtient alors comme situation (S-1) : l'élève cherche les caractères des figures obtenues (perpendicularité, parallélisme, égalité de longueurs, égalité d'angles).

En elle-même, cette situation ne produit pas de résultat qui permette une réponse à la question (c),

Les connaissances en jeu dans la situation correspondent à l'interprétation visuelle de parallélisme et de perpendicularité.

Milieu M0 : résultat des caractères des figures par exemple sous forme de codage de figure.

Il s'agit de connaissances plus sophistiquées que celles que nous avons envisagé précédemment, mais qui restent assez élémentaires (les situations de reconnaissances visuelles des différentes configurations sont de niveau cycle III de l'école élémentaire, et début du collège). Elles ne sont pas spécifiques des savoirs en jeu.

On doit donc maintenant s'interroger sur ce que l'on peut faire avec ces nouveaux objets (nouveaux tracés codés ou nouveau regard sur les tracés précédents). On va obtenir là encore deux bifurcations.

Nouvelle lecture de (b) : "Décris les caractéristiques des liens entre les figures"

Nouvelle lecture de (c) : "Regroupe les configurations dont les caractéristiques des liens entre figure sont les mêmes".

La situation (S0) est donc dans ce cas: L'élève regroupe les configurations en justifiant ces groupements par la description des caractéristiques des liens entre les figures.

Voici un exemple de réponse observée de ce type: « dans la [configuration] 1 on a des segments parallèles et de même longueur ».

Savoirs en jeu *pour répondre* : description de figures complexes

On remarque que l'enseignant peut reconnaître dans la réponse les caractéristiques des nouvelles transformations (translation, rotation), les réponses des élèves lui fournissent alors l'occasion de systématiser les descriptions et de les promouvoir au rang de caractéristique d'une transformation.

Ce type de "promotion" d'actions banales a été repéré par Brousseau (voir 1998) sous le nom "d'effet Jourdain", qui en a pointé les effets pervers. Il s'agit d'une pratique très courante, qui a sans aucun doute son domaine de validité dans les relations professeur-élèves.

> Autre lecture qui conduit à une autre situation de même niveau (0).
>
> (b) : « Décrire la construction qui permet de construire la figure $\mathcal{B}$ connaissant la figure $\mathcal{A}$ »
>
> (c): « Regroupe les configurations dont les constructions se ressemblent».
>
> La situation (S0) devient donc: *L'élève identifie les caractéristiques des constructions dans les différentes configurations.*

Dans cette nouvelle interprétation, on doit donc décrire une construction, ce qui conduirait à des réponses du type (non observé): « Si l'on voulait reconstituer la configuration 1, pour obtenir l'image d'un point de la figure $\mathcal{A}$ il faudrait tracer un segment issu de ce point, parallèle, de même longueur et de même sens que le segment identifié sur la configuration 1 complète donnée par l'énoncé ».

Il faut ici *imaginer un nouveau problème qui est seulement évoqué* : celui qui se poserait si l'on voulait décrire un programme qui permettrait de reconstruire exactement la même configuration que sur la feuille donnée, mais en n'ayant que la figure $\mathcal{A}$ de dessinée.

Ce nouveau problème n'est pas posé directement à l'élève, il est implicite

En fait, il est peu réaliste, car il nécessiterait l'introduction de nouveaux éléments matériels dans la situation, par exemple: dessin des configurations complètes d'une part, dessin de la figure $\mathcal{A}$ d'autre part, réalisés sur papier quadrillé. Dans le cas des translations, en utilisant un quadrillage, on pourrait imaginer que les élèves tracent sur la deuxième feuille le vecteur qui permet la construction de la figure image, et reconstituent ainsi la deuxième figure. Dans le cas des rotations, c'est le centre de la rotation ainsi que l'angle qu'il faudrait pouvoir tracer sur la deuxième feuille. Son statut dans la leçon observée ne peut être qu'implicite, sauf si le professeur introduit un nouveau problème (c'est le cas dans la classe de Marie-Paule, voir infra).

Dans cette interprétation de la situation (et comme nous l'avons vu, il y en a beaucoup d'autres), les savoirs en jeu sont effectivement (sous forme de modèles implicites, voir Brousseau 1998) les caractéristiques des transformations, on y remarque notamment l'intervention de l'idée d'image d'un point (qui peut s'exprimer autrement, mais dont le sens doit être présent) ainsi que la nécessaire explicitation de l'ensemble des caractéristiques des transformations (alors que dans l'interprétation précédente, certaines pouvaient être oubliées sans que la réponse en soit affectée).

Dans cette situation, le travail à faire par les élèves n'est pas banal: il est long et difficile. Or, nous devrions normalement être ici (S0) au niveau de la situation didactique proprement dite, c'est-à-dire celle dans laquelle il n'y a plus véritablement de recherche, mais la mise en commun de résultats, l'évaluation de ceux-ci, l'institutionnalisation de connaissances.

Cette situation est très peu probable au niveau didactique (S0), il s'agit d'un nouveau problème.

Concrètement, cela implique que cette situation est très peu probable au niveau du travail personnel des élèves (individuel ou en groupe). Si on l'observe, elle ne pourra être que provoquée par l'enseignant, soit avec l'introduction d'un autre problème, soit dans une gestion publique qui rend improbable l'établissement d'une relation adidactique, ou encore, d'un épisode didactique (voir Mercier 1997).

2. Résultats de l'analyse a priori du point de vue du professeur

Les conceptions de l'enseignement des mathématiques en général des trois professeurs, (niveau +3) sont très semblables, en particulier, elles affirment que

> «Le principe, c'est de leur faire découvrir par eux-mêmes».

En ce qui concerne le chapitre "translation et rotation" pour la classe de quatrième, leur interprétation (niveau +2) du programme officiel peut se résumer comme

> « L'objectif en quatrième est seulement que les élèves puissent construire l'image d'un point par translation et rotation »

D'autre part, elles relient celui-ci au travail global sur les transformations:

> « En quatrième, les élèves doivent maîtriser les symétries axiales et centrales »

C'est au niveau de ce qui constitue pour chacune l'objectif de la leçon, du projet (+1) qu'il y a des différences. En résumant cette partie des entretiens avec les enseignantes sous forme d'une phrase synthétique, on obtient :

Marie-Paule : A l'issue de la leçon, les élèves doivent pouvoir démarrer les exercices qui suivent (construction de translation ou rotation dans des cas simples) .

Béatrice : A l'issue de la leçon, les élèves doivent connaître des méthodes de construction des transformations .

Danièle : A l'issue de la leçon, les élèves doivent avoir une représentation intuitive (dynamique) de chacune des transformations.

Au niveau didactique (0), leurs exigences minimums sont différentes :

Marie-Paule exige l'amorce de méthode de construction

Béatrice exige l'explicitation des méthodes de construction de l'image d'un point par une transformation

Danièle exige seulement l'explicitation du passage d'une figure à l'autre

Si l'on reprend l'analyse de la situation, comment ces conceptions de l'apprentissage, de ce chapitre et de cette leçon peuvent-elles être croisées avec les différentes situations possibles identifiées?

On remarque tout d'abord que l'ambition des professeurs que les élèves "découvrent par eux-mêmes" devrait normalement laisser ouvertes des possibilités de bifurcations, dans la mesure où les élèves devraient avoir une certaine liberté.

Opposition entre ancien (symétries) et nouveau (translation et rotation)

Pour les symétries, la reconnaissance du nom correct (première situation S-1) pourrait satisfaire le professeur, alors que ce travail ne peut sans doute suffire pour les translations et les rotations.

Comme on le voit sur le schéma (annexe 2) deux éléments de contrats sont déterminants pour le cheminement d'une situation à l'autre, on pourrait donc observer des interventions des professeurs dans le sens d'explicitation plus ou moins directe de ces règles (c'est effectivement le cas, je n'y reviendrai pas dans ce texte).

Intéressons-nous maintenant aux différences entre professeurs.

Danièle pourrait accepter beaucoup plus facilement toutes les situations possibles

Marie-Paule pourrait éventuellement se satisfaire d'une réponse dans la première situation S0.

Par contre, l'ambition de Béatrice devrait la conduire à rechercher une voie de dévolution du problème évoqué.

La complexité du problème posé, qui autorise le vécu de nombreuses situations dans la classe, devrait avoir des répercussions sur la gestion de la classe, qui est ici très délicate. On remarque au passage que, si les professeurs partagent la même idéologie de type "pédagogie constructiviste", leurs exigences différentes devraient les conduire à faire vivre à leurs élèves des situations bien différentes!

3. Résultats de l'analyse a posteriori des décisions des professeurs

Dans le déroulement, tous les professeurs manifestent que la situation dans laquelle elles voudraient que les élèves travaillent est la plus complexe. L'analyse des protocoles (de leçon et d'entretiens après les leçons) montre la pertinence de l'analyse a priori pour interpréter les actions du professeur comme des choix. Elle montre également la difficulté (l'impossibilité dans les leçons observées) de la dévolution du problème « évoqué ».

Classe de Béatrice

Sans chercher ici à faire un compte-rendu exhaustif, je rapporterai ici quelques épisodes caractéristiques.

Dans la classe de l'enseignante la plus exigeante du point de vue des constructions : Béatrice, la dévolution de la situation de construction selon une transformation donnée prend effectivement une place importante, aussi bien dans son action en classe que dans l'entretien a posteriori avec moi.

Béatrice introduit dès la première consigne le mot «image ». Dès la première élève au tableau (Héloïse), Béatrice va montrer que les explications correspondant à des interprétations moins sophistiquées de la situation (correctes sur le plan mathématique) ne sont pas suffisantes :

Béatrice: donc si on voulait construire la figure $\mathcal{B}$ à partir de la figure $\mathcal{A}$ / il faudrait que j'obtienne le point A' / et comment j'obtiendrais le point A' / quelle construction je vais faire / pour obtenir A' à partir de A / qu'est-ce que je fais / je trace

Héloïse: la droite AO et euh O'O et euh AO'

B: je trace la droite AO / elle coupe la figure / comment tu places le point A'

Héloïse: ben / euh

Devant l'incompréhension d'Héloïse, elle va évoquer le problème prévu :

B: je m'exprime mal / si la figure B n'était pas dessinée / comment tu obtiendrais le point A' / donc tu traces AO et ensuite qu'est-ce que tu

Héloïse: de la même longueur que OA'

B: et tu reportes euh / tu prends A' sur la droite de façon à ce que O soit

Héloïse: de même longueur

B: soit le milieu de AA' / d'accord /

Dans le traitement de la figure 1, Héloïse ne prend pas en compte les exigences de Béatrice. Béatrice essayera de nouveau avec Yann (meilleur élève) sans succès.

Dans l'entretien avec moi, c'est cette difficulté qui préoccupe le plus Béatrice :

Béatrice: ils ont compris comment on faisait A' par exemple / à partir de A / en passant par O / mais est-ce que / ah oui je me souviens un peu de ça / il me semblait que j'avais / finalement eux je me demande si ils avaient bien compris la consigne / parce que / elles disaient que O c'était le milieu de AA' / alors que A' c'est le symétrique de A par rapport à O / ce qui est différent / il

Claire: et pourquoi est-ce que c'est dans la consigne ça

Béatrice: parce que en fait non / mais tu vois attends / dans la consigne c'est marqué comment obtient-on la figure $\mathcal{B}$ à partir de la figure $\mathcal{A}$ / et il / y en a beaucoup qui ont pas vu ça / qui ont cru qu'on leur donnait une figure et qu'on devait mettre en évidence le / la construction de A et B mais / comme si les deux étaient fournis

Claire: oui / les relations entre eux plutôt que la construction de l'un / à partir de l'autre

Béatrice: ça je pense que j'ai pas bien réussi à le faire passer

Béatrice cherche alors une nouvelle situation, en produisant une analyse fine du problème que lui a posé la séance.

Béatrice: on aurait peut-être du la mettre en pointillé la figure $\mathcal{B}$ ou / tu vois / pour montrer qu'elles étaient pas sur le même euh /

Claire: ouais

Béatrice: ou d'une autre couleur ou je sais pas

Béatrice: et / donc les élèves voyaient pas la différence entre le statut de la figure $\mathcal{A}$ et de la figure $\mathcal{B}$ et donc ils étaient peut-être / soit la mettre en pointillé la figure $\mathcal{B}$ / soit en mettre / qu'un morceau et la faire / compléter / trouver les autres points / ouais / je pense que ça aurait été intéressant

Dans sa classe Marie-Paule va tout d'abord tenter d'évoquer le problème.

Marie-Paule: et maintenant si je ne vous avais donné que la figure $\mathcal{A}$ et que je veuille obtenir la figure $\mathcal{B}$ / je cache la figure $\mathcal{B}$ je l'enlève / et je voudrais l'obtenir cette figure $\mathcal{B}$ / qu'est-ce qu'il faudrait que j'aie pour pour pouvoir définir / construire cette figure $\mathcal{B}$

Mais elle va faire preuve, dans cette séance, d'une grande créativité (elle me dira d'ailleurs à ce sujet, "à chaud" après la séance, qu'elle a pris des décisions non prévues au préalable et qui lui semblent importantes).

Elle va inventer un nouveau problème, avec la collaboration du meilleur élève de la classe (Nicolas). Sur la partie quadrillée du tableau noir, elle trace une figure simplifiée et va demander à Nicolas:

Marie-Paule: Est-ce que là dessus sur cette figure sur ce dessin ou quoi on pourrait mettre quelque part un élément qui nous permettrait d'obtenir cette figure en fonction de celle là // vous le voyez pas

Mais elle n'obtiendra pas satisfaction.

Plus tard, elle introduira un nouveau point dans les figures proposées, ce qui constitue apparemment une variante du problème évoqué:

Marie-Paule: tant qu'à faire prend un autre point C C' // est-ce que imaginez que / j'imagine que dans la figure $\mathcal{A}$ / voilà dans que ce point là je prends ce point là / je l'appelle M et j'imagine qu'il fait partie de la figure A / voilà j'imagine que ce point M fait partie de la figure $\mathcal{A}$ / comment est-ce que je pourrais obtenir M' / Nicolas lève le doigt / est-ce qu'il y en a d'autre qui veulent se positionner / vous avez bien compris hein j'ai mon bloc / le point M fait partie de la figure $\mathcal{A}$ et) je voudrais par une transformation faire qu'il complète la figure $\mathcal{B}$

Elle obtiendra ainsi l'adhésion de quelques élèves, et pourra écrire les éléments caractéristiques

de la transformation au tableau juste avant la sonnerie;

Danièle, comme Béatrice, introduit dès la consigne le problème évoqué:

Danièle: vous allez essayer d'expliquer le plus clairement possible / pour les autres / ce que vous avez reconnu / comment vous pensez qu'on peut passer d'une figure à l'autre parce que par exemple moi si / si je rajoute / ben ça ressemble vaguement à des petits poissons / si je rajoute un autre petit poisson et que je vous demande son image / comment vous m'expliquez ce que je dois faire / d'accord / pour asser de l'un à l'autre / comment / vous m'expliquez comment je vais pouvoir le construire / donc premier temps cinq dix minutes à peine / vous réfléchissez vraiment chacun pour vous là chacun pour vous / ensuite mise en commun /

Pas plus que dans les autres classes, l'évocation de ce problème ne suffira à sa dévolution, par contre, comme prévu dans ses objectifs, acceptera toutes les interprétations du problème, elle n'en ressentira donc aucune gêne:

Danièle: vous allez essayer d'expliquer à vos collègues / comment / on passe d'une figure à l'autre / donc / dessus vous avez le droit de faire une construction / j'en vois qui en ont déjà fait / vous avez le droit que faire un petit schéma / vous avez le droit que / je sais pas / faire des petites flèches / tout ce que vous voulez / qui va vous permettre d'expliquer aux autres et à moi même comment / je peux passer d'une figure à l'autre / y en a visiblement que vous avez reconnu / c'est des choses que vous avez déjà étudié / d'autres / peut-être pas / ben vous le direz avec vos mots / essayez d'être / précis

F. Quelques faits et phénomènes mis en évidence

En guise de conclusion à ce travail, je vais pointer ici quels sont les faits et les phénomènes que l'analyse ci-dessus nous permettent de mettre en évidence dans ce cas précis, et quelles perspectives on pourrait ouvrir dans un cas plus général.

Le groupe de travail des professeurs étudié ne s'étant réuni qu'une heure pour préparer plusieurs leçons, les échanges entre les professeurs ont concerné essentiellement la discussion de la consigne et de la feuille à distribuer aux élèves et l'organisation de la séquence (quand et comment distribuer tel matériel aux élèves, à quel moment les mettre en groupe, etc.). Les projets des professeurs ont été peu discutés, et sont restés très différents.

Ce qu'a montré mon analyse, c'est que le problème posé aux élèves pouvait conduire ceux-ci à se trouver dans des situations variées, et que le passage d'une situation à une autre dépendait pour une bonne part de connaissances du contrat didactique. D'autre part, la variété possible des situations à partir du problème rend également la leçon très sensible au projet du professeur qui peut, consciemment ou non, faire bifurquer la situation dans un sens ou un autre.

Je peux ici considérer comme un phénomène la difficulté d'identification explicite, pour le professeur, des différentes situations dans lesquelles sont plongés les élèves, du fait de leur interprétation de la situation. A l'issue de la leçon, seule Béatrice parle de ce phénomène, en le référant à un problème de consigne ; Marie-Paule, quand à elle, invente en classe un problème qui cherche à résoudre cette difficulté. Par ailleurs, l'impression de réussite ou d'échec ressenti subjectivement par le professeur à l'issue de la séance ne semble pas très adapté à la réalité de la qualité de la transmission du problème à l'élève (Béatrice sort très insatisfaite, alors que ce sont ses exigences qui sont plus fortes au départ, et non pas le fonctionnement réel du problème qui est moins satisfaisant). Ce type de phénomène devrait être exploré plus systématiquement, dans la mesure où il a déjà été repéré (Comiti, Grenier, Margolinas 1995, Margolinas 1994).

Par ailleurs, on pourrait opposer, à l'idéologie de « l'expérience » des enseignants, une théorie des pratiques des professeurs (encore en grande partie à élaborer), dans laquelle on pourrait repérer « l'expérience » comme des connaissances spécifiques du professeur, ainsi que les situations d'acquisition de ces connaissances. L'exemple étudié m'amène à penser que certaines de ces connaissances sont trop implicites pour être transmises entre professeurs, et que c'est uniquement par la coûteuse répétition d'un même problème dans des classes différentes que le professeur peut les acquérir. C'est par exemple ainsi que Béatrice, professeur novice, apprend que la consigne du problème posé ne va pas de soi, et que le professeur doit, soit transformer le problème pour mieux l'adapter à ses exigences, soit transformer celles-ci, alors que la discussion avec les autres professeurs, et même l'observation de la séance de Marie-Paule (dont Béatrice a vu la leçon juste avant de prendre sa classe en main) ne l'avait pas préparée à ce problème. L'analyse a priori du problème permet de prévoir ces difficultés, mais celle-ci n'est pas accessible au professeur (et de plus elle est assez lourde). Dans ces conditions, le professeur a intérêt à profiter des connaissances d'observation acquises et donc de redonner un problème identique ou seulement légèrement modifié l'année suivante (cette analyse économique permet sans doute d'identifier comme des phénomènes l'importance des premières expériences d'enseignement).

Références bibliographiques

ARTIGUE Michèle, 1988, Ingénierie didactique, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol 9 n°3 pp. 281-308, ed. La Pensée Sauvage, Grenoble.

BLANCHARD-LAVILLE Claudine, CHEVALLARD Yves, SCHUBAUER-LEONI (sous la direction de), 1996, *Regards croisés sur le didactique*, ed. La Pensée Sauvage, Grenoble.

BROUSSEAU Guy, 1990, Le contrat didactique: le milieu, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol 9 n°3 pp. 309-336, ed. La Pensée Sauvage, Grenoble

BROUSSEAU Guy, 1994, Perspectives pour la didactique des mathématiques, in ARTIGUE Michèle et coll. eds, 1994, *Vingt ans de didactique des mathématiques en France*, pp. 51-66, ed. La Pensée Sauvage, Grenoble.

BROUSSEAU Guy, 1998, *Théorie des situations didactiques*, ed. La Pensée Sauvage, Grenoble.

CHEVALLARD Yves, 1991, *La transposition didactique —du savoir savant au savoir enseigné* 2e édition avec *Un exemple de transposition didactique* de Yves Chevallard et Marie-Alberte Johsua, ed. La pensée sauvage, Grenoble.

COMITI Claude, GRENIER Denise, MARGOLINAS Claire, 1995, Niveaux de connaissances en jeu lors d'interactions en situation de classe et modélisation de phénomènes didactiques, in ARSAC Gilbert et al. coord, *Différents types de savoirs et leur articulation*, pp. 92-113, ed. La Pensée Sauvage, Grenoble.

MARGOLINAS Claire, 1992, Eléments pour l'analyse du rôle du maître: les phases de conclusion , *Recherches en Didactique des Mathématiques vol 12 n°1*, pp. 113-158, ed. La Pensée Sauvage, Grenoble.

MARGOLINAS Claire, 1993, *De l'importance du vrai et le faux dans la classe de mathématiques*, 255p., ed. La Pensée Sauvage, Grenoble.

MARGOLINAS Claire, 1994, Jeux de l'élève et du professeur dans une situation complexe, *Séminaire DidaTech, LSDD, IMAG, Université Joseph Fourier, Grenoble* .

MARGOLINAS Claire, 1995, La structuration du milieu et ses apports dans l'analyse a posteriori des situations, in MARGOLINAS Claire, *Les débats de didactique des mathématiques*, annales 1993-1994, ed. La Pensée Sauvage, Grenoble.

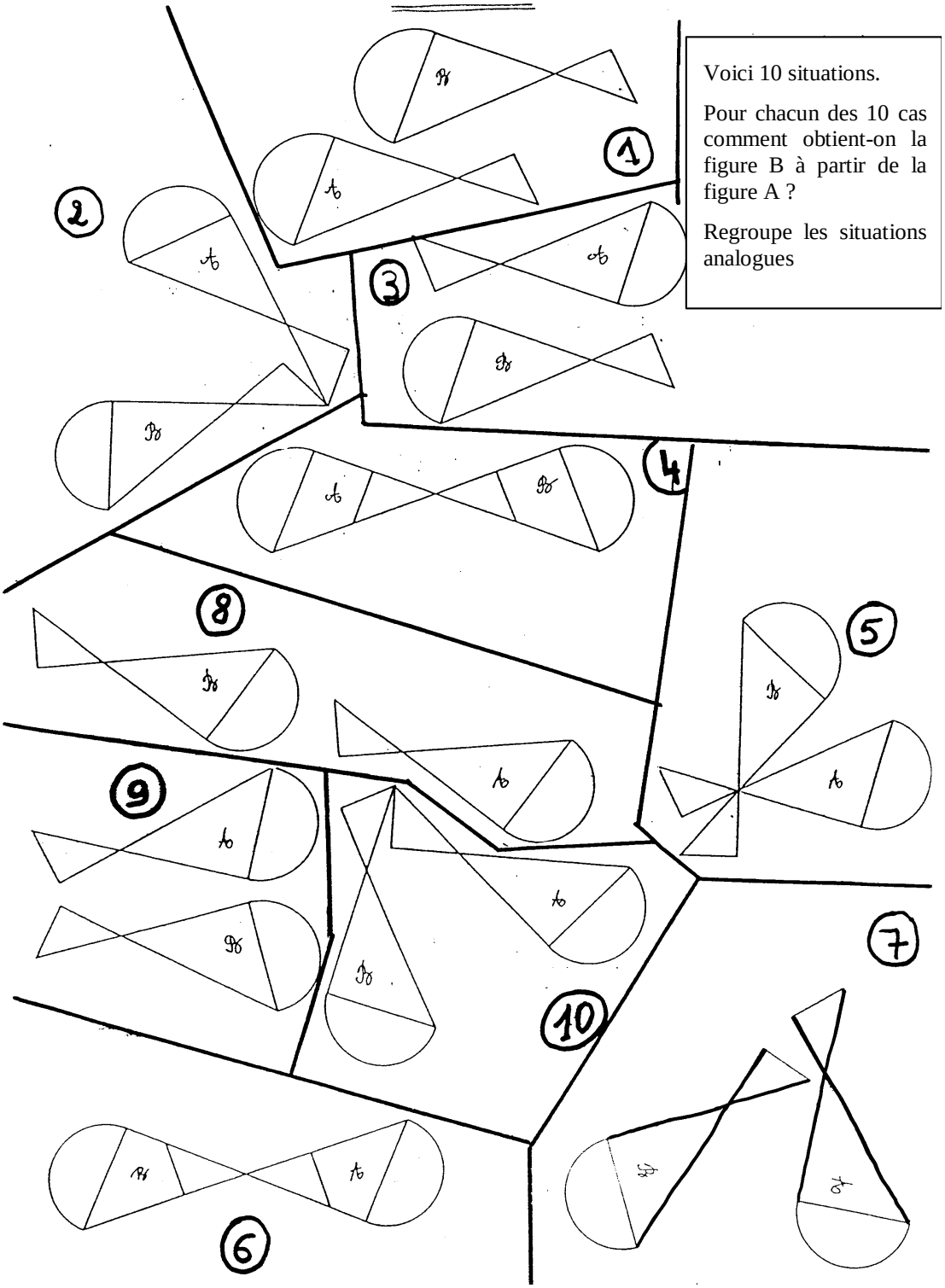
MARGOLINAS Claire, PERRIN-GLORIAN Marie-Jeanne, 1997, Des recherches visant à modéliser le rôle de l'enseignant, Editorial, *Recherches en Didactique des Mathématiques vol 17 n°3*, pp. 7-16, ed. La Pensée Sauvage, Grenoble

MERCIER Alain, 1998, La participation des élèves à l'enseignement, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol 18 n°3 pp. 279-310, ed. La Pensée Sauvage, Grenoble

SARRAZY Bernard, 1997, Sens et situations: Une mise en question de l'enseignement des stratégies méta-cognitives en mathématiques, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol 17 n°2 pp. 135-166, ed. La Pensée Sauvage, Grenoble.

TSOUMPELIS Leonidas et GREA Jean, 1995, Essai d'application de la théorie des situations en sciences physiques, *Recherches en didactique des mathématiques, Vol 15, n°2, pp. 63-108*

Annexe 1



Voici 10 situations.

Pour chacun des 10 cas comment obtient-on la figure B à partir de la figure A ?

Regroupe les situations analogues

Annexe 2: Résumé schématique de l'analyse de la situation

N.B. ce schéma se lit en partant du niveau le plus bas, et en remontant vers les niveaux les plus hauts (analyse ascendante).

