



**HAL**  
open science

## Transfert de risques et création de surplus

Jean-Michel Courtault, Jean-Pascal Gayant

► **To cite this version:**

Jean-Michel Courtault, Jean-Pascal Gayant. Transfert de risques et création de surplus. 1997. halshs-00447516

**HAL Id: halshs-00447516**

**<https://shs.hal.science/halshs-00447516>**

Preprint submitted on 15 Jan 2010

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# TRANSFERT DE RISQUES ET CREATION DE SURPLUS

## *Résumé :*

*Dans cet article, après avoir présenté la notion de bénéfice certain de Luenberger (qui généralise au cas du risque la notion de surplus distribuable de Allais), nous en dérivons les identités classiques utilisées pour l'étude de la disparité prix de vente-prix d'achat. Nous montrons en particulier comment obtenir les prix d'achat et de vente d'une loterie à partir de la fonction de bénéfice certain. Enfin, nous utilisons ce nouveau concept pour étudier le transfert d'un ou plusieurs risque entre deux agents ou plus. En particulier, nous étudions les conditions sous lesquelles la maximisation du surplus distribuable total conduit à une répartition des risques optimale au sens de Pareto.*

## *Summary :*

*In this paper, we use the certain benefit function of Luenberger, which is a generalization of the notion of distributable surplus by Allais, to characterize the classical notions of willingness to pay and willingness to accept . These concepts allow us to study the transfer of one or several risks between two agents or more. Specifically, we determine the conditions under which the maximization of the total distributable surplus leads to a Pareto efficient allocation of risks.*

Mots-Clés : Surplus Distribuable, Bénéfice Certain, Partage Efficace des Risques, Prix de Vente et Prix d'achat d'une Loterie.

Keywords : Distributable Surplus, Certain Benefit, Efficient Risk-Sharing, Willingness to Pay and Willingness to Accept.

Jean-Michel COURTAULT<sup>(1)</sup> et Jean-Pascal GAYANT<sup>(1)&(2)</sup>

(1) CRESE, Université de Franche-Comté, Avenue de l'Observatoire, 25030 BESANÇON

(2) CEME, Université de PARIS 1, 106-112 Boulevard de l'hôpital, 75647 PARIS cedex 13

## INTRODUCTION

Trois prix distincts peuvent être attachés à une même loterie : le prix qu'un décideur est prêt à acquitter pour "participer" à la loterie (prix d'achat d'un droit qu'il ne possède pas initialement), le prix qu'il faut payer à un décideur pour qu'il accepte de vendre la loterie (prix de vente d'un droit qu'il possède initialement) et le prix de vente à découvert (prix de vente d'un droit qu'il ne possède pas initialement). Dans la littérature ces prix sont examinés soit dans l'optique de l'étude de la disparité entre consentement (willingness) à payer et consentement à recevoir, égale à la différence entre prix d'achat et prix de vente, soit dans l'optique de l'étude de la fourchette de liquidité (bid-ask spread), égale à la différence entre prix d'achat et prix de vente qui peut être éventuellement à découvert. Dans le présent article, nous allons nous intéresser au problème de l'échange d'une ou plusieurs loteries entre deux agents ou plus et nous allons étudier les déterminants des prix d'achat, prix de vente et prix de vente à découvert.

Un échange de risque a lieu seulement si les protagonistes en bénéficient simultanément. Suivant l'approche développée par Eeckhoudt & Roger (1994), un transfert de risque peut avoir lieu entre deux agents seulement si le prix maximum qu'accepte de payer l'acheteur est supérieur au prix minimum qu'est disposé à recevoir le vendeur, que ce dernier possède ou non la loterie initialement. La théorie générale des surplus de Maurice Allais offre une autre caractérisation des conditions nécessaires de l'échange mutuellement bénéfique. Elle propose un cadre d'analyse très général pour déterminer les conditions de l'échange volontaire : un échange a lieu seulement si le surplus distribuable généré par cet échange est positif. Cette seconde approche est en fait plus générale que la première puisque elle permet d'analyser les échanges mutuellement avantageux de plus d'une loterie entre plus de deux agents ; lorsque l'échange concerne seulement une loterie et deux agents, le surplus distribuable généré par le transfert de la loterie est effectivement égal à la différence entre le prix d'achat et le prix de vente de la loterie.

Inspiré des travaux de Jules Dupuit et de Vilfredo Pareto, ce cadre théorique est complété par Allais (1981). Il est à noter qu'Allais avait dès 1941 élaboré le concept de surplus distribuable, alors qu'il ignorait les travaux de Jules Dupuit (dont il n'eut connaissance qu'en novembre 1973). Si la notion de surplus est facile à appréhender lorsque l'on s'intéresse au comportement d'un producteur (le surplus dégagé est monétaire), Jules Dupuit a eu le grand mérite de distinguer l'utilité absolue d'un service rendu par un bien (le sacrifice maximum que l'on est prêt à faire pour obtenir ce bien) de son utilité relative (la différence entre l'utilité absolue et le sacrifice effectivement consenti pour l'obtenir). A l'appellation utilité relative,

qu'il considère maladroite, Allais préfère l'appellation "surplus distribuable". Il fait remarquer, par ailleurs, que la définition du surplus distribuable donnée ci-dessus est tout à fait générale et dégagée de toute hypothèse de continuité, de dérivabilité et de convexité, qu'elle est indépendante de toute hypothèse quant à l'existence d'une fonction d'utilité cardinale, qu'elle ne dépend que des champs de choix ordinaux. Cette remarque vaut également pour la notion de surplus équivalent, initiée par Pareto bien que jamais explicitement dénommée par ce dernier. Si le surplus distribuable est relatif au sacrifice que doit consentir un agent pour obtenir un bien (ou un panier de biens), le surplus équivalent est relatif à ce que l'on doit donner à l'agent pour qu'il renonce à un bien qu'il possède initialement. Pareto utilise cette notion de surplus équivalent pour définir l'efficacité économique (qu'il nomme "situation de maximum d'ophélicité"). Il établit les conditions du premier ordre d'une efficacité maximale : la nullité de la différentielle première du surplus équivalent. Si la nullité de la différentielle première du surplus distribuable est aussi une condition du premier ordre de l'obtention d'une efficacité maximale, les conditions du second ordre diffèrent selon que l'on considère le surplus équivalent ou le surplus distribuable. La notion pertinente pour établir ces conditions étant celle de surplus distribuable, Allais reformule en 1943 l'analyse de Pareto en terme de surplus distribuable. Luenberger (1995), enfin, généralise les notions de surplus distribuable et surplus équivalent en contexte d'incertitude : il nomme respectivement "bénéfice certain" et "équivalent certain" les quantités d'un panier de biens certain de référence que le décideur est prêt à abandonner, ou qu'il faut donner à un individu, pour obtenir, ou pour céder le droit de participation à une variable aléatoire.

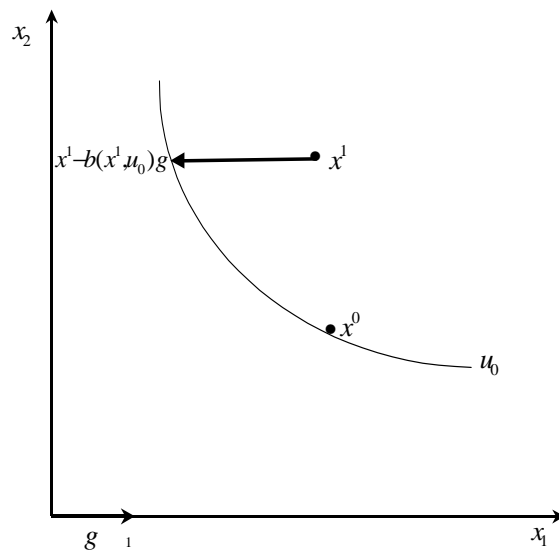
Dans une première section, nous allons établir, à l'aide de la notion de bénéfice certain, un cadre unifié nous permettant d'étudier les notions de prix d'achat, prix de vente et prix de vente à découvert d'une loterie. Puis, dans une seconde section, nous allons examiner le problème du transfert d'un ou plusieurs risques entre un nombre quelconque d'agents ainsi que l'efficacité de la répartition des risques qui en résulte.

## BENEFICE CERTAIN

Il est possible de prolonger l'analyse de Luenberger (1995) en dérivant les prix d'achat et prix de vente d'une variable aléatoire de la notion de bénéfice certain. Plaçons nous tout d'abord dans un contexte de certitude et définissons la "fonction de bénéfice" qui convertit les préférences du décideur sur un ensemble de consommation  $\mathbb{R}_+^L$  (espace de L biens) en une représentation numérique. Etant donné un niveau d'utilité initial  $u_0$  et un panier de référence  $\mathbf{g} \in \mathbb{R}_+^L$ , le bénéfice  $b(\mathbf{x}^1, u_0)$  lié au passage du niveau d'utilité  $u_0$  à un point  $\mathbf{x}^1 \in \mathbb{R}_+^L$ , est égal au nombre d'unités de  $\mathbf{g}$  que le décideur est prêt à abandonner pour passer de  $u_0$  à  $\mathbf{x}^1$  :

$$\begin{aligned} b(\mathbf{x}^1, u_0) &= \underset{\beta}{\text{Max}} \beta \\ \text{s.c. } u(\mathbf{x}^1 - \beta \mathbf{g}) &\geq u_0 \\ (\mathbf{x}^1 - \beta \mathbf{g}) &\in \mathbb{R}_+^L \end{aligned}$$

On peut représenter de la façon suivante le bénéfice dans le cas de deux biens ( $L=2$ ) où l'on a supposé que  $\mathbf{g} = (1, 0)$  :



En reprenant la terminologie de Allais, si la situation initiale est en  $\mathbf{x}^0$  (tel que  $u(\mathbf{x}^0) = u_0$ ) alors en passant de la situation  $\mathbf{x}^0$  la situation  $\mathbf{x}^1$ , l'agent reçoit un surplus équivalent à  $b(\mathbf{x}^1, u_0)$  unités du bien 1. En passant de la situation  $\mathbf{x}^0$  à la situation isohédone  $\mathbf{x}^1 - b(\mathbf{x}^1, u_0)g$  on libère un surplus équivalent à  $b(\mathbf{x}^1, u_0)$  unités du bien 1. La fonction de Bénéfice de Luenberger peut donc être considérée comme la fonction dont la valeur est égale au surplus distribuable de Allais.

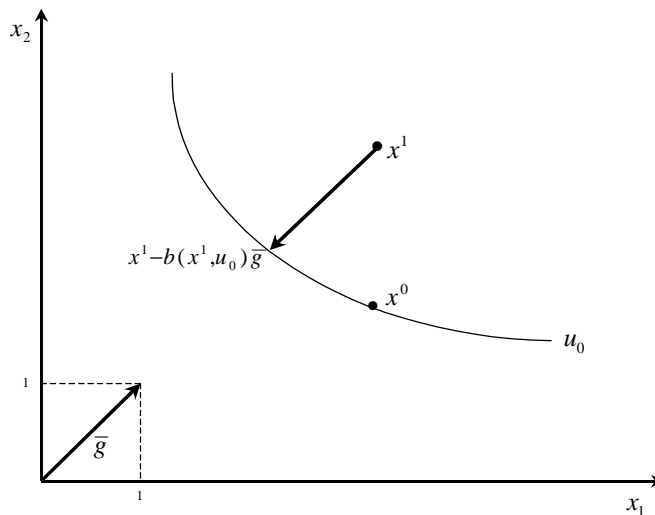
On peut adapter avec Luenberger les définitions des fonctions de bénéfice à un contexte d'incertitude. En effet, il est possible de quantifier l'utilité ou le surplus distribuable d'un agent en situation d'incertitude en comparant les paniers de biens à un panier de bien obtenu avec certitude. Cette généralisation de la fonction de bénéfice nous amène à définir la fonction de bénéfice certain.

S'il y a  $S$  états de la nature, on peut définir le "bénéfice certain" associé à un panier de biens contingents  $\mathbf{x}^1 = (x_1^1, \dots, x_S^1) \in \mathbb{R}_+^{LS}$  de la manière suivante : étant donné un niveau d'utilité initial  $u_0$  et un panier de biens contingents alternatif  $\mathbf{x}^1 = (x_1^1, \dots, x_S^1)$ , le **bénéfice certain** de cette variation est égal par définition à :

$$\begin{aligned} b(\mathbf{x}^1, u_0) &= \text{Max}_{\beta} \beta \\ \text{s.c. } u(\mathbf{x}^1 - \beta \bar{\mathbf{g}}) &\geq u_0 \\ (\mathbf{x}^1 - \beta \bar{\mathbf{g}}) &\in \mathbb{R}_+^{LS} \end{aligned}$$

où  $\mathbb{R}_+^{LS}$  est l'ensemble de consommation et où le panier de référence  $\bar{\mathbf{g}} = (g, \dots, g)$  donne avec certitude au consommateur le panier  $\mathbf{g} \in \mathbb{R}_+^L$ .

$b(\mathbf{x}^1, u_0)$  est donc le nombre de paniers  $\mathbf{g}$  que l'agent serait prêt à donner (avec certitude) de façon à obtenir le panier  $\mathbf{x}^1$ .



Cette définition va nous permettre de généraliser les notions de prix d'achat et de vente. Supposons dans un premier temps que le nombre de biens physiques est  $L=1$  et que le panier de référence est  $\bar{\mathbf{g}} = (1, \dots, 1)$ . Supposons que le bien physique est le bien numéraire. Supposons également un individu dont la richesse initiale  $W_0$  peut-être aléatoire ou certaine et

une loterie  $\tilde{X}$  dont cet individu peut également être en possession ou non. Par définition, le prix d'achat d'une loterie noté  $p_a(\tilde{X}, W_0)$  est le prix maximal qu'un individu est prêt à payer pour obtenir cette loterie sous réserve qu'il puisse effectivement payer ce prix dans tous les états de la nature (i.e. la probabilité de la faillite est nulle) :

$$(1) \quad \begin{cases} p_a(\tilde{X}, W_0) = \underset{\beta}{\text{Max}} \\ \text{s.c. } u(W_0 + \tilde{X} - \beta \bar{g}) \geq u(W_0) \\ W_0 + \tilde{X} - \beta \bar{g} \in \mathbb{R}_+^{LS} \end{cases}$$

Ce prix d'achat est égal au bénéfice certain lié à l'obtention de la variable aléatoire  $\tilde{X}$  et conformément aux notations retenues :

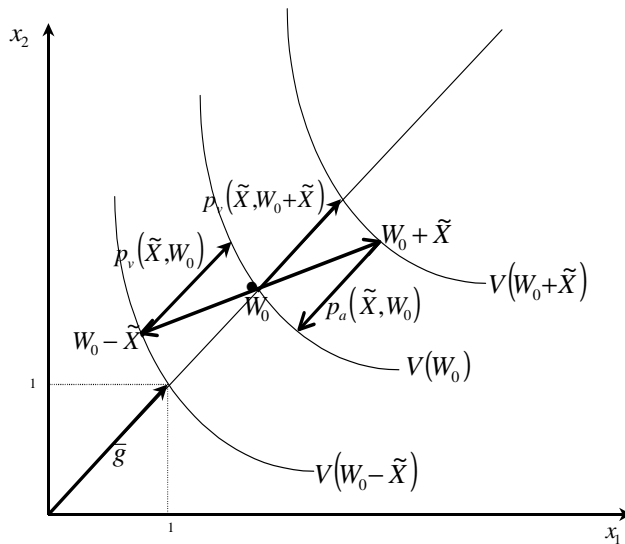
$$(2) \quad p_a(\tilde{X}, W_0) = b(W_0 + \tilde{X}, u(W_0))$$

On peut également exprimer le prix de vente et le prix de vente à découvert d'une loterie en fonction uniquement de la fonction de bénéfice certain :

$$(3) \quad p_v(\tilde{X}, W_0 + \tilde{X}) = -b(W_0, u(W_0 + \tilde{X})) \quad (\text{prix de vente})$$

$$(4) \quad p_v(\tilde{X}, W_0) = -b(W_0 - \tilde{X}, u(W_0)) \quad (\text{prix de vente à découvert})$$

On peut représenter les prix d'achat et de vente d'une loterie par le graphique suivant :



A titre d'illustration, supposons que les préférences sur les variables aléatoires puissent être représentées par une fonction d'utilité moyenne-variance :

$$u(\tilde{X}) = U(E\tilde{X}, \text{Var}\tilde{X})$$

Supposons également que la variable aléatoire de référence  $\bar{g}$  soit la variable certaine qui donne 1 F avec une probabilité égale à 1. On a donc :

$$u(\tilde{X} - \beta \bar{g}) = U(E\tilde{X} - \beta, Var\tilde{X})$$

On peut alors déterminer la fonction de bénéfice associée à la fonction d'utilité moyenne-variance en résolvant le programme suivant :

$$\begin{aligned} b(\tilde{X}, u) &= \underset{\beta}{\text{Max}} \beta \\ \text{s.c. } U(E\tilde{X} - \beta, Var(\tilde{X})) &\geq u \\ \tilde{X} - \beta \bar{g} &\in \mathbb{R}_+^s \end{aligned}$$

Si l'on suppose que l'utilité est une fonction croissante de l'espérance mathématique de gains, la contrainte d'inégalité est saturée à l'optimum. La fonction de bénéfice certain se déduit de l'équation :

$$U(E\tilde{X} - b(\tilde{X}, u); Var\tilde{X}) = u$$

Dans le cas particulier où la fonction d'utilité moyenne-variance est linéaire ( c'est à dire de la forme  $u(\tilde{X}) = E\tilde{X} - \gamma Var\tilde{X}$  ), le bénéfice certain s'écrit :

$$b(\tilde{X}, u) = u(\tilde{X}) - u$$

Les prix d'achat et de vente d'une loterie sont alors donnés par les formules :

$$P_a(\tilde{X}, W_0) = E\tilde{X} - \gamma(Var(\tilde{X}) + 2 Cov(\tilde{X}, W_0))$$

$$P_v(\tilde{X}, W_0 + \tilde{X}) = P_a(\tilde{X}, W_0)$$

$$P_v(\tilde{X}, W_0) = E\tilde{X} - \gamma(2 Cov(W_0, \tilde{X}) - Var(\tilde{X}))$$

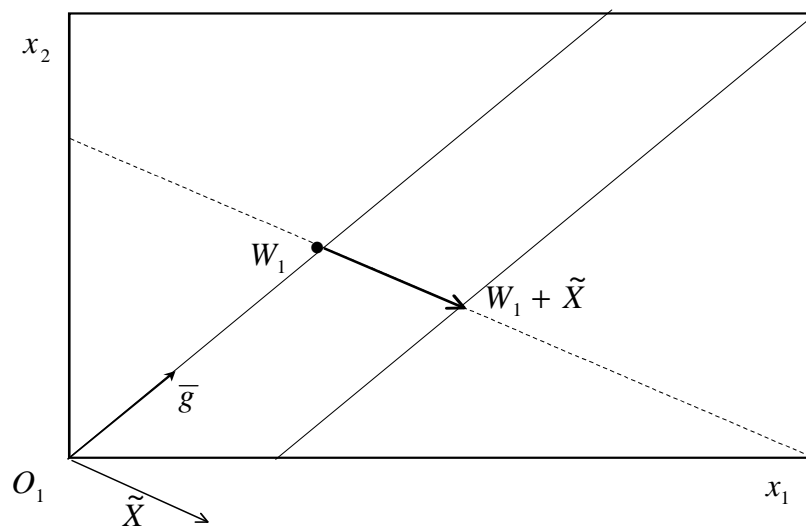


Le prix d'achat d'une loterie est une fonction croissante du rendement de cette loterie, mesuré par l'espérance mathématique de paiement, et une fonction décroissante de son risque, mesuré par la variance du paiement. Par ailleurs, plus la covariance de la loterie avec la richesse initiale de l'agent est faible et plus le prix que l'acheteur est disposé à payer est grand : en effet, la loterie permet à l'agent de se couvrir contre un aléa défavorable sur le montant de sa richesse initiale. Notons qu'avec ce type de fonctions d'utilité, le prix de vente de la loterie est égal au prix d'achat, ce qui n'est pas vrai dans le cas général. Contrairement au prix de vente, le prix de vente à découvert est une fonction croissante du risque car la vente à découvert contribue à accroître le risque de la richesse de l'agent (sauf dans le cas où le paiement de la loterie est positivement corrélé avec la richesse initiale de l'agent).

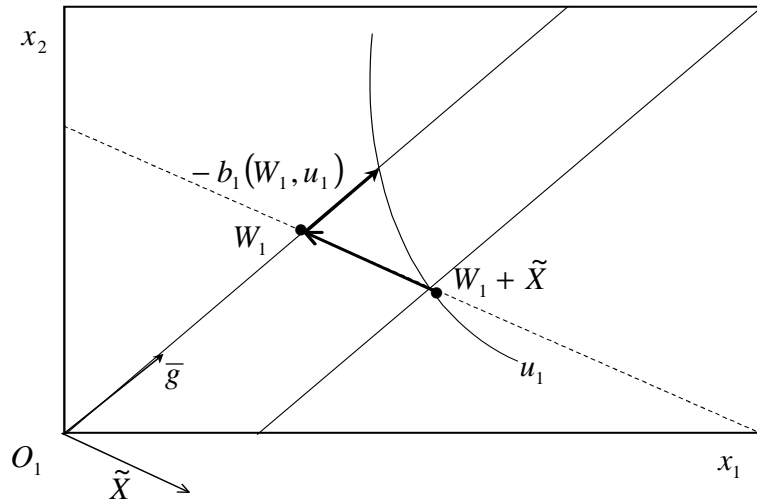
## LE PARTAGE DES RISQUES

Considérons deux individus 1 et 2, un bien physique et deux états de la nature. L'individu 1 est doté d'une loterie  $\tilde{X}$ . Etudions les conditions nécessaires à l'échange de la loterie entre les deux individus. Tout se passe, en fait, comme s'il existait deux biens joints -la loterie et le panier de biens certain- que les agents s'échangent. Le vendeur vend la loterie  $\tilde{X}$  et reçoit en échange une certaine quantité du panier de biens certain  $\bar{g}$ . Notons que dans le cas général on remplacerait les LS biens conditionnels par ces deux biens joints.

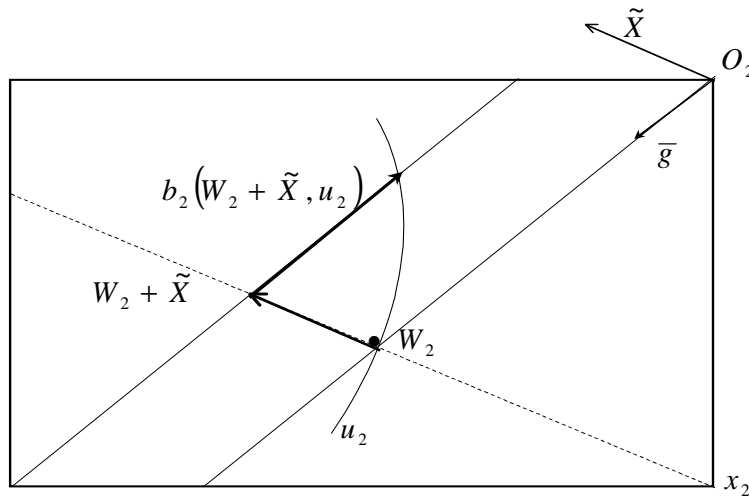
Représentons la situation des agents dans une boîte de Pareto-Edgeworth en supposant que leurs richesses initiales (hors la loterie  $\tilde{X}$ ) sont certaines :



Du point de vue de l'individu 1, la situation initiale des deux agents est représentée dans la boîte de Pareto-Edgeworth par le point  $W_1 + \tilde{X}$ . En effet, puisque la richesse initiale de l'agent 2 est certaine on doit nécessairement se situer sur la droite de certitude de cet agent. Le changement de propriétaire de la loterie  $\tilde{X}$ , lorsque celui-ci s'effectue sur une base autoritaire, c'est à dire sans contrepartie, est représenté graphiquement par le passage du point  $W_1 + \tilde{X}$  au point  $W_1$ . Lorsque cet échange s'effectue sur une base volontaire, on passe de  $W_1 + \tilde{X}$  à un point situé sur la droite de certitude de l'agent 1, mais en général distinct de  $W_1$  et situé sur une courbe d'indifférence au moins aussi haute que  $W_1$ . La différence entre ce point et  $W_1$  représente la somme d'argent transféré de l'agent 2 à l'agent 1 en échange de la loterie.



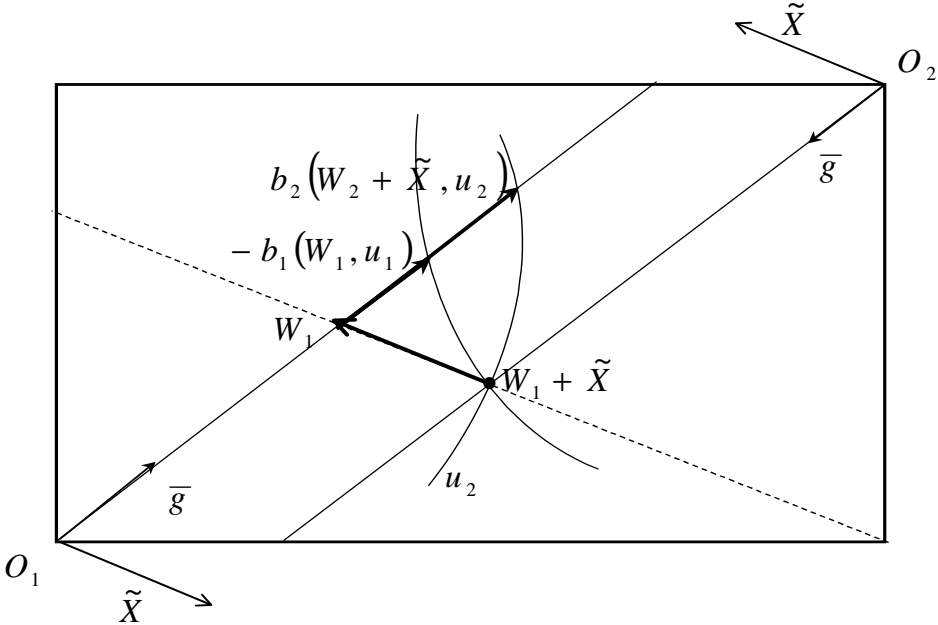
Du point de vue de l'individu 2, son accroissement d'utilité induit par le transfert de la loterie le disposera à verser à l'agent 1 une quantité de bien certain au plus égale à son surplus  $b_2(W_2 + \tilde{X}, u_2)$ .



Tout ce passe donc, en termes de la théorie des surplus, comme si on proposait aux agents le point  $W_1$  (ce qui correspond au point  $(W_2 + \tilde{X})$  dans le système de coordonnées de l'agent 2) compte tenu de leurs niveaux initiaux d'utilité  $u_1(W_1 + \tilde{X})$  et  $u_2(W_2)$ , respectivement. L'agent 1 n'acceptera d'échanger le panier de biens  $W_1 + \tilde{X}$  contre le panier de biens  $W_1$  que si on lui donne (au moins)  $-b_1(W_1, u_1(W_1 + \tilde{X}))$  unités de biens supplémentaires dans chaque état de la nature, alors que l'agent 2 sera prêt à donner (au plus)  $b_2(W_2 + \tilde{X}, u_2(W_2))$ . Les deux agents n'échangeront la loterie que si le prix de vente (ou disposition à recevoir) de l'agent 1

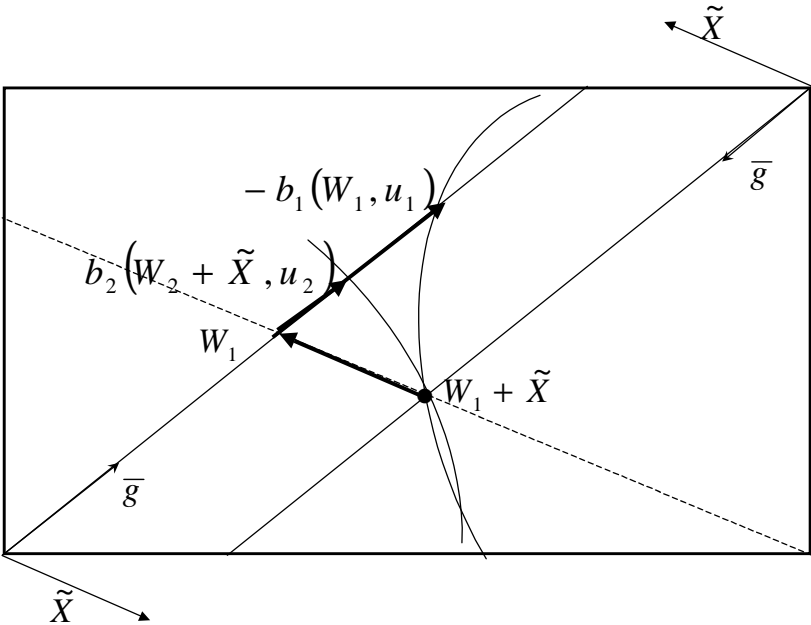
est inférieure au prix d'achat (ou disposition à payer) de l'agent 2, ce qui revient encore à dire que le surplus distribuable total est positif.

Dans le cas suivant, il y aura échange possible de la loterie :



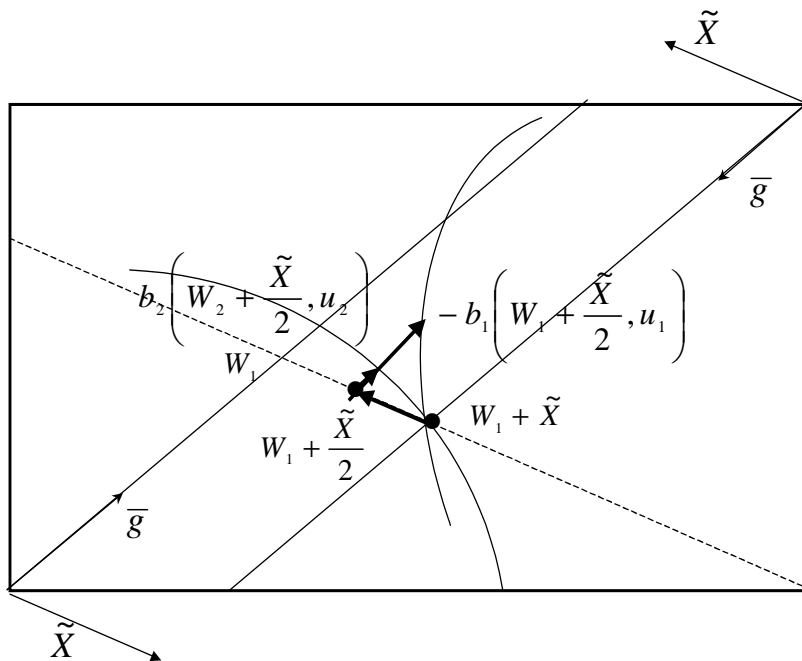
Le surplus total, étant égal à la somme des bénéfices, est représenté par le segment situé dans la lentille, dont la direction est « portée » par le vecteur  $\bar{g}$ . La façon dont le surplus va se répartir entre les deux agents va dépendre des termes de l'échange.

Dans le cas suivant, il n'y aura pas d'échange possible de la loterie :

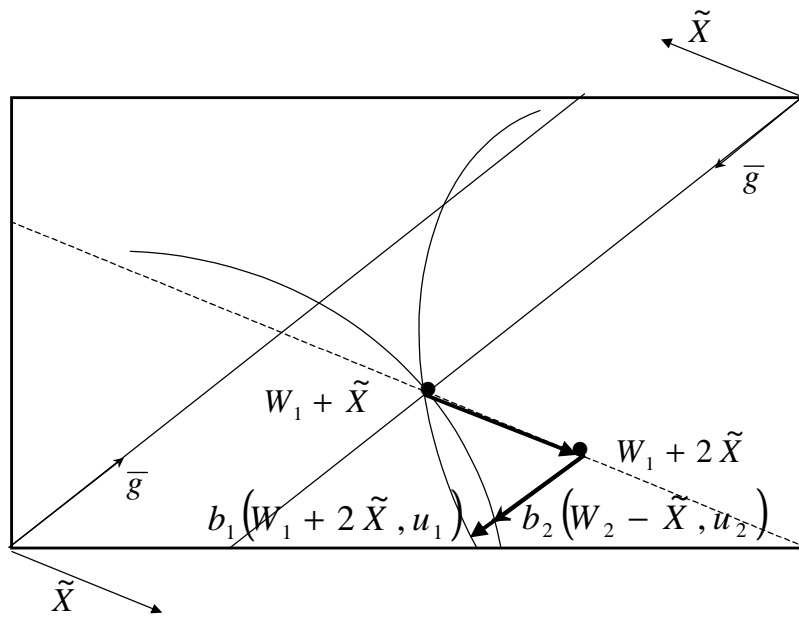


En effet, la disposition à recevoir de l'agent 1 est supérieure à la disposition à payer de l'agent 2 :  $p_a(\tilde{X}, W_2) < p_v(\tilde{X}, W_1 + \tilde{X})$ .

Jusqu'ici, nous avons envisagé le seul cas où l'échange porte sur la loterie dans son intégralité et non le cas où une fraction de la loterie peut être échangée. Néanmoins, même si un tel fractionnement était possible, il n'y aurait malgré tout aucun échange dans le cas envisagé dans le graphique précédent. En effet, la disposition à payer sera toujours inférieure à la disposition à recevoir. Supposons par exemple que l'agent 1 propose la moitié de sa loterie à l'agent 2. Ceci se représente dans la boîte de Pareto-Edgeworth de la manière suivante :



En revanche, si on permet à l'agent 2 de vendre à découvert la loterie, il y aura échange car son prix de vente à découvert sera inférieur au prix d'achat de l'agent 1. Dans le graphique suivant nous supposons que l'agent 2 vend à découvert la loterie  $\tilde{X}$  :

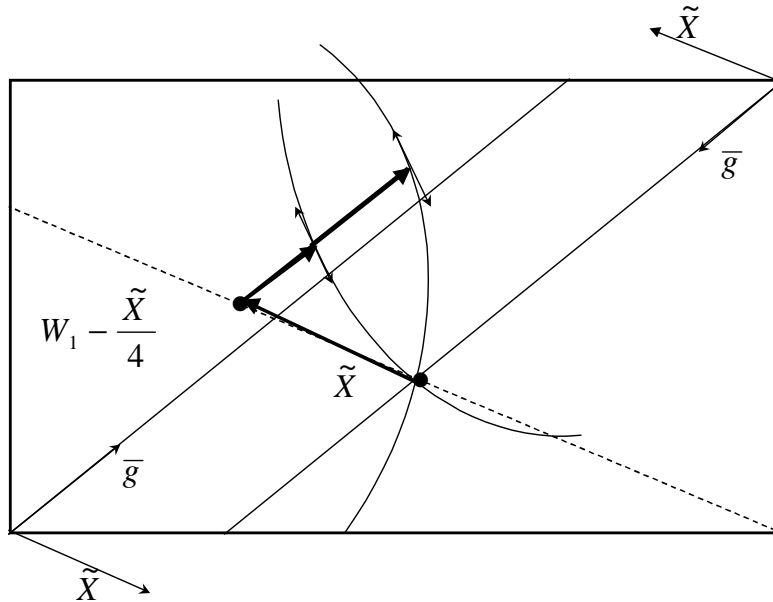


Ainsi lorsque la vente à découvert et le fractionnement sont permis, les échanges possibles de la loterie sont décrits par la droite passant par  $W_1$  et  $W_1 + \tilde{X}$ . Lorsque l'on se situe au-delà de  $W_1 + \tilde{X}$ , l'agent 2 vend la loterie à découvert (c'est à dire qu'il vend à l'agent 1 une quantité de  $\tilde{X}$  supérieure à la quantité qu'il possède). Lorsque l'on se situe entre  $W_1$  et  $W_1 + \tilde{X}$ , l'agent 2 achète une fraction de la loterie à l'agent 1. Enfin, lorsque l'on se situe en deçà de  $W_1$ , l'agent 1 vend à découvert la loterie  $\tilde{X}$ .

Enfin il nous reste à envisager le cas où il n'y a plus d'échange avantageux possible. Dans le cas où la situation initiale correspond à un optimum de Pareto, il n'y a en effet plus d'échange volontaire possible entre les agents. Il apparaît sur le graphique suivant qu'il est impossible de trouver un échange (que ce soit une vente à découvert de la loterie par l'agent 1 ou l'agent 2 ou une vente partielle de la loterie par l'agent 1) qui soit tel que la disposition à payer de l'acheteur soit supérieure à la disposition à recevoir du vendeur :



Dans ce contexte où la vente à découvert et le fractionnement d'une loterie sont possibles on peut montrer, à l'aide du graphique suivant, que la maximisation du surplus total ne conduit pas nécessairement à un optimum de Pareto.



Le surplus, représenté par le segment situé dans la lentille, est maximum, dans le cas où les préférences sont convexes, lorsque les tangentes aux courbes d'indifférence sont parallèles [cf. Allais (1981), p. 461].

Si les courbes d'Engel des deux agents sont des droites de pente unitaire (ce qui implique que les préférences des deux agents sont quasi-homotétiques<sup>2</sup>) alors quelle que soit la façon dont le surplus est réparti entre les agents, l'allocation obtenue par maximisation du surplus distribuable est Pareto optimale. En effet, le long de toute droite de pente unitaire, les taux marginaux de substitution de l'agent  $i$  sont identiques, mais en général différents d'une droite à l'autre et d'un agent à l'autre. Néanmoins, lorsque le surplus total est maximum, les taux marginaux de substitution des deux agents sont égaux. Ainsi quelque soit la façon dont le surplus total sera partagé entre les agents, l'allocation finale sera optimale au sens de Pareto.

Cependant, dans le cas général, à la suite de la maximisation du surplus, les taux marginaux correspondant au partage choisi ne seront pas nécessairement égaux. Les agents sont alors incités à procéder à un nouvel échange. La séquence d'échanges stoppera lorsqu'on aura atteint un optimum de Pareto, où par définition il n'existe plus de surplus distribuable.

<sup>2</sup> Cf. Deaton & Muelbauer (1980) p. 144-145.



On peut généraliser l'approche précédente au cas d'un nombre quelconque d'agents<sup>3</sup>. Soit un acheteur  $i$  ( $i = 2, \dots, I$ ) quelconque achetant une part  $\alpha_i$  de la loterie  $\tilde{X}$  détenue par l'individu 1. Par définition le prix d'achat est donné par l'équation :

$$(5) \quad b_i(W_i + \alpha_i \tilde{X}, u_i(W_i)) = p_a^i(\alpha_i, W_i) \quad i = 2, \dots, I$$

où  $W_i$  est la richesse initiale, éventuellement aléatoire, de l'agent  $i$ . Pour le vendeur 1 le prix de vente de la loterie est donné par :

$$(6) \quad b_1\left(W_1 + \left(1 - \sum_{i=2}^I \alpha_i\right) \tilde{X}, u_1(W_1 + \tilde{X})\right) = -p_v^1\left(1 - \sum_{i=2}^I \alpha_i, (W_1 + \tilde{X})\right)$$

Afin d'homogénéiser les notations, nous allons noter la richesse initiale du vendeur y compris la loterie  $\tilde{W}_1 = W_1 + \tilde{X}$ . On aura donc :

$$b_1(\tilde{W}_1 + \alpha_i \tilde{X}, u_1(\tilde{W}_1))$$

Il s'ensuit que la détention résiduelle de la loterie par l'agent 1 est donnée par

$$(7) \quad \alpha_1 = - \sum_{i=2}^I \alpha_i .$$

Il y aura échange si et seulement si il existe  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_I)$  avec  $\sum_{i=1}^I \alpha_i = 0$  tel que :

$$\sum_{i=1}^I b_i(\tilde{W}_i + \alpha_i \tilde{X}, u_i(\tilde{W}_i)) \geq 0 \quad \text{où } \tilde{W}_i \text{ désigne maintenant la richesse initiale de tout}$$

agent  $i$  (y compris l'agent 1).

Cette condition signifie que la somme des dispositions à payer nette<sup>4</sup> de tous les agents est supérieure à la disposition à recevoir du vendeur

$$\text{puisque dans ce cas on aura } \sum_{i \in A} p_a^i(\alpha_i, \tilde{W}_i) \geq p_v \left( - \sum_{i \in A} \alpha_i, \tilde{W}_j \right).$$

Cherchons donc la répartition des risques  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_I)$  qui maximise le surplus total :

<sup>3</sup> Le cas de l'échange d'une loterie entre deux agents seulement a été analysé, dans le cadre du modèle d'espérance d'utilité par Eeckhoudt & Roger (1994).

<sup>4</sup> Il peut y avoir des agents disposés à vendre à découvert parmi les agents 2 à I.

$$(8) \quad \begin{cases} \text{Max}_{\{\alpha_i\}} \sum_i b_i(\tilde{W}_i + \alpha_i \tilde{X}, u_i(\tilde{W}_i)) \\ \text{s.c.} \sum_i \alpha_i = 0 \quad (\lambda) \end{cases}$$

Les conditions du premier ordre de ce programme s'écrivent :

$$(9) \quad \boxed{\sum_s \frac{\partial b_i(\tilde{W}_i + \alpha_i^* \tilde{X}, u_i(\tilde{W}_i))}{\partial x_{is}} X_s = \lambda \quad \forall i=1, \dots, I}$$

Le surplus total est maximum lorsque la part du risque détenue par chaque agent est telle que la somme des bénéfices marginaux pondérée par le paiement de la loterie est identique pour chaque agent. Or on sait qu'on peut interpréter le bénéfice marginal comme un prix d'état d'après la propriété (iv) de la fonction de bénéfice. La formule signifie donc que la répartition des risques qui maximise le surplus total est telle que la loterie est répartie entre tous les agents de façon à ce qu'ils l'évaluent identiquement.

On sait, qu'une allocation  $\mathbf{x} = (\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_I) \in IR_+^{IS}$  est optimale au sens de Pareto si le bénéfice total est maximum et nul<sup>5</sup>. Par conséquent, une allocation est optimale au sens de Pareto si elle est solution du programme suivant :

$$(10) \quad \begin{cases} \text{Max}_{\{x_i\}_{i=1}^I} \sum_{i=1}^I b_i(x_i, u_i(\tilde{W}_i)) \\ \text{s.c.} \sum_i x_{is} = \sum_i W_{is} \quad s = 1, \dots, S \end{cases}$$

Les conditions du premier ordre s'écrivent :

$$(11) \quad \frac{\partial b_i(x_i^*, u_i(\tilde{W}_i))}{\partial x_{is}} = \mu_s \quad \forall i=1, \dots, I$$

où  $\mu_s$  est le multiplicateur de Lagrange associé à la  $s^{\text{ième}}$  contrainte. On constate ainsi que l'allocation des risques qui maximise le surplus total n'est pas en général un optimum de Pareto puisque conformément à la condition (9) les bénéfices marginaux entre les agents ne sont pas nécessairement égaux. Notons que la condition d'égalité des bénéfices marginaux est l'analogue de la condition d'égalité des taux marginaux de substitutio. Par conséquent la condition (9) peut être interprétée comme la condition d'efficacité contrainte au sens de

<sup>5</sup> Cf. Luenberger (1995) p. 189-192.

Diamond : cela signifie qu'un planificateur qui répartirait lui-même la loterie (et non l'allocation de la richesse finale comme pour le critère de Pareto) de manière à maximiser l'utilité d'un des agents sans diminuer celle des autres ne pourrait faire mieux que l'allocation qui maximise le surplus distribuable total.

Si l'on suppose que les préférences des agents peuvent être représentées par une fonction d'utilité moyenne-variance linéaire, le surplus distribuable de l'agent  $i$  s'écrit :

$$b_i(W_i + \alpha_i \tilde{X}, u_i(\tilde{W}_i)) = \alpha_i E\tilde{X} - \gamma_i [\alpha_i^2 Var\tilde{X} + 2\alpha_i Cov(\tilde{X}, \tilde{W}_i)]$$

La répartition de la loterie entre les différents agents est solution du programme suivant :

$$\begin{cases} \text{Max}_{\{\alpha_i\}_{i=1}^I} E\tilde{X} \sum_{i=1}^I \alpha_i - \sum_{i=1}^I \gamma_i [\alpha_i^2 Var\tilde{X} + 2\alpha_i Cov(\tilde{X}, \tilde{W}_i)] \\ \text{s.c.} \quad \sum_{i=1}^I \alpha_i = 0 \end{cases}$$

Dans le cas où les  $I-1$  premiers agents sont strictement « risquophobes » (au sens d'Arrow-Pratt) et où l'agent  $I$  est « neutre » vis à vis du risque, les conditions du premier ordre s'écrivent :

$$\begin{cases} E\tilde{X} - \gamma_i [2\alpha_i^* Var\tilde{X} + 2Cov(\tilde{X}, \tilde{W}_i)] = \lambda \text{ pour } i = 1, \dots, I-1 \\ E\tilde{X} = \lambda \text{ pour } i = I \\ \sum_{i=1}^I \alpha_i^* = 0 \end{cases}$$

où  $\lambda$  est le multiplicateur de Lagrange associé à la contrainte. On en déduit donc :

$$\alpha_i^* = \frac{-Cov(\tilde{X}, \tilde{W}_i)}{Var\tilde{X}} \text{ pour } i = 1, \dots, I-1$$

$$\alpha_I^* = \frac{Cov\left(\tilde{X}, \sum_{i=1}^{I-1} \tilde{W}_i\right)}{Var\tilde{X}}$$

La répartition de la loterie entre les agents qui maximise le surplus global est telle que la part qui échoit à l'agent  $i$  ( $i=1, \dots, I-1$ ) est positive où négative suivant que la covariance du

rendement de la loterie et de la richesse initiale est négative ou positive, respectivement. En particulier l'agent 1, qui dans les hypothèses de notre modèle est le détenteur initial de la loterie, il s'en défait dans son intégralité quand le risque de la loterie n'est pas corrélé avec les autres composantes de sa richesse initiale. En effet, dans ce cas  $Cov(\tilde{X}, \tilde{W}_1) = Var \tilde{X}$ . Enfin, la demande de l'agent I, « neutre vis à vis du risque », est résiduelle.

Les agents vont gagner ou perdre à l'échange selon que leur surplus est positif ou négatif. Le surplus pour l'agent  $i$  s'écrit :

$$b_i(\tilde{W}_i + \alpha_i^* \tilde{X}, u_i(\tilde{W}_i)) = \frac{-Cov(\tilde{X}, \tilde{W}_i)}{Var \tilde{X}} [E\tilde{X} - \gamma_i Cov(\tilde{X}, \tilde{W}_i)]$$

Si la loterie est négativement corrélée avec la richesse de l'agent  $i$  ; le surplus, pour cet agent sera positif. En effet, la loterie permet à l'agent  $i$  de se couvrir contre le risque. En revanche, si la loterie est positivement corrélée avec la richesse de l'agent, le signe du surplus est indéterminé : d'un côté l'agent réduit son risque en se débarrassant de la loterie et d'un autre côté il diminue son espérance mathématique de rendement. Il est donc possible que pour certains des offreurs il ne soit pas avantageux de se débarrasser de la loterie.

L'allocation qui maximise le surplus distribuable total n'est pas un optimum de Pareto. En effet, on sait que lorsqu'il existe un agent neutre vis à vis du risque, il est optimal au sens de Pareto que cet agent neutre vis à vis risque supporte tout le risque et que la richesse des agents risquophobes ne soit pas risquée<sup>6</sup>. Or la répartition de la loterie qui maximise le surplus global ne conduit pas à une allocation certaine pour les agents risquophobes. Ainsi il est clair que l'allocation qui maximise le surplus global n'est pas optimale au sens de Pareto.

Cependant, l'allocation qui maximise le surplus total ne sera acceptée par l'ensemble des agents que s'il est possible de dédommager les agents qui perdent à l'échange. Or ceci ne sera possible que si le surplus distribuable total est positif. Montrons donc que l'échange génère un surplus distribuable total positif :

---

<sup>6</sup>cf Eeckhoudt & Gollier (1992), p. 207.

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^I b_i(\tilde{W}_i + \alpha_i^* \tilde{X}, u_i(\tilde{W}_i)) &= E\tilde{X} \sum_{i=1}^I \alpha_i^* - \sum_{i=1}^I \gamma_i (\alpha_i^{*2} \text{Var } \tilde{X} + 2\alpha_i^* \text{Cov}(\tilde{X}, \tilde{W}_i)) \\ &= \sum_{i=1}^I \gamma_i \frac{\text{Cov}^2(\tilde{X}, \tilde{W}_i)}{\text{Var } \tilde{X}} \geq 0 \end{aligned}$$

Supposons qu'il existe maintenant un nombre  $N$  de loteries à répartir entre les  $I$  agents. La répartition  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_I) \in IR^J$  des loteries qui maximise le surplus global est solution du programme suivant :

$$(12) \quad \begin{cases} \text{Max}_{\{\alpha_{ij}\}_{i=1, \dots, I, j=1, \dots, N}} \sum_{i=1}^I b_i \left( \tilde{W}_i + \sum_{j=1}^N \alpha_{ij} \tilde{X}_j, u_i(\tilde{W}_i) \right) \\ \text{s.c.} \quad \sum_{i=1}^I \alpha_{ij} = 0 \quad j=1, \dots, N \end{cases}$$

Les conditions du premier ordre sont nécessaires et suffisantes lorsque les fonctions d'utilité des agents sont quasi-concaves<sup>7</sup>.

$$(13) \quad \sum_{s=1}^S \frac{\partial b_i}{\partial x_{ij}} \left( \tilde{W}_i + \sum_{j=1}^N \alpha_{ij}^* \tilde{X}_j, u_i(\tilde{W}_i) \right) X_{js} = \lambda_j$$

$$j=1, \dots, N$$

$$i=1, \dots, I$$

Si l'on suppose que le nombre de loteries (supposées indépendantes) est égal au nombre d'état de la nature ; on peut alors inverser la matrice des paiements des loteries.

---

<sup>7</sup> En effet, on sait que dans ce cas les fonctions de bénéfice certain sont concaves.(c. f. Luenberger (1995) proposition 4.3 page 100).

$$(14) \quad \begin{pmatrix} \frac{\partial b_i(\cdot)}{\partial x_{i1}} \\ \frac{\partial b_i(\cdot)}{\partial x_{is}} \\ \frac{\partial b_i(\cdot)}{\partial x_{iS}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_{11} & X_{1s} & X_{1S} \\ X_{j1} & X_{js} & X_{jS} \\ X_{N1} & X_{Ns} & X_{NS} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_j \\ \lambda_N \end{pmatrix}$$

$$i=1, \dots, I$$

On a donc pour tout  $i \neq j$  :

$$(15) \quad \frac{\partial b_i(\cdot)}{\partial x_{is}} = \frac{\partial b_j(\cdot)}{\partial x_{js}} \quad \forall s=1, \dots, S$$

Ce qui prouve que l'allocation qui maximise le surplus total est un optimum de Pareto.

## CONCLUSION

Nous avons vu que les notions de prix de vente et de prix d'achat d'une loterie permettent d'expliquer de façon très simple la raison pour laquelle les optima de Pareto peuvent être caractérisés à partir de la notion de surplus distribuable. En effet, par définition, en un optimum de Pareto il n'existe pas d'échange mutuellement bénéfique entre les acheteurs et les vendeurs. Le prix de réservation des acheteurs est donc inférieur au prix de réservation des vendeurs ce qui revient à dire que le surplus distribuable est négatif.

Réciproquement, cette notion de surplus distribuable permet de démontrer très simplement un grand nombre de résultats relatifs au partage des risques. Nous avons généralisé le principal résultat d'Eeckhoudt et Roger (1994) en montrant que lorsque les risques sont partagés de façon à maximiser le surplus distribuable total les agents supportent une part du risque telle que la valeur actualisée du risque supporté par chaque agent est la même pour tous les agents. Nous avons également montré que lorsque le nombre de loteries indépendantes est égal au nombre d'états de la nature la maximisation du surplus total conduit à une allocation optimale au sens de Pareto.

Les propriétés d'efficacité de la maximisation du surplus total sont donc identiques à celles de l'allocation d'équilibre du modèle de Arrow (1953) où les agents peuvent transférer du revenu d'une période à une autre et d'un état de la nature à un autre en achetant et en vendant des actifs financiers et non comme dans le modèle Arrow-Debreu en échangeant des contrats de biens conditionnels. On peut donc espérer montrer l'équivalence entre l'allocation des loteries qui maximisent le surplus total et l'allocation d'équilibre des actifs financiers du modèle de Arrow (1953). Ceci reviendrait à généraliser<sup>8</sup> un résultat établi par Luenberger (1995) relatif à l'équivalence entre l'allocation des biens qui maximisent le surplus total et l'allocation des biens d'équilibre du modèle Arrow-Debreu.

---

<sup>8</sup> On sait en effet que le modèle de Arrow est équivalent au modèle d'Arrow-Debreu lorsque les marchés financiers sont complets.

## REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

**Allais, M.** (1943), *A la Recherche d'une discipline économique*, Imprimerie Nationale

**Allais, M.** (1981), *La théorie générale des surplus*, Presses Universitaires de Grenoble.

**Arrow, K. J.** (1953), "Le rôle des valeurs boursières pour la répartition la meilleure des risques", p. 41-48, *Econométrie*, CNRS, Paris.

**Deaton, A. & Muelbauer, J.** (1980), *Economics and Consumer Behavior*, C.U.P.

**Eeckhoudt, L. & Gollier, C.** (1992), *Le partage des risques*, Ediscience international.

**Eeckhoudt, L. & Roger, P.** (1994), "Partage des risques et création de valeur ajoutée", *Revue économique*, 45, p. 1-20.

**Luenberger D. G.** (1995), *Microeconomic Theory*, Mc Graw-Hill.