



**HAL**  
open science

## Un MEDAF à plusieurs moments réalisés

Christophe Hurlin, Patrick Kouontchou, Bertrand Maillet

► **To cite this version:**

Christophe Hurlin, Patrick Kouontchou, Bertrand Maillet. Un MEDAF à plusieurs moments réalisés. 2010. halshs-00482370

**HAL Id: halshs-00482370**

**<https://shs.hal.science/halshs-00482370>**

Submitted on 10 May 2010

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



# Documents de Travail du Centre d'Économie de la Sorbonne

C  
E  
S  
W  
o  
r  
k  
i  
n  
g  
P  
a  
p  
e  
r  
s



**“Un MEDAF à plusieurs moments réalisés”**

Christophe HURLIN, Patrick KOUONTCHOU, Bertrand MAILLET

**2010.33**



# “Un MEDAF à plusieurs moments réalisés”\*

Christophe Hurlin<sup>†</sup>

Patrick Kouontchou<sup>‡</sup>

Bertrand Maillet<sup>§</sup>

Avril 2010

## Résumé

Cet article généralise l’approche de Bollerslev et Zhang (2003) qui consiste à utiliser des mesures et co-mesures de risque “réalisées” pour l’estimation des sensibilités dans les modèles d’évaluation des actifs financiers. Nous proposons ici d’étendre cette approche en introduisant les moments d’ordre supérieur et développons des méthodologies d’estimation visant à neutraliser les erreurs de spécification et de modèle. A partir d’une base de données des prix de haute fréquence du marché français des actions, nous établissons que le recours à des mesures réalisées d’ordre supérieur contribue à améliorer l’ajustement global aux données de marché.

**Mots clés :** moments réalisés, MEDAF, données de haute fréquence, estimations robustes.

**Classification JEL :** C3; C4; C5; G1.

## Abstract

This paper generalizes the Bollerslev and Zhang (2003) approach for the estimation of loadings of asset pricing models using “realized” measures and co-measures of risk. We propose here to extend this approach by including higher-moments in asset pricing models. Estimations are conducted using several methodologies aiming to neutralize data measurement and model misspecification errors, explicitly dealing with the interrelations between financial asset returns. An empirical application performed on a high-frequency French stock price database shows that realized higher-moment measures contribute to improve the global adjustment of the extended model with market data.

**Keywords:** Realized Moments, CAPM, High-frequency Data, Robust Estimation.

**JEL Classification:** C3; C4; C5; G1.

---

\*Nous remercions Christophe Boucher, Thierry Chauveau, Gilbert Colletaz, Jean-Philippe Médecin, Grégory Jannin, Tristan Roger et Sessi Tokpavi pour leur aide, encouragements, suggestions et corrections. Nos remerciements vont également aux participants du séminaire de finance du LEO (Orléans, mai 2009) et des conférences internationales de l’AFSE (Paris, septembre 2008), de l’AFFI (Brest, mai 2009) et du GdR-CNRS “Monnaie Banque Finance” (Orléans, juin 2009). Le troisième auteur remercie l’Institut Europlace de Finance pour son soutien financier.

<sup>†</sup>Université d’Orléans (LEO / CNRS). Email : christophe.hurlin@univ-orleans.fr.

<sup>‡</sup>Variations et Université de Paris-1 (CES / CNRS). Email : patrick.kouontchou@univ-paris1.fr.

<sup>§</sup>A.A.Advisors-QCG (ABN AMRO), Variations et Université de Paris-1 (CES / CNRS et IEF). Correspondance à Dr B. Maillet, MSE, CES/CNRS, 106-112 Bd de l’Hôpital F-75647 Paris Cedex 13. Tél./fax : 0144078268/70. Email : bmaillet@univ-paris1.fr.

# “Un MEDAF à plusieurs moments réalisés”

Avril 2010

## Résumé

Cet article généralise l’approche de Bollerslev et Zhang (2003) qui consiste à utiliser des mesures et co-mesures de risque “réalisées” pour l’estimation des sensibilités dans les modèles d’évaluation des actifs financiers. Nous proposons ici d’étendre cette approche en introduisant les moments d’ordre supérieur et développons des méthodologies d’estimation visant à neutraliser les erreurs de spécification et de modèle. A partir d’une base de données des prix de haute fréquence du marché français des actions, nous établissons que le recours à des mesures réalisées d’ordre supérieur contribue à améliorer l’ajustement global aux données de marché.

**Mots clés :** moments réalisés, MEDAF, données de haute fréquence, estimations robustes.

**Classification JEL :** C3; C4; C5; G1.

## Abstract

This paper generalizes the Bollerslev and Zhang (2003) approach for the estimation of loadings of asset pricing models using “realized” measures and co-measures of risk. We propose here to extend this approach by including higher-moments in asset pricing models. Estimations are conducted using several methodologies aiming to neutralize data measurement and model misspecification errors, explicitly dealing with the interrelations between financial asset returns. An empirical application performed on a high-frequency French stock price database shows that realized higher-moment measures contribute to improve the global adjustment of the extended model with market data.

**Keywords:** Realized Moments, CAPM, High-frequency Data, Robust Estimation.

**JEL Classification:** C3; C4; C5; G1.

# “Un MEDAF à plusieurs moments réalisés”

## 1 Introduction

Le Modèle d'Évaluation Des Actifs Financiers (MEDAF ou *Capital Asset Pricing Model*, *CAPM* en anglais) de Sharpe (1964), Lintner (1965) et Mossin (1966) marque la naissance de la théorie de l'évaluation des actifs financiers. Il offre de manière théorique des outils d'évaluation du prix des actifs et il fournit une relation supposée stable entre les rentabilités espérées et le risque supporté. Ce modèle postule que les rentabilités espérées des actifs sont des fonctions linéaires des covariances et des facteurs de risques liés au marché (risques systématiques). Cependant, la plupart des tests empiriques proposés jusqu'ici ont produit des résultats ambigus. Shanken (1992), Kan et Zhang (1999a et 1999b) ont par exemple montré, en utilisant des méthodologies de test dites robustes, que les résultats d'estimations et d'ajustements pouvaient varier sensiblement en fonction du modèle utilisé. Cette variabilité est due, d'une part, au choix de modèles incomplets et de processus d'estimation non conformes dans les tests empiriques, et d'autre part, aux faibles seuils de tolérance souvent utilisés, entraînant ainsi un manque de puissance des tests (*Cf.* Kan et Zhou, 1999).

Pour améliorer la qualité des modélisations et traiter les anomalies de marché, un certain nombre de facteurs explicatifs supplémentaires ont été proposés dans la littérature. Ces facteurs ou sources de risques sont mis en évidence par le modèle multi-facteurs *APT* (pour *Arbitrage Pricing Theory* en anglais) de Ross (1976). Les facteurs de ce modèle peuvent être estimés de manière statistique à partir de l'information disponible sur l'évolution des prix (Analyse en composantes Principales, Analyse en Composantes Indépendantes, . . .) ou prédéterminés à partir des variables propres à la firme ou aux variables macro-économiques (le taux de change, le taux d'inflation, les indices d'activité industrielle. . .). Plusieurs variantes de ce modèle ont été testées dans la littérature. En premier lieu, Banz (1981) trouve une relation significative entre les rentabilités des actions et la taille des sociétés; par la suite, Fama et French (1993) mettent en évidence un lien entre la rentabilité espérée, la taille et

le ratio de la valeur réelle de la firme sur la valeur boursière. Bien que la pertinence de ces spécifications augmentées soit toujours discutée, il est évident que le simple cadre moyenne-variance du MEDAF est insuffisant pour caractériser les comportements réels des agents sur les marchés.

En second lieu, les contributions proposées considèrent seulement une stratégie moyenne-variance où l'investisseur construit son portefeuille avec des actifs risqués et l'actif sans risque. Or, le critère moyenne-variance suppose implicitement que les rentabilités sont distribuées selon une loi normale ou que les investisseurs sont représentés par des fonctions d'utilité quadratiques. Les moments les plus élevés (au delà de la moyenne et de la variance) ne sont donc pas, sous ces hypothèses, pertinents pour l'allocation et l'évaluation des prix des actifs. On constate cependant empiriquement que les distributions des variables financières présentent le plus souvent de fortes particularités. Il est aujourd'hui reconnu que les rentabilités de la plupart des actifs financiers ont des queues de distribution épaisses, sont asymétriques et sont marquées par des phénomènes de regroupement des volatilités conditionnelles (*clustering*). Il est donc important de prendre en compte ces caractéristiques à l'aide des modèles plus complets et de méthodologies d'estimation robustes et adaptées.

Rubinstein (1973), Kraus et Litzenberger (1976), Barone-Adesi (1985), Harvey et Siddique (2000), Barone-Adesi *et alii* (2003) et Galagedera et Maharaj (2008), parmi d'autres, ont depuis lors proposé des modèles d'évaluation alternatifs non-normaux en intégrant un facteur non-linéaire fondé sur une mesure de l'asymétrie de la distribution des rentabilités. Kraus et Litzenberger (1976) et Harvey et Siddique (2000) stipulent ainsi que les rentabilités espérées sont fonctions non seulement de la covariance et des facteurs liés à la firme, mais aussi de la variabilité du portefeuille de marché. Ils montrent empiriquement que l'asymétrie de la distribution des rentabilités du portefeuille de marché a une influence significative sur les variations des rentabilités des actifs. Toutefois, si le pouvoir explicatif des modèles étendus aux moments d'ordre supérieur semble plus élevé que celui des modèles classiques, il reste néanmoins faible sur des données de basse fréquence (journalières, hebdomadaires ou mensuelles). Dès lors, la question se pose de savoir comment améliorer la qualité d'ajustement de ces modèles étendus.

Dans ce papier, nous proposons une piste originale, inspirée des travaux de Bollerslev et Zhang (2003), qui consiste à utiliser l'information contenue dans les données de haute

fréquence pour améliorer la qualité d'ajustement, sur des données de basse fréquence, des modèles d'évaluation. Plus spécifiquement, nous proposons un modèle d'évaluation des actifs étendu aux moments d'ordre supérieur, ceux-ci étant approchés par des mesures et co-mesures de risque "réalisées", et non plus estimées de façon traditionnelle sur des données quotidiennes.

En effet, plusieurs études se sont intéressées aux caractéristiques statistiques des données de haute fréquence depuis la disponibilité (récente) de bases de données de transactions sur certains marchés financiers (*Cf.* Kunitomo, 1992 ; Dacorogna *et alii*, 2001 ; Corsi *et alii*, 2001 ; Griffin et Oomen, 2008), et aux estimations des paramètres des modèles de basse fréquence à partir des données de haute fréquence (*Cf.* Andersen et Bollerslev, 1998 ; Andersen *et alii*, 2002 ; Barndorff-Nielsen et Shephard, 2002a ; Bollerslev et Zhang, 2003 ; Brandt et Diebold, 2004). Ce choix de données de haute fréquence est essentiellement motivé par le fait qu'elles sont proches des séries continues, et qu'elles permettent de converger vers des "vrais" processus générateurs des prix (*Cf.* Dacorogna *et alii*, 2001).

La première statistique empirique étudiée dans la littérature en économétrie financière, a été le moment d'ordre deux (la volatilité, *Cf.* Andersen *et alii*, 2002 ; Barndorff-Nielsen et Shephard, 2002a ; Zumbach *et alii*, 2002). La volatilité instantanée d'une journée est alors approximée par la somme des carrés des rentabilités intra-journalières (volatilité "réalisée"). Cette approche, utilisant des données de haute fréquence, fournit à l'évidence des possibilités très larges pour l'étude des fluctuations et leur persistance dans les modèles conditionnels grâce aux calculs des covariances conditionnelles des rentabilités des actifs individuels. Bollerslev et Zhang (2003) s'inspirent de cette définition de la volatilité pour proposer une estimation des bêtas réalisés avec des données intra-journalières. Ils montrent que les mesures et les co-mesures réalisées sont plus précises pour l'évaluation des risques systématiques dans les modèles à facteurs par rapport aux modèles classiques. Cependant, à notre connaissance, aucune étude n'a encore proposé une extension des mesures aux moments réalisés d'ordre supérieur. C'est précisément ce que nous traitons dans cet article.

Afin de mieux exploiter l'information apportée par l'introduction de moments d'ordre supérieur, les estimations des paramètres des modèles d'évaluation sont menées à l'aide de méthodologies qui permettent de neutraliser en partie les erreurs de spécification et de mesure de données (*Cf.* Scholes et Williams, 1977 ; Hodrick et Zhang, 2001), tout en tenant compte

des inter-relations entre les actifs financiers (méthodes d'équations simultanées proposées par Zellner, 1962; et correction de Parks - *Cf.* Parks, 1967; Foschi et Kontoghiorghes, 2003).

Cet article est organisé de la manière suivante. La section 2 présente une brève description générale des modèles d'évaluation à facteurs des actifs financiers, ainsi que les notions de sensibilités réalisées. Dans la section 3, l'approche des moments réalisés d'ordre supérieur est développée. La section 4 fournit les principaux résultats sur les estimations (statiques et dynamiques) et elle examine l'apport de l'approche proposée par rapport aux méthodes classiques. La section 5 conclut et suggère des pistes de recherches futures.

## 2 Modèle à facteurs et co-variations réalisées

Dans cette section, nous introduisons les formulations économétriques nécessaires à l'étude du MEDAF réalisé. Nous supposons qu'à chaque instant les rentabilités des actifs sont linéairement liées à certains facteurs caractérisant le marché. Les sensibilités associées à ces facteurs de marché doivent, en théorie, pouvoir être estimées directement sur des données mesurées à haute fréquence (*Cf.* Bollerslev et Zhang, 2003). Nous présentons tout d'abord le cadre général des modèles à facteurs, puis nous développons les méthodes de calcul des bêtas et co-moments réalisés. Enfin, nous réalisons une première application sur le marché français des actions.

### 2.1 Le modèle à facteurs

Les modèles à facteurs (Ross, 1976) sont parmi les modèles les plus utilisés dans la littérature pour caractériser des processus générateurs de rentabilités. Ils définissent les inter-relations entre les rentabilités et un ensemble restreint de variables appelées "facteurs". Nous supposons que le processus générateur des rentabilités est un modèle à  $K$ -facteurs. Spécifiquement, soit  $\mathbf{R} = (R_1, R_2, \dots, R_N)$ , la matrice des  $N$  rentabilités des différents titres, et soit  $\mathbf{F} = (F_1, F_2, \dots, F_K)$ , la matrice des  $K$  rentabilités des différents facteurs. Nous notons  $r_f$  la rentabilité de l'actif sans risque. Les matrices des rentabilités excédentaires et des facteurs sont respectivement données par  $\mathbf{r} = \mathbf{R} - r_f$  et  $\mathbf{f} = \mathbf{F} - r_f$ . Avec les notations précédentes, les rentabilités excédentaires de l'actif  $i$  (notés  $r_i$ ) sont définies par le modèle à



facteurs suivant :

$$r_i = \alpha_i + \sum_{k=1}^K \beta_{ik} f_k + \varepsilon_i, \quad \forall i \in \{1, \dots, N\}. \quad (1)$$

Sous forme matricielle<sup>1</sup>, le modèle s'écrit :

$$\mathbf{r} = \mathbf{A} + \mathbf{B} \mathbf{f}' + \mathbf{e}, \quad (2)$$

où  $\mathbf{B} = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_K)$  est la matrice des  $(N \times K)$  bêtas,  $\mathbf{f} = (f_1, f_2, \dots, f_K)$  la matrice des  $(T \times K)$  facteurs,  $\mathbf{A} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N)$  le vecteur des  $(N \times 1)$  constantes du modèle et  $\mathbf{e} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_N)$  la matrice des  $(T \times N)$  termes résiduels d'espérance 0 contenant les informations non capturées par les facteurs<sup>2</sup>.

La motivation sous-jacente à l'utilisation des facteurs est la prise en compte de la multitude des risques rencontrés sur les marchés. Le modèle mono-factoriel ne permet pas d'intégrer toutes les sources de risque potentielles. En particulier, le risque de liquidité et les risques opérationnels ou spécifiques, qui peuvent venir de l'hétérogénéité des informations disponibles sur les marchés, sont difficilement pris en compte. Il apparaît donc opportun de supposer que des variables additionnelles peuvent améliorer, au moins localement, le pouvoir explicatif du modèle en captant les informations non prises en compte par le marché. Cette forme de modèle à facteurs est la plus générale et elle permet de retrouver d'autres modèles classiques comme des cas particuliers. Le bêta  $\beta_{ik}$  de l'actif  $i$  par rapport au facteur  $k$  du modèle (2) est alors estimé par (Cf. Bollerslev et Zhang, 2003) :

$$\hat{\beta}_{ik} = \frac{\widehat{cov}(r_i, f_k)}{\hat{\sigma}_{f_k}^2}, \quad (3)$$

où  $\widehat{cov}(r_i, f_k)$  est la covariance empirique entre les  $r_i$  et les  $f_k$ ,  $\hat{\sigma}_{f_k}^2$  est la variance estimée de  $f_k$ , pour tout actif  $i \in \{1, \dots, N\}$  et facteur  $k \in \{1, \dots, K\}$ .

Cette approche d'estimation des sensibilités de chaque facteur est généralement celle employée pour les modèles à facteurs (Cf. Barone-Adesi *et alii*, 2003 ; Galagedera et Maharaj,

---

<sup>1</sup>Le modèle ci-dessus est une extension du modèle de marché (Cf. Sharpe, 1964 ; Lintner, 1965 ; Mossin, 1966), qui correspond au modèle à un seul facteur (le facteur de marché) :  $r_i = \alpha + \beta_i r_M + \varepsilon_i$ , avec  $\beta_i$  la sensibilité au portefeuille de marché de l'actif  $i$  et  $r_M$  le rentabilité du portefeuille de marché.

<sup>2</sup>Suivant l'équation (2), l'espérance de  $\mathbf{r}$  est donnée par  $E(\mathbf{r}) = \mathbf{A} + \mathbf{B}E(\mathbf{f})'$  et sa variance par  $Var(\mathbf{r}) = \mathbf{B}'\Sigma_{\mathbf{f}}\mathbf{B} + \sigma_{\mathbf{e}}^2$ , où  $\Sigma_{\mathbf{f}}$  et  $\sigma_{\mathbf{e}}^2$  sont respectivement la matrice de variance-covariance des facteurs  $\mathbf{f}$  et la variance des résidus  $\mathbf{e}$ . Les termes  $\beta_{ik}$  composant la matrice  $\mathbf{B}$  doivent être égaux à 0 si l'actif  $i$  n'est pas exposé au facteur  $k$ .

2008). Cependant, les tests empiriques effectués avec des données de marchés ne permettent pas, le plus souvent, de valider le modèle (2). Il est observé notamment que les coefficients de détermination des différents actifs sont très faibles. Pour y remédier et dans le but d'améliorer la qualité d'ajustement des bêtas, Bollerslev et Zhang (2003) proposent l'utilisation des moments dits "réalisés" en lieu et place des moments estimés selon la méthode usuelle.

## 2.2 Les facteurs et co-mouvements réalisés

Afin d'améliorer la précision des estimateurs de volatilité des actifs, une solution consiste à utiliser l'information contenue dans les données de haute fréquence. Cette approche repose sur la définition d'une volatilité "réalisée", introduite dans une série d'articles de Andersen et Bollerslev (1998), de Andersen *et alii* (2002) et de Barndorff-Nielsen et Shephard (2002a et 2002b). L'idée sous-jacente est d'estimer la volatilité de basse fréquence à partir de la somme des rentabilités intra-journalières élevées au carré. Bollerslev et Zhang (2003) proposent d'utiliser cette méthodologie pour l'estimation des matrices de variance-covariance et de corrélation entre les rentabilités des actifs.

Suivant Barndorff-Nielsen et Shephard (2002a), Bollerslev et Zhang (2003), et Morana (2007), nous supposons, en premier lieu, que les rentabilités intra-journalières existent de manière continue; dans ce cas, une journée peut être découpée en  $1/h$  sous-périodes, où  $1/h$  est un nombre entier. Soit  $p_{t-1+jh}$  le logarithme du prix d'un actif (par souci de simplicité, nous ne considérons pas d'indice  $i$ ) à la sous-période  $j$  de la date  $t$ , pour tout  $j \in \{2, 3, \dots, 1/h\}$  et  $t \in \{1, 2, \dots, T\}$ . La rentabilité correspondante est alors donnée par la relation  $r_{t-1+jh,h} = p_{t-1+jh} - p_{t-1+(j-1)h}$ . Le modèle à facteurs sur les rentabilités intra-journalières de chaque actif a la même structure que l'équation (2); il est défini par la relation suivante :

$$r_{t-1+jh,h} = \alpha_t + \sum_{k=1}^K \beta_{tk} f_{t-1+jh,kh} + \varepsilon_{t-1+jh,h}, \quad (4)$$

où  $f_{t-1+jh,kh}$  est la rentabilité du facteur  $k$  pour la sous-période  $j$  à la date  $t$ ,  $\varepsilon_{t-1+jh,h}$  est le vecteur des résidus, avec  $E(\varepsilon_{t-1+jh,h}) = 0$ .

L'agrégation temporelle uni-périodique des rentabilités  $r_t$  définies par l'équation (4) donne, pour chaque actif, la même rentabilité que celle définie par l'équation (2). En effet, les rentabilités à la date  $t$  sont définies, suivant le découpage proposé, par la somme des rentabilités intra-journalières, *i.e.*  $r_t = \sum_{j=2}^{1/h} r_{t-1+jh,h}$ . Les résidus sont agrégés de la même manière, *i.e.*

$$\varepsilon_t = \sum_{j=2}^{1/h} \varepsilon_{t-1+jh,h}.$$

A partir de la décomposition intra-journalière des rentabilités, Andersen *et alii* (2002), Barndorff-Nielsen et Shephard (2002a) et Bollerslev et Zhang (2003) proposent une estimation de la matrice de variance-covariance journalière par la somme des produits des rentabilités intra-journalières. Cette matrice de variance-covariance est dite “réalisée” car la “vraie” matrice n’est pas observable directement. A partir de la théorie des variations quadratiques<sup>3</sup>, cette matrice de variance-covariance réalisée ( $RC$ ) est estimée, avec les notations précédentes, par :

$$\widehat{RC}(r_{t,h}, f_{t,kh}) = \sum_{j=2}^{1/h} f_{t-1+jh,kh} r_{t-1+jh,h}. \quad (5)$$

Andersen *et alii* (2002) et Protter (2004) montrent que cette statistique converge uniformément en probabilité vers la “vraie” matrice de variance-covariance lorsque  $h$  tend vers 0. Finalement, le bêta conditionnel de chaque actif par rapport au facteur  $k$  peut être estimé par<sup>4</sup> :

$$\hat{\beta}_{tk} \equiv \frac{\widehat{RC}(r_{t,h}, f_{t,kh})}{\widehat{RC}(f_{t,kh}, f_{t,kh})}, \quad (6)$$

où  $\hat{\beta}_{tk}$  est l’estimation de la sensibilité associé au facteur  $k$  à la date  $t$  et  $\widehat{RC}(f_{t,kh}, f_{t,kh}) = \sum_{j=2}^{1/h} (f_{t-1+jh,kh})^2$  est la volatilité réalisée estimée du facteur  $k$  à la date  $t$ .

La sous-section suivante présente les principales statistiques des bêtas réalisés des rentabilités d’un panier de titres du marché français des actions.

### 2.3 Les bêtas réalisés sur le marché français

Pour tenir compte de l’ensemble des sources de risque potentielles (risque de liquidité, risques opérationnels ou spécifiques, . . .) dans la formation du prix des actifs, nous avons retenu le modèle multi-factoriel de Fama et French (1993). Ce modèle servira de référence pour les futures comparaisons dans les estimations empiriques. A partir de la définition proposée des bêtas réalisés, nous calculons les sensibilités par rapport aux facteurs du marché. Nous présentons tout d’abord les principales caractéristiques des rentabilités de haute fréquence relatifs aux différentes actions étudiées.

La base de données provient d’*Euronext*. Elle est constituée d’un ensemble de séries de

<sup>3</sup>Voir par exemple Protter (2004) pour plus de détails.

<sup>4</sup>Ce bêta est dit “réalisé” (Cf. Bollerslev et Zhang, 2003).

prix des 50 titres parmi les plus liquides, évaluées toutes les 5 minutes, du 2 janvier 2002 au 29 décembre 2006. Nous éliminons de la base les titres avec un historique trop court ; notre échantillon final se compose de 43 titres.

Le tableau 1 fournit des statistiques descriptives pour les rentabilités des titres sélectionnés. Ces statistiques sont : le minimum, le maximum, la moyenne, l'écart-type, le coefficient d'asymétrie (*skewness*), le coefficient d'aplatissement (*kurtosis*) et la volatilité réalisée (moyenne et écart-type de la volatilité journalière estimée). Nous pouvons noter que la volatilité instantanée sur toute la période est faible et à peu près homogène pour l'ensemble des titres. De plus, la moyenne des rentabilités à 5 minutes est très faible par rapport à la volatilité instantanée. Nous pouvons aussi observer que les distributions des rentabilités des titres considérés sont asymétriques (par exemple, les coefficients d'asymétrie sont de -6,25 ; -2,74 ; 2,02 et 1,39 pour respectivement "Pernold-Ricard", "Sodexo Alliance", "Pineault Printemps" et "Vallourec"). Le niveau de la *kurtosis* pour chacun des actifs fait état de queues très épaisses (la moyenne des *kurtosis* est supérieure à 20). Ces remarques montrent qu'il est raisonnable de rejeter l'hypothèse de normalité des rentabilités de haute fréquence.

Au niveau des estimations empiriques, de la même manière que Bollerslev et Zhang (2003), les rentabilités à 5 minutes d'un *proxy* du portefeuille de marché (noté *MKT*) sont approximés par les sommes des rentabilités pondérées par les capitalisations boursières des différents titres à chaque date. Suivant l'approche de Fama et French (1993), deux facteurs supplémentaires sont aussi introduits : le facteur de style (noté *HML*) et le facteur de taille (noté *SMB*). Les rentabilités associées à ces deux facteurs sont calculées respectivement par la différence entre la moyenne des rentabilités des titres ayant le ratio *Book-to-Market* le plus élevé et la moyenne des rentabilités de ceux avec un *Book-to-Market* faible, et par la différence entre la moyenne des rentabilités des titres de petites capitalisations et la moyenne des rentabilités des fortes capitalisations. Nous construisons également neuf portefeuilles en croisant les critères de taille ("1", "2" et "3") et de style ("A", "B" et "C"). Ainsi, les rentabilités des portefeuilles notées "1" ("1-A", "1-B" et "1-C") considérées dans les tableaux suivant sont calculées par la moyenne des rentabilités des titres appartenant au premier tiers de la classification suivant la capitalisation et au premier tiers ("1-A"), au deuxième tiers ("1-B") et au troisième tiers de la classification par ordre croissant selon le ratio *Book-to-Market*.

TAB. 1 – Statistiques descriptives des rentabilités intra-journaliers

	Min.	Max.	$\sigma$	<i>Skew.</i>	<i>Kurt.</i>	Neg. %	Vol. réalisée	
							Moy.	$\sigma$
TF1	-7%	9%	0,5%	0,54	25,35	47%	7%	5%
EADS	-19%	9%	0,6%	-1,15	56,92	46%	8%	5%
AIR LIQUIDE	-10%	6%	0,4%	-1,33	46,54	44%	6%	4%
CARREFOUR	-10%	7%	0,5%	-0,22	25,42	47%	6%	4%
TOTAL FINA ELF	-6%	5%	0,4%	-0,22	28,05	44%	5%	3%
OREAL	-6%	8%	0,4%	0,35	22,97	44%	6%	3%
VALLOUREC	-12%	19%	0,6%	1,39	63,34	38%	8%	5%
ACCOR	-5%	5%	0,5%	-0,03	16,90	46%	6%	4%
BOUYGUES	-14%	6,8%	0,5%	-0,87	53,41	46%	6%	4%
SUEZ	-12%	10%	0,6%	0,28	32,22	46%	8%	6%
LAFARGE	-8%	7%	0,5%	-0,18	24,97	44%	6%	4%
SANOFI SYNTHELABO	-8%	7%	0,5%	-0,51	26,85	44%	6%	4%
AXA	-9%	10%	0,7%	0,10	26,73	47%	9%	7%
GROUPE DANONE	-8%	7%	0,3%	0,93	46,99	43%	5%	3%
PERNOD-RICARD	-21%	6%	0,4%	-6,25	368,99	42%	5%	3%
LVMH MOET VUITTON	-5%	6%	0,5%	0,03	16,50	43%	6%	4%
SODEXHO ALLIANCE	-22%	9%	0,6%	-2,74	131,81	47%	7%	5%
MICHELIN	-5%	5%	0,5%	0,11	12,85	46%	6%	3%
THALES	-5%	6%	0,5%	0,24	15,25	47%	6%	4%
PINAULT PRINTEMPS	-7%	17%	0,5%	2,02	85,11	44%	6%	5%
PEUGEOT	-8%	6%	0,5%	-0,41	24,42	47%	6%	4%
ESSILOR INTL	-4%	7%	0,4%	0,46	18,11	44%	6%	3%
SCHNEIDER ELECTRIC	-6%	5%	0,4%	-0,08	16,28	44%	6%	4%
VIVENDI ENVIRON.	-7%	6%	0,5%	0,09	23,49	47%	7%	5%
SAINT-GOBAIN	-13%	8%	0,5%	-0,70	36,80	46%	7%	5%
CAP GEMINI	-16%	16%	0,7%	0,09	42,56	48%	9%	7%
CANAL +	-6%	6%	0,5%	-0,15	15,71	32%	7%	5%
VINCI	-3%	5%	0,4%	0,46	14,13	42%	5%	3%
CASINO GUICHARD	-7%	6%	0,4%	-0,04	21,24	43%	6%	3%
AGF	-7%	12%	0,5%	0,57	31,71	44%	7%	5%
VIVENDI UNIVERSAL	-18%	14%	0,8%	-1,34	67,74	47%	9%	8%
DEXIA SICO,	-9%	8%	0,5%	-0,05	37,45	43%	6%	5%
STMICROELEC,SICO.	-7%	7%	0,6%	0,18	22,91	46%	8%	5%
ALCATEL A	-21%	15%	0,9%	-0,57	52,82	45%	11%	9%
LAGARDERE	-4%	6%	0,5%	0,33	14,34	44%	6%	4%
VALEO	-5%	8%	0,5%	0,63	18,97	47%	7%	4%
PUBLICIS GROUPE	-7%	8%	0,5%	0,30	20,36	47%	7%	5%
SOCIETE GENERALE A	-7%	8%	0,5%	0,34	26,68	43%	7%	5%
BNP PARIBAS	-8%	8%	0,5%	0,35	27,00	45%	7%	4%
RENAULT	-6%	9%	0,5%	0,27	22,64	44%	7%	4%
FRANCE TELECOM	-16%	16%	0,8%	-0,79	66,70	47%	9%	8%
THOMSON	-11%	11%	0,6%	0,26	31,08	46%	8%	5%
CREDIT AGRICOLE	-15%	7%	0,5%	-1,36	63,98	46%	6%	4%

Source : *Euronext*. Données à 5 minutes du 2 janvier 2002 au 29 décembre 2006. Calculs des auteurs. Ce tableau fournit les principales statistiques des rentabilités intra-journalières. Les statistiques présentées sont le minimum (Min.), le maximum (Max.), l'écart-type ( $\sigma$ ), le coefficient d'asymétrie (*Skew.*), le coefficient d'aplatissement (*Kurt.*), la proportion des rentabilités négatives (Neg.) et la volatilité réalisée (Moy. et écart-type des volatilités journalières estimées). La volatilité réalisée est calculée comme la somme des rentabilités intra-journalières élevées au carré. La moyenne des rentabilités intra-journalières de chaque action est quasiment nulle.

Les rentabilités des portefeuilles “2” (“2-A”, “2-B” et “2-C”) et “3” (“3-A”, “3-B” et “3-C”) sont construites suivant le même principe.

Le tableau 2 présente les statistiques descriptives des rentabilités mensuelles des différents portefeuilles. Nous observons que tous les portefeuilles ont une moyenne mensuelle faible. Les volatilités réalisées moyennes au cours des cinq années récentes sont généralement en conformité avec les écart-types historiques d'échantillon de longue durée<sup>5</sup>.

TAB. 2 – Moyenne et volatilité réalisée des rentabilités mensuelles  
selon la capitalisation et le ratio *Book-to-Market*

Capitalisation	<i>Book-to-Market</i>		
	A-Faible	B-Moyen	C-Elevé
	Moyenne des rentabilités		
1-Petite	0,06	0,07	0,09
2-Moyenne	0,06	0,05	0,08
3-Grande	0,06	0,06	0,08
	Volatilité réalisée		
1-Petite	0,43	0,14	0,41
2-Moyenne	0,37	0,18	0,36
3-Grande	0,78	0,13	0,38

Source : *Euronext*. Données à 5 minutes du 2 janvier 2002 au 29 décembre 2006. Calculs des auteurs. Le tableau présente les moyennes des rentabilités mensuelles et la volatilité réalisée pour les portefeuilles classés par style et par taille. Les rentabilités des portefeuilles notées “1” (“1-A”, “1-B” et “1-C”) considérées dans les tableaux suivants sont calculées par la moyenne des rentabilités des titres appartenant au premier tiers de la classification suivant la capitalisation et au premier tiers (“1-A”), au deuxième tiers (“1-B”) et au troisième tiers (“1-C”) de la classification par ordre croissant selon le ratio *Book-to-Market*. Les rentabilités des autres portefeuilles sont construites sur le même principe.

Les titres les plus liquides de notre échantillon sont généralement échangés plusieurs fois dans chaque intervalle de 5 minutes, tandis que les moins liquides peuvent ne pas l'être pendant plusieurs heures. De ce fait, les rentabilités des portefeuilles à 5 minutes sont conditionnées par l'influence des effets de non-synchronisation des échanges. Il est bien connu que de tels effets peuvent systématiquement biaiser les estimations de bêtas des régressions traditionnelles des séries chronologiques. La procédure d'ajustement proposée par Scholes et Williams (1977) permet de limiter les biais causés par ce phénomène<sup>6</sup>. Il s'agit alors de lisser

<sup>5</sup>Nous avons testé la normalité des distributions des différentes rentabilités (Jarque-Bera, Kolmogorov-Smirnov, Lilliefors, Anderson-Darling...). Il ressort de ces tests qu'aucun des titres ne présente une distribution qui suit une loi normale.

<sup>6</sup>Voir aussi Bollerslev et Zhang (2003) pour plus de précisions.

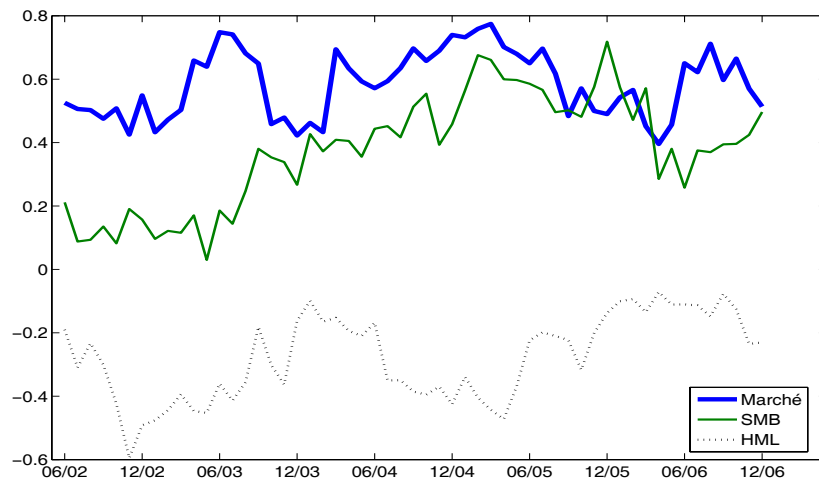
les covariances de la manière suivante :

$$\widehat{RC}_L(r_{t,h}, f_{t,kh}) = \sum_{l=-L}^L \sum_{j=1}^{1/h} (f_{t+jh,kh} f_{t+(j-l)h,kh}) - 2L h \left( \sum_{j=1}^{1/h} f_{t+jh,kh} \right) \left( \sum_{j=1}^{1/h} r_{t+(j-l)h,h} \right), \quad (7)$$

où  $L$  est le retard maximum considéré lors de l'ajustement.

Le graphique 1 présente l'évolution des bêtas ajustés des différents facteurs<sup>7</sup> pour un retard de 6. Sur ce graphique, nous constatons que les chocs potentiels, dus entre autres aux bruits micro-structurels, sur les différents bêtas pour tous les facteurs considérés (marché, style et taille) sont éliminés par la procédure de lissage.

FIG. 1 – Bêtas réalisés des différents facteurs



Source : *Euronext*. Données à 5 minutes du 2 janvier 2002 au 29 décembre 2006. Calculs des auteurs. Le graphique présente les bêtas ajustés par la procédure de Scholes et Williams (1977) pour les portefeuilles de grande taille avec un *Book-to-Market* élevé. La variable *SMB* correspond au facteur *Small Minus Big* en capitalisation et celle notée *HML* à *High Minus Low* en *Book-to-Market*.

### 3 Le modèle d'évaluation à plusieurs moments réalisés

Nous présentons ci-après le cadre d'analyse des modèles d'évaluation des actifs financiers à plusieurs moments. Alternativement, nous décrivons le processus générateur des rentabilités et le modèle d'évaluation par les moments réalisés d'ordre supérieur.

<sup>7</sup>Cette valeur du retard a été déterminée par l'étude préalable du comportement de la moyenne des sensibilités en fonction des différents retards.

### 3.1 Moments d'ordre supérieur et évaluation du prix des actifs

Rubinstein (1973), Kraus et Litzenberger (1976), Harvey et Siddique (2000), et Barone-Adesi *et alii* (2003) ont proposé des modèles d'évaluation d'actifs alternatifs non-normaux en intégrant un facteur non-linéaire mesurant l'asymétrie de la distribution des rentabilités (la *Coskewness*). L'objectif est de prendre en compte les variabilités des facteurs ; en ce sens que les rentabilités espérées sont fonctions non seulement de la covariance et des facteurs liés à la firme, mais aussi de la *Coskewness* du portefeuille de marché. Nous incluons également dans le processus générateur des rentabilités, le troisième moment ainsi que leurs variations intra-journalières. Nous présentons d'abord le modèle à trois moments avant de décrire le modèle équivalent en moments réalisés.

#### 3.1.1 Le modèle à trois moments

Avec les notations précédentes, nous posons  $f_k^* = F_k^2 - r_f$ , l'excédent du carré des rentabilités du facteur  $k$ , avec  $k \in \{1, 2, \dots, K\}$ , par rapport à l'actif sans risque. Nous avons alors pour chaque actif  $i$ , pour tout  $i \in \{1, 2, \dots, N\}$  :

$$r_i = \alpha_i + \sum_{k=1}^K \beta_{ik} f_k + \sum_{k=1}^K \gamma_{ik} f_k^* + \varepsilon_i, \quad (8)$$

où  $f_k$  est le  $k$ -ième facteur commun,  $\beta_{ik}$  est la sensibilité de l'actif  $i$  par rapport au facteur  $k$ ,  $\gamma_{ik}$  désigne la sensibilité de l'actif  $i$  par rapport au facteur quadratique  $f_k^*$  et les résidus  $\varepsilon_i$  sont supposés non corrélés.

Les valeurs des sensibilités  $\gamma_{ik}$  correspondantes sont données par (*Cf.* Barone-Adesi *et alii*, 2003 ; Galagedera et Maharaj, 2008) :

$$\gamma_{ik} = \frac{\text{Coskew}(r_i, f_k)}{\kappa_k^3}, \quad (9)$$

où  $\text{Coskew}(r_i, f_k)$  est la *skewness* conditionnelle de l'actif  $i$  par rapport au facteur  $k$ , définie par  $\text{Coskew}(r_i, f_k) = E[(r_i - \bar{r}_i)(f_k - \bar{f}_k)^2]$ , avec  $\bar{r}_i = E(r_i)$  et  $\bar{f}_k = E(f_k)$ , et  $\kappa_k^3$  est la *skewness* conditionnelle du facteur  $k$  égale par définition à  $\kappa_k^3 = E[(f_k - \bar{f}_k)^3]$ .

De façon équivalente à l'équation (2), nous notons sous forme matricielle la relation



globale telle que :

$$\mathbf{r} = \mathbf{A} + \mathbf{B} \mathbf{f}' + \mathbf{G} \mathbf{f}^* + \mathbf{e}, \quad (10)$$

où  $\mathbf{f}^* = (f_1^*, f_2^*, \dots, f_K^*)$  est la matrice des rentabilités excédentaires des facteurs quadratiques de taille  $(K \times T)$ ,  $\mathbf{B}$  est la matrice des  $(N \times K)$  bêtas,  $\mathbf{G}$  est la matrice des  $(N \times K)$  sensibilités par rapport aux facteurs et  $\mathbf{e}$  est la matrice des  $(T \times N)$  résidus, d'espérance nulle et de matrice de variance-covariance notée  $\Sigma_{\mathbf{e}}$ .

L'introduction du carré des rentabilités du marché dans la relation permet ainsi d'exploiter les informations contenues dans la variabilité des rentabilités du *proxy* du portefeuille de marché. Le modèle quadratique (10) est une extension directe du modèle de marché. Avec ce processus d'évaluation des rentabilités, nous supposons que les erreurs individuelles sont corrélées. Ainsi, nous avons des covariances entre les résidus différentes de zéro. Nous proposons pour les estimations une méthodologie qui intègre cette forme particulière d'hétéroscédasticité des résidus.

### 3.1.2 Les facteurs réalisés du modèle à trois moments

Nous développons dans cette sous-section le modèle d'évaluation conditionnel multifacteurs de base, en y ajoutant les variabilités inobservées des prix en basse fréquence. Nous supposons toujours que l'intervalle de temps peut se découper en  $1/h$  sous-périodes. Le modèle conditionnel d'évaluation à trois moments de la sous-période  $j$ , pour  $j \in \{2, 3, \dots, 1/h\}$ , pour chaque actif est donné par (avec les notations précédentes) :

$$r_{t-1+jh,h} = \alpha_t + \sum_{k=1}^K \beta_{tk} f_{t-1+jh,kh} + \sum_{k=1}^K \gamma_{tk} f_{t-1+jh,kh}^* + \varepsilon_{t-1+jh,h}, \quad (11)$$

où  $\gamma_{tk}$  est la sensibilité conditionnelle à la date  $t$  par rapport au facteur  $k$  et où chaque sensibilité conditionnelle  $\beta_{tk}$  est définie par l'équation (6).

De la même manière que pour la volatilité réalisée, la somme des produits des éléments de la fréquence  $h$  avec le facteur quadratique permet d'estimer la *coskewness* réalisée. La *coskewness* réalisée (notée RCoskew) par rapport au facteur de risque  $k$  à la fréquence  $h$  est définie par :

$$\widehat{\text{RCoskew}}(r_{t,h}, f_{t,kh}) = \sum_{j=2}^{1/h} r_{t-1+jh,h} f_{t-1+jh,kh}^*. \quad (12)$$

Beine *et alii* (2009) montrent que cette variable converge vers sa valeur théorique lorsque  $h$  tend vers 0. De ce fait, pour chaque actif, la sensibilité réalisée par rapport au facteur  $k$  pour la date  $t$  est donnée par :

$$\hat{\gamma}_{tk} \equiv \frac{\widehat{\text{RCoskew}}(r_{t,h}, f_{t,kh})}{\widehat{\text{RCoskew}}(f_{t,kh}, f_{t,kh})}. \quad (13)$$

### 3.2 La procédure d'estimation du modèle à trois moments réalisés

Pour les estimations robustes du modèle proposé, nous combinons les régressions apparemment indépendantes (*SUR* pour *Seemingly Unrelated Regression* en anglais) de Zellner (1962) et la méthodologie en coupe transversale de Parks (1967). Les régressions apparemment indépendantes permettent de tenir compte non seulement des inter-relations entre les actifs et le portefeuille de marché, mais aussi des fortes corrélations des actifs entre eux (par les corrélations inter-équations).

A l'équilibre, la rentabilité espérée de chaque actif est linéairement associée aux contributions de l'actif sur la variance et la *skewness* des facteurs de risque. Ainsi, à chaque date  $t$ , la version conditionnelle de ce modèle factoriel (*Cf.* Krauss et Litzenberger, 1976 ; Barone-Adesi *et alii*, 2003 ; Galagedera et Maharaj, 2008) est donnée, avec les notations précédentes, par :

$$E(\mathbf{r}_t) = \lambda_{0,t} + \sum_{k=1}^K (\lambda_{1,tk} \mathbf{B}_{tk} + \lambda_{2,tk} \mathbf{G}_{tk}) + \mathbf{u}_t, \quad (14)$$

où  $E(\mathbf{r}_t)$  est le vecteur des rentabilités espérées des actifs de taille  $(N \times 1)$  à la date  $t$ ,  $\lambda_{0,t}$  est interprété comme la rentabilité excédentaire espérée d'un portefeuille ayant une covariance et une *coskewness* nulles avec les rentabilités du portefeuille de marché,  $\lambda_{1,tk}$  est la prime de risque par rapport au marché,  $\mathbf{B}_{tk}$  est le vecteur des sensibilités de taille  $(N \times 1)$  à la date  $t$  au facteur  $f_k$ ,  $\lambda_{2,tk}$  est la prime de risque par rapport au facteur  $f_k^*$ ,  $\mathbf{G}_{tk}$  est le vecteur des sensibilités de taille  $(N \times 1)$  à la date  $t$  au facteur  $f_k^*$ ,  $\mathbf{u}_t$  est le vecteur des résidus de taille  $(N \times 1)$  à la date  $t$ ; pour  $t \in \{1, 2, \dots, T\}$ .

En posant,  $\mathbf{E}_t = E(\mathbf{r}_t)$  le vecteur de taille  $(N \times 1)$  des rentabilités espérées des différents actifs,  $\mathbf{X}_t = [\mathbf{1} \ \mathbf{B}_t \ \mathbf{G}_t]$  de taille  $[N \times (2K + 1)]$ , avec  $\mathbf{B}_t = (\mathbf{B}_{t1}, \mathbf{B}_{t2}, \dots, \mathbf{B}_{tK})$  de taille  $(N \times K)$ ,  $\mathbf{G}_t = (\mathbf{G}_{t1}, \mathbf{G}_{t2}, \dots, \mathbf{G}_{tK})$  de taille  $(N \times K)$  et  $\mathbf{1}$  le vecteur unitaire de taille  $(N \times 1)$ , et  $\mathbf{\Lambda}_t = [\lambda_{0,t} \ \mathbf{\Lambda}_{1,t} \ \mathbf{\Lambda}_{2,t}]'$  de taille  $[(2K + 1) \times 1]$ , avec  $\mathbf{\Lambda}_{1,t} = (\lambda_{1,t1}, \lambda_{1,t2}, \dots, \lambda_{1,tK})$

de taille  $(1 \times K)$ , et  $\Lambda_{2,t} = (\lambda_{2,t1}, \lambda_{2,t2}, \dots, \lambda_{2,tK})$  de taille  $(1 \times K)$ , nous pouvons écrire le système équivalent de la manière suivante :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{E}_1 \\ \mathbf{E}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{E}_T \end{pmatrix}_{(NT \times 1)} = \begin{pmatrix} \mathbf{X}_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mathbf{X}_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \mathbf{X}_T \end{pmatrix}_{[NT \times (2K+1)T]} \begin{pmatrix} \Lambda_1 \\ \Lambda_2 \\ \vdots \\ \Lambda_T \end{pmatrix}_{[(2K+1)T \times 1]} + \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_T \end{pmatrix}_{(NT \times 1)}. \quad (15)$$

De façon plus compacte, ce système peut s'écrire :

$$\mathbf{E} = \mathbf{X} \Lambda + \mathbf{u}. \quad (16)$$

Ce système est identique à celui présenté par Zellner (1962). Ce dernier suppose que la matrice de variance-covariance des résidus ( $\mathbf{u}$ ) est donnée par :

$$E(\mathbf{u} \mathbf{u}') = \Sigma = \Sigma_c \otimes \mathbf{I}_N, \quad (17)$$

où  $\Sigma_c$  est la matrice de variance-covariance de taille  $(T \times T)$ ,  $\otimes$  est le produit de Kronecker,  $\mathbf{I}_N$  est la matrice identité de dimension  $N$ , et  $N$  est le nombre d'actifs.

Cette formulation suppose ainsi que les corrélations entre les différentes observations sont nulles<sup>8</sup>. Les régressions apparemment indépendantes, proposées par Zellner (1962), peuvent ainsi être analysées comme des cas particuliers de modèles généralisés avec certaines restrictions sur les corrélations inter-actifs (par exemple, modèles hétéroscédastiques) ; de plus, nous complétons cette approche d'estimation en utilisant la procédure de correction de Parks (1967)<sup>9</sup>. Celle-ci repose sur un procédé d'évaluation qui permet d'intégrer la dimension des interdépendances en coupe transversale, en corrigeant les valeurs estimées des principaux éléments de la régression en coupe longitudinale par une matrice de variance-covariance plus générale définie par :

$$E(\mathbf{u} \mathbf{u}') = \Omega = \{\sigma_{ij}\}, \quad (18)$$

avec  $\sigma_{ij} = E(u_i u_j')$  la matrice de variance-covariance de taille  $(N \times N)$ .

<sup>8</sup>*i.e.*  $\forall i \neq j, E(u_{ti} u_{sj}) = 0$ , avec  $t$  et  $s$  les numéros des équations (inter-équations), et  $i$  et  $j$ , les actifs considérés (intra-équations).

<sup>9</sup>*Cf.* aussi Foschi et Kontoghiorghes (2003).

La spécification (18) permet d'intégrer les corrélations longitudinales et transversales. De plus, nous traitons spécifiquement les biais de non-synchronisation des échanges et d'hétérogénéité variable de la liquidité des actifs étudiés en utilisant la procédure de Scholes et Williams (1977). Nous obtenons, au final, des matrices de variance-covariance "débruitées", plus adaptées aux conditions réelles des marchés.

## 4 Résultats d'estimation et tests de robustesse

Dans cette section, nous examinons l'efficacité des modèles d'évaluation alternatifs. Les principaux résultats des modèles standard sont présentés et comparés aux modèles alternatifs de haute fréquence et à ceux par des moments réalisés. En outre, nous effectuons un certain nombre de tests de robustesse de l'approche proposée.

### 4.1 Du lien entre le modèle de Fama-French et le modèle à trois moments réalisés

L'importance de l'utilisation des données de haute fréquence pour mieux mesurer et prévoir les sensibilités réalisées des facteurs dépend de la qualité du modèle d'évaluation correspondant. Les résultats empiriques présentés dans la littérature suggèrent que les anomalies d'évaluation liées à la taille et au style de la firme disparaissent en grande partie avec le modèle à trois facteurs de Fama et French (1993). La moyenne des bêtas réalisés mensuels et leurs écart-types, sur la période du 2 janvier 2002 au 26 décembre 2006 sont donnés dans le tableau 3. Comme cela était prévisible, les moyennes des sensibilités pour les facteurs de style (*SMB*) diminuent systématiquement avec la taille du portefeuille, alors que celles des facteurs de taille (*HML*) augmentent avec le niveau du *Book-to-Market*. Au contraire, nous ne trouvons aucune relation évidente pour les bêtas associés au facteur de marché (*MKT*). Enfin, les écart-types mensuels présentés permettent de juger la significativité des sensibilités. Il apparaît que toutes les sensibilités liées aux facteurs de marché et de taille sont statistiquement significatives contrairement à celles liées au facteur de style.

Le facteur d'asymétrie du marché est ajouté au modèle à trois facteurs de Fama et French (1993). Le tableau 4 fournit la moyenne des coefficients de détermination pour différents modèles alternatifs sur la période du 2 janvier 2002 au 26 décembre 2006. Les estimations

TAB. 3 – Sensibilités réalisées des différents portefeuilles  
en fonction de la capitalisation et du ratio *Book-to-Market*

	<i>Facteurs</i>								
	Marché			<i>Small Minus Big</i>			<i>High Minus Low</i>		
Capitalisation	<i>Book-to-Market</i>								
	A	B	C	A	B	C	A	B	C
	Moyenne des sensibilités								
1-Petite	1,10	0,71	0,64	0,51	0,42	0,26	0,15	-0,07	-0,22
2-Moyenne	1,02	0,70	0,66	0,53	0,42	0,27	0,07	-0,06	-0,25
3-Grande	0,97	0,69	0,58	0,63	0,44	0,39	0,07	-0,06	-0,24
	Ecart-type des sensibilités								
1-Petite	0,13	0,03	0,07	0,13	0,06	0,12	0,19	0,06	0,26
2-Moyenne	0,07	0,04	0,08	0,07	0,05	0,12	0,13	0,05	0,13
3-Grande	0,10	0,03	0,07	0,08	0,05	0,15	0,15	0,05	0,12

Source : *Euronext*. Données à 5 minutes du 2 janvier 2002 au 29 décembre 2006. Calculs des auteurs. La table présente la moyenne des sensibilités réalisées et leurs écart-types pour les facteurs pour le modèle à trois facteurs de Fama et French (1993) pour chacun des portefeuilles. Les sensibilités réalisées sont construites à partir des rentabilités à 5 minutes. Les rentabilités des portefeuilles notées “1” (“1-A”, “1-B” et “1-C”) considérées dans les tableaux suivant sont calculées par la moyenne des rentabilités des titres appartenant au premier tiers de la classification suivant la capitalisation et au premier tiers (“1-A”), au deuxième tiers (“1-B”) et au troisième tiers (“1-C”) de la classification par ordre croissant selon le ratio *Book-to-Market*. Les rentabilités des autres portefeuilles sont construites sur le même principe.

sont effectuées à l’aide de l’approche classique avec et sans *skewness* et à l’aide de l’approche par les moments réalisés. Il apparaît que le pouvoir explicatif du modèle est sensiblement améliorée avec le facteur d’asymétrie<sup>10</sup>. Ce qui signifie que le facteur de variabilité du portefeuille de marché a une importance dans la modélisation des prix des actifs. De plus, l’approche par les moments réalisés augmente de manière significative les coefficients de détermination<sup>11</sup>.

Les sensibilités réalisées des facteurs sont naturellement seulement observables *ex-post*. Nous allons, de ce fait, postuler puis comparer plusieurs formes de dynamiques pour ces sensibilités. Les résultats de la prochaine section démontrent qu’un simple *AR(1)* - le modèle autorégressif d’ordre 1 - pour les sensibilités à haute fréquence lisse effectivement les erreurs de mesure, et qu’il autorise des estimations des prévisions plus précises statistiquement que

<sup>10</sup>Nous avons obtenu les mêmes conclusions avec le critère de sélection *AIC* (*Aiken Information Criterion* en anglais).

<sup>11</sup>Nous avons également examiné le modèle avec la *kurtosis*, mais ce facteur n’est pas significatif et n’a pas été finalement retenu dans la présentation des résultats.

TAB. 4 – Moyenne des  $R^2$  ajustés des différents modèles avec ou sans le facteur quadratique en fonction de la capitalisation et du ratio *Book-to-Market*

	Régression réalisée			Régression standard		
Capitalisation	<i>Book-to-Market</i>					
	A-Faible	B-Moyen	C-Elevé	A-Faible	B-Moyen	C-Elevé
	Modèle Fama et French (1993)					
1-Petite	59%	85%	65%	35%	84%	30%
2-Moyenne	52%	86%	65%	39%	85%	34%
3-Grande	60%	86%	76%	36%	84%	29%
	Modèle Fama et French (1993)+ facteur quadratique					
1-Petite	77%	95%	89%	48%	85%	36%
2-Moyenne	72%	96%	89%	47%	86%	37%
3-Grande	74%	96%	89%	46%	86%	32%

Source : *Euronext*. Données à 5 minutes du 2 janvier 2002 au 29 décembre 2006. Calculs des auteurs. La table présente la moyenne des  $R^2$  pour le modèle à trois facteurs de Fama et French (1993) et pour le modèle de Fama et French (1993) avec des facteurs quadratiques pour les différents portefeuilles. Les estimations sont effectuées par les Moindres Carrées Ordinaires (régression standard) ou par l'estimation par la méthode robuste (*Cf.* Zellner, 1962; Parks, 1967; Foschi et Kontoghiorghes, 2003) pour les variables réalisées (régression réalisée). Les rentabilités des portefeuilles notées "1" ("1-A", "1-B" et "1-C") considérées dans les tableaux suivant sont calculées par la moyenne des rentabilités des titres appartenant au premier tiers de la classification suivant la capitalisation et au premier tiers ("1-A"), au deuxième tiers ("1-B") et au troisième tiers ("1-C") de la classification par ordre croissant selon le ratio *Book-to-Market*. Les rentabilités des autres portefeuilles sont construites sur le même principe.

les modèles standards.

## 4.2 De l'impact économique du calcul des facteurs réalisés

Nous cherchons désormais à évaluer l'impact économique des sensibilités calculées par les données de haute fréquence et les prédictions correspondantes. Cette section compare les performances *ex post* du portefeuille optimal dans l'espace moyenne-variance. Le portefeuille optimal est le résultat du programme de minimisation de la variance sous contrainte d'un niveau de rentabilité fixé ( $\mu_p$ ) avec une ré-allocation mensuelle. De façon plus précise, nous résolvons le programme d'optimisation quadratique suivant :

$$\begin{cases} \underset{\omega_p}{Min} \omega_p' \Omega \omega_p \\ \text{s.c. } \omega_p' \mathbf{E} = \mu_p \text{ et } \omega_p' \mathbf{1} = 1, \end{cases} \quad (19)$$

où  $\omega_p$  est le vecteur des  $(N \times 1)$  poids du portefeuille,  $\mathbf{1}$  le vecteur unitaire de taille  $(N \times 1)$ ,  $\mathbf{E}$  est le vecteur  $(N \times 1)$  des rentabilités espérées des actifs, et  $\mathbf{\Omega}$  est la matrice  $(N \times N)$  de variance-covariance des rentabilités des actifs.

Pour mettre en évidence les apports des différentes prédictions des sensibilités des facteurs, nous supposons que la matrice de covariance des rentabilités des différents portefeuilles est la même dans les optimisations moyennes-variances. Cette matrice est calculée par les covariances réalisées sur les 24 premiers mois de l'échantillon<sup>12</sup>.

Le premier panel du tableau 5 fournit les rentabilités moyennes mensuelles réalisées résultant, sur la période allant de janvier 2004 à décembre 2006, des portefeuilles optimisés pour les écart-types indiqués dans la première colonne. Pour l'ensemble des écart-types mensuels fixés, les rentabilités *ex post* des portefeuilles optimaux suivant l'approche par les sensibilités calculées par le modèle autorégressif de haute fréquence sont plus élevés que ceux obtenus à l'aide des autres méthodes. Nous remarquons aussi que les prédictions des sensibilités par les régressions dynamiques améliorent l'espérance de rentabilités des portefeuilles optimaux. De même, les ratios de Sharpe (voir le second panel du tableau 5) respectent la hiérarchie des différentes méthodes utilisées<sup>13</sup>. Toutefois, ces niveaux élevés de performance et des ratios de Sharpe peuvent dépendre de la période de test utilisée (2002-2006). Nous complétons donc l'analyse des comparaisons des stratégies par une approche par les fonctions d'utilité d'un agent représentatif.

Pour évaluer l'avantage comparatif d'une stratégie particulière par rapport à une autre, nous introduisons un agent représentatif avec une fonction d'utilité quadratique (*Cf.* Fleming *et alii*, 2002). Cette mesure est basée sur l'utilité quadratique comme une approximation de la vraie fonction d'utilité de l'investisseur et elle suppose que l'aversion relative pour le risque (notée  $a$ ) soit constante. Sous ces hypothèses, l'utilité moyenne réalisée pour un portefeuille donné ( $\bar{U}_p$ ) s'écrit :

$$\bar{U}_p = W_0 \sum_{t=0}^{T-1} \left[ R_{p, t+1} - \frac{a}{2(1+a)} R_{p, t+1}^2 \right], \quad (20)$$

avec  $W_0$  la richesse initiale et  $R_{p, t+1} = R_f + \omega_p' r_{t+1}$ , les rentabilités du portefeuille ( $p$ ).

<sup>12</sup>L'intérêt ici étant d'analyser les apports des différentes méthodes d'estimation des sensibilités des différents facteurs de risque, nous excluons, sans perte de généralité, le taux sans risque du programme d'optimisation. L'optimisation est uniquement faite sur les actifs risqués.

<sup>13</sup>Ces résultats sont confirmés par la statistique de Gibbons, Ross et Shanken (1989) pour les tests de différence des ratios de Sharpe.

TAB. 5 – Rentabilités et Ratios de Sharpe des portefeuilles  
optimisés suivant différentes méthodes

Ecart-type	Constante	Régressions dynamiques	Marche aléatoire haute fréquence	Autorégressif haute fréquence
	Rentabilités <i>ex post</i>			
0,01	0,01	0,04	0,02	0,09
0,02	0,01	0,04	0,03	0,05
0,03	0,04	0,06	0,04	0,07
0,04	0,05	0,07	0,04	0,09
0,05	0,07	0,08	0,05	0,10
0,06	0,08	0,12	0,06	0,13
	Ratios de Sharpe			
0,01	0,25	3,74	1,75	8,75
0,02	0,38	1,88	1,38	2,38
0,03	1,25	1,78	1,08	2,25
0,04	1,19	1,61	0,94	2,19
0,05	1,35	1,51	0,95	1,95
0,06	1,26	1,96	0,96	2,13

Source : *Euronext*. Données à 5 minutes du 2 janvier 2002 au 29 décembre 2006. Calculs des auteurs. Le tableau présente la moyenne des rentabilités mensuelles *ex post* et les ratios de Sharpe correspondants pour les portefeuilles efficients dans le plan moyenne-variance à partir des rentabilités estimées suivant différentes méthodes. La méthode “Constante” suppose que les sensibilités sont constantes sur toute la période d’estimation. La “Régression dynamique” est effectuée par une estimation mensuelle des sensibilités. La “Marche aléatoire haute fréquence” suppose que les sensibilités à une date  $t$  sont égales aux sensibilités réalisées à la date  $t - 1$ . La méthode “Autorégressif en haute fréquence” suppose que les sensibilités réalisées sont définies par un modèle autorégressif d’ordre 1.

Cette formulation fournit un estimateur cohérent de l’utilité espérée de l’investisseur. Afin de mesurer la valeur de la substitution d’une stratégie à une autre, nous égalisons leurs utilités réalisées moyennes<sup>14</sup>. Il s’agit de chercher  $\Delta^*$  solution de :

$$\left[ \sum_{t=0}^{T-1} (R_{p_2, t+1} - \Delta) - \frac{a}{2(1+a)} (R_{p_2, t+1} - \Delta)^2 \right] - \left[ \sum_{t=0}^{T-1} R_{p_1, t+1} - \frac{a}{2(1+a)} R_{p_1, t+1}^2 \right] = 0, \quad (21)$$

où  $R_{p_1, t+1}$  et  $R_{p_2, t+1}$  sont les rentabilités des deux stratégies à comparer.

Le tableau 6 fournit les coûts mensuels qu’un investisseur, avec une fonction d’utilité quadratique et une aversion relative pour le risque constant égal à  $a$ , supporte en utilisant

<sup>14</sup>Pour égaliser les utilités moyennes, nous retranchons la constante  $\Delta$  de chacune des rentabilités de la stratégie 2. Cette constante représente les performances qu’un investisseur pourrait perdre (*i.e.*, des coûts de performance) s’il applique la stratégie 1.



TAB. 6 – Equivalent Certain entre les stratégies de régressions dynamiques

et Autorégressif en haute fréquence

Ecart-type	$a = 1$	$a = 10$
0,01	0,00	0,01
0,02	0,01	0,01
0,03	0,01	0,01
0,04	0,01	0,01
0,05	0,01	0,02
0,06	0,02	0,02

Source : *Euronext*. Données à 5 minutes du 2 janvier 2002 au 29 décembre 2006. Calculs des auteurs. Le tableau présente les frais mensuels qu'un investisseur avec une fonction d'utilité quadratique et une aversion relative pour le risque constante ( $a$ ) devrait payer pour partir de la stratégie basée sur les régressions dynamiques à celle basée sur le modèle autoregressif de haute fréquence. Les frais sont calculés sur les rentabilités mensuelles, avec les écart-types mensuels évalués sur les 24 premiers mois (2002-2003).

des prévisions à partir des régressions dynamiques au lieu des prévisions obtenues à partir des modèles autorégressifs sur les sensibilités réalisées. Dans le tableau, les coûts sont exprimés en point de pourcentage mensuel et sont déterminés empiriquement comme l'Equivalent Certain (EC) entre les deux stratégies. Nous remarquons que pour tous les niveaux d'écart-types et les valeurs d'Equivalents Certains pour les deux coefficients d'aversion pour le risque sont positifs. Cela montre que la stratégie à partir des données de haute fréquence produit des espérances d'utilité supérieures à celles calculées à partir d'une stratégie sur des données de basse fréquence<sup>15</sup>.

## 5 Conclusion

Nous avons, dans cet article, proposé un modèle d'évaluation des actifs financiers utilisant des moments réalisés. Ce modèle est défini à partir des notions de mesures et de co-mesures "réalisées" de risque (Bollerslev et Zhang, 2003) dans un cadre multi-moments conditionnels. L'apport de ce travail réside ainsi dans la combinaison des modèles d'évaluation d'actifs d'ordre supérieur avec des mesures réalisées. Pour les estimations, nous avons utilisé plusieurs méthodologies visant à neutraliser des erreurs de spécification de mesures et de modèle de données, traitant au mieux des inter-dépendances entre les actifs financiers en termes de

<sup>15</sup>Par exemple, pour la lecture du tableau 6, un investisseur ayant un coefficient d'aversion relative pour le risque constant  $a = 10$  et un niveau d'écart-type de 6%, perd 2% en moyenne par mois en utilisant la stratégie sur les régressions dynamiques par rapport à celle sur le modèle autorégressif en haute fréquence.

rentabilités.

A partir des données de haute fréquence pour un panier de titres du marché français des actions, nous montrons que les résultats des tests du Modèle d'Evaluation Des Actifs Financiers sont étroitement liés au modèle spécifié et à la méthode d'estimation utilisée. L'introduction des moments d'ordre supérieur a clairement un impact non négligeable sur la qualité des modèles. Ce résultat confirme notre prédiction selon laquelle les agents sont non seulement sensibles aux gains espérés et aux risques potentiels, mais aussi à l'asymétrie de la distribution des rentabilités. De même, les tests comparatifs menés (analyse moyenne-variance et fonction d'utilité), font ressortir, de manière significative, l'importance des mesures réalisées dans la modélisation des rentabilités des actifs.

Il peut être intéressant, au-delà de la portée de cet article, d'évaluer l'importance des erreurs de mesure des sensibilités aux facteurs dans le contexte actuel de mesures et co-mesures réalisées pour le MEDAF. Griffin et Oomen (2008) fournissent des résultats théoriques pour les mesures réalisées de volatilité. La volatilité instantanée est alors décomposée en volatilité réalisée et en biais d'autocorrélation. Ils montrent théoriquement et empiriquement que le biais d'autocorrélation diminue avec la fréquence d'échantillonnage pour devenir négligeable au dessus de 25 minutes. Un travail similaire pourrait ainsi être mené sur le bêta réalisé et la *skewness* réalisée.

## Références bibliographiques

Andersen, T.G. et T., Bollerslev, 1998, "Answering the Skeptics: Yes, Standard Volatility Models do Provide Accurate Forecasts", *International Economic Review*, 39(4), pp. 885-905.

Andersen, T.G., T., Bollerslev, F.X., Diebold et P., Labys, 2002, "Modeling and Forecasting Realized Volatility", *Econometrica*, 71(2), pp. 579-625.

Banz, R.W., 1981, "The Relationship between Return and Market Value of Common Stocks", *Journal of Financial Economics*, 9(1), pp. 3-18.

Barndorff-Nielsen, O.E. et N., Shephard, 2002a, "Econometric Analysis of Realized Covariation: High Frequency Covariance, Regression and Correlation in Financial Economics", *Econometrica*, 72(3), pp. 885-925.

Barndorff-Nielsen, O.E. et N., Shephard, 2002b, "Estimating Quadratic Variation using Realized Variance", *Journal of Applied Econometrics*, 17(5), pp. 457-477.

Barone-Adesi, G., 1985, "Arbitrage Equilibrium with Skewed Asset Returns", *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 20(3), pp. 299-313.

Barone-Adesi, G., P., Gagliardini et G., Urga, 2003, "Testing Asset Pricing Models with Coskewness", *Journal of Business and Economic Statistics*, 22(4), pp. 474-485.

Beine, M.A., S., Laurent et F.C., Palm, 2009, "Central Bank FOREX Interventions Assessed using Realized Moments", *Journal of International Financial Markets, Institutions and Money*, 19(1), pp. 112-127.

Black, F., M.C., Jensen et M.S., Scholes, 1972, "The Capital Asset Pricing Model: Some Empirical Tests", in *Studies in the Theory of Capital Markets*, Jensen Eds, Praeger Publishers, pp. 79-121.

Bollerslev, T. et B.Y., Zhang, 2003, "Measuring and Modeling Systematic Risk in Factor Pricing Models using High-Frequency Data", *Journal of Empirical Finance*, 10(5), pp. 533-558.

Bollerslev, T., R.F., Engle et J.M., Wooldridge, 1988, "A Capital Asset Pricing Model with Time-varying Covariances", *Journal of Political Economy*, 96(1), pp. 116-131.

Corsi, F., M.M., Dacorogna, U.A., Müller et G.O., Zumbach, 2001, "Consistent High-precision Volatility from High-frequency Data", *Economic Notes*, 30(2), pp. 183-204.

Dacorogna, M.M., R., Gençay, U.A., Müller, R.B., Olsen et O.V., Pictet, 2001, *An Introduction to High-frequency Finance*, Academic Press San Diego, CA, 383 pages.

Fama, E.F. et J.D., MacBeth, 1973, "Risk, Return and Equilibrium: Empirical Tests", *Journal of Political Economy*, 81(3), pp. 607-636.

Fama, E.F. et K.R., French, 1993, "Common Risk Factors in the Returns on Stocks and Bonds", *Journal of Financial Economics*, 33(1), pp. 3-56.

Foschi, P. et E.J., Kontoghiorghes, 2003, "Estimating Seemingly Unrelated Regression Models with Vector Autoregressive Disturbances", *Journal of Economic Dynamics and Control*, 28(1), pp. 27-44.

Fleming, J., C., Kirby et B., Ostdiek, 2002, "The Economic Value of Volatility Timing using Realized Volatility", *Journal of Financial Economics*, 67(3), pp. 473-509.

Galagedera, D.U. et E.A., Maharaj, 2008, "Wavelet Time-scales and Conditional Relationship between Higher-order Systematic Co-moments and Portfolio Returns", *Quantitative Finance*, 8(2), pp. 201-215.

Gibbons, M.R., S.A., Ross et J., Shanken, 1989, "A Test of the Efficiency of a Given Portfolio", *Econometrica*, 57(5), pp. 1121-1152.

Griffin, J.E. et R.C., Oomen, 2008, "Sampling Returns for Realized Variance Calculations: Tick Time or Transaction Time?", *Econometric Reviews*, 27(1), pp. 230-253.

Harvey, C.R. et A., Siddique, 2000, "Conditional Skewness in Asset Pricing Tests", *Journal of Finance*, 55(3), pp. 1263-1295.

Hodrick, R.J. et X., Zhang, 2001, "Evaluating the Specification Errors of Asset Pricing Models", *Journal of Financial Economics*, 62(2), pp. 327-376.

Jurczenko, E. et B., Maillet, 2006, "The Four-moment Capital Asset Pricing Model: between Asset Allocation and Asset Pricing", in *Multi-moment Capital Asset Pricing and Related Topics*, Jurczenko-Maillet Eds, John Wiley & Sons, pp. 113-163.

Kan, R. et C., Zhang, 1999a, "GMM Test of Stochastic Discount Factor Models with Useless Factors", *Journal of Financial Economics*, 54(1), pp. 103-127.

Kan, R. et C., Zhang, 1999b, "Two-pass Tests of Asset Pricing Models with Useless Factors", *Journal of Finance*, 54(1), pp. 203-235.

Kan, R. et G., Zhou, 1999, "A Critique of the Stochastic Discount Factor Methodology", *Journal of Finance*, 54(4), pp. 1221-1248.

Kraus, A. et R.H., Litzenberger, 1976, "Skewness Preferences and the Valuation of Risk Assets", *Journal of Finance*, 31(4), pp. 1085-1100.

Kunitomo, N., 1992, "Improving the Parkinson Methods of Estimating Security Price Volatilities", *Journal of Business*, 65(2), pp. 295-302.

Lintner, J., 1965, "The Valuation of Risk Assets and the Selection of Risky Investments in Stock Portfolios and Capital Budgets", *Review of Economics and Statistics*, 47(1), pp. 13-37.

Morana, C., 2007, "Estimating, Filtering and Forecasting Realized Betas", *Journal of Financial Forecasting*, 1(1), pp. 83-111.

Mossin, J., 1966, "Equilibrium in a Capital Asset Market", *Econometrica*, 34(4), pp. 768-783.

Parks, R.W., 1967, "Efficient Estimation of a System of Regression Equations when Disturbances are both Serially and Contemporaneously Correlated", *Journal of the American Statistical Association*, 62(318), pp. 500-509.

Protter, P.E., 2004, *Stochastic Integration and Differential Equations*, Second Edition, Springer-Verlag, New York, 444 pages.

Ross S., (1976), "The Arbitrage Theory of Capital Asset Pricing", *Journal of Economic Theory*, 13(3), pp. 341-360.

Rubinstein, M.E., 1973, "The Fundamental Theorem of Parameter-preference Security Valuation", *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 8(1), pp. 61-69.

Scholes, M.S. et J., Williams, 1977, "Estimating Betas from Nonsynchronous Data", *Journal of Financial Economics*, 5(3), pp. 309-327.

Shanken, J., 1992, "On the Estimation of Beta Pricing Models", *Review of Financial Studies*, 5(1), pp. 1-33.

Sharpe, W.F., 1964, "Capital Asset Prices: A Theory of Market Equilibrium under Conditions of Risk", *Journal of Finance*, 19(3), pp. 425-442.

Zellner, A., 1962, "An Efficient Method for estimating Seemingly Unrelated Regressions and Tests for Aggregation Bias", *Journal of the American Statistical Association*, 57(298), pp. 348-368.

Zumbach, G., F., Corsi et A., Trapletti, (2002), "Efficient Estimation of Volatility using High Frequency Data", Discussion Paper, Olsen & Associates, Research Institute for Applied Economics, 22 pages.