



HAL
open science

Tâtonnement expérimental et Apprentissage en mathématiques

Jean-Claude Regnier

► **To cite this version:**

Jean-Claude Regnier. Tâtonnement expérimental et Apprentissage en mathématiques. P. Clanché, E. Debarbieux. La pédagogie Freinet, mises à jour et perspectives, Presses Universitaires de Bordeaux, pp.135-153, 1994. halshs-00506711

HAL Id: halshs-00506711

<https://shs.hal.science/halshs-00506711>

Submitted on 10 Dec 2019

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

TÂTONNEMENT EXPÉRIMENTAL ET APPRENTISSAGE EN MATHÉMATIQUES

Jean-Claude Régnier¹

UMR 5191 ICAR -Université Lumière – Lyon2 Université de Lyon

PRÉLIMINAIRE

Mon propos se place dans la continuité d'une réflexion que je conduis depuis plusieurs années à partir de ma pratique pédagogique quotidienne autour de la notion d'apprentissage fondé sur tâtonnement expérimental de l'apprenant. Dans un précédent article², j'ai exposé quelques éléments de cette réflexion associée à l'élaboration d'une séquence didactique portant sur la notion mathématique de "fonction" en classe de Seconde et visant à favoriser une démarche de tâtonnement expérimental chez les élèves. Le *tâtonnement expérimental* est selon Freinet³ un processus sur lequel se fonde *universellement* tout développement cognitif individuel. Toutefois si nous portons un regard attentif à la pratique de l'enseignement mathématique, quelques questions surgissent : le point de départ de nos réflexions chez les élèves. Le *tâtonnement expérimental* est selon Freinet^{3,4} un processus sur lequel se fonde *universellement* tout développement cognitif individuel. Toutefois si nous portons un regard attentif à la pratique de l'enseignement des mathématiques, quelques questions surgissent : le point de départ de nos réflexions a été la vie d'une classe de Seconde de Lycée en cours de mathématiques et les problèmes de gestion efficace des apprentissages posés par l'enseignement à ce niveau. L'organisation⁵ mise sur pied participe de cette recherche d'une gestion contrôlée de ces situations complexes d'apprentissage. Certes, celle-ci peut apparaître comme une approche *technique* comportant des contraintes qui s'opposent à l'esprit de *liberté* de la démarche du tâtonnement expérimental. Mais elle vise essentiellement à constituer un outil d'aide à l'analyse et au contrôle de la situation d'apprentissage. Dans cette perspective suit le questionnement suivant :

¹ Cet article est la seconde version corrigée et actualisée en 2019 du chapitre de l'ouvrage (1994) *La Pédagogie Freinet, mises à jour et perspective réactualisé* sous la direction de Pierre Clanché, Eric Debarbieux, Jacques Testanière Bordeaux : PUB (p.135-153)

² Jean-Claude Régnier, Une méthode d'apprentissage fondé sur le tâtonnement expérimental de l'apprenant, *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, Vol. n° 1, 1988, pp. 255-279. ULP-IREM de Strasbourg. https://mathinfo.unistra.fr/websites/math-info/irem/Publications/Annales_didactique/vol_01/adsc1_1988-014.pdf

³ Célestin Freinet (1969) *La méthode naturelle*, Tome I, Paris : Delachaux et Niestlé,

⁴ ICEM, "Dans les traces du Tâtonnement Expérimental", *BTR*, n° 18-19, avril 1976. <https://www.icem-pedagogie-freinet.org/node/7406>

⁵ Voir note 2

Comment le tâtonnement expérimental est-il possible en mathématiques ? Quelles sont les conditions repérables pour que le tâtonnement expérimental se réalise en mathématiques ? Dans des situations mathématiques, la pratique du tâtonnement expérimental est-elle *naturelle*⁶ ou relève-t-elle d'un apprentissage ? Quelle part tient l'enseignement ? Quel est son rôle ?

LE TÂTONNEMENT EXPÉRIMENTAL DANS LE MOUVEMENT FREINET EN PARTICULIER POUR L'ACQUISITION DE NOTIONS SCIENTIFIQUES

En tant que militant pédagogique, notre croyance nous pousse à souscrire à la validité du rôle universel du tâtonnement dans le développement cognitif individuel. Cette démarche est même vue comme *naturelle* et favoriserait sinon déterminerait les apprentissages. Sa validité paraît attestée :

- d'une part, par les impressions⁷ qui globalement ressortent des témoignages sur l'efficacité d'une pratique pédagogique mettant en œuvre le tâtonnement expérimental⁸,
- d'autre part, par une amorce de quelques réflexions et travaux scientifiques qui, à côté des écrits de Freinet, intègrent cette notion dans leurs observations et leurs analyses.

Quelques études apportent sur ces sujets des précisions intéressantes, notamment dans la mesure où leur objet est l'apprentissage de notions scientifiques :

- L'article⁹ sur *l'Importance des représentations initiales dans un processus d'apprentissage* de Pierre Guérin.
- L'article¹⁰ sur *Tâtonnement expérimental et Environnement informatique* de Jean-Claude Pomès.
- L'ouvrage¹¹ *Pour une mathématique populaire* de Edmond Lémery.

COMMENT LE TÂTONNEMENT EXPÉRIMENTAL EST-IL POSSIBLE EN MATHÉMATIQUES ?

Dans un premier temps, il paraît important de creuser la question fondamentale : *Que sont la ou les mathématiques ?*

⁶ Dans un sens utilisé dans les conceptions de la pédagogie Freinet

⁷ Selon un critère pragmatique : "Ça fonctionne", "ça marche".

⁸ Des élèves parviennent à acquérir dans les classes Freinet aussi bien qu'ailleurs les notions visées.

⁹ In P. Clanché, J. Testanière (Dir) (1989) *Actualité de la Pédagogie Freinet* Bordeaux : PUB

¹⁰ In P. Clanché, J. Testanière (Dir) (1989) *Actualité de la Pédagogie Freinet* Bordeaux : PUB (p.269 et suivante)

¹¹ Edmond Lémery (1983) *Pour une mathématique populaire* Paris : Casterman.

DU POINT DE VUE DES MATHÉMATIENS

Selon René Thom, les mathématiques peuvent être considérées comme « un langage théorique universel » fondé sur des axiomes, ayant sa logique propre et sa cohérence interne. Elles sont une science « vivante » et évolutive dont le développement provient tant de problèmes internes que de problèmes externes comme outils d'application d'autres disciplines. Il ajoute même dans un entretien avec Jacques Nimier qu'il ne peut y avoir « dans les sciences, une théorisation à validité réellement universelle fondée sur des concepts exprimés par des mots du langage ordinaire, si ces concepts ne sont pas capables de s'exprimer MATHÉMATIQUEMENT en termes d'entités fondamentales. (...) il n'y a de théorisation que mathématique¹² » Cette idée de théorisation qui se réalise par la mathématisation, conçoit les mathématiques comme se développant selon un processus qui part de l'expérience, s'en abstrait pour y revenir ensuite. Elle se rattache à la conception platonicienne dans laquelle les objets mathématiques ont une réalité objective, une existence propre indépendante de la connaissance que nous en avons. L'activité du mathématicien consiste à les découvrir par l'expérience, par une pratique de type tâtonnement expérimental. Les objets mathématiques, bien qu'ils ne soient de nature ni physique, ni matérielle, peuvent réagir à des stimuli mathématiques et se dévoiler par leurs réactions à ces stimuli. Toutefois, la partie proprement mathématique paraît échapper à l'expérience. La vérité n'y est plus établie expérimentalement. La démarche de validation qu'est la **démonstration** est réalisée selon une logique¹³ qui ne se fonde pas sur l'expérience mais sur des règles internes bien établies.

Nous trouvons là probablement un paradoxe apparent. L'activité de tâtonnement expérimental paraît ne pas porter sur les mathématiques elles-mêmes, mais plutôt sur l'adéquation du modèle mathématique avec la situation dont il prétend décrire une partie ou encore sur les procédures d'*exhumation* des objets mathématiques eux-mêmes. La validité des propriétés ou des théorèmes, elle, est établie par *démonstration*.

Dans le cadre de l'enseignement-apprentissage, le point de vue platonicien assurant une correspondance entre les notions mathématiques et celles issues de nos expériences sensibles, nous incite à le considérer comme générateur de sens pour l'apprenant. Si de plus nous y incluons l'activité de modélisation, le tâtonnement expérimental retrouve une

¹² Jacques Nimier (1989) *Entretiens avec des mathématiciens*. Villeurbanne : IREM de Lyon, p. 99.

¹³ Dans ce cas, la logique aristotélicienne.

place et un sens.

Dans la conception **formaliste** qui apparaît au XIX^e siècle, les objets mathématiques n'existent plus en dehors des théories qui les définissent. Les mathématiques ne consistent plus qu'en des formules, des assemblages de symboles, qui n'ont aucune signification propre. Sur la base des règles de raisonnement identiques à celles de la conception platonicienne, les formules sont déduites d'autres formules. La vérité n'a plus qu'un statut formel. Le jeu sur le choix du système initial d'axiomes conduit à produire des théories' telles que celles des géométries non-euclidiennes où l'expérience sensible ne paraît avoir de place. Cette fois l'activité de tâtonnement expérimental ne pourra prendre de sens que dans les activités d'application des formules à d'autres domaines tels que ceux de la physique ou de la biologie, par exemple. Le mode d'enseignement-apprentissage le plus adéquat semble bien être la présentation axiomatique du savoir déjà constitué par la communauté des mathématiciens. À moins que l'on ne laisse l'apprenant développer son propre système axiomatique de base ! De ce point de vue, seule l'exploration des conséquences des décisions que l'on est amené à prendre, peut se réaliser en partie selon une démarche de type tâtonnement expérimental.

Prenons un exemple :

On établit par comptage ou par mise en évidence de l'existence d'une bijection, que « dans le cas fini, le Tout est plus grand que la partie ». L'approche peut s'appuyer sur l'expérience. Lorsque l'on souhaite étendre cette proposition au cas des ensembles' infinis, une discussion apparaît. Quelles contradictions observe-t-on lorsque l'on procède à une transposition du cas fini au cas infini ? En adoptant le parti de la *mise en bijection*, on met en évidence que « la partie stricte (par exemple : le sous-ensemble des nombres entiers pairs) est aussi grande que le tout (ici : l'ensemble des nombres entiers) » Le choix du critère peut donner lieu à un débat et des confrontations à caractère expérimental. Toutefois, la validation s'établit alors sur la base d'un raisonnement *a fortiori* nécessaire quand on tient compte de l'inaccessibilité de l'infini.

Dans la conception formaliste, en fait le but essentiel est l'utilisation de méthodes abstraites pour obtenir des résultats eux-mêmes abstraits.

À l'opposé des deux conceptions précédentes, les conceptions dites de l'**intuitionnisme** ou le **constructivisme**¹⁴ considèrent que seuls les résultats obtenus par une construction finie, constituent des objets mathématiques. En quelques sortes, les résultats bien établis sont ceux qui sont « expérimentables », c'est-à-dire réalisables en supposant qu'aucune limitation purement matérielle ne vienne s'y opposer. Le principe du tiers exclu¹⁵ est alors mis en doute. Cela exige que toute démonstration d'existence repose sur un algorithme de construction de l'objet. Dans cette conception, le but essentiel est de fournir des algorithmes pour résoudre des problèmes idéalement concrets. Ici la démarche de tâtonnement expérimental devient une composante importante de l'activité du mathématicien, par conséquent, dans cette logique, nous devrions la retrouver au niveau de l'apprentissage.

Selon P.-J. Davis et Reuben Hersh¹⁶, le monde mathématique est « peuplé de 65 % de platoniciens, 30 % de formalistes et 5 % de constructivistes ». Ils ajoutent que « le mathématicien typique à l'œuvre est platonicien en semaine, formaliste pendant le week-end ». Au regard des trois conceptions J. Dieudonné¹⁷ précise que "chacun reste libre de penser ce qu'il veut... pourvu que ses raisonnements soient **formalisables** ... "

C'est pourquoi nous considérons que :

- -d'une part, nos démarches didactique et pédagogique se réfèrent malgré nous et selon les circonstances, tour à tour à ces trois conceptions.
- -d'autre part, le domaine mathématique ne s'oppose pas complètement et irrémédiablement à la réalisation d'une démarche de tâtonnement expérimental tant du point de vue du chercheur que de celui de l'apprenant.

DU POINT DE VUE EXPÉRIMENTAL

Mais comment se peut-il que le tâtonnement soit aussi *expérimental* dans le sens strict du terme ?

¹⁴ Luitzen Brouwer (1881-1966), logicien et mathématicien hollandais a développé cette conception à partir de 1907

¹⁵ Ainsi avons-nous par exemple : d'un point de vue formaliste ou platonicien : l'assertion "Pour tout x de l'ensemble de réels soit x est égal à 0, soit x est différent de 0" est un théorème vrai. d'un point de vue constructiviste : le raisonnement a un pouvoir limité et est de nature finie. On peut donc tout juste démontrer qu'"il n'existe pas de nombre réel qui soit à la fois nul et non nul".

¹⁶ P.-J. Davis et Reuben Hersh (1985) *L'univers mathématique* Paris : Gauthier-Villars. (Traduction de *The mathematical experience* par Chambadal).

¹⁷ Jean Dieudonné (1977) *Panorama des mathématiques pures*. Paris : Gauthier-Villars (p. 225).

En effet, « expérimenter » suppose un dispositif, un protocole, des instruments adéquats pour provoquer une observation afin d'analyser un phénomène ou une réaction des objets étudiés indépendamment de l'expérimentateur.

Certes dans le domaine des sciences physiques ou biologiques, le critère de validation porte bien sur l'adéquation entre un modèle, choisi ou construit et des résultats expérimentaux. Mais dans le domaine mathématique, le critère de validation lui n'est plus de nature expérimentale : il s'agit de **démonstration** qui, elle, est logique et déductive. Même s'il paraît possible d'organiser des débats de validation qui permettent de retrouver les confrontations scientifiques de la communauté des chercheurs, la démonstration demeure interne au domaine mathématique et obéit à ses propres règles. Où sont les instruments dont dispose le physicien pour falsifier ses conjectures ?

L'existence d'un instrument équivalent au voltmètre, par exemple, paraît douteuse¹⁸.

Certes l'introduction de la calculatrice ou de l'ordinateur donne à penser que nous tenons là un outil analogue. Mais ce n'est qu'une apparence. Une machine, quelle qu'elle soit, est soumise à des limitations (sa capacité, nombre de pas, etc.) alors que les mathématiques visent à une validité dégagée de limitations (cela que l'on soit platonicien, formaliste ou constructiviste). L'apport se restreint à une simple augmentation de la capacité de traitement. Pour illustrer notre idée, nous fournissons deux exemples.

-premier exemple : Cas des signaux d'erreur émis par des machines qui ne sont pas toujours des erreurs mathématiques.

Au cours d'un traitement, supposons que l'on soit amené à réaliser un calcul dont le résultat dépasse les capacités de mémoire de l'instrument. La machine affichera dans son codage un message « Erreur ». Cependant ce message est aussi bien le signal d'une opération mathématique interdite qu'un indicateur des limites de l'instrument !

-second exemple : Cas d'erreur issus des limitations de la machine sans signaux d'erreur émis

¹⁸Quand bien régnerait-il une certaine tension dans la classe !

Considérons la suite¹⁹ curieuse définie pour p nombre entier de \mathbb{N} par la relation :

$$U_p = \int_1^e x^2 (\ln(x))^p dx$$

Alors que le raisonnement déductif montre que cette suite converge vers 0, le recours à la calculatrice pour traiter l'algorithme fait apparaître des résultats étranges et même contradictoires. Le phénomène trouve son explication dans l'instabilité de l'algorithme de calcul. Sa grande sensibilité à la valeur initiale fait que la moindre erreur dans la valeur U_0 déclenche des oscillations qui s'amplifient.

Considérons la suite de Fibonacci introduite sur la calculatrice à partir de la formule :

$$F_p = F_{p-1} + F_{p-2} \text{ avec } F_0=1 \text{ et } F_1=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

Certes cette suite est divergente, mais le recours à une calculatrice laisse penser en calculant les premiers termes qu'il s'agit d'une suite alternée convergente !

A moins d'en rester là, en concluant à une impossibilité, il nous paraît raisonnable de considérer le terme *expérimental* dans un sens plus large se référant davantage à une acceptation commune de "*faire l'essai de...*". Ainsi en prenant le sens de "*fait d'éprouver quelque chose, considéré comme un élargissement ou un enrichissement des connaissances, du savoir ou des aptitudes*", le terme *expérimental* investit le champ mathématique du point de vue de l'apprenant. Son expérience commence avec la manipulation concrète ou mentale d'objets mathématiques ou paramathématiques. Elle peut se prolonger dans des activités de modélisation ou de mathématisation.

DU POINT DE VUE DES ASPECTS DIDACTIQUES

Dans notre conception didactique, les apprenants sont alors placés face à des situations-problèmes²⁰ supposées pertinentes au regard de certaines notions ou concepts mathématiques. Ces situations supposent aussi la réalisation de deux conditions minimales²¹ énoncées par Jean-Claude Pomès, à savoir:

¹⁹ Extrait de l'article "Une suite curieuse" de P.L. Hennequin in *Bulletin de l'APMEP* n°376 dec. 1990, pp. 671-672.

²⁰ Nous reviendrons sur cette notion plus loin.

²¹ Jean-Claude Pomès (1989) *Tâtonnement expérimental et Environnement information*. P. Clanché, J. Testanière (Dir) *Actualité de la Pédagogie Freinet* Bordeaux : PUB (p.272)

- que le phénomène observé produise une réponse ;

-que la réponse obtenue intervienne à une distance optimum, temporelle et affective, ni trop près, ni trop loin".

Dans cette conception, nous imaginons fort bien en quoi une activité tâtonnante peut se manifester dans le sens habituel "*d'hésiter, par manque de connaissances suffisantes*", ou de "*faire des essais en divers sens afin de trouver une voie, de découvrir une solution*".

Cependant, comment cela peut-il être mis en acte dans le domaine mathématique pour et par un sujet en situation d'apprentissage?

Considérons comme schéma minimal pour tout apprentissage mathématique celui proposé par François Pluvinage²². Après avoir pris connaissance de l'énoncé du problème posé dans une situation fixée ou de la tâche assignée, l'individu cherche à en *comprendre le sens* et procède à des *traitements* pour lui. Au vu de ce qui en résulte, il accepte ou refuse ces traitements. En cas de refus, il les reprend en les corrigeant jusqu'à ce qu'il prenne une décision d'arrêt. A ce stade, il exprime à autrui sous forme communicable ce qu'il a trouvé.

Nous sommes enclin à penser que l'activité de tâtonnement expérimental de l'individu se réalise dans la phase d'interaction *Traitement-Contrôle*. L'individu-apprenant utilise ses acquis antérieurs, ses expériences passées, ses représentations, etc.

²² François Pluvinage (1989) Aspects multidimensionnels du raisonnement en géométrie. *Annales de Didactique et de Sciences cognitives*, vol. 2, p. 8, ULP Strasbourg. https://mathinfo.unistra.fr/websites/math-info/irem/Publications/Annales_didactique/vol_02/adsc2_1989-001.pdf

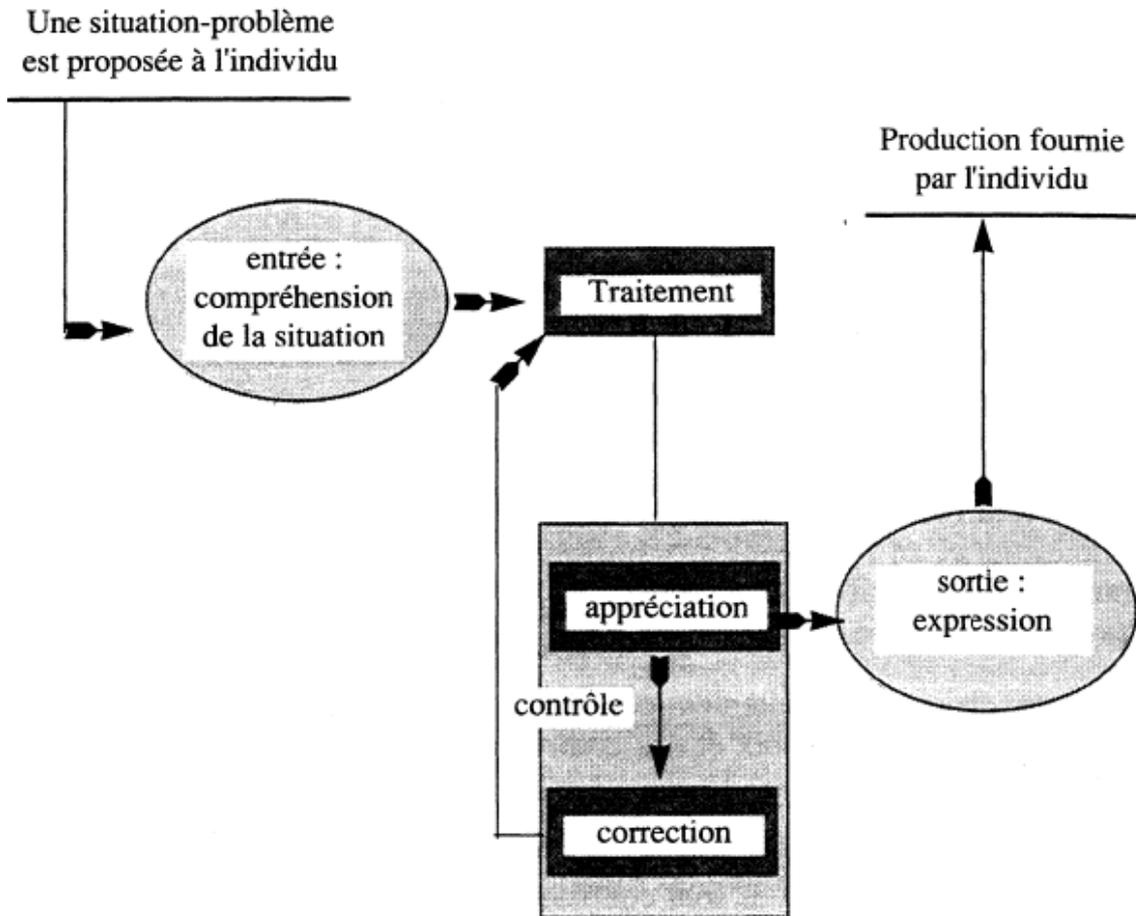


Figure 1 Schéma minimal pour tout apprentissage mathématique

En fait, nous y retrouvons probablement ce que Edmond Lémery a tenté de décrire dans son ouvrage²³. Quant à l'analyse des phénomènes provoqués par une séquence didactique chez l'apprenant, l'enseignant (observateur) dispose des données suivantes:

- contenus mathématiques
- tâches effectives proposées
- productions des élèves

Ces trois types de données doivent être étudiées puis confrontées indépendamment l'une de l'autre. Il est à noter que la confrontation entre l'analyse des contenus et celle des tâches pour une activité est réalisable *a priori*. De toute évidence, la confrontation avec l'analyse des productions n'est réalisable qu'*a posteriori*.

²³ Voir note 11

Il semble intéressant de rappeler les exigences à l'égard des activités proposées aux apprenants dans une situation didactique. En effet toute activité doit satisfaire au moins aux quatre critères²⁴ généraux régissant les conditions liées:

-au **démarrage** des activités par des consignes qui permettent à la grande majorité d'aborder sans difficultés majeures les activités

-à la **poursuite de conjectures** par un choix judicieux d'activités suscitant l'intérêt des élèves et développant leur motivation.

-à la **naissance de conjectures** lors du déroulement des activités, des questions réelles doivent pouvoir surgir.

-à la **résolution des conjectures** moyennant un éventuel apport d'informations et en recourant aux notions et aux outils mathématiques qui constituent l'objectif de l'apprentissage, les principales conjectures apparues doivent pouvoir être résolues.

Cette dialectique "*traitement-contrôle*" suppose par ailleurs que l'individu puisse procéder à des choix et des confrontations entre traitements et les résultats qu'ils produisent.

Des travaux conduits en didactique des mathématiques sur l'analyse de tâches auxquelles les élèves sont confrontés, ont conduit à définir les notions de **registre d'expression**²⁵ et de **jeux de cadres théoriques**²⁶. Un registre désigne les différents systèmes sémiotiques utilisables pour présenter une information ou objectiver une représentation mentale. Il est constitué de signes et réalise un moyen d'expression ou de représentation d'un objet, d'une idée ou d'un concept. Changer de registre implique une réorganisation de la présentation d'une connaissance.

En géométrie, nous pouvons disposer :

-du registre figuratif, rattaché à la perception visuelle ou tactile, munie de ses propres lois d'organisation

-du registre du langage naturel permettant de décrire et d'explicitier le statut des énoncés

-du registre du langage symbolique permettant d'écrire et de recourir à des formules.

²⁴ François Pluvinage In *Annales de Didactique et de Sciences cognitives*, vol. 2, p. 9. ULP Strasbourg, 1989

²⁵ Isménia Guzman, : *Le rôle des représentations dans l'appropriation de la notion de fonction*, Thèse de Doctorat (ULP Strasbourg 1990)

²⁶ Régine Douady, *Jeux de cadres et dialectique outil-objet*. Thèse de Doctorat d'Etat (Paris VII -1984)

À propos du concept de "fonction", nous pouvons pointer

- -un registre "tableaux"
- -un registre "graphiques"
- -un registre "algébrique".

Quant à la notion de "cadre mathématique", elle renvoie à celle de cadre théorique, c'est-à-dire ce qui est constitué « par les objets d'une branche mathématique, par les relations entre ces objets, par leurs formulations diverses et les images mentales qui leur sont associées ». Ainsi parle-t-on de cadre géométrique ou de cadre algébrique !

Nous pensons qu'une possibilité importante de confrontation réside dans ces *jeux de cadres* et ces *passages entre registres d'expression*. Par ailleurs entre deux présentations d'une information, on peut repérer deux relations indépendantes :

- -la relation d'**équivalence référentielle**
- -la relation de **congruence sémantique**

La **substitutivité** est une propriété inhérente à tout registre et est essentielle dans tout changement de registre.

Pour sa part, la démarche mathématique requiert le fonctionnement de cette substitivité sur la base d'une invariance référentielle. Colette Laborde²⁷ a mis en évidence l'importance de l'interaction entre deux registres de langage.

Quant à Raymond Duval²⁸, il conclut « Un des obstacles rencontrés par nombre d'élèves dans leur apprentissage des mathématiques tient au fait que l'équivalence référentielle l'emporte sur la congruence sémantique, alors que le fonctionnement spontané de la pensée suit en priorité la congruence sémantique ». Ceci met à jour une nouvelle approche de la question du langage mathématique. Raymond Duval ajoute : « Le langage naturel ne peut être opposé simplement et globalement aux langages logico-mathématiques, et aux représentations figurales ou graphiques : la véritable frontière qui arrête nombre d'élèves se situe entre congruence et non-congruence sémantique dans le jeu de la substitution d'une expression ou d'une représentation à une autre ».

Les passages entre registres induisent des confrontations entre des représentations de nature différente d'un même objet mathématique. Ceux-ci semblent probablement des passages obligés pour accéder au sens de toute présentation mathématique.

²⁷ Colette Laborde, *Langue naturelle et écriture symbolique : deux codes en interaction dans l'enseignement mathématique*. Thèse de Doctorat d'Etat (Grenoble 1982)

²⁸ Raymond Duval (1988) Écarts sémantiques et cohérence mathématique. *Annales de Didactique et de Sciences cognitives*, Vol. 1 (pp. 7-25) ULP Strasbourg, 1988

Les changements de cadres conduisent à des changements de formulation d'un problème voire même à des changements de problème. Selon Régine Douady²⁹ « ils sont un moyen d'obtenir des formulations différentes d'un problème qui sans être nécessairement équivalentes permettent un nouvel accès aux difficultés rencontrées et la mise en œuvre d'outils et techniques qui ne s'imposaient pas dans la première formulation. »

Tout nous porte à croire que "jeux de cadres" et "passages entre registres" offrent les conditions propices aux confrontations requises dans la réalisation d'un tâtonnement expérimental en mathématique, au sens large.

C'est d'ailleurs probablement cette perspective qui est exploitée dans les nouveaux programmes et les manuels correspondants sous la rubrique "Travaux Pratiques". Ainsi peut-on lire à propos du programme³⁰ de mathématique de la classe de Seconde, les intentions majeures suivantes : « ..Entraîner les élèves à la pratique d'une démarche scientifique, en développant conjointement les capacités d'expérimentation et de raisonnement, d'imagination et d'analyse critique... Insister sur le travail personnel des élèves... et sur le rôle formateur des' activités de résolution de problèmes. Dans cette perspective, une rubrique de travaux pratiques a été introduite... ». En écho, un manuel³¹ de la classe de Seconde se présente ainsi « ... les activités tiennent une grande place dans l'ouvrage et jouent un rôle très important dans l'acquisition du savoir et des méthodes. Elles sont conçues pour permettre une découverte progressive, par les élèves, des notions du cours ... les travaux pratiques font l'objet soit d'activités, soit d'exercice ».

De son côté, le groupe lyonnais³² de travail centré sur le *problème ouvert* et la *situation-problème* à l'école vise par sa démarche à amener l'élève à:

essayer -conjecturer -tester -prouver

Un problème ouvert se caractérise par :

- -un énoncé court
- -un énoncé qui n'induit ni une méthode, ni une solution
- -le fait qu'il se situe dans un domaine conceptuel assez familier aux élèves

²⁹ Op. cit. Voir note 26

³⁰ BO n° 20 du 17 mai 1990.

³¹ . *Dimathème -mathématiques -classe de Seconde*, Didier, Paris, 1990 -(Edition réservée au professeur

³² G. Arsac, G. Germain, M. Mante (1988) *Problème ouvert et situation-problème*. Villeurbanne:IREM de Lyon

Exemple :
Etudier la chaîne de nombres définis ainsi pour tout nombre entier
à n pair, on fait correspondre
à n impair, on fait correspondre $3n + 1$

Une situation-problème peut être caractérisée ainsi:

- -respecter les quatre critères énoncés plus haut à propos des activités : (démarrage, poursuite, naissance et résolution de conjectures)
- -les élèves ne doivent pas posséder les connaissances suffisantes pour résoudre immédiatement le problème ;
- -l'élève doit pouvoir porter un jugement sur la validité de la réponse qu'il fournit
- -le problème doit être pertinent par rapport aux notions mathématiques visées
- -le problème doit permettre la mise en œuvre des jeux de cadres et de registres.

Force est de constater la parenté qui lie ces points de vue aux nôtres en ce qui concerne la démarche de tâtonnement expérimental dans le domaine mathématique, sa place et son rôle dans le développement cognitif des apprenants. Ceci nous incite à penser que placer la pratique du tâtonnement expérimental dans le champ des possibles ne semble pas être une idée totalement singulière dans le domaine mathématique.

Pour revenir à l'analyse des tâches, nous souhaitons rappeler combien l'existence d'au moins deux traitements indépendants est fondamental. Cette condition détermine la possibilité de réalisation d'une démarche de tâtonnement expérimental. Ainsi donc sommes-nous en particulier conduit à rejeter la stratégie banale habituelle du « je t'explique et tu appliques ensuite » qui ne s'appuie que sur des traitements déterminés et qui exclut la confrontation des traitements indépendants. Ce travail d'analyse permet d'anticiper sur ce qui peut se passer quand on introduit cette dimension expérimentale dans l'apprentissage.

APPLICATION À UN EXEMPLE DIDACTIQUE: LA NOTION DE "FONCTION".

Plusieurs problèmes relatifs aux fonctions peuvent assez vite conduire à des expériences. Par exemple, la situation suivante relative à l'étude de l'infini:

Considérons une fonction conçue comme une certaine réalité mathématique, bâtie comme une petite architecture avec des éléments usuels, et posée d'emblée.

Supposons qu'on cherche à étudier un comportement à l'infini. Que peut-il se produire?

Plusieurs stimuli différents, obtenus à l'aide d'une calculatrice, peuvent produire des résultats incompatibles. Le manipulateur peut éventuellement mal conduire ses calculs et obtenir que la fonction soit, d'une part, décroissante et, d'autre part, tende vers l'infini positif!

Que faire quand l'expérience fournit des résultats divergents? L'enseignement doit évidemment prévoir d'inciter l'élève à mettre en confrontation ces deux résultats, à analyser la contradiction, à identifier les erreurs et leurs causes, enfin à procéder aux rectifications nécessaires. L'importance de la part de l'enseignant émerge très clairement ici. Elle risque d'avoir un poids déterminant dans le processus de validation des résultats. L'analyse des tâches doit donc intégrer explicitement cette dimension.

Prenons maintenant un autre exemple relatif à l'étude de minima-maxima : celui-ci exhibe la variété d'énoncés auxquels l'enseignant peut avoir recours en relation avec les objectifs fixés. Cela permet d'illustrer à quels choix de présentation, l'enseignant est confronté. Pour ce, considérons la conjecture³³. « *Toute fonction qui admet un point maximum est croissante avant ce point et décroissante après* ». L'enseignant peut:

- soit fournir une fonction à étudier. Celle-ci fournissant un contre-exemple.
- soit demander de construire une fonction contre-exemple.

La première présentation ne laisse pas de place à une démarche de tâtonnement expérimental. L'étude se déroule selon un processus plutôt fermé. En revanche, la seconde recouvre les caractéristiques d'un problème ouvert et crée une situation-problème qui s'ouvre à l'expérimentation. Par ailleurs l'enseignant peut aussi y introduire des contraintes-guides ou bien par le jeu d'un débat dans la classe, aider les élèves à les expliciter. Parmi celles-ci nous pourrions citer:

- existence d'un point maximum
- existence d'une oscillation au voisinage de ce point
- annulation de la dérivée en beaucoup de points voisins du maximum
- mise en référence à deux situations standards : les paraboles et la fonction

³³ En fait cette conjecture est fautive. Ce fait est justifié par la construction d'un contre-exemple proposé par F. Pluvinaud avec la fonction définie par : $f(x) = 1 - 0,625x^2 + 0,375x^2 \sin(1/x)$ pour x non nul et $f(0) = 1$

La construction de ce contre-exemple induit de toute évidence une démarche de tâtonnement expérimental chez l'élève. Toutefois cette démarche requiert à ce niveau une gestion de l'expérience impliquant des mises au point des contrôles, une planification à laquelle l'enseignant devra probablement s'associer en tant que personne-ressource. Pour notre part, nous avons effectivement expérimenté une situation sur les fonctions en classe de Seconde. Nous avons organisé une séquence didactique sur cette notion en fondant la construction d'une genèse artificielle du concept sur la base d'une situation-problème (articulée sur la recherche d'optimum de processus variable et continu) où ce concept est pertinent.

La pratique du tâtonnement expérimental en mathématiques est-elle "naturelle" ou relève-t-elle d'un apprentissage?

Cela nous conduit à considérer quelques situations de travail possibles parmi lesquelles nous pouvons repérer une manifestation du tâtonnement expérimental.

- Première situation

Partons de l'exemple d'un jeu de type "boîte à trous". Tel un jeu pour enfant en bas âge constitué d'un cube avec des trous de formes géométriques standard par lesquels on peut faire passer des objets de forme identique. Lorsqu'on met ce jeu entre les mains d'un enfant et qu'il y porte intérêt, "spontanément", il va se mettre à "essayer" d'introduire les objets. Pour ce faire, il procède à un tâtonnement expérimental par des approches empiriques. Notons cependant que le cadre de cette action est parfaitement standardisé puisque le constructeur a prévu une forme par trou et un seul objet correspondant. L'action cesse dès que l'enfant ne s'y intéresse plus. Ce tâtonnement est présenté comme une activité développant la connaissance de l'enfant à l'égard des formes géométriques. Ceci trouvera probablement un prolongement ultérieur dans des traitements mathématiques. Ce que nous cherchons à faire émerger ici est le caractère apparemment "spontané" et "naturel" de la pratique du tâtonnement expérimental dans lequel la plupart des individus semblent s'investir face à des problèmes analogues (au regard de leur propre évolution). L'individu peut agir isolément sans confrontation avec autrui. Le contrôle de la solution proposée est facilité par la réponse immédiate fournie par l'objet³⁴

- Seconde situation

³⁴ - ici, la pièce géométrique passe par le trou ou non.

Reprenons le cas de l'emploi de machine à calculer, mais cette fois du point de vue de l'apprenant. La calculatrice renvoie un message d'erreur à la suite d'une opération hors ses limites.

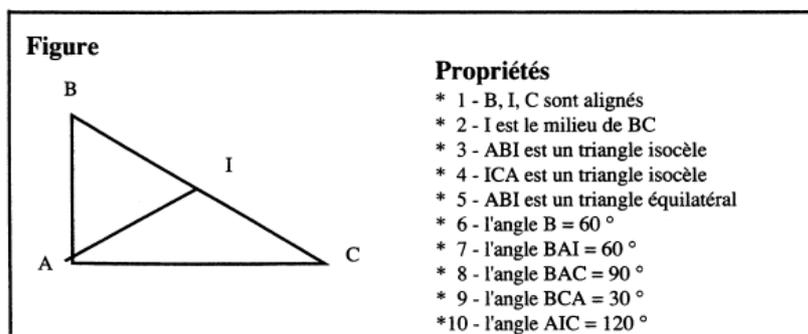
- Comment l'élève va-t-il interpréter cette réponse de l'instrument?
- Comment peut-il par le biais de cet instrument contrôler sa réponse?
- Comment peut-il valider ainsi sa démarche?

Les essais successifs qu'il pourra réaliser, risquent de ne pas aboutir aux éclaircissements souhaitables. Invariablement la machine réagira par le message « Erreur ». Cette circonstance place l'élève dans une situation de blocage. Seule une intervention extérieure peut le tirer de cette affaire. Nous tenons là un exemple d'apprentissage (ici réduit à la donnée de quelques informations) nécessaire pour qu'un élève puisse résoudre, dans un registre algorithmique, des problèmes surgis de l'utilisation d'une machine. Livré à lui-même, un élève a de grands risques de ne pas résoudre la contradiction à laquelle il est confronté.

Quant aux deux situations suivantes, elles mettent explicitement en jeu la relation interactive ternaire: Apprenant-Savoir-Enseignant.

- Troisième situation

Cette troisième situation relève davantage d'une gestion de type « gestion de classe³⁵. » Prenons un exemple extrait d'un article³⁶ de François Pluvinage. L'exercice proposé vise à manipuler la distinction entre "contenu" et "statut" d'une proposition mathématique. Il consiste à présenter une figure géométrique accompagnée d'une liste de constatations et à demander d'élaborer un programme de construction de cette figure puis de rédiger un énoncé mathématique. En l'occurrence, la situation suivante a été proposée :



³⁵ Au sens scolaire

³⁶ François Pluvinage (1988) Les aspects multidimensionnels du raisonnement en géométrie" in *Annales de didactique et de sciences cognitives*, vol. 2, ULP Strasbourg, 1988, pp. 14-15

La première phase de recherche individuelle a conduit à un ensemble de productions schématiquement réductibles à quatre catégories de programmes de construction :

- ceux s'appuyant sur le triangle rectangle avec le milieu de son hypoténuse
- ceux utilisant les triangles isocèles côte-à-côte
- ceux utilisant le triangle équilatéral "prolongé"
- ceux prenant le segment BC: suivi du placement du point A

Mais évidemment la reproduction de la figure est réalisée sans recourir exhaustivement aux dix propriétés. C'est alors que la variété des productions ne pourra être exploitée aux fins de l'exercice que si on passe à une seconde phase qui introduit cette fois une dimension sociale. L'activité de tâtonnement expérimental se prolonge alors sous la forme d'une "expérimentation collective" avec des confrontations intersubjectives des productions individuelles engendrant des conflits cognitifs. Nous retrouvons là les conditions d'un débat scientifique de validation.

Dans cette optique, nous émettons la conjecture suivante :

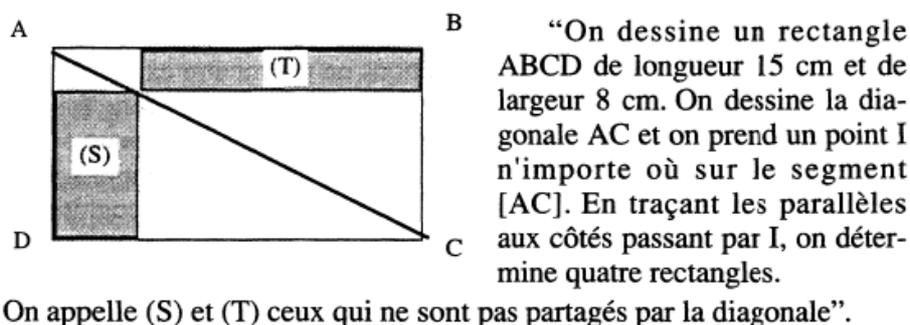
L'échec de l'enseignement du vocabulaire en géométrie ne résulte-t-il pas d'une absence d'activité de tâtonnement expérimental associant des confrontations de productions et de représentations ?

Cette question pourrait être éprouvée à partir d'activités fondées sur la transmission de messages portant sur des figures géométriques. Ici la part et le rôle de l'enseignement apparaissent avec importance. En particulier son intervention consiste cette fois à organiser ces confrontations entre individus et à en assurer le fonctionnement.

- Quatrième situation

Cette forme correspond à la caractéristique la plus exigeante du tâtonnement expérimental. C'est celle qui implique une gestion de l'expérimentation par l'apprenant. Elle vise à orienter ce tâtonnement vers une acquisition conceptuelle. Nous estimons que, pour atteindre cette forme, une démarche d'enseignement est requise. L'enseignant doit fournir à l'apprenant des outils qui l'aident à gérer son tâtonnement, des protocoles adéquats, à l'impliquer dans la modélisation. La situation didactique proposée par l'enseignant doit être pertinente au regard des objectifs fixés et des concepts visés. Elle doit orienter l'action dans une direction qui évite l'enfermement dès le départ dans des convictions erronées trop stables desquelles les élèves sortiront difficilement en dépit des explications de l'enseignant. C'est ici un des apports de la didactique des mathématiques qui risque probablement de heurter les convictions profondes du militant pédagogique Freinet.

A titre d'exemple, nous rapportons une situation décrite par Bernard Capponi³⁷. L'objectif est de fournir une situation où la mesure ne permet plus de répondre aux questions posées et où la démonstration apparaît comme un outil efficace et obligé. Les caractéristiques de cette situation obéissent aux conditions développées précédemment dans le cadre du problème ouvert. Elles sont propices à la réalisation de démarches de tâtonnement expérimental par les élèves. Le problème est alors le suivant :



On appelle (S) et (T) ceux qui ne sont pas partagés par la diagonale".

La consigne est de "dessiner la figure puis de mesurer les longueurs des côtés des rectangles (S) et (T) pour calculer leur aire³⁸".

Toutefois de l'observation des résultats obtenus par cette démarche de mesure induites par les consignes, aucun élève ne parvient à conjecturer l'égalité des aires de (S) et (T). L'hypothèse de B. Capponi était de provoquer chez l'élève un changement de conception qui le fasse renoncer à la mesure comme démarche de preuve. Or force est de constater que si les élèves parviennent à admettre la conjecture de l'égalité des aires à la suite de l'intervention de l'enseignant, ils persistent dans leur conception que la mesure "bien faite" doit pouvoir en fournir la preuve.

Quand bien même l'enseignant finit par proposer une démonstration fondée sur le fait "qu'une diagonale partage un rectangle en deux triangles d'aires égales", ce que les élèves paraissent "bien comprendre", l'objectif de "disqualification de la mesure comme outil de preuve ne paraît pas atteint" (de l'aveu même de l'enseignant). Ceci illustre bien le fait que la situation peut tout à fait favoriser une activité intense de type tâtonnement expérimental et de nombreuses productions analysables sans pour autant parvenir à l'objectif visé. La cause apparente de cette non-atteinte réside essentiellement dans l'énoncé du problème et des consignes qui oriente d'emblée les élèves dans une voie (ici

³⁷ Extrait de "mesure et démonstration : un exemple d'activité en classe de 4^{ème} " in *Petit X n° 17*, pp. 29 à 48; année 1988.

³⁸ Pour le lecteur non averti : ces deux rectangles ont des aires égales quelle que soit la position du point I sur le segment diagonal [AC].

le recours à la mesure) et qui les y enferme. L'habileté de l'enseignant ne suffit plus ensuite pour créer la rupture et le changement. Toute situation dans laquelle les élèves peuvent s'investir par tâtonnement expérimental ne constitue pas d'emblée une "bonne situation" par rapport à l'objectif visé, que ce dernier soit fixé par l'enseignant ou par l'apprenant lui-même.

Ceci réaffirme le rôle de l'enseignant et l'importance de son travail d'analyse des tâches et des contenus afin de proposer des situations certes favorables à la démarche de tâtonnement expérimental et pertinentes par rapport à l'objectif visé, mais aussi évitant l'enfermement de l'apprenant dans une voie dont il ne peut plus sortir³⁹.

La séquence didactique que nous avons développée dans notre précédent article⁴⁰ participe de cette perspective du tâtonnement expérimental en mathématiques. La situation-problème posée, à savoir celui de la recherche d'un optimum (ici une boîte de volume maximum) requiert de façon pertinente le concept mathématique de "fonction". Sa résolution nécessite:

- modélisation de la situation concrète à laquelle les élèves participent de façon déterminante
 - réflexion et une anticipation de solutions qui appelle une vérification des conjectures ainsi émises
 - confrontation entre les élèves qui instaure un débat de validation
 - mise en œuvre d'un véritable plan d'expérimentation au sens de la recherche scientifique.
- Elle conduit à un développement cognitif des individus. Cette situation didactique intègre trois finalités essentielles assignables à la démarche de tâtonnement expérimental en mathématiques dans l'action pédagogique à savoir:

conjecturer – vérifier – acquérir

POUR CONCLURE

Nous nous en tiendrons là pour nos propos sur lien entre tâtonnement expérimental et mathématiques. Nous estimons comme un choix raisonnable le maintien de notre conjecture considérant que "la démarche de tâtonnement expérimental ne peut être rejetée en vertu de la nature des mathématiques".

³⁹ Sauf à un coût très élevé.

⁴⁰ Voir note 2

Dans le cadre de l'enseignement-apprentissage, cette démarche nous semble avérée et nécessaire à l'apprenant à certaines phases de son apprentissage dans la situation didactique.

Naturellement nous pensons que la réflexion et l'argumentation ne sont qu'ébauchées et qu'un travail plus approfondi associé à des expérimentations est à poursuivre sur cette problématique.