



HAL
open science

Représentation graphique des matrices. Graphe et/ou carte des flux?

Françoise Bahoken

► **To cite this version:**

Françoise Bahoken. Représentation graphique des matrices. Graphe et/ou carte des flux?. 2011.
halshs-00641733

HAL Id: halshs-00641733

<https://shs.hal.science/halshs-00641733>

Preprint submitted on 16 Nov 2011

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Représentation graphique des matrices. Graphe et/ou carte des flux?

Françoise Bahoken
Université Paris-Est / IFSTTAR / UR Splott
UMR Géographie-cités
francoise.bahoken<at>ifsttar.fr

Version 1 - Novembre 2011



Introduction

La représentation graphique des réseaux, qualifiée de *visualisation*, est un domaine de recherche foisonnant en raison de l'augmentation des données disponibles sur les relations entre des objets de différentes natures, mais également de l'intérêt accru pour les réseaux sociaux. D'après Tukey (1977[24]), la représentation graphique est un puissant outil d'analyse selon différentes perspectives des données brutes. Complémentaire aux traitements statistiques, elle permet en outre d'explorer les données, de susciter des questionnements et de valider des hypothèses. Le tableau de départ, généralement une matrice d'adjacence $M(i, j)$ de valeurs à i lignes et à j colonnes, voit sa structure (nœuds, liens) placée dans un plan en deux ou trois dimensions, figurant ainsi un graphe $G(N, L)$. Les performances comparées de ces deux formes générales de représentation (matrice d'adjacence et diagramme nœud-lien) font l'objet d'une analyse approfondie dans les travaux de Ghonien *et al.* (2004[13]). Pour autant, toutes les représentations des matrices ne suivent pas ce formalisme et il existe plusieurs manières de les figurer graphiquement (Beauguitte, 2010[2]). Nous allons donc considérer le cas général de la visualisation des réseaux à partir de matrices Origine-Destination (*OD*) sous la forme de graphes et de cartes de flux.

Trois principaux types de graphes peuvent être « réalisés en fonction de la nature des liens existants :

- les graphes binaires ou booléens (*binary*) où les liens traduisent l'existence d'une relation entre deux sommets ;

- les graphes valués (*valued*) où les liens traduisent la présence et l'intensité de la relation ;
- les graphes signés (*signed*) où les liens expriment soit l'attraction, soit le rejet » (Beauguitte, 2010[2]).

Cette définition des liens fait référence à une représentation non spatialisée des relations entre les nœuds. Prendre en compte la dimension spatiale des relations entre les nœuds est nécessaire dans l'optique d'une comparaison entre le graphe et la carte des flux. Elle nécessite de travailler sur un graphe valué et signé (matrice de flux migratoires ou commerciaux), ce qui entraîne l'introduction des notions de flux et de lieux, respectivement synonymes de liens (valués et orientés) et de nœuds. En cartographie statistique, le flux correspond à des liens valués¹ (*valued*) qui peuvent être appréhendés en termes :

- de liaisons entre des lieux, comme dans le cas des graphes binaires lorsqu'ils ont fait l'objet d'une transformation (binarisation) ;
- d'échanges ou de relations entre les lieux (graphes valués) souvent orientés ;
- de mouvement entre des lieux. Le mouvement étant ici un flux défini par un indicateur qui prend en compte des variables spatiales.

Ainsi, aux trois diagrammes (binaires, valués, orientés) doivent être ajoutés :

- les cartes uniques (Tobler, 1987[23]) de flux où les lieux d'origine et de destination sont placés sur la même figure ;
- les doubles² cartes de flux où les lieux d'origine et de destination font chacun l'objet de cartes uniques mises en relation par des liens ;
- les représentations matricielles uniques (Fekete, 2009) fondées sur la matrice de Bertin, ou hybrides (Henry et Fekete, 2008[16], Fekete, 2011[11], Rae, 2009[19]) qui combinent approches liens-nœuds et matricielles (fig. 1).

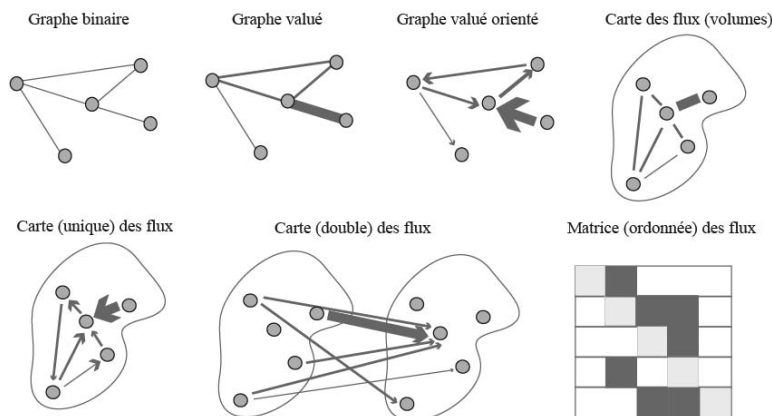
1 Représenter les matrices ($I * J$)

La visualisation des réseaux a d'abord pour objectif de représenter sur un diagramme G les L relations observées entre les N sommets sous la forme de graphes, de cartes ou de matrices (fig. 1). En sciences sociales, plusieurs possibilités sont envisageables selon la partie de la matrice sélectionnée. Le graphe G composé de N sommets ($N \neq 0$) et de L (où le plus souvent $L \neq$

1. Le flux (migratoire, commercial, financier, etc.) se définit comme la somme de déplacements (ou de transferts) individuels qui se sont produits entre des lieux d'origine i et de destination j pendant un intervalle de temps $[t_0 - t_n]$. Le lien est par conséquent toujours « valué ».

2. L'outil *Flowstrates* présente de telles cartes des flux, complétées par une représentation du changement des valeurs des flux dans le temps dans une troisième vue placée au centre.

FIGURE 1 – Exemples de représentations graphiques des matrices

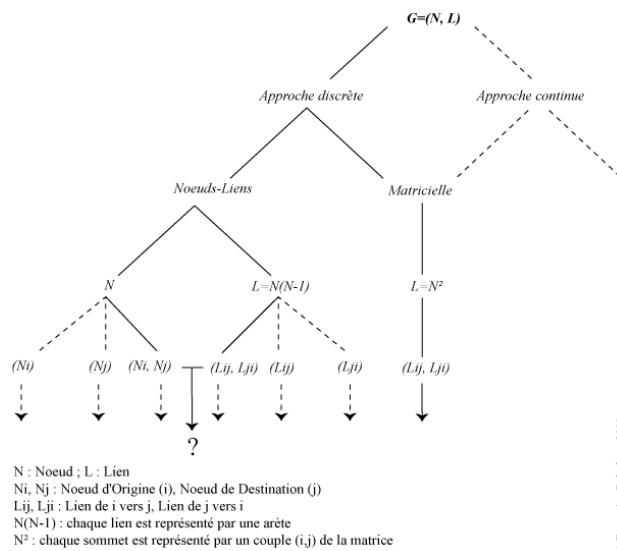


0) liens orientés et valués ($L_{ij} \neq L_{ji}$) peut être représenté sous différentes formes selon deux approches (fig. 2) : la première est discrète et s'appuie sur le format de données en mode vecteur (ou graphique) et la seconde est (pseudo)continue et s'appuie sur un format de données en mode raster (ou matriciel).

Dans l'approche continue ou matricielle, la représentation est fondée sur les caractéristiques de la matrice ordonnable proposée par Bertin (1967[4]). Le procédé de permutation des lignes et des colonnes est appliqué³ à la visualisation des réseaux (Wilkinson et Friendly, 2009[27]) et, dans certains cas, doublé par un traitement statistique d'agrégation (Guo, 2009[15]) - on parle également de matrice « bloquée ». Cette approche matricielle de la représentation des réseaux se développe suite à la difficulté de résoudre le principal problème de la visualisation graphique des réseaux qui est celui de l'illisibilité de la figure discrète (N, L) dès lors que la figure comporte plus de 20 nœuds (Ghonien *et al.*, 2004[13]). Au-delà de ce seuil, la représentation graphique la plus efficace pour ces auteurs prend la forme d'une « matrice OD ». Des développements récents vont dans le même sens et appréhendent le réseau de manière continue (Andrienko et Andrienko, 2008[1], Wood *et al.*, 2010[28]) : la matrice est alors assimilée à une image raster où la valeur du pixel correspond à l'existence et/ou à l'intensité de la liaison portée au croisement des lignes et des colonnes (i, j). Le principe de l'approche continue est ainsi de représenter l'ensemble des N nœuds et des L liaisons des grandes matrices, sans opérer de sélection des objets. Des modes de visualisation « hybrides » qui associent les formats vectoriel et raster ont été récemment développés afin d'optimiser l'exploration des données et leur visualisation

3. Bertin (1967) a illustré son principe matriciel de ré-ordonnement des lieux par un exemple de la production de cinq types de viande par cinq pays.

FIGURE 2 – Approches de la représentation graphique des matrices

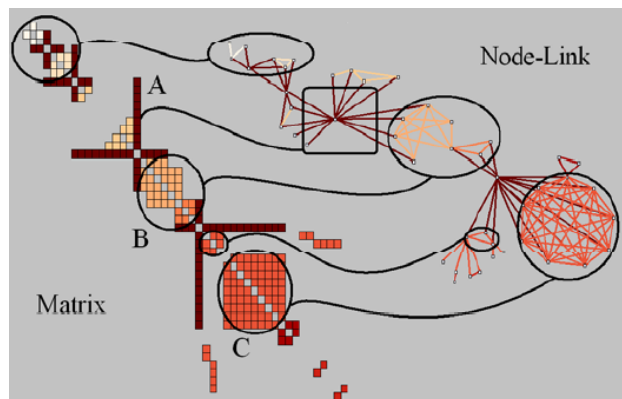


(fig. 3).

Dans l'approche discrète qui est la plus courante, le diagramme est formé des (Ni, Nj, Lij, Lji) objets qui composent la matrice. La figure est alors celle des N nœuds représentés par des points et des L liens représentés par des arcs (fig. 1). Le problème de la lisibilité de la figure se pose rapidement en raison de l'augmentation quadratique du nombre de liens en fonction du nombre de nœuds (Tobler, 1987[23]). La figure est, en effet, sensible au nombre d'objets à représenter : pour N nœuds, $N(N - 1)$ liaisons entre les nœuds doivent être représentées. Par exemple, dans l'hypothèse où tous les lieux sont en relation sur un espace composé de 10 lieux, $10 \cdot (10 - 1)$ soit 90 liens devaient être tracés sur la figure, ce qui pose problème. L'issue classique à ce problème de lisibilité de la figure est de sélectionner les objets (nœuds ou liens) à représenter. À l'inverse, dans l'approche matricielle, le problème de sélection des objets ne se pose pas puisque le procédé de visualisation, fondé sur l'ordonnancement des couples de nœuds, est efficace quel que soit leur nombre.

La sélection des objets de la matrice à représenter est typiquement une contrainte à la visualisation, mais celle-ci n'est pas exclusivement graphique. Elle est d'ailleurs très souvent posée et résolue en amont des aspects graphiques, dans le cadre d'analyses exploratoires et statistiques des données. La sélection des données s'apparente alors, à titre d'exemples, à l'application d'un seuillage (*threshold*) effectué sur les valeurs des liens et/ou sur le nombre de nœuds ou bien à l'application d'un algorithme de classification (*clustering*) ou de hiérarchisation ou encore au calcul d'indicateurs spéci-

FIGURE 3 – Exemples de représentation graphiques mixtes



Source : Fekete, 2008.

figues tels que les mesures locales (Ducruet, 2010[9]). Sur le plan graphique, la visualisation des $(N_i, N_j, L_{ij}, L_{ji})$ objets d'un réseau vise à minimiser la perte d'informations structurelles et à donner à voir la structure des relations aux échelles globales et locales, éventuellement leur évolution dans le temps. Les contraintes apposées aux objets à représenter visent ainsi à simplifier la figure (Krempel, 1994[17]), c'est-à-dire à la rendre lisible.

2 Contraintes de représentation graphique des matrices

La particularité de la visualisation des matrices est d'intégrer au sein d'une même figure des *contraintes*⁴ d'ordre conceptuel, graphique et esthétique à la représentation des nœuds et des lignes ou poly lignes dans un espace qui n'est pas forcément métrique. Certaines d'entre elles s'appliquent à tous les diagrammes de flux, d'autres ne concernent que les graphes ou les cartes de flux.

2.1 Les contraintes conceptuelles

Les contraintes conceptuelles sont en général appliquées en amont de l'étape de représentation graphique (Bunge, 1966[6]) et portent :

- sur le type de matrice (adjacence, échanges, mouvements) duquel dépendent les analyses et traitements réalisés en amont de la représentation ;

4. Le site internet <http://www.visualcomplexity.com> donne un bon exemple de la variété et de la complexité des procédés de représentation graphique des réseaux.

- sur les aspects scalaires, dans le cadre d’une éventuelle sélection de tout ou partie des $N(N - 1)$ paires de nœuds qui seront représentées à l’échelle globale des $N(N - 1)$ relations ou au niveau local, depuis ou vers (*in-out*) un nœud en particulier (δ_n) ;
- sur l’importance accordée aux nœuds.

Dans le premier cas, outre les questions liées au type de matrice, la contrainte posée est d’ordre méthodologique et porte sur la compréhension des données. Elle vise, par exemple, à représenter les flux majeurs (Ducruet, 2011[10]) et leurs effets sur la caractérisation des nœuds. Le deuxième point concerne la résolution (ou l’échelle) de la matrice et est définie au regard du contexte. Le troisième point est celui de l’existence éventuelle d’un référentiel lié aux nœuds et interroge la question du placement des liens et nœuds dans le plan.

La contrainte sur le placement des nœuds est fondamentale dans un diagramme de flux. Elle est notamment caractéristique de la différence conceptuelle entre le graphe et la carte des flux. En deux mots, simplifier le graphe des flux consiste à sélectionner les nœuds pour limiter leur superposition et gérer les chevauchements des liens ; simplifier la carte des flux consiste à sélectionner les liens pour réduire leur nombre et leur chevauchement. La différence est imputable aux aspects topologiques⁵ de la figure, qui font partie des méthodes dites de forces-directes (*forced-directed techniques*) sur le placement des nœuds.

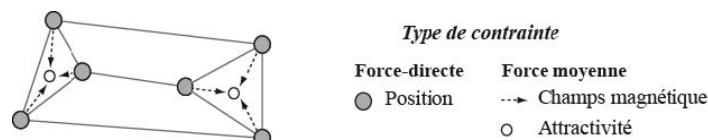
2.2 Les contraintes de force

Apposer une contrainte de type force-directe à un diagramme des flux consiste à forcer le placement - la position - des nœuds ou des liens en appliquant une fonction d’énergie (*energy function*) particulière ; une fonction moyenne (*means functions*) de champ magnétique (Sugiyama Misue, 1984, cité par Cruz et Tamassia [7]) ou de critères d’attractivité (*dummy attractor*), (fig. 4) mis en œuvre dans le cadre de procédures de classification (*clustering*) tel celui de Noack (2004[18]). Parmi les contraintes de position qui sont les plus facilement applicables, il s’agit par exemple (Kamada Kawaiï, 1989, cité par Cruz et Tamassia [7]) de placer :

- les nœuds les uns par rapport aux autres de manière à ce que leurs positions respectent une mesure de distance théorique calculée sur le graphe ;
- les couples de nœuds afin de correspondre à une métrique réelle, la distance euclidienne, par exemple, comme dans le cas de l’application

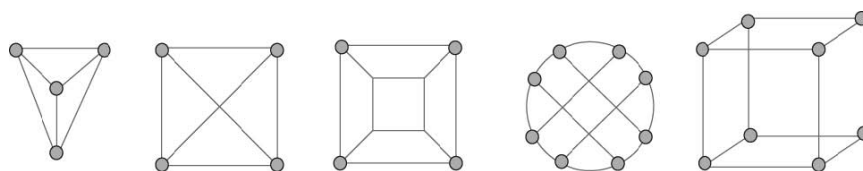
5. L’analyse spatiale des réseaux s’appuie sur différentes composantes (N, L) dont les caractéristiques de position sont décrites avec précision dans un système de référence, à l’inverse de la théorie des graphes qui en fait davantage abstraction. La topologie est donc un schéma conceptuel invariant qui permet de décrire des relations telles que la connectivité entre différents éléments.

FIGURE 4 – Exemple d’application de forces directes moyennes et d’attracteurs



Source : d’après Cruz et Tamassia.

FIGURE 5 – Exemples de contraintes esthétiques de placement optimal des nœuds



Source : d’après Cruz et Tamassia.

d’un facteur d’échelle pour la réalisation d’une carte des flux.

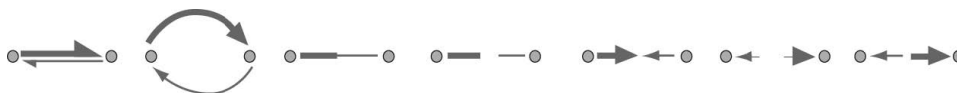
Une fonction d’énergie couramment appliquée est celle de Fructerman et Reingold (1991[12]). Elle est fondée sur des caractéristiques nodales telles que l’attraction ou la répulsion et sur une fonction de liaison de type masse-ressort (*spring*), établie en analogie avec les principes de la gravitation universelle.

2.3 Les contraintes esthétiques

Les contraintes esthétiques sont celles qui portent sur le style et le design de la figure (orthogonal, circulaire...). Elles ne concernent, de fait, que les graphes des flux. Les plus importantes sont liées au placement optimal des nœuds afin de garantir la visualisation des liens et de la structure d’ensemble. Il s’agit, par exemple, de décider de placer les nœuds les plus connectés au centre de la figure afin de minimiser les croisements ; ou bien sur les bords afin de représenter la symétrie ; ou encore selon un ordre particulier afin d’obtenir des formes circulaires, volumiques, etc. (fig. 5, [8]).

À la méthode de placement optimal des nœuds est généralement associée une contrainte de minimisation des chevauchements des liens et, par conséquent, de gestion de leurs croisements. Celle-ci concerne alors à la fois les graphes et cartes de flux. La minimisation des chevauchements est en partie

FIGURE 6 – Exemples de contraintes esthétiques de minimisation des chevauchements



résolue par l’application d’angles⁶ au tracé des liens (fig. 6) et l’optimisation de l’affichage des liaisons symétriques ou le choix du procédé graphique (flèche, tête de flèche, etc.). Il est également nécessaire de placer les liens de manière à illustrer l’effet de convergence ou de divergence vers ou depuis les nœuds.

Il est difficile de satisfaire à plus d’un critère esthétique et le style de la figure est souvent le résultat de compromis.

2.4 Les contraintes sémiologiques

Les contraintes de sémiologie graphique (Bertin, 1967[4]) sont liées au choix des variables visuelles à appliquer à la représentation des nœuds et des liens et s’appliquent indifféremment aux graphes et cartes de flux. Elles portent sur la localisation des nœuds ($N_i N_j$) ou des liens (L_{ij}, L_{ji}), sur leur forme, leur couleur, leur taille, leur orientation et éventuellement leur étiquette (label). La prise en compte simultanée de plusieurs contraintes liées à la position des nœuds, à l’esthétique et la sémiologie, est actuellement un axe majeur des développements réalisés dans le champ de la visualisation des réseaux. Un élément d’explication est le fait que l’étape de visualisation des matrices sous la forme de graphe $G(N, L)$ peut se réduire à l’articulation de différentes contraintes de position et d’esthétique (aux côtés des nécessités d’exploration des données). L’étape de la représentation cartographique $C(N, L)$ nécessite, quant à elle, l’application d’une double contrainte graphique : sur la minimisation des chevauchements et sur la sélection des données à représenter, indépendamment des aspects liés au traitement des données (Beguin, Pumain, 2003[3]).

3 Graphe de flux *versus* carte des flux

L’approche cartographique de la représentation des $(N_i, N_j, L_{ij}, L_{ji})$ se distingue de l’approche graphique par l’application d’une contrainte de force-

6. À noter toutefois que le problème du chevauchement des liens ne se pose pas dans le procédé graphique mis en œuvre par Ravenstein (1885[20] et 1889[21]) dans la carte “Currents of Migrations” qui accompagne les lois de la migration : l’auteur ne représente que les points de franchissement des frontières à l’aide de courtes flèches courbes qui indiquent le sens des déplacements.

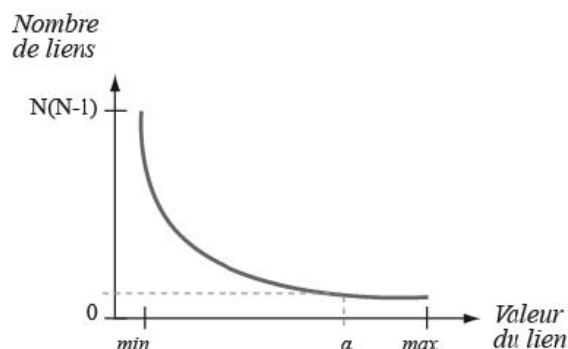
directe sur la position des nœuds. Celle-ci est nécessairement définie dans un référentiel spatial projeté. Ainsi, là où le graphe des flux privilégie l’affichage des liens sur les nœuds, la carte des flux privilégie celle des nœuds sur les liens. La position des nœuds dans un graphe n’a pas toujours de sens alors qu’elle est fondamentale dans une carte. La différence entre les algorithmes de visualisation des graphes tient à l’optimisation du placement des lieux sur le plan esthétique pour privilégier l’affichage des liens, au détriment de la position des lieux, quand les outils de cartographie des flux se distinguent sur la manière dont ils sélectionnent les liens en fonction de leur valeur (Tobler, 1987[23] ; Glennon et Goodchild, 2004[14] ; Van der Zwan, 2005[25]). La représentation d’une matrice sous une forme cartographique nécessite donc une spatialisation de la structure des flux autour de lieux fixes. La prégnance de cette contrainte liée au caractère absolu de la localisation (x, y) dans l’espace est telle que nombre de contraintes esthétiques applicables aux graphes des flux ne sauraient l’être à la cartographie des flux. C’est le cas du placement optimal des nœuds ou des liens, ou encore de la minimisation des chevauchements autrement que par l’application d’angles. À l’inverse, certaines contraintes fondamentales en cartographie des flux peuvent être considérées comme secondaires⁷ dans un graphe des flux. C’est le cas particulier de celles qui portent sur la sélection des L liens à représenter en vue de la simplification de la figure.

3.1 Approche générale de la sélection en cartographie des flux

La réalisation de cartes des flux nécessite l’application d’un double critère de sélection des données au préalable de leur cartographie, d’autant plus important que la matrice est grande. Le premier est celui qui porte sur la réduction des données (Rae, 2009[19]) d’un point de vue statistique et concerne tous les diagrammes de flux. Le second critère est d’ordre cartographique. Il porte sur la sélection des (L_{ij}, L_{ji}) liens à représenter et ce, indépendamment du fait qu’ils soient déjà le produit d’une réduction de l’univers des données. À titre d’exemple : pour un espace composé de flux bilatéraux entre 10 lieux, 180 liens doivent être représentés sur la carte. Une manière de les réduire peut consister à représenter le volume des flux, ce qui revient à diviser par deux le nombre de liens. Or, au moment de la visualisation graphique, le nombre de liens à représenter est encore trop important et la figure illisible. Une deuxième sélection doit ainsi être effectuée sur la valeur des liens dans le cadre d’une approche cartographique.

7. On peut toujours représenter graphiquement les $N(N - 1)$ liaisons entre des nœuds à l’aide d’un graphe $G(N, L)$ en choisissant un modèle graphique (circulaire, par exemple), ce qui n’est pas le cas en cartographie.

FIGURE 7 – Illustration de l'application du critère cartographique de sélection des flux



3.2 Approche cartographique de la sélection en cartographie des flux

L'approche cartographique de la sélection des flux est fondée sur une sélection par la valeur des L liens, et non pas leur nombre. Elle consiste en pratique à trier les liens (L_{ij}, L_{ji}) de manière à ne retenir que ceux qui représentent une part significative du total des échanges en valeur, ou en pourcentage du total. Cette approche de la sélection trouve son origine dans la première loi de la géographie de Tobler (1970[22]) qui se manifeste par la présence de trop nombreux liens de faible intensité entre des nœuds proches et, à l'opposé, par une faible part de liens présentant des valeurs importantes. Si plusieurs critères de sélection des flux selon leur intensité peuvent être mis en œuvre, une méthode simple consiste à les sélectionner sur un diagramme de fréquence, puis à les reporter sur un tableau à partir duquel le critère de sélection des flux sera appliqué.

Le critère de sélection α est celui qui permet la cartographie de la structure des flux avec un minimum de liens qui expriment un maximum du total de la valeur des flux. Dès lors que le critère de sélection des flux à représenter est déterminé, les contraintes graphiques générales d'esthétique sur le chevauchement des liens et de sémiologie graphique des nœuds et des liens peuvent être appliquées.

Conclusion

Le principe sous-jacent à la cartographie des flux est de projeter la structure des relations entre des paires de lieux dans un espace en deux ou trois dimensions. La carte des flux est ainsi une catégorie de diagramme de flux caractérisée par l'application d'une contrainte de force topologique sur le

placement des lieux. Sous une forme vectorielle, graphe et carte de flux se caractérisent par la visualisation de lignes entre des couples de lieux issues de matrices qui comportent en réalité de nombreux objets, eux-mêmes potentiellement caractérisés par plusieurs attributs. L'ampleur des objets à représenter pose problème dans les deux cas et c'est essentiellement sur ce point que les efforts de développements méthodologiques sont réalisés. Le défi de la visualisation de la structure (spatialisée) des grandes matrices n'est pas nouveau : la cartographie statistique des flux et des réseaux apparaît au début du XIX^e siècle. L'avènement des possibilités algorithmiques de traitement et de graphisme offertes par les ordinateurs a entraîné l'émergence à la fin du XX^e siècle de nouveaux champs de recherche spécifiques à la visualisation. Le champ de la représentation graphique des réseaux fait ainsi l'objet d'un profond renouvellement méthodologique au niveau du graphisme, avec des méthodes propres à la visualisation scientifique et, plus récemment, aux *Computer sciences*⁸. On assiste aujourd'hui aux développements d'interfaces tous plus sophistiqués les uns que les autres qui combinent exploration, analyse des données et visualisation graphique des matrices de flux dont un bon exemple est apporté par les travaux de Boyadin *et al.* (2011[5]).

Références

- [1] G. ANDRIENKO et N. ANDRIENKO : Spatio-temporal aggregation for visual analysis of movements. *In Proceedings of the IEEE Symposium on Visual Analytics Science and Technology*, pages 51–58, 2008.
- [2] L. BEAUGUITTE : Graphes, réseaux, réseaux sociaux : vocabulaire et notation. *Groupe fmr*, 2010. <http://halshs.archives-ouvertes.fr/FMR/fr/>.
- [3] M. BEGUIN et D. PUMAIN : *La représentation des données géographiques. Statistique et cartographie*. Cours Géographie. Armand Colin, 2^e édition, 2003.
- [4] J. BERTIN : *Sémiologie graphique. Les diagrammes - Les réseaux - Les cartes*. Éditions Gauthier-Villar, 1967.
- [5] I. BOYADIN, E. BERTINI, P. BAK et D. LALANNE : Flowstrates : An approach for visual exploration of temporal origin-destination data. *Computer Graphics Forum*, 30(3):971–980, 2011.
- [6] W. BUNGE : *Theoretical Geography*. Lund Studies in Geography, C : General and Mathematical Geography n°1. Gleerup, 2^e édition, 1966.
- [7] I.F. CRUZ et R. TAMASSIA : Graph drawing tutorial. <http://www.cs.brown.edu/people/rt/papers/gd-tutorial/gd-constraints.pdf>.

8. *PivotGraph* [25] ou *Jflowmap* [5] - <http://code.google.com/p/jflowmap/> - en sont de bons exemples.

- [8] G. DI BATTISTA, M. PATRIGANI et F. VARGIU : A split & push approach to 3d orthogonal drawing. *Journal of Graph Algorithms and Applications*, 4(3):105–133, 2000.
- [9] C. DUCRUET : Les mesures locales d’un réseau. *Groupe fmr*, 2010. <http://halshs.archives-ouvertes.fr/FMR/fr/>.
- [10] C. DUCRUET : Simplification et partitionnement d’un graphe. *Groupe fmr*, 2011. <http://halshs.archives-ouvertes.fr/FMR/fr/>.
- [11] J.-D. FEKETE : Visualizing networks using adjacency matrices : Progresses and challenges. *In Proceedings of the 11th IEEE International Conference on Computer-Aided and Computer Graphics, CAD/Graphics*, Huangshan, 2011. <http://www.complexnetworks.fr/wp-content/uploads/2011/02/fekete-110224.pdf>.
- [12] T. FRUCHTERMAN et E. REINGOLD : Graph drawing by force-directed placement. *Software Practice Experience*, 21(11):1129–1164, 1991.
- [13] M.J. GHONIEN, J. FEKETE et P. CASTOGLIOLA : A comparison of the readability of graphs using node-link and matrix-based representation. *In Proceedings of the IEEE Symposium on Information Visualization Infovis*, pages 17–24, 2004.
- [14] A. GLENNON et M. GOODCHILD : A gis flow data model. White paper, 2004. <http://dynamicgeography.ou.edu/flow/>.
- [15] D. GUO : Flow mapping and multivariate visualization of large spatial interaction data. *Proceedings of the IEEE Symposium on Visualisation and Computer Graphics*, 15(6):1041–1048, 2009.
- [16] N. HENRY et J.-D. FEKETE : Représentations visuelles alternatives pour les réseaux sociaux. *Réseaux*, (152):59–92, 2008.
- [17] L. KREMPEL : Simple representations of complex networks : Strategies for visualizing network structure. *In Proceedings of the 3rd European Conference for Network Analysis*, 1994.
- [18] A. NOACK : An energy model for visual graph clustering. *In Proceedings of the 11th International Symposium on Graph Drawing*, pages 425–436. Springer-Verlag, 2004.
- [19] A. RAE : From spatial interaction data to spatial interaction information? Geovisualisation and spatial structures of migration from the 2001 UK Census. *Computers, Environment and Urban Systems*, (33):161–178, 2009.
- [20] E.G. RAVENSTEIN : The Laws of Migration. *Journal of the Statistical Society of London*, 48(2):167–235, 1885.
- [21] E.G. RAVENSTEIN : The Laws of Migration. *Journal of the Statistical Society of London*, 52(2):241–305, 1889.

- [22] W. TOBLER : A computer movie simulating urban growth in the detroit region. *Economic Geography*, 46(2):234–240, 1970.
- [23] W. TOBLER : Experiments in migration mapping by computer. *The American Cartographer*, 14(2):155–163, 1987.
- [24] J.W. TUKEY : *Exploratory data analysis*. Addison-Wisley Publishing, 1977.
- [25] J. Van der ZWAN, R. Van der WEL, T. DE JONG et H. FLOOR : *Flowmap 7.2 : Manual*. Utrecht University, Faculty of Geographical Science, The Netherlands, 2005. <http://www.flowmap.geog.uu.nl>.
- [26] M. WATTENBERG : Visual exploration of multivariate graph. *Document from the Visual Communication Lab of IBM Research*, 2006. <http://www.research.ibm.com/visual/papers/pivotgraph.pdf>.
- [27] L. WILKINSON et M. FRIENDLY : The history of the cluster heat map. *The American Statistician*, 53(2):179–184, 2009.
- [28] J. WOOD, J. DYKES et A. SLINGSBY : Visualization of Origins, Destinations and Flows with OD Maps. *The Cartographic Journal*, 47(2):117–129, 2010.