



HAL
open science

Eléments d'analyse a priori pour l'enseignement de la géométrie à l'école primaire.

Sophie Gobert

► **To cite this version:**

Sophie Gobert. Eléments d'analyse a priori pour l'enseignement de la géométrie à l'école primaire.. I. Bloch & F. Conne (Coord.). Nouvelles perspectives en didactique des mathématiques., La Pensée Sauvage, 2009, 978-2-85919-256-3. halshs-01020936

HAL Id: halshs-01020936

<https://shs.hal.science/halshs-01020936>

Submitted on 6 Oct 2021

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

SOPHIE GOBERT

ELEMENTS D'ANALYSE A PRIORI POUR
L'ENSEIGNEMENT DE LA GEOMETRIE Á L'ECOLE
PRIMAIRE

INTRODUCTION

Ce texte est issu de la présentation faite lors de l'école d'été, des échanges qui s'en suivirent, de la rencontre avec les chercheurs de la SSRDM¹ à Lausanne deux mois plus tard, et de réflexions ultérieures. Les interactions avec mes collègues chercheurs ont fait évoluer les contenus présentés lors de l'école ; c'est leur état actuel que je donne à lire ici (pour leur état estival le lecteur pourra se reporter à Gobert 2007).

J'étais partie d'un constat récurrent dans les recherches en didactique sur la géométrie : lorsqu'un énoncé d'exercice ou de problème est accompagné d'un dessin, un nombre important d'élèves travaillent sur le dessin en considérant ses propriétés spatiales comme des propriétés géométriques de référence. Cette prégnance du dessin dans l'appréhension des propriétés d'un objet géométrique fait obstacle à l'entrée des élèves dans une "problématique géométrique" (Salin-Berthelot 1992), ou à la prise en compte du paradigme de "Géométrie 2 " (Houdement-Kuzniak 2000).

Ce constat est utilisé depuis longue date pour la promotion dans l'institution scolaire d'une certaine conception de l'enseignement de la géométrie : il y aurait trois grands stades dans l'enseignement et les apprentissages géométriques à l'école primaire et au début du collège, une géométrie perceptive, une géométrie instrumentée, et une géométrie déductive. Chacune d'elle serait caractérisée par un type d'outil servant à valider des propositions : l'œil ; les instruments de construction et de mesurage ; et le raisonnement déductif. Cette vision est promue par les programmes de l'école et du collège, les guides pédagogiques, les ouvrages pour les enseignants et ceux pour la formation des enseignants. La distinction des paradigmes géométriques faite par Houdement&Kuzniak dans leurs études sur la formation des enseignants vient aussi renforcer cette conception dans le cadre des recherches en didactique.

Bien que les distinctions précédentes existent et permettent de caractériser des rapports à l'action de manière générale, le propos de cet article est d'esquisser quelques arguments en faveur d'une position épistémologique et didactique différente, qui ne dissocie pas ces différents aspects mais les considère de manière dialectique tout au long de la scolarité primaire. La question de fond qui m'intéresse est celle de **la problématisation des fondements épistémologiques d'une géométrie scolaire**, à l'école primaire et au début du collège, à notre époque. A l'aune des genèses scientifiques des savoirs géométriques dans l'histoire de la géométrie **il s'agirait de penser les conditions des genèses didactiques des savoirs de géométrie à l'école primaire**. Cette entreprise ne peut se faire qu'**en appui sur une épistémologie didactique**, terme qui permettra de densifier l'expression « fondements didactiques d'une géométrie scolaire à l'école primaire ». Voici comment Guy Brousseau (Brousseau 2000) formulait le problème :

Il me semble nécessaire

- de déterminer ce qu'est la géométrie, à la fois en tant que science, en tant que pratique et en tant qu'objet d'enseignement.

¹ Société Suisse de Recherches en Didactique des Mathématiques

- de mettre en évidence les conditions de sa construction et de sa diffusion, et notamment les équilibres et les régulations qui lui permettent de posséder les vertus didactiques que nous lui connaissons.

La méthode proposée est celle de l'analyse des situations.

Les situations sont des modèles minimaux qui « expliquent » comment telle connaissance intervient dans les rapports particuliers qu'un sujet établit avec un milieu pour y exercer une influence déterminée. [...]

Nous avancerons une hypothèse sur les conditions essentiellement didactiques qui conduisent à l'organisation de la géométrie : amorphe dans les rapports d'expertise, essentiellement ésotériques, elle doit se structurer logiquement, se mathématiser, pour permettre des rapports exotériques. Elle doit de plus se prêter à des régularisations : dé-mathématisation et re-mathématisation pour s'adapter à des contraintes ergonomiques. La connaissance de ces processus est essentielle pour permettre aux professeurs d'organiser et aux mathématiciens et au public d'accepter un certain jeu (une liberté limitée) de la chronogenèse (le choix et l'ordre des connaissances enseignées) par rapport à la topogenèse (le choix et la définition « actuels » - et officiel - des connaissances mathématiques).

Le propos de Brousseau est bien de problématiser la refondation d'une géométrie scolaire. Les travaux de Salin et Berthelot ont permis d'éclairer, dans cette optique, les relations didactiques et épistémologiques entre les connaissances spatiales et les connaissances géométriques, en réinscrivant l'enseignement de la géométrie à l'école primaire dans une dialectique avec l'enseignement de l'espace. La question de la nature des objets géométriques ne peut en effet être évitée, ni celle de la nature des pratiques géométriques. Dans l'exploration de la question il ne s'agit pas de retomber dans des polémiques ancestrales et sans fin, mais de faire des choix : des choix adaptés aux conditions actuelles de l'enseignement, au développement des technologies, aux avancées des recherches en didactique ou de la société en général. Faire des choix, pour l'école primaire et le début du collège, c'est chercher des conditions didactiques, pédagogiques et sociales, permettant aux élèves d'élaborer des pratiques, des connaissances et des savoirs, spatiaux et géométriques, nécessaires à tout élève citoyen quelle que soit sa poursuite d'études.

Dans ce cheminement des recherches en didactique de la géométrie à l'école primaire, le philosophe mathématicien Ferdinand Gonseth a souvent accompagné la réflexion. Il formule une posture de recherche adaptée à la problématisation qui nous préoccupe ici :

L'intention dialectique [...] ne cherche pas à envisager la connaissance sous l'angle définitif de l'absolu. Elle cherche plutôt à édifier, à partir de notre information, à propos du donné ou de l'acquis, et certainement dans le but de se mieux saisir du réel, - elle cherche à édifier un système de concept, un jeu d'idée à la fois adéquat, cohérent et efficace : une dialectique. En qualifiant une dialectique d'**adéquate**, nous voulons dire qu'elle s'inspire de l'information dont nous disposons et qu'elle rend compte sans préjuger de ce qui pourrait advenir si notre information allait en s'accroissant et en s'approfondissant. La qualifier de **cohérente**, c'est dire que le jeu des idées obéit strictement à un système de règles *internes*. Enfin, une dialectique est **efficace** lorsqu'elle répond aux fins qui lui sont assignées sans préjuger de ce qui adviendrait si par la suite ces fins se trouvaient un jour précisées ou modifiées. [En italique, souligné par l'auteur ; en gras, souligné par moi] (Gonseth, Tome 1, p51)

Dans *La géométrie et le problème de l'espace*, Gonseth s'interroge initialement sur ce qui fonde le discours d'un maître dans les enseignements des premières notions de géométrie. Parcourant les discours de Platon à Kant, mettant les uns et les autres en confrontation, en débat, en argumentation, il travaille la question de la justification de tel ou tel choix en relation avec telle ou telle conception de la nature des objets géométriques. Finalement, et ce sera le postulat qui fondera également nos arguments : un choix se justifie que par son caractère d'idonéité à la situation, c'est-à-dire : « *qui convient, qui tient compte des conditions, qui répond aux exigences, qui est conforme aux fins et aux intentions, approprié à sa fonction* » (Gonseth, tome 1, p57). Ce choix peut être remis en cause à tout moment, si la

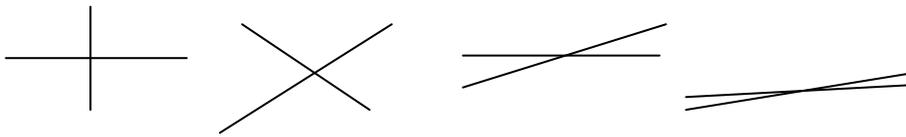
situation l'exige ; s'il s'avère ne plus convenir, il faudra pouvoir en changer pour trouver à nouveau des choix idoines aux conditions, contraintes et nécessités futures.

I. QUEL EST LE PROBLÈME ?

UN EXEMPLE GÉNÉRIQUE

J'ai choisi un exemple récent, bien que le phénomène repéré le soient de longue date Arsac) pour envisager des alternatives d'interprétation des difficultés des élèves. Voici donc un exercice proposé en fin de collège dans la recherche menée par Lerouge (Lerouge 2004) autour de la notion de « cadre de rationalité ».

Des élèves de 3ème sont amenés à dire si les droites, tracées dans les quatre cas suivants, ont un seul point d'intersection ou plusieurs points d'intersection ; et à commenter la réponse fournie.



57% des élèves considèrent que l'intersection est réduite à un point dans les deux premiers cas, et qu'elle en comporte plusieurs dans les deux autres.

« Plus l'angle que forment les deux droites au point d'intersection est petit, plus l'intersection s'étend sur plusieurs points. A mon avis, il doit exister un certain degré d'angle qui marque la limite entre les deux cas : un seul point d'intersection, plusieurs points d'intersection. »

Le constat est récurrent : une grande majorité d'élèves prennent les dessins des droites comme objets de travail ; ils travaillent sur l'image en considérant ses propriétés spatiales et non pas sur ce que le dessin peut représenter comme objet conceptuel, droites mathématiques, droites objets de pensée. « La conception familière identifiant cet objet à son tracé graphique l'emporte sur le concept mathématique, et les élèves répondent en fonction de caractéristiques matérielles, par exemple la « taille » ou la « forme » du point résiduel. » (Ibid.) D'aucun parleraient de signifiant et de signifié, Lerouge parle d'ailleurs de « contagion de signifiant » chez les élèves pour qualifier le phénomène.

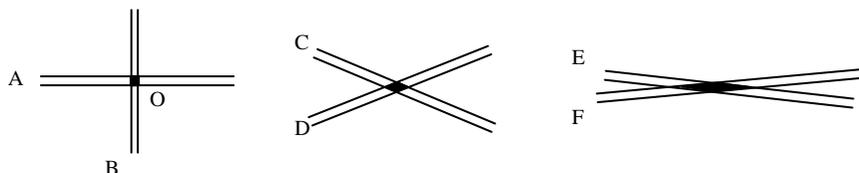
Retour à l'énoncé, des réponses possibles

Revenons à l'énoncé : « dire si les droites tracées dans les quatre cas ont un seul point commun ou plusieurs point d'intersection ; et commenter la réponse fournie ». En premier lieu tentons d'envisager des réponses possibles.

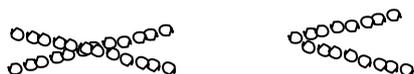
Une première : « il me semble deviner que la question porte implicitement sur des droites mathématiques ; or je sais que deux droites sécantes du plan ont un seul point d'intersection, à moins d'être confondues ce qui n'est pas le cas ici, donc dans chacun des tracés les droites ont un seul point d'intersection. »

Une seconde, plus sournoise : « je saisis bien qu'il s'agit de considérer des droites mathématiques, mais l'auteur ne précise pas si ce sont des droites du plan ou des droites d'un espace à trois dimensions. Dans l'espace elles peuvent avoir un point d'intersection ou n'en avoir aucun ; dans le plan elles ont un unique point d'intersection ; et ceci quel que soit le tracé considéré. »

Une troisième (proposée par un élève, relatée dans l'article) : « Là, on peut voir que A et B se croisent en un point O ... et là, on voit bien que C et D se croisent en plusieurs points... et E et F aussi. »



Une quatrième (proposée par un élève également relatée dans l'article) : « Les droites étant de même grosseur, je pense que les droites sont trop proches pour que l'intersection soit précise au point près. L'intersection se fait en plusieurs points ; pour ne pas que l'intersection soit imprécise, il faudrait que l'angle ne soit pas plus petit que ça. »



Entrons dans une analyse des réponses envisagées : l'espace de référence des deux premières est celui d'une théorie géométrique, les deux suivantes prennent appui sur l'espace graphique. Pour ces dernières, chacun des élèves a schématisé une droite graphique à sa manière : l'un par une « bande » limitée par deux lignes droites parallèles, et l'autre par un ensemble de ronds, quasi tangents entre eux, dont les centres sont alignés sur les deux droites graphiques en question. Les élèves formulent des arguments liés à cette schématisation, plus ou moins clairs et explicites. Voici une proposition de lecture interprétative de ces deux productions.

Lecture interprétative de la troisième réponse

Dans la troisième réponse, les droites de l'énoncé sont représentées par des bandes. Ainsi le problème a été transformé en un problème graphique dans lequel les droites ont une certaine largeur, et il s'agit pour cet élève de répondre à une autre question portant sur l'aire de la surface d'intersection de ces deux bandes. Considérons ce nouveau problème graphique et essayons de le schématiser en un problème de géométrie euclidienne. Dans l'horizon géométrique, appelons « une bande » la surface définie par deux droites parallèles, et « la largeur d'une bande » la distance entre ces droites. Les bandes graphiques sont ainsi schématisées par deux bandes (mathématiques) de même écart. L'aire de la surface d'intersection de ces bandes varie en fonction de « l'angle des bandes », pouvant se définir comme l'angle formé par deux droites, chacune d'elles étant caractéristique d'une bande (on montre facilement que cette définition ne dépend pas de la droite choisie pour une bande). Par cette schématisation, le travail de recherche de l'élève peut alors s'interpréter comme une tentative d'argumentation de l'assertion suivante : « plus l'angle des bandes est petit plus l'aire de leur surface d'intersection est grande ».

L'élève ne produit pas d'argument, mais il en existe bien quelques uns. Par exemple : soient a la largeur des bandes et x l'angle formé par les deux bandes, x varie de l'angle droit (position A,B dans la réponse de l'élève) à l'angle plat. On démontre que l'aire du losange (surface d'intersection des deux bandes) est égale à $a^2/\sin x$. Cette aire varie donc de a^2 à l'infini. On en conclut que plus l'angle des bandes augmente, plus la surface d'intersection est grande. Ainsi l'élève a raison lorsqu'il affirme qu'en position C,D l'aire de la surface est plus grande qu'en position A,B, et encore plus grande en position E,F.

Ainsi dans cet exemple, la réponse de l'élève est interprétée en lui donnant une cohérence interne basée sur : la considération d'un problème graphique (de l'espace de la feuille), une schématisation de ce problème en un problème de géométrie ; une résolution en géométrie, puis un retour au problème initial pour donner du sens à la réponse construite en géométrie. Etudions la quatrième réponse de la même façon.

Lecture interprétative de la quatrième réponse

De la même façon la quatrième réponse pourrait rendre compte d'une schématisation d'une droite graphique comme juxtaposition de ronds dont les centres sont alignés et de l'intersection de deux droites comme deux suites de ces ronds ayant un rond en commun (l'usage du mot « rond » n'est pas anodin, il permet de renforcer l'aspect graphique de cette première description). La question du nombre de points d'intersection est alors transformée en une question sur l'intersection des deux ronds juxtaposés au rond commun sur chacune des deux droites. Le problème peut alors se schématiser dans l'horizon de la géométrie euclidienne de la manière suivante : soient deux suites de cercles tangents les uns aux autres dont les centres sont respectivement alignés sur deux droites distinctes, et telles qu'un seul cercle est commun à chacune des suites ; à quelle condition sur l'angle de ces droites les deux premiers cercles juxtaposés au cercle commun seraient-ils eux-mêmes tangents ? Ayant basculer ainsi dans l'univers géométrique, la formulation d'un autre problème de géométrie équivalent peut se substituer : étant donnés trois cercles de même rayon dont deux sont tangents à un troisième fixe, à quelle condition sur l'angle formé par leurs centres (de sommet le centre fixe) les deux cercles mobiles sont-ils tangents ? Et de la même façon que précédemment nous pouvons raisonner dans cet horizon de la géométrie euclidienne pour démontrer que cet angle ne doit pas être inférieur à 60° . Comme disait l'élève de la quatrième réponse « il faudrait que l'angle ne soit pas plus petit que ça. ».

Élément pour l'analyse a priori

Ces interprétations permettent d'imaginer une démarche d'appréhension et de résolution du problème : partant d'une conception physique des objets considérés, les élèves les schématisent géométriquement selon certains choix pour transformer le problème en un problème de géométrie ; celui-ci peut alors se traiter avec les outils de la géométrie ; ce traitement fournit une solution valide, dans l'environnement de la géométrie euclidienne et dans l'environnement graphique initial.

Revenons à l'énoncé de l'étude de Lerouge : quelle était la réponse attendue ? Et quels indices permettent de s'en assurer ? Le mot « droites » suggère un contexte mathématique, le contexte de l'expérimentation de Lerouge aussi, la nature de la question : qui s'intéresse à des intersections de droites à part le professeur de mathématiques (dans un collège unique) ? Je penche vers un habitus scolaire qui permet de reconnaître une forme de vie d'une question portant sur des objets mathématiques, mais cela reste un indice implicite. C'est pourquoi, me plaçant du côté de ce qui est entendu des élèves, chacune des réponses envisagées ci-dessus est cohérente, et peut s'évaluer comme connaissance de la géométrie. En effet, dans cette histoire deux conceptions classiques de la géométrie se repèrent, sans que l'énoncé de la question ne fournisse d'indice suffisant pour faire le choix de l'une ou l'autre : une conception de la géométrie comme champ constitué d'objets et de relations selon une certaine théorie axiomatique (les deux premières réponses en relèvent) et une conception de la géométrie comme moyen d'appréhender le réel et d'en fournir une schématisation permettant de résoudre des problèmes spatiaux ou graphiques (les deux dernières réponses extrapolées s'y réfèrent).

Cette position, considérant des pratiques de schématisations comme indices d'apprentissages géométriques, amène à devoir clarifier les types de problèmes auxquels la géométrie s'intéresse, d'un point de vue épistémique et d'un point de vue didactique. C'est l'objet du paragraphe suivant.

TYPES DE PROBLEME ET MODE DE VALIDATION

Types de problèmes

La distinction de trois types de problèmes pourrait permettre de clarifier du point de vue de l'analyse a priori les analyses de productions d'élèves. Pour rendre visible leurs éléments caractéristiques les définitions sont formulées selon une même structure syntaxique.

- **Un problème géométrique (ou problème de géométrie)** est une situation questionnante, posée dans l'environnement d'une théorie géométrique, faisant intervenir les objets d'un espace géométrique, soumis à des relations définies et repérées au sein de la théorie. Une solution à une question géométrique concerne toutes les configurations de la situation géométrique. Un problème géométrique est par définition générique.

Par exemple, savoir si les médiatrices d'un triangle hyperbolique sont concourantes est un problème de géométrie (hyperbolique) ; chercher les conditions pour que le quadrilatère formé par les milieux des côtés d'un quadrilatère soit un carré est un problème de géométrie (euclidienne) ; les problèmes de constructibilité (et non de construction) à la règle et au compas sont des problèmes de géométrie.

- **Un problème spatial** (ou problème de l'espace) est une situation questionnante, posée dans l'environnement du quotidien, faisant intervenir les objets de l'espace sensible soumis à des relations spatiales. Une solution à une question spatiale concerne uniquement la configuration de la situation spatiale. Un problème spatial est par définition singulier.

Par exemple, déterminer une mesure inaccessible, résoudre un problème de répartition dans l'espace, construire la maquette d'un objet, sont des problèmes spatiaux.

- **Un problème graphique** est une situation questionnante, posée dans un environnement graphique (papier crayon, ordinateur, ou tout autre surface plane où l'on peut y inscrire des signes graphiques), faisant intervenir les objets de cet espace graphique soumis à des relations spatio-graphiques. Une solution à une question graphique concerne uniquement la configuration de la situation. Un problème graphique est par définition singulier.

Par exemple, reproduire un dessin construit avec des formes géométriques est un problème graphique ; tracer les symétriques de points par rapport à un axe est un problème graphique ; les problèmes de construction aux instruments sont des problèmes graphiques.

Modes de validation

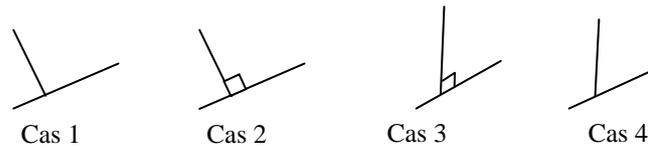
Par ailleurs on ne peut traiter de la résolution de problèmes spatiaux ou géométriques sans aborder la question des modes de validation d'une assertion. Bien qu'ils soient repérés de longue date, fixons les à nouveau :

- **Le mode déductif** de validation correspond à l'usage des règles du débat mathématique, raisonnement déductif et non contradictoire, avec un langage et une organisation spécifique (la démonstration).
- **Le mode instrumenté** de validation correspond à l'usage d'un instrument associé à une *échelle d'observation*².

La question du lien entre un type de problème et un mode de validation est une question culturelle, historique, ... Le mode de validation associé à un problème de géométrie est en général le mode déductif. De même assez simplement on associe problème spatial ou graphique, et mode de validation instrumenté. Mais la plupart du temps les énoncés ne précisent ni le type de problème, ni le mode de validation. Par exemple considérons le

² Lors de la présentation au mois d'août, un troisième mode (le mode perceptif) était distingué. Après réflexion (qui reste largement à étayer) j'ai préféré ici considérer l'œil comme un instrument particulier

question suivante : pour les quatre cas du dessin 1 l'angle est-il un angle droit ? Voici les réponses *rigoureuses* que l'on peut apporter en fonction du mode de validation que l'on choisi :



Dessin : segments sécants à angle droit ?

Mode DEDUCTIF de validation		Oui, si on sait que le code signifie un référent géométrique. Sinon cf. cas 1 et 4	
	Dans le cas 1 et 4, la question n'a pas de sens puisque aucun objet géométrique n'est défini. Et si un référent peut être défini, la réponse est oui ou non selon le référent.		
Mode INSTRUMENTÉ de la validation	Oui ou non selon l'échelle d'observation considérée.		

Tableau : différenciation des réponses en fonction du mode de validation choisi

Insistons sur le fait que la question relève d'un problème graphique, tout comme dans l'exemple des points de concours de deux droites sécantes dans l'article de Lerouge, étudié en première partie. Pour une telle question posée dans un cadre didactique, rien ne justifie que le choix du mode de validation pris par un élève soit celui envisagé implicitement comme allant de soi par l'auteur de l'exercice, ou l'enseignant le choisissant pour son projet, ou le chercheur l'utilisant dans une expérimentation. Ce n'est pas parce qu'il est question de « droites » et d'« intersection de droites » (mot et expression en effet souvent associés à un contexte mathématique) que le contrat didactique fixe pour l'élève les règles du jeu. En particulier, celle concernant le choix du mode de validation des assertions est absente dans ces deux exemples.

Lien avec d'autres recherches

Salin et Berthelot en explicitant trois problématiques pour caractériser les rapports d'un individu à la résolution d'un problème, puis Houdement et Kuzniak en caractérisant trois paradigmes pour étudier l'enseignement de la géométrie en formation des maîtres, ont permis de désigner certains couples de l'ensemble {(type de problème, mode de validation)} : la problématique pratique, ainsi que le paradigme G1 renvoient aux couples (spatial, instrumenté), (graphique, instrumenté), (spatial, instrumenté), (graphique, instrumenté) ; la problématique géométrique et le paradigme G2 renvoient aux couples (géométrique, déductif) ; la problématique de modélisation renvoie au couple (spatial, déductif) avec cette spécificité que le problème spatial (respectivement graphique) est schématisé par un problème de géométrie.

Le type de problème, le mode de validation des assertions, ne sont pas des données par défaut. Ce sont des construits et à ce titre font partis des règles du jeu à définir. Le contexte de l'école primaire, dans lequel les objets de la géométrie sont en cours de construction et les règles du débat mathématique se mettent en place, oblige à considérer les problèmes spatiaux, les problèmes graphiques, et la problématique de modélisation comme faisant partie intégrante du milieu d'enseignement et d'apprentissage de la géométrie.

II. UNE AFFAIRE DE SIGNES

DESSINS-FIGURES-SIGNES

Rappel d'une distinction ancienne

La distinction entre « dessin » et « figure » pose des nécessités et des conditions d'organisation du didactique pour la géométrie. Or au vu de la prégnance de l'usage du mot « figure » dans les différents textes (manuels scolaires, textes de formation, articles de recherche) il est légitime de penser que peu de cas est fait de cette distinction. Il s'agit sans doute plus d'une habitude ancienne ancrée dans les pratiques scolaires du champ de la géométrie, que de l'usage d'un mot expert, puisque « figure » n'est pas un terme désignant un objet mathématique spécifique ni même un concept géométrique. L'objet de ce paragraphe est de voir en quoi les mots révèlent des conceptions épistémologiques et didactiques, et ainsi de clarifier la notre. Le couple dessin-figure fonctionne un peu comme le couple chiffre-nombre, mais à l'inverse. Dans le langage courant on utilise le mot chiffre pour parler des nombres, et certains nombres en effet admettent eux-mêmes parmi l'ensemble de leurs écritures chiffrées. De même on use dans le langage scolaire courant du mot « figure » dans des expressions comme « tracer une figure », « reproduire une figure » alors qu'il ne s'agit que de dessins.

La formulation dont nous disposons actuellement en didactique de la géométrie pour distinguer « dessin » et « figure » est issue des travaux sur l'environnement de géométrie dynamique, réinterrogeant l'approche que l'on pouvait avoir des dessins utilisés en géométrie. Laborde et Capponi, s'appuyant sur les travaux de Parzysz et Colmez (Colmez, Parzysz 1993) la précisent ainsi (Laborde et Capponi 1994):

En tant qu'entité matérielle sur un support, le dessin peut être considéré comme un signifiant d'un référent théorique (objet d'une théorie géométrique ...). La figure géométrique consiste en l'appariement d'un référent donné à tous ses dessins, elle est alors définie comme l'ensemble des couples formés de deux termes, le premier terme étant le référent, le deuxième étant un des dessins qui le représente ; le deuxième terme est pris dans l'univers de tous les dessins possibles du référent. Le terme de figure géométrique renvoie dans cette acception à l'établissement d'une relation entre un objet géométrique et ses représentations possibles.

Ainsi une figure est un objet conceptuel, ensemble de tous les couples (référent, dessin) où le référent est fixe et les dessins varient dans l'ensemble (infini) des dessins possibles du référent.

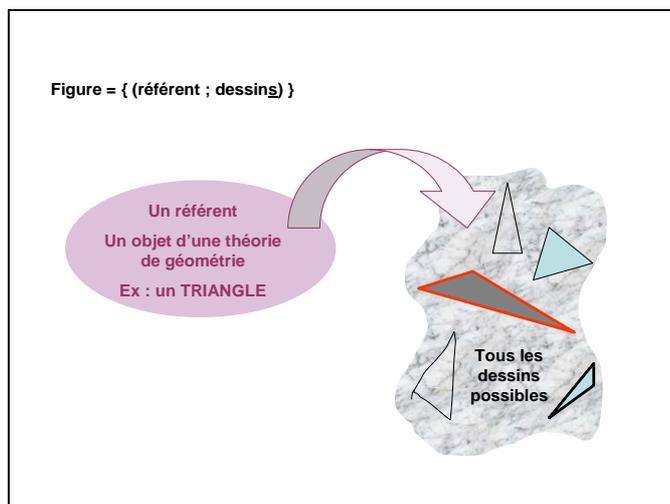


Illustration 1 : diapositive sur la liaison d'un référent vers l'ensemble de ses dessins

A l'inverse, partant d'un dessin pris parmi ces types de dessins (considérons celui situé le plus en haut à gauche sur l'illustration 1) quel est le référent théorique auquel il renvoie ? Un triangle ? Un triangle isocèle ? Un prisme à base triangulaire ? Un demi parallélogramme ayant deux cotés consécutifs de même longueur ? Il n'est pas négligeable de réaffirmer fortement qu'un dessin seul n'a pas de signification géométrique en soi, il ne désigne pas a priori un référent théorique. La question de savoir par quel moyen se donne un référent théorique est d'ailleurs épineuse : le langage le permet, le codage également, l'usage de l'environnement dynamique aussi, encore faut-il maîtriser les connaissances sous-jacentes à ces modes de désignation.

Par ailleurs, remarquons que cette définition pose de manière descendante le lien figure/dessin : il y aurait les objets mathématiques premiers, les référents puis les dessins comme représentants possibles ; l'ensemble formant les figures de la géométrie.

Comment faire alors, pour considérer les liens entre les dessins des formes spatiales utilisées à l'école primaire, ces formes elles-mêmes, et les objets mathématiques que l'histoire a construits et qui sont conceptualisés par l'expert, l'enseignant, mais pas ou pas encore par l'élève ? Dans l'analyse des situations didactiques de l'école primaire, où problèmes spatiaux et problèmes graphiques sont présents de manière plus prégnante que les problèmes de géométrie, comment interroger les genèses de conceptualisation d'objets ou de relations géométriques, sans prendre en considération les sujets et les contextes de production et d'usages des signes que sont les formes premières et leurs images (photos, dessins sur papier, dessins sur ordinateur, ...) dans l'environnement d'apprentissage des élèves ?

Regard trop rapide sur des considérations de sémiotiques

Revenons à quelques aspects des théories du signe pour nous guider vers un choix d'outils adaptés à nos conditions :

« Trois concepts sont fondamentaux dans toute théorie du signe. Le signifiant désigne la matérialité du signe (par exemple dans le langage la structure phonique), le signifié exprime le concept (le contenu linguistique) et le référent renvoie à l'objet de la réalité dénoté par l'expression linguistique. A ces trois notions, il convient d'ajouter celle d'*énonciation*, c'est-à-dire la prise en considération du contexte de production et réception des signes. » ... « Saussure a fondé la linguistique en faisant abstraction du référent et de l'énonciation, et ses choix ont fondé la sémio-linguistique ... Frege est à la source de la sémantique formelle en privilégiant les pôles signifié/référent, tandis que Peirce, par son refus de dissocier les concepts et d'évacuer l'une des composantes peut être considéré comme le fondateur d'une sémiotique générale. » (Everaert-Desmedt 1990)

François Conne (2008) et quelques autres chercheurs en didactique des mathématiques s'intéressent à la sémiotique de Peirce et aux questions d'enseignement et d'apprentissage de la géométrie. Je cite quelques extraits afin de donner à lire certains éléments.

Je rappelle quelques définitions de la sémiotique indispensables pour ancrer la perspective adoptée :

Signe: (...) something by knowing which we know something more. (C.P. 8.332)³

Signe : (...) un signe ou représentamen, est quelque chose [1] qui tient lieu pour quelqu'un [3] de quelque chose [2] sous quelque rapport ou à quelque titre. Il s'adresse à quelqu'un c'est-à-dire qu'il crée dans l'esprit de cette personne un signe équivalent ou peut-être un signe plus développé. Ce signe qu'il crée, je l'appelle interprétant du premier signe. Ce signe tient lieu de quelque chose : de son objet (C.P. 2.228, Fisette 1993, p. 10).

³ « (...) quelque chose dont la connaissance nous porte quelque chose de plus à la connaissance » (traduction de F. Conne).

Si le signe tient pour son objet, cela n'implique pas pour autant que ce dernier serait déjà totalement connu. Au contraire, c'est par le signe que nous connaissons mieux l'objet, au travers des enchaînements de ses interprétants ou sémioses. Si l'objet est connaissable c'est parce que ces sémioses ne sont pas libres mais contraintes par l'objet lui-même. De ce point de vue, la relation qu'entretient un signe à son objet est quelque chose de crucial pour toute personne qui s'intéresse aux développements sémiotiques. Cette relation se décline sur trois modes : les relations iconique, indicielle et symbolique [...]

a) *Un signe iconique prête à son objet son apparence - qualitative, caractéristique ou générique - comme ressemblance suggestive.* Dans ce cas, le signe tient pour son objet en tant qu'il partage avec lui son apparence ou celle qu'on lui suppose. L'icône présente ainsi une possibilité d'être de son objet, elle est suggestive – sans suggérer pourtant quelque chose de précis. La relation d'une icône à son objet est une assimilation, le signe ne se distingue pas de son objet, dont on n'est même pas assuré qu'il existe. [...]

b) *Un signe indiciel prête à son objet sa présence – ou une de ses occurrences – comme signal – un fait qui attire notre attention ou une simple intuition qui nous traverse l'esprit.* Contrairement au signe iconique qui nous informe seulement d'une forme logiquement possible que pourrait avoir un objet dont on ne sait si il existe, le signe indiciel parce qu'il a été affecté par son objet nous en assure l'existence. Un indice peut être une trace laissée par l'objet lui-même sur un substrat, mais, inversement, ce peut-être tout aussi bien une marque apposée sur lui, ou qu'on lui fait simplement correspondre, comme lorsqu'on pointe une chose du doigt. [...] L'indice et son objet sont dans une relation effective qui peut pourtant être complexe. Les signes indiciels sont essentiels aux processus d'interprétation, mais l'interprétation des indices est toujours une affaire délicate, parce que la relation qu'entretiennent les propriétés de l'indice et ceux de son objet peuvent être non seulement distendues mais fort abstraites. Certaines propriétés de l'indice sont reliées à l'objet, mais cela n'en fait pas pour autant des propriétés de l'objet lui-même. [...]

c) *Un signe symbolique prête à son objet sa logique comme conception – possible, informante ou significative.* Un signe symbolique « veut dire quelque chose », il contraint l'esprit de l'interprète. Toutefois, cela ne détermine pas pour autant sa signification d'une manière univoque et définie une fois pour toute. Par conséquent, si le symbole « veut dire », il peut vouloir dire ceci à tel ou tel et cela à tel ou tel autre. [...]

Pour le paragraphe suivant, développement du contenu non existant au moment de l'école d'été, je suis obligée de changer quelque peu la modalité d'écriture. En effet, je vais indiquer ce que j'ai écrit (en caractères normal) et les réactions rédigées par F. Conne (en caractères italiques). Je ne vois pas d'autre moyen pour l'instant que de faire part de là ou j'en suis. Et cela permet de mettre en dynamique ce qui précède. J'ai placé les propos de commentaires en note de bas de page, pour permettre aussi une lecture linéaire des textes.

UNE LECTURE COMMENTEE

Représentamen, objet, interprétant constituent une triade fondamentale du signe peircien, avec celle des relations iconique, indicielle, symbolique. Dans la distinction dessin-figure, le dessin peut est un représentamen, mais pour quel objet ? Il y a l'objet immédiat, celui qui est donné à voir, comme objet spatial constitué de traits, mais qui pourrait posséder une certaine épaisseur pour être une réalité physique ; il pourrait renvoyer à tous les référents géométriques dont il pourrait être une représentation. Mais l'objet du dessin peut également être un modèle : un modèle mathématique qui schématise un problème spatial par exemple. Le dessin C ci-dessous par exemple a pour objet la schématisation d'un problème spatial en un modèle mathématique dont l'incarnation se fait *pour moi* au travers ce représentamen. L'objet du dessin peut aussi être une réflexion, un cheminement, par exemple le dessin C renvoie à la

façon dont je me représente le problème, et pouvoir faire venir des interprétants qui me permettront d'envisager des pistes dans les arguments ou l'organisation d'une démonstration⁴.

Tenir compte des conditions d'enseignement et d'apprentissage à l'école primaire, c'est poser comme nécessité l'importance et la considération didactique du Représentamen, sans préjuger de l'objet référé et des interprétants construits par les élèves dans une activité géométrique. Il nous faut alors un terme pour parler des dessins qui ne suggèrent rien de son objet, et disposer d'un outil d'analyse adapté au contexte d'étude⁵.

Ainsi, pouvoir considérer tous les types de dessins produits indépendamment (ou non) de l'existence de référents géométriques, est une nécessité pour étudier l'activité géométrique des élèves à l'école primaire⁶ : les dessins pour faire apprendre des éléments de géométrie ; ceux construits dans le cadre d'activités dites « géométriques » ; ceux produits dans des schématisations graphiques de problèmes spatiaux ou de constructions graphiques ; et ceux liés à la résolution de problèmes de géométrie⁷. C'est le mot « graphisme » que j'utiliserai, en reprenant une référence faite par Bautier (Bautier 93) à Yves Deforges⁸. Dans la citation suivante, le mot « espace » pris au sens large de espace spatial, espace graphique, espace géométrique, peut nous ouvrir des perspectives :

Nous désignons par le terme de « graphisme d'espace », les représentations graphiques d'espaces dont la fonction est d'abord heuristique. Plus précisément, un dessin d'espace est un graphisme d'espace si il y a conjonction dans la situation étudiée des trois caractères suivants :

- pour le sujet, le dessin possède une valeur spatiale (une esquisse peut être un graphisme d'espace, tout autant qu'une perspective précise).
- ce dessin est un moyen pour le sujet de résoudre un problème relatif à l'espace (ce problème appartient à la géométrie vs à la « géométrie », sa finalité est mathématiques vs technique).
- ce dessin doit aider le sujet à mieux se représenter mentalement le problème à résoudre (plus exactement, la représentation graphique aide le sujet à se construire une représentation mentale du problème à résoudre). Y. Deforges, cité par Bautier 1993 p187

⁴ « Pour moi il y a une difficulté à parler de renvoi et de référent, d'où mes corrections dans l'article. La question que tu poses ne me semble pas non plus exactement porter sur celle de l'objet que sur celle de l'interprétant. Il me semble que ce dont tu parles est de signes symboliques, et la question est alors celles des logiques interprétatives que peuvent prendre ces signes. Tu parles ici essentiellement de polysémie du signe. Mais tes distinctions ne se voient que sur la manière dont ces signes seront travaillés ultérieurement, tes distinctions sont donc dans l'interprétant et les sémiotiques à quoi cela donne lieu. Par ailleurs, objet immédiat et objet dynamique est bien entendu en jeu ici, mais il ne me semble pas que ton évocation éclaire vraiment ce que tu veux dire. À ta place je recentrerai sur ce que je tente de dire, et ici l'enjeu est de considérer les choses comme signes et de convaincre les lecteurs de l'intérêt de le faire, en quoi cela simplifie et clarifie les choses, permet en particulier de ne pas se trouver trop embarrassé par toutes ces potentialités de significations diverses. »

⁵ « Je ne pense pas que ce que tu sembles appeler de tes vœux, soit possible. Pour moi, c'est bien dans le jeu representamen-interprétant que j'insiste : comment jouer du découplage qu'il y a entre les deux afin de ne pas en rester à des préjugés, soit des préinterprétations, qui sont véhiculées par le fait que l'entrée se fait toujours par le symbole, donc par un « vouloir dire » très fort. J'oppose alors la logique induite par le symbole dans l'interprétant à la règle régissant le légisigne. »

⁶ « Tu ne va pas pouvoir prendre les dessins pour eux-mêmes, car alors tu serais en priméité, et en fait ces dessins seront toujours pris non seulement en relation avec quelque chose, donc en secondéité, mais encore selon des conventions graphiques, donc en tiercéité. Ce que tu peux faire, pour atteindre ce que tu cherches à atteindre c'est de montrer les jeux qu'il y a entre tout cela. C'est de cette manière que tu peux montrer que différentes logiques peuvent opérer à titre de symbole, en particulier une logique graphique, une logique spatiale et une logique géométrique. Et de ce fait, ouvrir de manière bien plus subtile le problème « dessiner ce qu'on voit, dessiner ce qu'on sait » etc. »

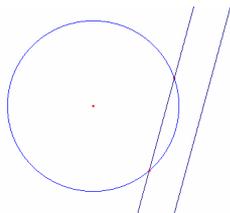
⁷ « L'intentionnalité est symbolique. Le problème des mathématiciens et des préjugés avec lesquels tu tentes de rompre est de supposer qu'il n'y a qu'une seule manière pour un signe d'être symbolique, par exemple celle d'être ce qu'ils appellent une figure. Or cela est faux ! »

⁸ « Il me semble que pour toi, graphisme est une autre manière de dire representamen et je dirais que tu dois bien préciser qu'il s'agit de légisigne. Sur ce point on peut citer R. Duval, sans problème. »

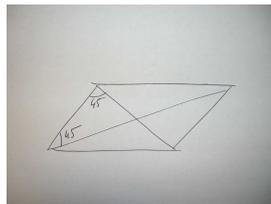
L'intérêt de cette définition est de fournir un moyen de décrire les productions graphiques liées à la résolution de problèmes qu'ils soient spatiaux, graphiques ou géométriques ; et d'en caractériser trois aspects essentiels (je les reprends en sens inverse de leur présentation dans la citation) : l'aide à la représentation mentale de la situation ; l'aide au traitement de la situation ; la valeur spatiale du dessin⁹.

Exemple sur un problème spatial : retrouver un objet caché sous terre, situé à cinq mètres du nain de jardin et à un mètre de l'allée centrale. Le dessin A ci-dessous que je produis m'aide à repérer globalement où je dois chercher ; c'est un dessin qui a une valeur spatiale¹⁰, il m'aide à me représenter le problème et à le résoudre en partie¹¹.

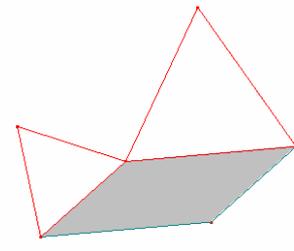
Exemple sur un problème graphique : tracer un parallélogramme dont les angles formés par chacune des diagonales avec un côté est un demi angle droit. Le dessin B m'aide à me représenter le problème de construction, ou plutôt les données de la construction, je m'en sers également pour traiter le problème, en retravaillant le dessin de manière spatiale. Exemple sur un problème de géométrie : « Soit ABCD un parallélogramme. ASB et ATD sont deux triangles équilatéraux situés à l'extérieur du parallélogramme. Démontrer que le triangle STC est un triangle équilatéral. » Le dessin C me sert à me représenter le problème, il a une valeur spatiale, et je vais l'utiliser dans le traitement en le prenant comme support pour faire des hypothèses quant aux arguments¹² que je pourrais utiliser¹³.



dessin A



dessin B



dessin C

Chacun de ces dessins peut être considéré comme un « graphisme d'espace » : un graphisme « d'espace graphique » pour le problème graphique, un graphisme « d'espace spatial » pour le problème spatial, « un graphisme d'espace géométrique » pour le problème de géométrie¹⁴. Dans chaque cas, c'est un moyen pour moi de me représenter le problème et de cheminer dans sa résolution. Le dessin pour représenter l'espace (environnement) possède pour le sujet une valeur spatiale, c'est un objet de l'espace plan, muni des propriétés des objets de l'espace

⁹ « Pour moi, c'est trouver une autre logique qui puisse régir ce symbole c'est à dire qui cible sur d'autres interprétants et permet d'autres sémioses. »

¹⁰ « tu es dans l'interprétation si tu dis la valeur que le dessin a »

¹¹ « là encore tu es dans l'interprétation dans la signification au sens où la pragmatique l'entend »

¹² « donc encore une fois interprétants »

¹³ « En fait tu ne parles quasiment pas du représentamen et surtout de son caractère de légisigne, ou de réplique d'un légisigne. Tu laisses cela totalement implicite, et ce faisant, tu ne peux pas faire comprendre l'intérêt de penser en termes de signes. C'est pour cela que j'ai exprimé les choses en disant que le signe prête à son objet, ces dessins prêtent à leur objet leur qualité (propriétés, image etc.) leur présence. C'est plus fort que référent parce que référent ne dit pas la présence du signe, son impact, mais laisse le regard glisser de la matérialité du représentamen à l'objet qu'il désigne, et ce qui force notre esprit à penser par leurs relations avec d'autres signes. Certes il faut regarder la lune et pas le doigt, mais sans le doigt, comment être sûr que tu regardes ce qu'on te dit de regarder ? Tu peux savoir ce que lune veut dire et donc repérer la lune dans le ciel, mais avec quelques étoiles, ou encore tel bateau au large, pas certain que tu puisses te passer de l'index. L'index, n'est pas que le doigt, mais sa direction, regarder le doigt est ne pas voir la lune mais tout autant ne pas voir la direction dans laquelle elle se trouve. Etc. »

¹⁴ « Ici j'introduirais l'idée que le dessin est exécuté et que son exécution se fait dans l'espace. »

sensoriel, pour lesquelles le sujet va pouvoir recourir à des instruments, des sens et des mesures, des connaissances et des interprétants.

Ainsi le choix du mot « graphisme » permet de redonner, dans l'analyse des signes utilisés en géométrie théorique ou didactique, une dimension au Représentamen sans préjugé d'un objet spécifique¹⁵. Et par conséquent, nous pouvons faire usage de ce terme, qu'il s'agisse de considérer des problèmes de géométrie que l'on schématise par un graphisme ou que l'on considère des problèmes spatiaux ou graphiques que l'on schématise par un problème de géométrie. Cette approche, qui reste somme toute à construire, reconsidère le problème du dessin et de la figure dans l'enseignement de la géométrie, à l'école primaire, en réintroduisant le sujet et le contexte dans le lien sémiotique. « *Exact* ». Ceci ouvre sur des possibilités d'interprétations mais aussi des modélisations différentes de l'activité effective ou potentielle des élèves, des situations didactiques proposées mais aussi des connaissances et des savoirs enjeux d'apprentissage. Pour en apercevoir quelques aspects clarifiés à l'heure actuelle, proposons de formaliser à nouveau les homomorphismes pouvant exister entre les propriétés spatiales d'un graphisme et les propriétés géométriques d'un objet géométrique¹⁶.

Fin de cette modalité d'écriture.

III. HOMOMORPHISMES DE PROPRIÉTÉS

CAS GENERAL

Dans ce paragraphe le mot « schématisation » est utilisé volontairement dans le cas de la résolution d'un problème graphique, ou spatial ou géométrique (schéma, schématiser) pour désigner le processus de production d'un graphisme. On pourra dissocier quand cela sera nécessaire la schématisation géométrique de la schématisation de problèmes géométriques : la première correspond à la production d'un graphisme portant sur le modèle mathématique choisi pour modéliser un problème spatial ou graphique ; la seconde porte sur la production

¹⁵ « Tu tentes de faire ce que Peirce appelle une précision, mais tu le fais au détriment du caractère triadique du signe, tu ne peux pas isoler le représentamen ni de son objet ni de son interprétant. Pour moi, encore une fois, ce que graphisme amène comme changement est la relation représentamen-interprétant, mais c'est assez délicat à dire. Ce que tu dis aussi est que graphisme est plus général que figure et même dessin. Ok. Ici il y a alors deux possibilités, soit graphisme renvoie à icône, mais dans tes exemples s'il y a icône bien entendu, il y a plus que cela, soit, en ce moment de ta considération graphisme renvoie à rhématique. C'est ce qui me semble être la bonne manière de prendre les choses. Mais j'ai encore un doute, parce que tes schémas ne sont pas exempts de relations, ils ne gardent pas toutes les relations requises, sont moins contraints que ce qu'on demande, mais ne sont pas vides de relations, et comme on a affaire à tout un ensemble de relations, ton schéma va te dire quelque chose de précis, et dans ce sens il serait dicent. Mais là je ne suis pas certain du tout de ce que j'avance, peut-être ne dit-il rien d'autre que comment les choses pourraient être. Le schéma te donne-t-il une licorne ou bien plus que cela ? Si tu fais le schéma du théorème selon lequel tout triangle est isocèle, tu as bel et bien une licorne, et la démonstration te dit que tel objet n'existe pas. Mais il te le dit en faisant la part sur le dessin de ce qui peut exister et ce qui ne peut pas exister, du cheval de la licorne, de la corne de la licorne, contra la dotation d'une telle corne à un cheval. Donc il y a au moins des éléments dicents dans l'affaire. »

¹⁶ « Ici il faudrait peut-être préciser ton projet en disant ce qui dans ton affaire est rhématique, qui ouvre sur l'imagination de choses insoupçonnées jusqu'ici, et donc porteuses de découvertes pour la didactique des mathématiques (rhématique) : qu'est-ce qui est attestable factuellement (dicent) et qu'est-ce que cela apporte comme autre manière de penser nos problèmes (argument) ? Ici tu vas trop vite sur des arguments attestés, ce qui fait que tu glisses sur ce qu'il y a de rhématique, et de dicent de tes arguments. Tu ne dis pas un potentiel si tu le démontres aussitôt, car alors il se trouvait dans tes prémisses. La difficulté est de faire admettre l'imagination comme intéressante, avant même de pouvoir dire son effectivité dans l'avancée du savoir. Et pour ce faire, il faut insister sur ce que l'on ignore, ne comprend pas etc., donc ce qui est abusivement compris par les arguments actuels. Il faut proposer une nouvelle manière d'ignorer les choses si on veut justifier la recherche de nouvelles compréhensions. »

d'un graphisme permettant d'incarner de manière spatiale ou graphique un problème de géométrie.

Je m'intéresse alors aux homomorphismes possibles de propriétés spatiales d'un graphisme et de propriétés géométriques d'une configuration géométrique dans le processus de schématisation. Notons S la présence d'une propriété spatiale spécifique d'un graphisme et NS son absence ; P la présence d'une propriété géométrique d'une configuration géométrique, et NP son absence. Les possibilités d'articulation sont : S-P ; S-NP ; NS-P ; NS-NP. En tableau avec un exemple :

		OBJET DE LA GEOMETRIE	
		P « Deux segments perpendiculaires »	NP « Deux segments sans propriété spécifique de perpendicularité »
GRAPHISME	S Perpendicularité spatiale	Cas S-P ANALOGIE	Cas S-NP CONFLIT
	NS Non perpendicularité spatiale	Cas NS-P CONFLIT	Cas NS-NP ANALOGIE

Illustration 2 : Homomorphismes de propriétés

Les cas d'analogie sont les cas qui fondent la fonction heuristique d'une schématisation, qu'elle soit celle d'un problème de géométrie dans l'espace graphique, ou celle d'un problème spatial ou graphique en un problème de géométrie.

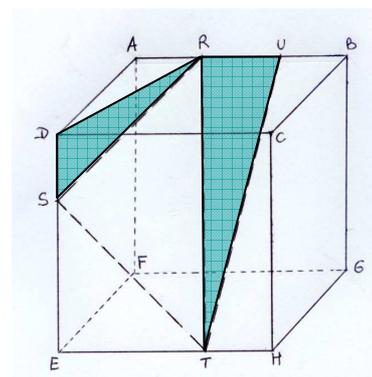
Le cas S-NP est fréquent dans les schématisations de problèmes géométriques où l'on tente de raisonner sur des cas particuliers avant de remonter au général. Le cas S-NP se rencontre également dans les schématisations géométriques de problèmes spatiaux pour lesquels la propriété S n'est pas retenue dans la modélisation mathématique.

Dans des schématisations de problème de géométrie, le cas NS-P est incontournable pour des graphismes d'objets en trois dimensions : une face de cube non parallèle au plan de projection pour une perspective donnée se représente avec des propriétés spatiales différentes des propriétés géométriques du carré géométrique. Dans des schématisations géométriques le cas NS-P est inhérent au processus même : c'est justement parce que certaines propriétés spatiales ne sont pas accessibles (perceptibles ou appréhendables) directement que la modélisation du problème en un problème de géométrie va permettre d'entrevoir de nouvelles propriétés, géométriques dans un premier temps, qui pourront correspondre à des propriétés spatiales effectives.

ETUDE D'EXEMPLES

- Exemple (un énoncé d'exercice de 4^{ème} collège) :

ABCDEFGH est un cube : les faces ABCD et EFGH sont parallèles, avec [AF] et [DE] deux arêtes consécutives. R, S, T, U sont situés respectivement sur les segments [AB], [DE], [EH], [AB] (R et U



sont distincts) avec les contraintes de longueurs suivantes : AR, DS, HT, BU sont égales, et correspondent à 4/13 de AB.

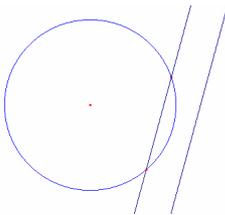
Un dessin parmi l'ensemble des représentations possibles du référent : le dessin ci-contre.

Sur cet exemple une multiplicité de cas possibles se repère dans l'étude des liens entre propriétés spatiales du graphisme et propriétés géométriques du référent.

Cas S-P SDC rectangle en D ...	Cas S-NP RUT rectangle en R SRT rectangle en S ...
Cas NS-P RUT rectangle en U SDR rectangle en D ...	Cas NS-NP SCH n'est rectangle en aucun des points

Exemple 1 : Etude des articulations pour des triangles ayant leurs extrémités sur les arêtes d'un cube

- Un autre exemple où le graphisme provient d'une schématisation géométrique du problème spatial « Retrouver un objet caché sous terre, situé à cinq mètres du nain de jardin et à un mètre de l'allée centrale » :



Cas S-P Localisations d'endroits à égale distance d'une ligne droite. Localisations d'endroits à égale distance d'un point.	Cas S-NP Les positions du nain et de l'allée par rapport aux contours du jardin. Le nain n'est pas schématisé par un cercle, mais par un point. ...
Cas NS-P Le nain de jardin représenté par un point. ...	Cas NS-NP

Exemple 2 : pour un problème spatial, schématiser géométriquement

Pour le travail dans un environnement de géométrie dynamique, le problème ne se pose pas tout à fait pareil. Les logiciels de géométrie dynamique sont construits selon le principe suivant : « Une construction faite à partir d'une commande « propriété » des différents menus donne à voir une propriété spatiale de dessins conservée dans le mouvement du dessin. » et « Si on observe à l'écran une invariance de propriété spatiale d'un dessin quel que soit le mouvement, alors cette propriété spatiale est l'indice d'une propriété géométrique de la figure construite. » Ainsi, dans cet environnement de travail, pour le cas de la géométrie plane, seuls les cas d'homomorphismes analogiques sont possibles dans les articulations entre propriétés spatiales d'un graphisme et propriété géométrique d'un objet géométrique.

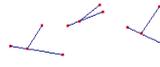
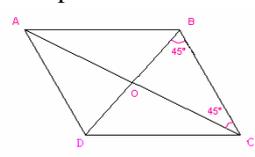
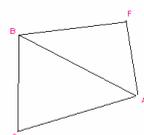
		OBJET GEOMETRIQUE	
		P	NP
G R A P H I S M E	S	<p>Cas S-P ANALOGIF</p> 	<p>Cas S-NP CONFLIT Réglé</p> 
	NS	<p>Cas N-SP CONFLIT Réglé</p> 	<p>Cas NS-NP ANALOGIE</p> 

Illustration 3 : Homomorphismes de propriétés, cas de l'environnement dynamique

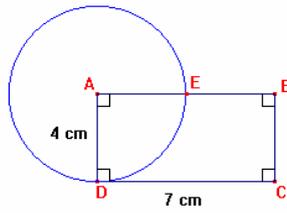
QUESTION DE FOND

Cela pose quelques questions sur les choix didactiques présidant aux types d'exercices et surtout à l'accompagnement de ces textes par des dessins. Pour le premier exemple ci-dessus, à la question « le rectangle RUT est-il rectangle en R ? » une grande majorité d'élèves répondra « oui » par référence au dessin et non au référent géométrique donné par le texte. Faut-il interpréter cela comme une difficulté ou un manque du côté des élèves ? Ne peut-on pas se demander ce qui préside au choix d'imposer un dessin particulier, alors que le référent est suffisamment décrit en français pour que chacun dispose de toutes les informations du problème ? Et pourquoi ce dessin en particulier pour lequel justement RUT est rectangle en U ? En aucun cas nous ne pouvons parler de graphisme ici. Le dessin remplit-il sa fonction d'aide à la résolution du problème pour le sujet ? Et celle d'aide à la résolution ? Est-on bien certain que les élèves accordent une valeur spatiale à ce dessin ?

La question plus générale au fond est celle de **la responsabilité de la schématisation dans le contrat didactique**. Poursuivons avec quelques autres exemples : le premier extrait de manuels de 5^{ème} collège, et le second extrait des évaluations nationales à l'entrée en 6^{ème} durant quelques années à la fin des années 90.

<p>En utilisant les indications portées sur la figure à main levée, dire quelle est la nature du parallélogramme ABCD. Justifier la réponse.</p> 	<p>Sur la figure ci-dessous dessinée à main levée, ABC et ABF sont des triangles équilatéraux. Quelle est la nature du quadrilatère AFBC ? Justifier la réponse.</p> 
<p>Cas S-P pour le parallélogramme Cas NS-P pour le codage des angles</p>	<p>Cas NS-P pour les triangles équilatéraux Cas S-NP pour l'angle droit en F</p>
<p>Type de problème : ambigu Mode de validation : non défini</p>	<p>Type de problème : graphique Mode de validation : non défini</p>

Exemple 3 : obstacle du dessin à la représentation du problème

<p>Sur ce dessin à main levée (les vraies grandeurs sont écrites en cm), on a représenté un rectangle ABCD et un cercle de centre A qui passe par D. Ce cercle coupe le segment [AB] au point E. Trouve la longueur du segment [EB]. Explique ta réponse.</p> 
<p>Cas S-NP pour l'égalité des longueurs AE et EB sur le dessin : présence d'une information G-signifiante d'égalité de longueur mais absence d'une telle propriété géométrique référente.</p> <p>Cas NS-P pour le codage des longueurs : absence d'information G-signifiante pour les mesures de longueurs, propriété géométrique d'un référent.</p>
<p>Type de problème : spatial</p> <p>Mode de validation : non défini</p> <p>Schématisation prise en charge par l'énoncé</p>

Exemple 4 : obstacle du dessin à la résolution du problème

Dans chaque exemple, les cas conflictuels apparaissent de manière flagrante. Tout comme dans l'exemple du cube, les dessins proposés permettent-ils d'assurer une fonction heuristique pour les élèves ? Une reformulation de l'énoncé sans dessin ne permettrait-elle pas de laisser à l'élève l'initiative de déterminer une représentation du problème adéquat pour lui, à la fois en terme d'interprétation, mais aussi de résolution ? Laisser à la charge de l'élève la responsabilité de la construction d'un graphisme implique l'acceptation de ses connaissances, de ses expériences antérieures, de ses intuitions. Si un dessin est imposé, ne diminue-t-on pas le risque d'enfermement dans une représentation qui fait obstacle pour beaucoup à la compréhension et au traitement du problème, comme c'est le cas dans des exemples ci-dessus ?

Variations sur un énoncé

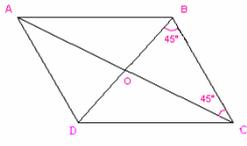
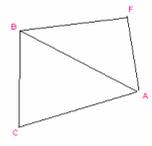
Reprenons l'exemple 4. Il s'agit d'un problème graphique à l'origine, le mode de validation n'est pas défini, la schématisation est déjà prise en charge par l'énoncé à travers le dessin proposé piégeant l'interprétation et le traitement. Imaginons quels pourraient être des énoncés du même problème, sans dessin, en précisant le type de problème et le mode de validation auxquels ils renverraient :

Enoncé de la situation	On considère un rectangle ABCD de dimensions 4cm et 7cm ($AB=7$ et $AD = 4$). On considère un cercle centré en A et qui passe par D. Ce cercle coupe le segment [AB] au point E.	On considère tous les cas possibles définis par : un rectangle ABCD et un cercle centré en A et qui passe par D. Ce cercle coupe le segment [AB] au point E.
Type de problème	Spatial	
Enoncé de la question	Trouve la longueur du segment [EB]. Explique ta réponse.	Trouve la longueur du segment [EB], sans faire de mesure, mais en utilisant des arguments géométriques.
Mode de validation	Indéfini	Déductif
		Géométrique
		Comment trouver la longueur du segment [EB], si on connaît les longueurs des côtés du rectangle ?
		Déductif

Exemple 4 : reformulations d'un énoncé

Précisons un point : rien ne nous permet d'appréhender la façon dont les élèves pourront situer leur travail par rapport à ces énoncés, mais leur distinction permet de repérer a priori la part du contrat didactique liée à la tâche et au milieu indiqués à l'élève, c'est à dire de préciser quelle est la situation objective avec laquelle l'élève va (inter)agir ?

De même imaginons quelques reprises possibles de formulations des énoncés de l'exemple 3 :

<p>ABCD est un parallélogramme. Les angles formés par deux demi diagonales et le côté qui les rejoint, sont égaux et valent 45°. Quelle est la nature de ABCD. Justifier la réponse. [ou plus directement, démontrer que ABCD est un carré]. <i>Problème de géométrie</i></p>	<p>ABC et AFB sont des triangles équilatéraux (C et F sont distincts). Quelle est la nature de ACBF ? Justifier la réponse. <i>Problème de géométrie</i></p>
<p>Ou bien par exemple :</p>  <p>Ce dessin représente un parallélogramme ABCD, O le point d'intersection de ses diagonales, et les angles OCB et OBC sont égaux et valent 45°. Mais ce dessin ne correspond pas aux propriétés données. Construis plusieurs dessins différents qui respectent ces propriétés.</p> <p><i>Problème graphique de construction qui pourrait se formuler par : réalise une épure¹⁷ d'un parallélogramme dont les angles</i></p>	<p>Ou bien par exemple :</p>  <p>Ce dessin représente deux triangles équilatéraux ayant un côté en commun, mais c'est un dessin qui ne respecte pas les propriétés de construction. Construis plusieurs dessins différents qui sont « deux triangles équilatéraux ayant un côté en commun ».</p> <p><i>Problème graphique de construction qui pourrait se formuler par : réalise une épure de deux triangles équilatéraux ayant un côté commun.</i></p>

Cette étude tend à prouver que l'on ne peut plus interpréter les réponses des élèves comme des difficultés de leur part à « passer du dessin à la figure ».

En première raison il existe un problème phénoménologique interne à l'épistémologie des mathématiques. En second raison la responsabilité de schématiser un problème, devant assurer une fonction heuristique de graphisme d'espace est trop souvent prise en charge par l'énoncé alors qu'il reviendrait à celui qui résout d'en assurer cette responsabilité. En troisième raison, et paradoxalement, la responsabilité de dévoluer les objets de travail (type de problème et mode de validation des assertions) est trop souvent laissée à la charge des élèves.

Une hypothèse conclusive : le type de problèmes (spatiaux, graphiques ou géométriques) et le choix d'un mode de validation (déductif ou instrumenté) sont des éléments constitutifs nécessaires pour définir un milieu objectif de situation « pour faire de la géométrie ».

¹⁷ Epure est utilisé ici dans le sens qu'il a dans les domaines techniques : un schéma « aux dimensions », les mesures (longueurs, angles) sont respectées en proportions.

CONCLUSION

A suivre ...

RÉFÉRENCES DES TEXTES ET AUTEURS CITÉS

- Bautier T. (1993) Analyse des fonctions des instruments graphiques dans les pratiques de conception architectural ; contribution à une didactique des graphismes d'espaces, In *Espaces graphiques et graphismes d'espace*, coord. Par Bessot A. et Vérillon P., La pensée sauvage, pp183-231.
- Berthelot R. et Salin M.H. (1992) *L'espace et la géométrie dans la scolarité obligatoire*, Thèse Université de Bordeaux 1
- Brousseau G. (2000) Les propriétés didactiques de la géométrie élémentaire, *Séminaire de Didactique des Mathématiques*, Université de Crète, Rethymon
- Capponi B., Laborde C. (1994) L'apprentissage de la notion de figure géométrique, *Recherche en Didactique des Mathématiques* 14 n°1.2, Ed. La pensée sauvage, Grenoble.
- Colmez F., Parzysz B. (1993) Le vu et le su dans l'évolution de dessins de pyramides du CE2 à la seconde, In *Espaces graphiques et Graphismes d'espaces*, Ed. La pensée sauvage, Grenoble, pp35-55.
- Conne F. (2008 à paraître) L'expérience comme signe didactique indiciel, *Recherche en Didactique des Mathématiques* Ed. La pensée sauvage, Grenoble.
- Evaeraert-Desmedt N. (1990) *Le processus interprétatif, introduction à la sémiotique de Ch.S. Peirce*, Pierre Mardaga Editeur.
- Fisette J. (1993), *Introduction à la sémiotique de C. S. Peirce*, Montréal, XYZ, collection « Études et documents ».
- Gobert S. (2007) Conditions nécessaires à l'usage des dessins en géométrie, *Revue Petit x*, n°74, 34-59.
- Gonseth F. (1946-1953) « La géométrie et le problème de l'espace » Ed. du Griffon Neuchâtel (diffusé par Dunod).
- Houdement C., Kuzniak A. (2000) Formation des maîtres et paradigmes géométriques *Recherche en didactique des mathématiques* 20.1, 89-116.
- Lerouge A. (2000) La notion de cadre de rationalité. A propos de la droite au collège. *Recherches en didactique des mathématiques* 20. 2, 171-208