



HAL
open science

Comptage et écriture des égalités dans les premières classes de l'enseignement primaire.

François Conne

► **To cite this version:**

François Conne. Comptage et écriture des égalités dans les premières classes de l'enseignement primaire. : Des dénombrements à la division euclidienne - Activités numériques élémentaires à l'école primaire - ÉPISODE 1. Math-Ecole, 1987, 128, pp.2-12. halshs-01027537v2

HAL Id: halshs-01027537

<https://shs.hal.science/halshs-01027537v2>

Submitted on 11 Feb 2015

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Comptage et écriture des égalités dans les premières classes d'enseignement primaire

par François Conne, maître-assistant F.P.S.E.

«L'élève a des cadres limités pour écrire ce qu'il fait».

Jean Brun

Introduction: Dénombrement, comptage, calculs

Parmi les activités numériques élémentaires, je distinguerai tout d'abord entre dénombrement et calcul. Les **dénombrements** traitent de quantités préalablement données (collections concrètes ou figurées) et s'accompagnent toujours de la récitation (exprimée ou mentale de la comptine ou plus généralement du recours à tout autre type de compteur). Les activités de dénombrement consistent à coupler ce compteur – la récitation de la comptine – avec l'énumération des éléments de la collection. Elles ne permettent pas seulement l'évaluation de quantités mais aussi celle de certaines de leurs transformations suite à des adjonctions ou des retractions, ainsi que leurs comparaisons (même si bien entendu il n'est pas nécessaire dans ce cas de dénombrer les quantités à comparer). Formellement, un seul compteur, et de là un seul système symbolique suffit au dénombrement. Cependant suivant l'ordre de grandeur de la quantité à évaluer et des conditions de ce travail, le recours à des systèmes de marquage auxiliaires peut s'avérer nécessaire. Les **calculs** traitent les opérations numériques reflétant les transformations et comparaisons des quantités. Portant sur des entités abstraites, les calculs recourent à des systèmes symboliques plus ou moins élaborés qui jouent le rôle de supports aux actions. Je distingue alors les comptages et les calculs numériques. Les **comptages** s'apparentent aux dénombrements parce qu'ils utilisent comme support des systèmes symboliques figurant des quantités. On peut dire que dans le comptage les calculs sont médiatisés par le recours aux opérations de dénombrement (ou d'opérations directement dérivées du dénombrement). Le critère définissant un comptage sera donc tout naturellement celui de la récitation de la comptine ou d'une séquence de celle-ci, et ceci quel que soit le support figuratif utilisé (ou son image mentale): jetons, doigts, traces écrites, nombres figuratifs, bouliers, réglettes, etc. Les **calculs numériques** traitent eux aussi des opérations en recourant à des supports symboliques variés (matériels ou images): boulier, écritures, prononciation orale des nombres composés... mais ne recourent pas à un compteur – ou à la récitation de la comptine. A ce niveau, c'est la connaissance de la structure de la comptine (ou de l'organisation numérique) qui intervient, à la fois au travers de la mémorisation des tables des opérations numériques (addition, multiplication) et au travers de l'application des règles de numération (dérivées des axiomes structurels numériques telle l'associativité, la commutativité, la distributivité, etc.). Ces règles de numération ne sont pas connues en tant que telles mais sont représentées par le biais de règles d'écritures (ou plus généralement

par le biais de règles de transformation des représentations symboliques). Ces **traitements symboliques**: écriture, réorganisation, disposition des calculs, etc. permettent de **substituer à une opération de calcul une autre ou une séquence d'autres opérations plus élémentaires mais équivalentes**. Bien sûr la disposition en colonne, l'effectuation d'une addition colonne par colonne, les règles de retenues, ainsi que la lecture du résultat sont des exemples de calcul numérique répondant aux critères susmentionnés. Mais de même le calcul mental (procédant d'un autre découpage des données), le calcul sur boulier, répondent aussi à ces critères. Plus près des comptages on considèrera aussi comme calculs numériques les opérations visant à simplifier le calcul ou le comptage, ainsi le fameux «*passage à la dizaine*»

$$8 + 6 = (8 + 2) + 4$$

ou d'autres méthodes

$$\text{comme par ex. } 45 + 8 = (45 + 10) - 2.$$

Considérant la question sous l'angle des supports symboliques auxiliaires j'ai montré comment dénombrements, calculs, comptage et calculs numériques se hiérarchisent selon la richesse et la complexité des outils utilisés. Mais ceci n'épuise de loin pas la question des représentations symboliques. Pour la question générale des représentations, je renvoie le lecteur à l'article de G. Vergnaud. Ici je vais considérer un autre aspect de cette question. En observant le travail en classe, on n'échappe pas à l'examen du rôle que les systèmes de représentation jouent dans l'échange entre maîtres et élèves, à la fois pour signifier à ces derniers une tâche précise et pour leur permettre de rendre compte de leur travail au travers de leurs réponses. Dès le moment où on demande l'effectuation de dénombrements ou de calculs aux élèves, ces deux fonctions des représentations symboliques (support – communication) sont étroitement liées et c'est sur leur articulation que progresse l'apprentissage. Je vais examiner en détail cette question à propos des comptages et des écritures d'additions simples, en ligne

$$a + b = c \quad \text{ou} \quad a = b + c$$

qui sont utilisés en Suisse romande pour cette phase de l'apprentissage (du dénombrement au comptage vers la présentation de quelques règles de calcul numérique). Ceci concerne les deux premières classes de l'enseignement primaire (enfant d'âge 7-8 ans).

I. Comptages

En termes de comptage, une addition est un parcours dans la suite numérique. On «*fait nombre*»: 2 plus 4 fait 6. On «*compte jusqu'à*»: 5 plus 3, 12345, 6, 7, 8 sous entendu: «*j'ai compté jusqu'à 8, ça fait 8*». Le parcours peut être effectué

dans le sens ascendant (addition) ou le sens descendant (soustraction): *8 moins 2: (8)... 7, 6*. Cependant, même pour la soustraction ce dernier type de parcours est bien moins souvent pratiqué. A partir d'une certaine maîtrise du comptage, l'enfant ne compte plus tout mais considère une donnée comme point de départ puis poursuit la récitation de la comptine pour un certain nombre de pas et considère le nombre sur lequel il a ainsi abouti:

3 plus 4, (3) 4567.

Ceci lui permet, entre autres, de compter sur ses doigts même pour des nombres plus grands que dix. Un élève m'a ainsi dit un jour ne pas pouvoir compter *8 plus 6* parce qu'il «*n'avait pas assez de doigts*», il voulait que je lui «*prête des doigts*». Mais ce même élève, au même moment a pu trouver en comptant sur ses doigts combien faisaient *58 plus 6*. L'exemple de comptage à rebours donné ci-dessus est du même type.

Le comptage suppose deux niveaux numériques, décalés. La suite des nombres (qu'on peut identifier à des bornes d'un parcours) et le dénombrement – via un compteur – des pas. Compter sur les doigts c'est alors représenter ce nombre de pas sur ses doigts tandis que l'attention mentale se centre sur la récitation de la comptine. J'ai pu observer un élève de 2P qui, en voulant expliquer à son jeune frère d'école enfantine comment compter sur les doigts *8 plus 8*, a confondu ces deux systèmes. Il a commencé par représenter 8 avec ses doigts: main gauche ouverte et 3 doigts de la main droite. Puis il a continué à lever des doigts en recomptant jusqu'à 8. Un: annulaire de la main droite levé; deux: auriculaire de la main droite levée; puis n'ayant plus de doigts, fermeture de la main gauche et levée successive des cinq doigts; puis n'ayant de nouveau plus de doigts, fermeture de la main droite et pouce de la main droite levée. Mais déjà l'élève se faisait de plus en plus hésitant. Le voilà maintenant avec la représentation de 6 avec les doigts (main gauche et pouce droit levé), le voilà au bout de «*son addition*» de 8, mais sans aucun résultat visible. Alors l'élève se reprend et recommence.

Il ferme ses mains mais compte cette fois à partir de 8 en levant les doigts: *9, 10, 11, ... 16*. Voilà, il a levé 8 doigts, il peut s'arrêter sur le dernier nombre récité, c'est 16, c'est la réponse.

Ainsi la difficulté principale du comptage porte sur la coordination de ces deux séries numériques. Je vais donner d'autres exemples. L'élève peut compter comme un pas le nombre de départ. Cette erreur est bien connue, elle est fréquente dans le cas du comptage à rebours. Et *8 moins 2* fait 7 parce que *8, 7*.

Il convient de décrire comment cette erreur peut s'accompagner d'un comptage sur les doigts. L'élève lève 8 doigts puis baisse successivement le majeur et l'index. Il reste donc 6 doigts levés mais l'élève ne les prend pas en considération et s'arrête – comme dans le cas d'une addition – **au dernier nombre prononcé** –, en l'occurrence le 7. Cette erreur très fréquente amène enseignants ou parents à conseiller l'élève «*de ne pas compter le 8*», mais ceci n'est pas une explication très efficace et peut amener à d'autres confusions. Il est tout aussi

peu efficace d'interdire le comptage sur les doigts sous prétexte que ceux-ci seraient «à l'origine de la confusion». C'est au contraire à l'élève d'apprendre, au cours d'expériences numériques diverses, à contrôler l'usage de ses outils. Voici un long exemple mettant en jeu diverses confusions liées. Un élève de 2P compte 13-7, il me demande s'il peut le faire sur les doigts. J'accepte. Il lève alors ses 10 doigts, puis, tout en récitant la comptine à rebours baisse successivement 7 doigts. Puis il regarde ses mains, 3 doigts restent levés, réponse: «ça fait 3!». Un camarade lui rétorque: «ça fait 6!». Il décide alors de reprendre son comptage en dessinant puis en cochant des croix. Il dessine en ligne 13 croix, puis en coche 7 sans rien dire, puis il compte les croix non cochées et s'exclame «de Dieu, ça fait 6!». Il est visiblement surpris. Il s'arrêterait là mais je lui demande de me montrer comment il fait. Il dessine 13 croix. Puis coche à partir de la droite en récitant cette fois-ci la comptine à rebours: 13, 12, 11, 10, 9, 8, 7. Il compte de temps en temps le nombre de coches. Puis compte les croix non cochées, 6, «ça fait 6». Mais il hésite et refait. Dessin de 13 croix, puis il saute la première croix à droite en disant: «je ne compte pas le 13». Puis il coche successivement les croix en comptant à rebours:

x x x x x x x x x x x x ,
7 8 9 10 11 12

s'arrête lorsqu'il a prononcé 7 et dit: «ça fait encore 6». Puis se reprend: «ah non ça fait 7» (Il a compté la croix tout à droite non cochée). Je lui demande: «t'en a enlevé combien?». Il compte que 6 seulement sont cochées. Il coche alors une nouvelle croix à la suite des autres et dit: «ça fait 6». Le lendemain je lui demande de compter 15 moins 8. Il déclare: «avec les croix, ça va mieux». Il reprend son idée de «ne pas compter le 15», de ne pas cocher la croix de droite, et de compter à rebours:

x x x x x x x x x x x x x x x
7 8 9 10 11 12 13 14

et il trouve qu'il en reste 6. Je lui propose alors de faire avec des ronds pour qu'on voie mieux les coches. Je lui dis «Dessine 15 ronds, puis tu en enlèves 8 et il en reste?». Il dessine alors ainsi:

o o o o o o o / o / o / o / o / o / o / o / o

et répond: «eh bien c'est 7!». Je suis très surpris de cette façon de faire. L'élève ne coche pas les ronds mais fait une coche entre deux ronds. De cette manière, il ne «compte pas le 15». Peut-être représente-t-il ainsi le geste d'écartier du doigt successivement 8 jetons? On le voit, plusieurs erreurs interviennent au cours de cet entretien mais le plus intéressant est le passage d'un système de représentation (support symbolique) à un autre et les surprises que cela cause. Enfin l'élève reporte une règle apprise sur les doigts («je ne compte que le 13») sur le support des petites croix! Ces erreurs peuvent réapparaître alors à propos d'autres comptages. Ainsi une élève de 2P comptait: 4 fois 6, 29 sur ses

doigts (le comptage d'une multiplication ne peut être qu'une itération d'additions). Elle commençait son comptage à 6 puis itérait 4 fois celui-ci:

$$\begin{array}{cccc} \underline{6\ 7\ 8\ 9\ 10\ 11} & \underline{12\ \dots\ 17} & \underline{18\ \dots\ 23} & \underline{24\ \dots\ 29} \\ 6 & 6 & 6 & 6 \end{array}$$

Dans tous ces cas, la différence entre les bornes du comptage (départ et fin) et celle du nombre de pas porte à des confusions. Ceci apparaît très tôt dans une erreur jusque là peu décrite parce que en général mal comprise par les adultes. Cette erreur consiste à se tromper sur le signal d'arrêt de la récitation de la comptine. Par exemple, devant compter $2 + 6$, l'élève trouve la réponse 6. L'élève a en fait compté (2), 3, 4, 5, 6 et, considérant mentalement ce 6, croit qu'il a effectué les 6 pas demandés. Il s'arrête et répond par le dernier nombre récité (ou s'il s'aperçoit de quelque étrangeté dira le nombre suivant). Cette erreur ne se produit pas si le choix du nombre de départ est la plus grande des données: $6 + 2$ ne peut pas donner 6 ni 2, car on compte d'emblée au-delà: 7, 8. Ainsi outre qu'un comptage $a + b$ avec b est moins coûteux pour l'élève (donc aussi, mieux contrôlable) il est déjà, de fait plus fiable. D'autres erreurs peuvent porter sur le contrôle du nombre de pas. Ainsi par exemple de 6 à 15 : 4, par oubli d'une main (l'élève compte avec la main gauche et tient son crayon de la main droite). Enfin, nous l'avons vu aussi, le type de support symbolique auxiliaire peut porter à des confusions.

Ainsi devant compléter de 3 à 8, un élève de 1P trouve la réponse 2. Il me montre avec ses doigts; il commence par lever 8 doigts, puis porte son attention sur sa main gauche (5 doigts levés) et 3 doigts levés. Ainsi en abaissant 2 doigts (annulaire et auriculaire de la main gauche) il passe de la **représentation** de 3 (en oubliant les 3 doigts de la main droite qui sont restés levés) à celle de 8 (en retrouvant la configuration de départ: main gauche ouverte, 3 doigts de la main droite levés).

Donc je représenterai le comptage additif dans les termes suivants: «Le nombre de départ, suivi d'un nombre de pas donne un nombre d'arrivée». Cette relation étant fixée, la connaissance de deux de ces éléments suffit à la détermination du troisième et les 3 cas formellement possibles correspondent aux trois types connus du comptage.

comptage direct: départ, nombre de pas ----- ► arrivée
ex. 3 plus 4: 3, 4 5 6 7, 7

comptage complémentaire: départ, arrivée -----► nombre de pas
ex.: de 3 aller à 7: 3, 4 5 6 7, 4

comptage à rebours: arrivée, nombre de pas -----► départ
ex.: de 3 aller à 7: 3, 4 5 6 7, 4

comptage à rebours: arrivée, nombre de pas -----► départ
ex.: 7 moins 3: 7, 6 5 4, 4

Remarques

1. Ainsi dans un comptage, deux vections sont couplées: l'ordre de la suite des opérations et l'ordre de la suite numérique.
2. Une propriété du comptage qui, en amont, tire son origine de ce qu'on appelle la vicariance des dénombrements (le résultat d'un dénombrement ne dépend pas de l'ordre dans lequel on a énuméré les objets) et qui, en aval donnera la commutativité de l'addition (le résultat d'une somme ne dépend pas de l'ordre dans lequel on prend les données) fait qu'on peut toujours intervertir le nombre de départ avec le nombre de pas. Ceci permet comme nous l'avons vu de raccourcir les comptages additifs (effectuer $6 + 2$ soit 6, 7 8 pour compter $2 + 6$). Ceci permet aussi de ramener les 3 cas présentés ci-dessus à deux cas dont les plus commodes sont: le comptage direct et le comptage complémententation. Le comptage à rebours est alors ramené à un comptage complémententation par inversion de l'ordre et échange entre nombre de pas et nombre de départ: 13 moins 7 devient: de 7 aller à 13. A la fin de la 2^e primaire bien des élèves pratiquent spontanément cet échange. Cependant lorsqu'on demande si c'est la même chose, beaucoup répondent « non » et d'autres pensent que c'est juste sur tel ou tel cas qu'ils ont pu constater par comptage, ce n'est pas une règle générale.
3. Vu sous cet angle, ce qui différencie ces 3 modalités de comptage, c'est l'orientation du sujet vers la retenue de tel ou tel nombre comme résultat final. Le lecteur se référera aux petites flèches dessinées sur les exemples ci-dessus). Formellement, il s'agit d'une simple interversion entre signal d'arrêt du comptage et nombre retenu. Alors que quand je compte 3 plus 4 je m'arrête lorsque j'ai fait 4 pas et retiens le dernier nombre prononcé, 7, quand je compte de 3 aller à 7 je m'arrête lorsque j'ai prononcé 7 et retiens le nombre de pas effectués. Ainsi donc les confusions que j'ai évoquées dans mes exemples ne paraissent ni fortuites ni anecdotiques mais portent sur le noyau même du comptage (ou plus généralement des relations entre les opérations numériques telles qu'elles se révèlent dans le comptage).

II. L'écriture en ligne dans les exercices de comptage

Jusqu'ici j'ai privilégié dans ma description deux systèmes symboliques particuliers qui sont deux compteurs naturels à savoir la comptine (suite ordonnée des noms de nombres) et les doigts de la main (qui sont aussi utilisés dans un certain ordre). J'ai aussi fait état d'un troisième système de marques (croix, ronds, coches). J'ai aussi montré que les comptages mettant en jeu deux séries numériques, les bornes et les pas, nécessitaient le recours à deux systèmes de compteurs au moins (2 systèmes symboliques).

Mais pour son usage, l'école emprunte aux mathématiques l'écriture conventionnelle en ligne:

$$a + b = c \text{ (ex. } 5 + 18 = 23)$$

Dans les mathématiques celle-ci sert à présenter l'addition et les relations qui s'y rattachent, puis est reprise par l'algèbre. Dans ce cas cette écriture ne préjuge en aucune façon des moyens d'effectuer les calculs exprimés. **A l'école primaire cependant, ces écritures interviennent comme code de calculs effectués par comptage.**

Ne pas percevoir cette distinction amène à confondre la signification mathématique des opérations numériques et la signification qu'elles prennent pour des élèves en train de s'approprier les nombres au travers des comptages et des premiers calculs.

Faisons un rapide survol des exercices des 4 premières années primaires. Les dénombrements mettant en jeu la correspondance terme à terme et la récitation de la comptine sont proposés dans l'avenue «ensembles et relations» en première primaire. L'avenue «opération» débute, elle, par la présentation systématique des premiers nombres, c'est à dire par leur présentation en tant que quantités mais aussi par la présentation de leurs décompositions en sommes de nombres inférieurs. Ainsi par exemple la fiche OP6 en 1^{re} année, présente toutes les décompositions du nombre 6. Dès le départ des écritures avec égal (final et égal initial) sont présentées sous forme lacunaire:

$$(a + b = c \text{ ou } c = a + b).$$

Par exemple la fiche OP4 en 1^{re} année présente le nombre 4 et ses décompositions sur des diagrammes ensemblistes s'accompagnant d'écritures lacunaires ... = ... + L'analyse des tâches proposées aux élèves montre que l'écriture en ligne est le code des comptages. Ces écritures apparaissent dès les premiers exercices de présentation des nombres et de leurs compositions et décompositions. Généralement ces exercices ont la forme suivante: le comptage est suggéré par la présence de supports figurant diversement les quantités: ensembles, dominos, graduations colorées etc. On peut les dénombrer en récitant la comptine. A de très rares exceptions près, ces exercices sont accompagnés d'écritures en lignes lacunaires permettant de fait un comptage direct, c'est-à-dire sans dénombrement préalable des éléments figurés. Dès le 6^e exercice de la deuxième année pourtant, les écritures avec égal initial ($c = a + b$) disparaissent. Ceci est sans doute dû à l'introduction de la soustraction et l'usage du signe -. Mais au cours de cette année apparaissent aussi d'autres écritures: en colonne, sous forme de machines numériques, qui vont petit à petit supplanter l'écriture des calculs en ligne. Celle-ci disparaît presque entièrement des manuels de 3^e primaire et de 4^e primaire. Elle n'est en fait reprise que ça et là pour illustrer des propriétés plus subtiles (par ex.: $134 - 17 = 136 - 19$ dans OP 26 et 27 en 3P; $5 \times 6 = 15 \times 2$ dans OP40 en 3P; ou encore 230 en base quatre s'écrit $2 \times (4 \times 4) + 3 \times 4 + 0 = 32 + 12 = 44$ dans la fiche NU 17 en 4P; ou encore la distributivité dans la fiche OP27 en 4P: $12 \times 5 = (10 \times 5) + (2 \times 5) = 50 + 10 = 60$).

Remarque à propos de la position du signe égal

A son origine, $a + b = \dots$ exprime une tâche d'addition, tandis que $c = \dots + \dots$ exprime une tâche de décomposition. Ceci correspond à exercer la table d'addition «dans les deux sens». L'usage actuel dérive de cet usage. Mais la justification des méthodologies est autre. Elle considère en effet que $3 + 4$ ou 7 sont deux écritures désignant le même nombre et que ce sont de ce fait deux écritures équivalentes. C'est ce qu'exprime l'égalité: $3 + 4 = 7$ ou $7 = 3 + 4$. Peu importe l'ordre puisque ces deux écritures sont mises sur le même plan. Cependant si on considère que $3 + 4 = 7$ exprime un comptage, le point de vue change. Car 7 exprime alors le résultat du comptage (ou du calcul) ($3 + 4$) et 7 sont alors plus que des écritures désignant un même nombre, ce sont les termes d'une opération! C'est ici que le point de vue théorique de la méthodologie se trouve en porte à faux avec l'usage scolaire.

III. L'interprétation de l'écriture en ligne et des écritures lacunaires

Les élèves recourent tout d'abord à l'écriture des nombres comme d'un compteur. Ils retranscrivent la comptine ou une séquence de celle-ci. On peut le remarquer à la lecture des fiches d'exercice de certains élèves en 1^{re} primaire. Certains adaptent même l'écriture en ligne à cet usage. Ainsi un élève avait écrit

$$4 + 4 = 5 + 6 = 7 + 8$$

tout en prenant soin de souligner son résultat, 8. Ce type d'écriture où l'élève représente tout le parcours qu'il effectue se retrouve dans d'autres situations. Ainsi, à la faveur d'un exercice de complémentation donné sous forme lacunaire, on trouvera pour $4 + \dots = 7$ la réponse $4 + 5 \ 6 = 7$. Mais on trouve aussi $7 = \dots + \dots$ complété en $7 = 8 + 9$ etc.

Il est bien entendu que l'élève attribue à l'écriture en ligne une signification qui se réfère à la tâche qui lui est associée, c'est-à-dire dans notre cas aux comptages. Si certains élèves confondent l'écriture donnée à celle de leur propre comptage (ce qui est correct dans le cas d'additions directes $a + b = \dots$ ou $\dots = a + b$) **la plupart interprètent cependant cette écriture comme le code d'un parcours additif de la suite des nombres tels que je l'ai décrit au paragraphe I.** Ainsi par exemple, en répondant à l'item $\dots + 3 = 9$, l'élève bien qu'il inscrive sa réponse, c'est-à-dire le résultat de son comptage, ne reconstitue pas l'écriture de ce dernier, mais celle d'une addition dont l'un des facteurs manquait. Dans $\dots + 3 = 9$, 6 est le résultat de l'élève mais 9 est le résultat du comptage représenté par l'écriture en ligne. Il est difficile de savoir si ceci n'est qu'une adaptation scolaire ou si, plus profondément, cela rencontre les représentations spontanées du sujet. Plus d'un observateur a été surpris de constater que beaucoup d'élèves, en situation de résolution de problèmes, représentaient leur réponse sous forme d'une écriture additive même si, dans leur résolution, ils avaient ef-

fectué une soustraction ou une complémentation. Mais nous-mêmes sommes dans le même cas puisque, ne disposant pas d'écriture pour représenter l'opération de complémentation (dans une écriture qui restituerait la succession donnée → résultat), nous l'évoquons au travers de l'écriture lacunaire d'une addition:

$$a + \dots = c \text{ ou } \dots + b = c.$$

L'écriture lacunaire est donc le fragment d'un code représentant un comptage. La tâche de l'élève ne se limite pas à trouver l'élément manquant. Car pour ce faire il faudra au préalable qu'il interprète l'écriture, c'est-à-dire qu'il détermine les données ou ce qui est encore plus précis qu'il détermine le rôle que joue chacune d'elles: départ, nombre de pas, arrivée. Pour ce faire l'élève se basera sur l'organisation des symboles représentés, essentiellement sur leurs places relatives, mais aussi, en un second temps semble-t-il, sur l'ordre de grandeur des données numériques. Il ne suffirait pas à l'élève de se restreindre à la seule considération des données numériques puisque avec 2 nombres on peut effectuer plusieurs comptages différents.

Ainsi l'écriture en ligne est **interprétée**. C'est-à-dire que les symboles écrits sont mis en correspondance avec un comptage et les supports symboliques qui s'y rattachent. Par exemple tel élève à la lecture de la donnée $3 + \dots = 8$ va représenter 3 ou 8 ou les deux avec ses doigts et entamer un comptage. D'autres vont récolter 3 jetons, auxquels ils rajoutent 8 jetons. Etc. Cette médiation par une procédure de comptage, c'est-à-dire par une séquence précise d'actions portant sur des supports donnés, fournit à l'élève un solide point de repère. Ceci n'est pas le cas pour d'autres exercices. Par exemple ceux qui consistent à compléter l'écriture fragmentaire d'une relation numérique: $a \dots b$ à compléter par l'écriture d'un des 3 signes $>$, $=$, $<$. Ex. $2 \dots 8$, tous les élèves savent dire lequel des deux nombres est le plus petit, le plus grand. Mais plusieurs élèves se trompent et confondent les signes $>$ et $<$. Ceci est dû au fait qu'ils traduisent mot à mot leur propre comparaison avec la comparaison à restituer. Par exemple certains élèves, en lisant $2 \dots 8$, compareront 2 à 8 et diront «*2 est plus petit que 8*» ce qui sera traduit mot à mot par $2 < 8$. Mais malheureusement d'autres compareront 8 à 2 et diront: «*8 est plus grand que 2*» ce qui, traduit mot à mot **sur la forme de la donnée**, aboutit à $2 > 8$. Comme pour le calcul lacunaire, la difficulté est de dissocier entre la comparaison qui est écrite et celle que l'élève fait. Mais une comparaison est une action purement mentale, automatique. L'élève ne dispose pas ici de suffisamment de points de repères pour être totalement sûr.

IV. Les principaux résultats d'une recherche sur les écritures lacunaires en fin de première primaire

J'ai fait une recherche sur le calcul lacunaire auprès d'une centaine d'élèves de première primaire des cantons de Vaud et de Genève. La passation s'est faite en mai.

Le premier résultat de cette recherche est que les erreurs des élèves provenaient de l'interprétation des données et non pas de l'effectuation des comptes.

Secondement, les élèves qui étaient capables d'envisager une complémentation (qui ne se contentaient pas d'additionner les données) étaient capables de déterminer si celle-ci était possible ($3 + \dots = 8$) ou impossible ($9 + \dots = 4$).

La recherche a montré en outre que les élèves se basent sur la configuration générale des données lacunaires plus que sur tel ou tel indice partiel, et que d'autre part le signe égal n'était pas tant interprété comme le signe d'une comparaison (équivalence) que comme le signe précédant le résultat « *a plus b ça fait ...* (suit la réponse) « ou » *pour faire c et j'ai a, il faut ...* (suit la réponse) ». Ce qui traduit bien un parcours additif de la suite des nombres.

Plusieurs élèves développent leurs propres règles d'interprétation sans que celles-ci aient été même mentionnées par l'enseignant ou les parents. La plus prégnante de ces règles est celle d'un ordre séquentiel gauche/droite, qui voudrait que le résultat, donc le plus grand nombre car il s'agit d'additions, soit écrit en position finale tout à droite. De là de fréquentes confusions qui consistent à interpréter l'item $7 = 2 + \dots$ comme additif et de répondre 9. Quelques élèves se basent sur cette règle pour interpréter de façon cohérente tous les items, et ceci a été vu aussi pour des élèves comptant correctement que pour d'autres qui donnaient des réponses plus élémentaires (par ex.: $7 = \underline{9} + \underline{9}$. et $4 + \underline{5} = 6$).

De plus, de nombreux élèves qui répondent correctement procèdent en fait à une lecture inversée des items à égal initial: $11 = 5 + 6$ est lu de droite à gauche ce qui restitue à la lecture la séquence donnée \rightarrow résultat: $6 + 5 = 11$. Ceci a posé quelques problèmes pour la soustraction puisque $8 = 13 - 5$ ne peut pas se lire $5 - 13 = 8$. Je pense que c'est ceci qui a provoqué l'abandon d'écritures à signe égal initial dès la 2^e primaire.

V. Objets d'enseignement

Les écritures lacunaires ne sont pas seulement présentes dans les exercices scolaires ou les activités proposées aux élèves. Elles servent en outre à désigner des modalités de comptage, des opérations, voire des compétences que les élèves devront acquérir dans tous les textes relatifs au plan d'études, aux programmes ou à la méthodologie d'enseignement. Ainsi, au travers de tous ces usages, l'écriture des égalités additives vient à acquérir une signification scolaire particulière. Cette signification dérivée a même pour les élèves, plus de réalité que la signification mathématique d'origine. Une écriture de type lacunaire provoque immédiatement un calcul de la part des élèves, tandis que beaucoup restent passifs devant la présentation d'une écriture complète même fautive. Ils n'ont pas d'eux-mêmes l'idée de vérifier l'exactitude de l'égalité quand bien même nous sommes certains que celle-ci ne leur saute pas aux yeux (contrairement à nous qui avons mémorisé les sommes élémentaires).

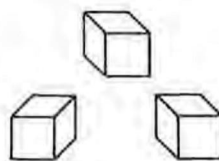
Le fait que la forme lacunaire ne se limite pas à être un exercice, une situation problème dans laquelle on place l'élève, mais qu'elle en vient à représenter les objets mêmes de l'enseignement est caractéristique de l'enseignement des mathématiques, et fait partie de la transposition didactique du savoir mathématique. On utilise aussi dans l'enseignement des langues des exercices lacunaires, mais ces formes restent des exercices d'application et n'accèdent pas au rang des notions à enseigner. C'est le cas en mathématiques, et ceci se passait déjà dans les programmes traditionnels avec les problèmes d'arithmétique.

Bibliographie

- CONNÉ François: **La Transposition didactique à travers l'enseignement des mathématiques en première et deuxième année de l'école primaire.** Thèse de doctorat F.P.S.E., Université de Genève.
Une épreuve de calcul en première primaire. INTERACTIONS DIDACTIQUES, 1984, No.6. F.P.S.E. Université de Genève.
Comptages et écritures d'égalités lacunaires. A paraître.
FAYOL Michel: Nombre, numération, dénombrement: que sait-on de leur acquisition? **Revue française de Pédagogie.** 1985, No.70 pp.59-77.
VERGNAUD Gérard: Concepts et schémas dans une théorie opératoire de la présentation. **Psychologie française**, 1985, No.30-3/4, pp. 245-252.

Jeu des cinq cubes ou le pentacube gagnant

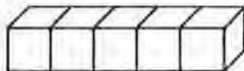
rapporté par Marcelle Georg



Voici:

un JEU bref, simple, à deux joueurs.

Position de départ:



Règle:

Chaque joueur, à tour de rôle, **déplace un seul cube** et le **pose** obligatoirement à un **étage supérieur** de celui où il se trouvait précédemment.