



HAL
open science

Calculs numériques.

François Conne

► **To cite this version:**

François Conne. Calculs numériques.: Des dénombrements à la division euclidienne - Activités numériques élémentaires à l'école primaire - ÉPISODE 4. Math-Ecole, 1988, 135, pp.23-36. halshs-01048720

HAL Id: halshs-01048720

<https://shs.hal.science/halshs-01048720>

Submitted on 11 Feb 2015

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Calculs numériques

par François Conne

Quatrième épisode du feuilleton consacré
aux activités numériques élémentaires
(Math Ecole N° 128, 130 et 132)

I. Première série d'exemples

Ce texte sera avant tout consacré à des exemples de calculs numériques additifs.

Sans revenir sur les définitions de [2], je rappellerai ceci:

Les calculs numériques consistent en général en un enchaînement ou un emboîtement de transformations diverses, allant de simple réécriture des données (pose du calcul) à des calculs élémentaires auxiliaires apprêtant les données en vue de les simplifier.

Une des fonctions des supports symboliques est de permettre la pose des données, c'est-à-dire de permettre l'organisation préalable des calculs. Ce qui caractérise le traitement mathématique est un jeu d'analyse et de recombinaisons des relations en jeu. Ceci s'applique bien aux calculs, que ce soit à des exemples très élémentaires comme ceux qui suivent ou que ce soit pour des calculs très élaborés.

Voici quelques exemples très élémentaires de ceci:

Exemple 1: $6 + 238 = 238 + 6 = 244$

On peut considérer cet exemple soit comme calcul écrit, soit comme calcul mental. Ici l'apprêt des données consiste en une permutation des nombres. Voici ce qu'on pourrait en dire:

- a. Cette permutation est licite puisque l'addition est commutative. Un tel commentaire n'explique pas grand chose, et il ne dit pas pourquoi le calculateur a inversé les données, est-ce qu'il trouve plus commode de procéder ainsi? et si oui, sur quelle connaissance se base-t-il pour penser ainsi?
- b. Supposons que le calculateur procède par «comptage en avant» (counting on), c'est-à-dire amorce son comptage au nombre succédant à la première donnée. Dans ce cas il est préférable de compter 6 au-delà de 238 que de compter 238 au-delà de 6. Mais ceci ne garantit pas, en soi que les deux comptages fournissent le même résultat.
- c. On peut supposer alors que, dans cette affaire, la numération verbale (par opposition à la numération chiffrée) intervient. Tout d'abord découpages correspondants des deux données en: centaines, dizaines, unités, puis opération sur les unités de même valeur. Ici, cela veut dire que 6 agit sur le 8 de 238 et pas ailleurs. Dès lors, le déplacement du 6, «exprimerait» qu'il porte sur le 8 et non pas sur le 2 (2 cents).

- d. On peut aller encore plus avant dans l'analyse, et considérer que le calculateur est engagé à produire un nombre, et que c'est cette production qui l'amène à examiner les unités dans l'ordre voulu par la numération: centaines, puis dizaines puis unités. Il calculera par exemple mentalement: $6 + 238$, deux cents... deux cent trente... deux cent quarante.. quatre; **deux cent quarante-quatre**.

Note: Ces points de vue sont différents et pourtant, ils peuvent être complémentaires. Ceci indique la complexité de l'analyse, même pour des calculs simples. L'observation des actions du calculateur n'est pas toujours facile, et requiert soin et attention. En général, dans un entretien avec un élève, on se centre alternativement sur tel ou tel aspect.

Exemple 2: Prenons maintenant deux exemples de calcul mental. On notera le va-et-venir entre dizaines et unités, la décomposition des noms de nombres (qui sont des noms composés) et leur recombinaison.

2a. $75 + 18$

septante-cinq plus dix-huit, septante... huitante cinq plus huit... treize, nonante trois: **nonante-trois**.

La dissociation des noms de nombres se fait à la fois pour des raisons d'organisations des données, et pour des raisons de mémorisation. Le calcul est alors terminé lorsque 1° toutes les données ont été considérées 2° on aboutit à un nom de nombre (composé).

2b. $75 + 18$

septante-cinq plus vingt nonante cinq moins deux, trois; **nonante-trois**. Il y a substitution dans la chaîne de calculs de deux transformations auxiliaires enchaînées $+20$ et -2 . L'ordre peut être aussi bien -2 et $+20$. La simplification vient du fait que l'on n'opère que sur un type d'unité à la fois, et qu'on évite la retenue.

On remarquera aussi sur cet exemple, la nature syncopée des expressions. Ceci fait penser à un enchaînement d'égalités, ce qui s'écrirait:
 $75 + 18 = 75 + 20 = 95 - 2 = 93$. [Fausses et dangereuses «égalités», NDRL]

Note par rapport au calcul mental: L'esprit des calculateurs, enfants ou adultes, est agile. Ceci rend particulièrement difficile la description complète et fidèle des procédures. Entre autres, il y a jeu sur différents registres: verbal/chiffre: sonore/imagé; sur les unités composées/décomposées, etc. Dans ce cas, ce qu'il importe le plus de noter, c'est la pose du calcul, c'est-à-dire l'organisation symbolique des données au départ, ainsi que **ce que le calculateur cherche à produire**. Ainsi, l'esprit est différemment orienté lorsqu'il s'agit de produire une série de chiffres (qui ensemble formeront le résultat) ou un nombre déjà formé verbalement. Dans ce dernier cas, on sera d'emblée tenu à procéder «de gauche à droite».

Exemple 3: Comparons deux façons de calculer $278 - 49$.

3a. $278 - 49 = 279 - 50 = 200 + (79 - 50) = 229$
 3b. $278 - 49$

200
 $200 + 30 = 230$
 $230 - 1 = 229$

$70 - 40 = 30$
 $9 - 8 = 1$

Selon l'algorithme décrit en [2]. Cet algorithme est basé sur la propriété algébrique suivante: $a + (b - c) = a - (c - b)$. D'autre part les données d'une soustraction font que, si on procède de «gauche à droite» on aura: $a > (b - c)$. (Le nombre duquel on soustrait est plus grand que le nombre que l'on soustrait et l'ordre «gauche droite» va des unités d'ordre supérieur aux unités inférieures); dans cet exemple a prend les valeurs: 200, 230 tandis que $(b - c)$ respectivement: $(70 - 40)$ et $(8 - 9)$.

Comparaison des deux calculs: Nous avons affaire dans les deux cas à des calculs numériques. Chaque étape intermédiaire est marquée par une écriture. Dans le cas a) on joue 1^o sur une compensation: l'augmentation de 49 en 50 compense celle de 278 en 279. 2^o sur la décomposition de 279, comme nous avons déjà vu.

Dans le cas b) il y a décomposition et mise en correspondance des unités de même ordre dans les données. Soustractions dans la colonne de droite. Soustraction ou addition dans la colonne de gauche selon la comparaison des chiffres des données.

Distinction entre ces deux types de calculs: Pour bien caractériser la distinction entre ces types de calculs, il convient d'examiner le type de simplification opérée dans les deux cas. Dans le cas a), la décision d'augmenter les facteurs d'une unité provient de la circonstance suivante: c'est le seul moyen de rendre le chiffre des unités du second facteur, inférieur à celui des unités du premier facteur. De plus, ceci se conjugue avec une annulation des unités $(49 - 50)$. Dans le cas b), la seule simplification provient du découpage du calcul en sous-opérations élémentaires. Cependant, on a introduit d'autres opérations auxiliaires qui ne simplifient pas le tout, l'enchaînement pris dans sa totalité (seules les opérations prises une à une sont plus élémentaires).

La transformation du calcul 3a (augmenter les facteur de 1) n'a de sens que dans le cas choisi, selon les données. C'est une opérations ad hoc. Alors que la chaîne algorithmique de l'exemple 3b est univoquement déterminée et est applicable quelle que soit la «configuration des données». Ce calcul joue sur la disposition des données à la fois de «gauche à droite» que de «haut en bas». Ainsi dans ce calcul, la position des chiffres est systématiquement exploitée dans le guidage des opérations. De sorte que dans ce cas le calculateur peut travailler de proche en proche, sans se soucier d'anticiper le résultat de ses calculs, ou plutôt de choisir la transformation idoine.

Du point de vue des symboles numériques et de leur disposition, on peut caractériser cette différence de la manière suivante. Dans le cas 3a, les symboles sont pris «au sens plein» (synchrétiquement): les relations qui entretiennent les nombres (278 et 279) d'une part et (49 et 50) d'autre part font que l'on aboutit au même résultat en soustrayant 50 de 279 qu'en soustrayant 49 de 279. Dans le cas 3b, il y a distribution des informations données sur différents plans fonctionnels. La formalisation du calcul joue des redondances pour cela. Dans ce sens, le calcul algorithmique traite autant les règles de la numération que le nombre.

Prolongement de l'exemple 3: Le lecteur comparera les calculs suivants:

$$\begin{array}{r} 8371 \\ - 3754 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \overset{1}{8} \overset{1}{3} \overset{1}{7} \overset{1}{1} \\ - \overset{1}{3} \overset{1}{7} \overset{1}{5} \overset{1}{4} \\ \hline \overset{1}{4} \overset{1}{6} \overset{1}{1} \overset{1}{7} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \overset{7}{8} \overset{1}{3} \overset{6}{7} \overset{1}{1} \\ - \overset{1}{3} \overset{1}{7} \overset{1}{5} \overset{1}{4} \\ \hline \overset{1}{4} \overset{1}{6} \overset{1}{1} \overset{1}{7} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{c) } 8000 - 3000 = 5000 \\ \quad 700 - 300 = 400 \\ \quad 5000 - 400 = 4600 \\ \quad 70 - 50 = 20 \\ \quad 4600 + 20 = 4620 \\ \quad 4 - 1 = 3 \\ \quad 4620 - 3 = 4617 \end{array}$$

$$\text{d) } 8371 - 3754 = 8377 - 3760 = 8317 - 3700 = 8617 - 4000 = 4617$$

Exemple 4: Le rendu de la monnaie peut-il être considéré comme un calcul numérique?

4a. Rendre la monnaie de 500 Fr. sur 114 Fr.

$$114 \xrightarrow{1 \text{ Fr.}} 115 \xrightarrow{5 \text{ Fr.}} 120 \xrightarrow{10 \text{ Fr.}} 130 \xrightarrow{20 \text{ Fr.}} 150 \xrightarrow{50 \text{ Fr.}} 200 \xrightarrow{3 \times 100 \text{ Fr.}} 500 \text{ Fr.}$$

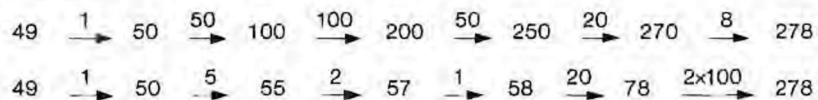
Il s'agit bien d'un calcul portant sur des symboles numériques, ici la monnaie et son organisation numéralogique (sous-unités par rapport à la numération de base 10). Cette méthode est formalisable et **univoque** (à quelques permutations près). Mais cette méthode ne restitue pas un nombre! Celui-ci reste à déterminer par un calcul annexe (qu'on peut mener en parallèle).

Mais il en est de même avec l'algorithme usuel: l'effectuation de $\begin{array}{r} 500 \\ - 114 \\ \hline \end{array}$ produit des chiffres et leur inscription dans le résultat dans un ordre donné. **Une opération de lecture du résultat** final est nécessaire pour que soit déterminé le nombre trouvé. Dit autrement: l'algorithme produit l'écriture d'un nombre.

Cette lecture finale peut être considérée comme automatique, immédiate, elle n'est pas moins nécessaire à la restitution du sens des symboles déterminés. Elle n'est que l'inverse de l'opération préalable au calcul qui a consisté en sa pose.

Dans ce sens on considérera 3 moments du calcul: pose - effectuation - lecture. Ceci s'applique à tout calcul assisté que ce soit par quelqu'ustensile de calcul (abaque, machine, règle, etc.) ou par un tableau de chiffres (un diagramme).

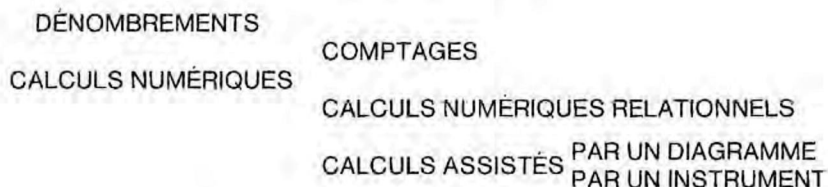
- 4b. Le calcul de complémentation que constitue le rendu de la monnaie s'adapte à une situation très précise. Il convient en effet aux situations pratiques où on ne dispose pas de monnaie, ou pas assez de monnaie. Ceci s'exprime par la clause (implicite) qu'on ne complémente qu'à des «chiffres ronds». Pour effectuer $278 - 49$ par exemple, le **cheminement n'est plus univoque**:



Ainsi ces exemples nous montrent que les calculs numériques se subdivisent en deux catégories nouvelles:

- Les calculs algorithmiques supposent l'inscription des données et des marques d'enchaînement dans un diagramme (ou tableau). Je qualifierai ces calculs par l'expression: CALCULS ASSISTÉS PAR UN DIAGRAMME (le mot «diagramme» est emprunté à MARTIN GARDNER dans son livre: *L'étonnante histoire des machines logiques* [4]).
- Les calculs numériques relationnels sont d'un autre type. je vais définir cette expression dans le paragraphe suivant.

Nous avons donc la classification suivante:



II. Calculs numériques relationnels

Il faudra que j'explique cette nouvelle expression. Disons pour commencer qu'elle désigne tout traitement numérique non prédéterminé par une méthode algorithmique.

Ce terme de «relationnel» est emprunté à G. Vergnaud dans ce qu'il appelle le calcul relationnel [5]. Et je l'utilise ici à bon escient pour indiquer que le numérique tout comme toute réalité mathématique se prête à de tels calculs. Le but de cette partie est de spécifier la distinction que je veux faire. Nous nous rapprochons alors de la notion de faits numériques proposés dans l'épisode précédent de mon feuilleton [3].

Le cadre de cette étude est de déterminer quelles connaissances sont en jeu dans l'apprentissage des opérations numériques élémentaires.

Les propriétés structurelles mathématiques dont nous nous occupons maintenant sont relativement peu nombreuses. Tous mes exemples sont des exemples d'addition et de soustraction. Mais même si on élargissait le propos aux questions des multiples et des décompositions en diviseurs (ce qui serait possible sans autres, ... peut-être que j'y consacrerai un épisode ultérieurement) ces propriétés resteraient très restreintes.

Par contre le matériau numérique est très riche. Ceci par le jeu des niveaux de symbolisation et de ce qui les lie, par le jeu de la diversité des symbolisations aussi, et de leurs «isomorphismes». On a vu aussi, avec la notion de fait numérique, que des relations propres aux figures symboliques s'amalgamaient ainsi aux propriétés purement numériques. La notation algébrique étant à ce propos un bon analyseur (ou dissolvant). Ainsi, par exemple, quelque part derrière la numération verbale ou chiffrée se «tapit» la notion de coefficient (ou bien encore, voyez comme il est difficile de séparer la notion de décomposabilité en facteurs premiers de ce que ça donne dans notre numération chiffrée).

Un calcul numérique relationnel tire parti systématiquement des relations produites sur le support symbolique. Par exemple la perception de répétition de certains chiffres ou certaines configurations. Mais ceci à des niveaux très divers, entrant plus ou moins profondément dans les symboles en présence.

Voyons quelques exemples, toujours à propos de l'addition.

Exemple 5. Dans le second épisode [2] nous avons examiné les tâches du type $a + b = c + \dots$ et un «algorithme» spontanément proposé par les maîtres: calculer $a + b$ puis compléter c au résultat. algébriquement ceci pourrait se noter $a + b = c + x \Rightarrow x = (a + b) - c$, les parenthèses étant là pour signifier l'ordre dans lequel prendre les opérations (les parenthèses sont donc une marque symbolique organisant la séquence des calculs). Mais ce type de traitement s'il est toujours assuré d'aboutir n'est pourtant pas le seul possible, et il n'est pas non plus toujours indiqué. Par exemple dans le cas où nous aurions:

$$49 + 14 = 48 + \dots$$

Dans ce cas la réponse peut être déterminée «par simple coup d'œil». C'est 15! Le lecteur aura ainsi saisi que l'on joue sur une relation entre 48 et 49, ainsi que sur la constante de la somme indiquée par l'égalité. Cette relation est comme une circonstance secondaire favorable.

La traduction algébrique de cette tâche est, nous l'avons dit:

$$\begin{aligned} a + b &= c + x \\ x &= (a + b) - c \end{aligned}$$

Mais cette égalité peut s'écrire autrement:

$$x = a + (b - c) \quad ; \quad x = a - (c - b) \quad ; \quad x = b + (a - c) \quad ; \quad x = b - (c - a) \dots$$

C'est sur la troisième «organisation» ($x = b + a - c$) que la relation perçue (49 est 1 de plus que 48) nous aura orienté. Ainsi donc, le fait numérique «9 est le successeur de 8» aura permis de déterminer directement la réponse en prenant le successeur de 14. On prend appui sur l'invariance de la somme pour compenser les écarts entre données. Bien entendu, ceci est exploitable particulièrement dans la représentation chiffrée. Si on avait traité le même problème avec des jetons, tout un travail préalable de disposition (organisation figurative) aurait été nécessaire pour pouvoir repérer puis exploiter cette relation.

Remarques:

1. Une telle relation qui lie les facteurs d'un calcul n'est qu'annexe, et bien entendu ne répond à aucune nécessité. Nous avons un cas particulier.
2. Toute une classe de calculs numériques arrivent à tirer parti d'une relation d'écarts entre les nombres. D'ailleurs du point de vue formel on pourrait tout aussi bien traiter toutes les tâches de la forme $a + b = c + \dots$ en traitant les écarts entre a et c , par exemple. Mais dans ce cas la détermination de l'écart entre a et c ne serait qu'une soustraction comme une autre.
Donc, ce qui est déterminant ici, c'est de cerner **les conditions particulières où l'écart entre les données** (ou tout autre type de relation annexe) **peut être exploitée**. Alors nous pouvons rattacher à ce type de calcul celui de l'exemple 3a qui, lui aussi, à sa façon jouait sur les écarts entre facteurs: $278 - 49 = > 279 - 50$.
Nous avons ici une autre exploitation des mêmes faits numériques.
3. Bien entendu, ma présentation suit un chemin descendant: du cas général au cas spécifié. La position de celui qui apprend ou qui résoud un véritable problème est inverse. Dans ce cas cela lui demanderait tout un travail difficile de parvenir à distinguer parmi les relations qu'il exploite lesquelles sont essentielles et lesquelles ne sont que circonstancielles.
Dans l'exemple ci-dessus, la notion «d'écart» est plus primitive pour l'enfant que celle «d'associativité-commutativité de l'addition».

Exemple 6. Dans les exemples 1 et 2 nous avons vu que le nombre était décomposé en constituants, voici d'autres cas de calculs de la sorte:

6a. $314 + 459 = 359 + \dots$

Ici, c'est la décomposabilité de l'écriture qui est en jeu. La relation peut ici à nouveau être «vue». La propriété en jeu est le fait que l'écriture d'un nombre est une addition: $(300 + 14) + (400 + 59) = (300 + 59) + \dots$. On peut interchanger les facteurs (associativité - commutativité).

6b. $343 + 434 = \dots$

Ici la répétition peut rendre plausible celle du résultat 777, et le rendre ainsi plus assuré. Par contre oralement trop de répétitions de chiffres peut rendre difficile la mémorisation des données, il y a confusion parce que le sujet n'arrive pas à distinguer suffisamment: «trois cent quarante-trois plus quatre cent trente-quatre». Il arrive souvent que lorsqu'on leur dicte une telle donnée les élèves nous demandent de la répéter plusieurs fois.

Ainsi les relations auxiliaires apportées par telle ou telle représentation symbolique peuvent aussi jouer un rôle de bruit. La distinction des chiffres aidant à décomposer le nombre.

Exemple: «mille cent onze» difficile pour certains enfants ou adultes à transcrire en 1111; et vice et versa 1111 à lire.

6c. On peut aussi jouer avec les chiffres des données d'un calcul:
 $12195 - 32995 + 35978 = \dots$

«en analogie à l'algèbre»: $1 \cancel{2} 1 \cancel{9} 5 - \cancel{3} \cancel{2} \cancel{9} 5 + \cancel{3} 5 \cancel{9} 7 8$

15178

Ce que je voulais surtout montrer dans ces exemples, c'est que les mises en relations auxiliaires qui orientent le calcul peuvent s'appliquer à divers niveaux symboliques. Dans l'exemple 5 ce sont les nombres qui sont représentés dans l'écriture qui sont mis en relation; ici ce sont, **au cœur de l'écriture des nombres**, les chiffres qui les composent eux-mêmes.

III. Méthodes de calcul: algorithmes et heuristiques

Heuristique: Les exemples précédents ont été construits de toutes pièces pour les besoins de mon étude. Le caractère que je voulais leur donner était le suivant: a) ne pas être par trop sophistiqués et abstraits, ni même se rapprocher de méthodes élaborées de calcul. Je ne me suis donc pas intéressé aux exemples de ce type que l'on trouve dans tout manuel de calcul arithmétique, de calcul mental, dans les ouvrages destinés à «épater ses amis» ni dans les ouvrages décrivant les trucs des «calculateurs prodiges». La même analyse aurait pu porter là-dessus ceci pourrait d'ailleurs faire l'objet de jolis travaux d'études. Mais il fallait rester le plus proche possible du niveau réellement traité par les élèves. Niveau auquel nous nous intéressons. Pourquoi alors ne pas prendre des exemples réels de calculs observés? Mais là, un nouvel écueil, à savoir, la difficulté de trouver des exemples clairs et simples. En effet, dans la réalité, du fait de la mobilité de l'esprit des élèves, on n'observe pas les choses de manière isolée.

L'idée qui distingue calculs numériques relationnels et calculs numériques assistés par un diagramme est précisément celle qui distingue procédé heuristique de procédé axiomatique. Et ce dans l'acception précise que G. Polya présente dans son ouvrage: *Mathematics and Plausible Reasoning* [6]. Un calcul «heuristique» est un procédé qui a un caractère plausible, il sert de guide à la découverte de la réponse, mais sans garantie a priori de succès. Il suppose des prises de décision de la part de l'élève.

A ce propos, il s'agit pour moi de développer quelques idées centrales pour mon étude.

Méthode: Un point très délicat dans mon étude est celui de délimiter précisément ce que je décris. C'est avant tout le versant objectif qui m'importe ici, et je le dégage pour que l'on puisse à son tour bien isoler la connaissance mathématique que développe un élève à l'apprentissage et à la pratique du calcul.

Originellement les mots algorithme et heuristique se réfèrent à des méthodes de traitement des données dans des résolutions de problèmes. Gardons donc cette définition restreinte, et ne cherchons pas à utiliser ces mots pour décrire les procédures et les productions des élèves eux-mêmes. De plus, **en tant que méthodes**, algorithmes et heuristique intéressent l'enseignement à plus d'un titre.

1° C'est un bon media pour l'échange pédagogique. A ce propos voyons ce que dit F. Gonseth à propos de la méthode: «la méthode qu'est-ce que c'est? c'est un ensemble de règles qui nous permettent plus ou moins, mais avec une certaine plausibilité, de parler aussi au nom des autres, et quasi au nom d'un autre quelconque». [7] On pourrait s'amuser à voir ici la méthode décrite avec des mots que l'on trouve pour l'heuristique. Mais là n'est qu'un détail. Ce qui est important dans cette phrase c'est que la méthode lie soi-même et les autres. La méthode est donc un cadre d'interprétation de ce que, dit-on, fait l'autre. Et par la réciprocité de cette relation elle permet le dialogue.

2° Les méthodes sont des instruments de la pensée. Les calculs en sont. On peut souhaiter que les élèves en apprennent le maniement pour savoir affronter telle ou telle situation à laquelle ils seront, peut-être, confrontés ultérieurement. Mais ici on rencontre un obstacle de taille, celui de la reconnaissance des problèmes eux-mêmes, reconnaissance sans laquelle le choix des méthodes n'est bien entendu pas possible et partant encore moins leur application. Or en général cette reconnaissance tient à une codification des problèmes et à une analyse des relations que cela leur confère. C'est ici que algorithmes et heuristiques diffèrent nettement. Nous allons y revenir. Mais auparavant on peut déjà déduire ceci:

Ce n'est pas seulement qu'elles sont applicables au traitement d'une réalité extra-numérique que les méthodes de calcul sont porteuses d'ob-

jectivité. Avec elles, une part de l'univers mathématique (tel que décrit en [3]) et sa connaissance sont engagées.

- 3° Ainsi donc, l'apprentissage du calcul (des méthodes) initie aux mathématiques et c'est cette raison avant toute autre que le projet pédagogique en organise l'enseignement. (Le choix est culturel et révisable bien entendu). Dès lors les méthodes de calcul revêtent un autre statut encore: celui d'être des instruments didactiques, dont le rôle est de faire apprendre les mathématiques. (Les réussites des élèves à appliquer ces méthodes ne reflètent que très faiblement l'accomplissement de cette tâche pédagogique).

Algorithmes et heuristiques exercent une très forte attirance sur les pédagogues. Hélas! hélas! les concevoir comme des objets d'enseignements pose d'énormes problèmes didactiques, au niveau du contrat didactique principalement. Avec comme effet général que trop souvent l'on initie les élèves de la même façon aux deux types de méthodes. Guy Brousseau a très bien analysé cette question dans un texte récent [8].

Pour ma part, je me garde justement de considérer algorithmes et heuristiques comme des objets d'enseignement. celui-ci ne porte que sur la connaissance mathématique et je garde aux méthodes le statut de médiateur d'échange, de moyen de traitement des données et de moyen pédagogique.

A ce propos voici dans quel sens je propose de considérer les choses, concernant les calculs arithmétiques élémentaires.

Les distinctions essentielles entre algorithmes et heuristiques.

Ce qui contraste le plus ces deux méthodes c'est la façon dont les connaissances y sont engagées!

- 1° Un algorithme est une procédure assurée d'avance (par un théorème) sur une classe de problèmes qu'il ne faut même pas connaître, mais qu'il s'agit seulement de pouvoir reconnaître à certains critères généraux. Les seuls problèmes qu'un calcul algorithmique pose sont:

- a) la connaissance des conditions d'applicabilité;
- b) le contrôle de l'effectuation, par les règles de l'algorithme;
- c) l'interprétation des résultats.

Par contre pour l'heuristique, il s'agit de tout autre chose. Le problème est de construire par le traitement la garantie d'aboutir. C'est donc la question de la pertinence des opérations engagées qui est posée. Or cette pertinence ne peut être assurée que par la mise en relation d'éléments de connaissance, c'est-à-dire par le concours, ou l'établissement de faits numériques.

Je dirai pour résumer que ces deux méthodes répondent à **des régimes de finalité** très distincts. Ceci a une conséquence très grande dans le contrôle des calculs effectués. En effet un calcul heuristique erroné n'aboutit, en général pas. **Ainsi opère-t-il le plus souvent son propre contrôle. Par contre l'algorithme est la plupart du temps producteur d'une réponse dont il faudra vérifier (juger, examiner) l'exactitude.**

- 2° J'ai évoqué dans l'épisode précédent [3] le rôle producteur des algorithmes, les heuristiques ont elles un rôle formateur des connaissances, car elles établissent un réseau de faits et de relations et y font circuler le sujet.
- 3° Par contre une heuristique, est en principe toujours seconde, d'un ordre de complexité plus grand qu'un algorithme. Et ceci pour une très simple raison logique: si une heuristique peut s'appuyer sur des sous-traitements algorithmiques éventuels, une procédure algorithmique est de bout en bout réglée!
Remarquons alors que pratiquement, dans l'échafaudage des traitements et des méthodes, il peut y avoir malgré tous ces éléments de contraste, continuité des unes aux autres de ces méthodes.
 - a) Concernant les algorithmes, deux circonstances:
 - Passé un certain degré de complexité (de surcharge des données) la question de la pertinence des actions engagées se pose à nouveau et amène à moduler l'algorithme. Par exemple dans le calcul de $(40'081'787'109'376')^2$ on a intérêt à utiliser une formule annexe, d'autres découpages que celui en chiffres.
 - Nous l'avons dit (et dit à la suite de beaucoup d'autres) il y a une certaine dissociation entre l'algorithme d'une part et la classe de problèmes qu'il traite. Ceci donne l'occasion d'un jeu, de généralisations, analogies, donc ceci est l'occasion d'être producteur de traitements heuristiques.
 - b) Concernant les traitements heuristiques, ceux-ci en viennent à être décantés, formalisés et aboutissent quelquefois à la détermination de nouveaux algorithmes

Note indispensable à propos de l'algèbre: Le calcul algébrique n'est pas fait d'algorithmes, on peut dire que l'enseignement de l'algèbre recourt «par segment» à des algorithmes, ainsi qu'à des méthodes en soi de type heuristique, mais de fait fortement normalisées, rigidifiées. Ce qui a pour conséquence de réduire la part «intelligente» du travail à la simple reconnaissance de bonnes formes (identités remarquables, etc. [9]). La standardisation des méthodes de calcul algébrique ainsi que l'efficacité que cela lui confère, le font apparaître –

culturellement – comme un super-algorithme, et ce surtout lorsqu'on le compare au raisonnement arithmétique (cf. Y. Chevallard [9]).

- 4° Nous en arrivons alors à un point central de mon exposé. C'est que le passage de procédés heuristiques organisés (en cas particuliers) à un algorithme s'accompagne d'un changement de niveau symbolique. L'algorithme traitant alors à un niveau supérieur. Par exemple, le tableau devient le cadre de tous les cas particuliers définis heuristiquement, et si une procédure formelle peut se mettre ainsi en place, c'est parce que le symbolisme et son organisation vient à se substituer à l'examen des données et des moyens à mettre en œuvre. Ceci aboutit à une nette décomplexification des traitements, mais bien entendu à une abstraction et une élaboration nettement supérieure.

Ainsi donc le passage à l'algorithme est un passage à un régime symbolique supérieur. Ceci s'accompagne de changements notables:

a) Les registres de mémoire dans lesquels le calculateur va puiser les faits sur lesquels il s'appuie sont distincts. Dans le cas d'un algorithme, la connaissance des tables suffit, dans le cas d'une procédure heuristique, le calculateur puise dans un répertoire de relations interconnectées structurées et ordonnées selon leur degré d'évidence.

b) Les régimes symboliques sont distincts, alors que les procédures heuristiques, **en ce qui concerne le calcul numérique**, traitent un seul niveau de symbolismes (mis en relation ou éventuellement en «traduction»). Les calculs assistés par un diagramme traitent: a) des diagrammes qui organisent le parcours du calcul b) des codes pour les données du calcul (les nombres) c) des marques localisent le calcul et en particulier indiquant les points de bifurcation. Par exemple la retenue provenant d'un calcul exécuté et dont il faudra tenir compte dans une étape ultérieure du calcul.

Plus d'un lecteur sera étonné de voir s'engager un débat entre heuristiques et algorithmes à propos d'exemples aussi trivaux que les calculs élémentaires. si j'en suis venu à ces mots c'est que je ne pouvais pas, s'agissant de décrire les activités numériques échapper aux distinctions qu'ils désignent. Mais il y a plus, il y a un effet retour qui nous informe sur ces catégories, mieux que les exemples plus complexes. Voici deux résultats importants.

- 1° Cela n'a pas de sens de parler dans l'absolu de méthodes heuristiques et algorithmiques. Il faut les situer selon les niveaux de traitement, et les choses traitées c'est-à-dire le niveau symbolique et les faits numériques exploités. Ceci seul permet les comparaisons fructueuses.

Ainsi par exemple, il faut, pour pouvoir caractériser les calculs heuristiques d'additions faits par de jeunes élèves, situer soi-

gneusement sur quoi portera le jeu heuristique. Ce n'est pas sur les propriétés structurelles et formalisées mais se situe **en deçà**, dans les relations qu'entretiennent les numérations écrites et orales et aussi tous les moyens de désignation des cardinaux ou des ordinaux. C'est afin d'être précis là-dessus que j'ai construit quelques exemples théoriques, et pour bien dénoter ceci que je m'en suis expliqué à la page 30 de ce texte.

Nous retrouvons donc ce souci exprimé dans l'épisode précédent de bien situer les choses et cette distinction entre trois niveaux successifs: le niveau manifeste, le niveau inférieur sur lequel on se repose et le niveau supérieur qui explique. Ainsi l'heuristique est-elle une exploitation manifeste de faits et relations numériques tandis que dans les méthodes algorithmiques cette exploitation est plus implicite, ce qui est manifeste étant le fonctionnement (déroulement) de l'algorithme lui-même.

Ceci est très net dès le moment où on étudie les activités élémentaires. A un niveau plus élevé cela devient bien moins visible car les niveaux sont beaucoup plus enchevêtrés, ils se télescopent, on y traite des données moins immédiates ou intuitives.

- 2° Le second résultat a trait à la description des activités des élèves. Je me suis gardé de faire de ces concepts algorithmes, heuristiques, des descriptions de l'activité de l'élève ni même de ses procédures.

On pourrait soutenir que toute procédure prise en charge en son entier déroulement est une heuristique, et que si le mot d'algorithme peut s'appliquer à quelque chose ce ne sera qu'à des sous-séquences relativement courtes de ces procédures. On parle quelquefois, à ce propos, de routines [10]. Rien de cela n'est clair à l'heure actuelle et en général, il faut être prudent. La question est délicate car elle porte sur le rôle des modèles descriptifs en psychologie et leur possible ou impossible exploitation didactique. Et ce qui en didactique fait obstacle, c'est qu'il faut tenir compte des connaissances des sujets, ce dont sont dispensés jusqu'ici les automates ou autres modèles des opérations mentales.

Références bibliographiques

- [1] CONNE François, *Comptage et écriture des égalités lacunaires dans les premières classes de l'enseignement primaire*. Math-Ecole n° 128, Genève 1987.
- [2] CONNE François, *Entre comptage et calcul*. Math-Ecole n° 130, Genève 1987.
- [3] CONNE François, *Numérisation de la suite des nombres et faits numériques*. Math-Ecole n° 132 et 133, Genève 1988.
- [4] GARDNER Martin, *L'étonnante histoire des machines logiques*. Dunod, Paris 1964.
- [5] VERGNAUD Gérard, *Calcul relationnel et représentation calculable*. Bulletin de Psychologie, 315, XXVIII, 7-8, Paris 1974-1975.
- [6] POLYA G., *Mathematics and Plausible Reasoning*, Chap. XVI vol II. Princeton University Press, Princeton 1968.
- [7] GONSETH Ferdinand, *Du côté de la subjectivité: l'horizon de figuration*, in Sciences, Morales et Foi, textes recueillis, ordonnés et présentés par Eric EMERY, Dialectica, L'Age d'Homme, Lausanne 1986.
- [8] BROUSSEAU Guy, *Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques*. Recherches en didactique des Mathématiques, n° 7.2, La Pensée Sauvage, Grenoble 1986.
- [9] CHEVALLARD Yves, *Le passage de l'arithmétique à l'algébrique dans l'enseignement des mathématiques au collège*. Petit x n° 5, Grenoble 1985 et 1988 (à paraître).
- [10] SAADA-ROBERT Madelon, *Le nombre, significations et pratiques*. Recherches en didactique des Mathématiques, n° 7.1, La Pensée Sauvage, Grenoble 1986.