



HAL
open science

Quelques pas esquissés dans l'univers des polyèdres.

François Conne

► **To cite this version:**

François Conne. Quelques pas esquissés dans l'univers des polyèdres. : Suivi de situations de dessin en 4ème primaire de l'enseignement spécialisé.. J. Giroux & D. Gauthier (dir.). Difficultés d'enseignement et d'apprentissage des mathématiques. Hommage à Gisèle Lemoyne., Montréal: Editions Bande Didactique, Chapitre 9, pp. 219-258, 2006, 978-2-922970-20-3. halshs-01053718v2

HAL Id: halshs-01053718

<https://shs.hal.science/halshs-01053718v2>

Submitted on 12 Feb 2015 (v2), last revised 18 Feb 2015 (v4)

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

**QUELQUES PAS ESQUISSES DANS L'UNIVERS DES POLYEDRES
SUIVI DE SITUATIONS DE DESSIN EN 4^{EME} PRIMAIRE DE L'ENSEIGNEMENT
SPECIALISE**

François Conne

Groupe de recherche de didactique des mathématiques
de l'enseignement spécialisé à Rolle
Université de Genève
Université de Lausanne

Résumé.

Cet article décrit un suivi de situations de dessin avec des élèves de l'enseignement spécialisé. Il montre l'impact d'un procédé de dessin du cube en perspective cavalière dans l'étude des polyèdres. L'introduction rapproche le signe peircien et ma définition du savoir comme connaissance utile. La seconde partie de l'article interprète la description comme la mise en relation d'indications contextuelles et d'icônes de ce qui s'est passé. La troisième partie analyse ces icônes en leurs constituants : images, diagrammes et métaphores, et les rapporte au processus observé. En conclusion je reviens sur le dessin d'esquisses dans l'étude de la géométrie.

Introduction

Dans un article récent, (Conne F., Favre J.-M. & Giroux J., 2006) j'ai indiqué mon intérêt pour l'étude du fonctionnement du savoir en situation. La recherche que je présente ici porte sur les troisième et quatrième fonctions citées ci-dessous :

Nous considérons le savoir comme une chose avant tout pragmatique. C'est ainsi qu'il faut comprendre la définition de Conne (Conne, 1992) : le savoir est une connaissance utile. Cette définition nous permet de caractériser trois fonctions du savoir mathématique dans le processus d'enseignement qui sont ordonnées selon le rapport qu'elles entretiennent avec l'activité cognitive des acteurs de la classe (...) :

- Repérer les savoirs enseignés en regard d'un programme [...];
- Contextualiser le savoir en une situation objective [...];
- Suivre les connaissances induites par la situation chez les élèves et les piloter dans l'interaction....

(Conne , Favre et Giroux, p.125-126)

En conclusion de notre article, nous ajoutons une quatrième fonction du savoir : «Ici se dessine une nouvelle fonction didactique du savoir assurant l'intégration des trois niveaux de contrôle de notre petite théorie : la reconnaissance des questions mathématiques¹ sur le fond desquelles se déroulent les interactions.» (op.cit.). Les considérations qui suivent s'inscrivent dans le cadre de la distinction entre savoir et connaissance et apportent des données empiriques à l'appui de cette thèse, plus particulièrement à une de ses affirmations majeures:

Le savoir est une connaissance qui contrôle une situation et ses transformations, elles mêmes inductrices de connaissances. Dans bien des cas savoir, c'est savoir se mettre en situation de mobiliser ses connaissances pour agir. Ce contrôle peut donc aller jusqu'à reproduire la situation elle-même. C'est seulement par l'intermédiaire des savoirs, et donc des situations, ou plutôt de leurs transformations, que l'on peut agir de manière à induire (mobiliser et transmettre) les connaissances. Les savoirs inducteurs et les connaissances induites ne sont pas forcément identiques, mais leur rapport tient à la capacité des connaissances à transformer les situations. **Il y a donc un lien étroit entre la façon dont les connaissances permettent de transformer les situations et la façon dont les connaissances se transmettent.** Si la connaissance n'est pas

¹ Pour beaucoup de nos collègues cette fonction est méprisée sous prétexte d'un préjugé négatif. Pourtant elle est essentielle et on ne saurait la confondre avec ce que la théorie des situations a nommé *effet Jourdain* (Brousseau, 1986).

toujours transmissible, le savoir est d'emblée enseignable, par le biais du système situationnel qu'il contrôle. (Conne, 1992, pp.240-241)

Je pense avoir trouvé dans la sémiotique de C. S Peirce le moyen de rendre la distinction opérationnelle. Pour vous faire comprendre mon idée, je vous propose une citation très célèbre de C. S. Peirce :

Il me semble que la fonction essentielle d'un signe est de rendre efficientes des relations inefficientes - non pas les mettre en action, mais établir une habitude ou une règle générale par lesquelles elles agiront quand il le faudra. Selon la théorie physique, il ne se passe jamais rien en dehors des vitesses rectilignes continues et des accélérations qui accompagnent les différentes positions relatives des particules. Toutes les autres relations dont un très grand nombre nous sont connues, sont inefficientes. La connaissance, d'une certaine façon, les rend efficientes; et un signe est quelque chose par la connaissance du quel nous connaissons quelque chose de plus. (C.P. 8.332²., Deladalle, 1978, p. 30.)

Dans son propos Peirce considère que si les seules relations matériellement efficientes sont celles décrites par la physique, c'est par le truchement de signes que la connaissance rend efficientes des relations qui ne le sont pas, c'est-à-dire les rapporte, par notre action habituelle et réglée, à quelques relations matérielles physiques efficientes. La suite de la citation montre que C. S. Peirce ne tombait pas entièrement dans un réductionnisme physicaliste : «À l'exception de la connaissance, dans le cas présent, du contenu de la conscience dans ce cas (connaissance dont l'existence peut être mise en doute) toute notre connaissance et notre pensée se font par signes.» (op. cit.).

Pour moi les progrès de la psychologie et des sciences cognitives ont mis en évidence d'autres relations efficientes que celles évoquées par Peirce. Je ne cherche pas à savoir si on peut ou non les réduire aux premières, mais je propose plutôt de reprendre ses considérations en élargissant le champ des relations efficientes aux relations efficientes cognitives, psychologiques, neurophysiologiques. Dès lors je ne puis me passer d'introduire la distinction entre savoir et connaissance. En quelque sorte, il faudra remplacer dans la citation de Peirce le mot désormais trop vague de *connaissance* par le mot *savoir* qui deviendra, de ce point de vue, synonyme de l'expression *connaissance utile*. Par le truchement des signes, les *connaissances utiles*

² C.P. : Textes répertoriés de Charles Sanders Peirce, sous l'appellation Collected Papers.

rendent efficaces des relations inefficaces, et on peut alors parler de savoir. Ainsi il devient possible de faire un signe de ce que nous apprend la psychologie ou plutôt un signe qui permet de rendre cognitivement efficaces des relations inefficaces, qui permet de se mettre en situation, etc. Bien entendu les *connaissances utiles* sont alors bien plus larges que les seuls *savoirs institués*. Selon une telle perspective, les deux citations ci-dessus, celle de Peirce et la mienne se font écho. Et au célèbre : «A sign is something knowing which you know something more » que Peirce lance à L. Welby (la traduction en est donnée dans la citation ci-dessus), je pourrais ajouter: *signs permit teaching*.

Peirce poursuit le propos qui précède en déclarant :

Un signe est donc un objet qui est en relation avec son objet d'une part et avec un interprétant d'autre part, de façon à mettre l'interprétant en relation avec cet objet, correspondant à sa propre relation avec cet objet. Je pourrais dire "semblable à sa propre relation", car une correspondance consiste en une similitude: mais peut-être la correspondance est-elle plus étroite.(*op. cit*).

Tel est bien le statut d'une description et partant de celle que je vous propose ici qui concerne la transformation d'une situation en classe sous l'effet d'un procédé de dessin de cube en perspective cavalière. Schématiquement dit et du point de vue sémiotique, une description d'une situation et de son évolution consiste en la mise en relation d'images de ce qui s'est passé, ou signes iconiques, et d'indices relatifs à ce qui les a occasionnées. Ici, les images sont évocation de la situation et présentation de quelques productions d'élèves, leurs dessins. Ces informations sont complétées par des indications concernant le contexte de ces productions: la situation, les tâches données, les circonstances de telle ou telle production, les décisions relatives au pilotage de la situation. La manière dont ces deux facettes sont articulées dans la description répond à des hypothèses de régularité qui à la fois expliquent ce qui s'est passé et suggèrent le caractère reproductible de l'expérience.

1. Un procédé de dessin de cube en perspective transparente : entre sémiotique, psychologie et mathématiques.

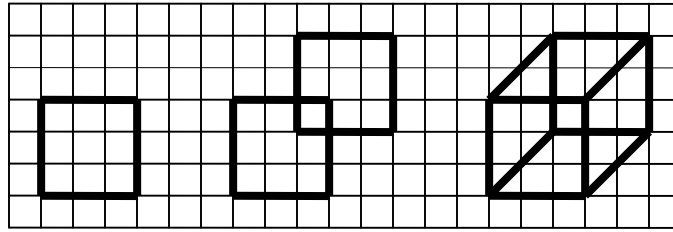


Figure 1

Procédé de dessin du cube en perspective transparente

La suite de situations que relate cet article a bifurqué à partir d'un événement inattendu que j'ai pris au vol alors que j'explorais avec les élèves les idées de volume et de dimension. Un élève a fait usage d'un savoir, possiblement acquis en famille, un procédé de dessin d'un cube en perspective cavalière consistant en la reproduction de deux carrés décalés puis le tracé des traits reliant les sommets correspondants. La figure 1 illustre le procédé tel que réalisé par l'élève sur papier quadrillé³. Le procédé de dessin, que certains élèves ont reconnu a été tout de suite adopté par l'ensemble de la classe. J'ai été étonné de l'impact de cet événement.

Le procédé permet de produire un dessin qui rend le volume et les proportions d'un cube⁴. Il produit donc un signe qui partage avec le cube, son objet, la propriété perceptive de volume, qui est ce que Peirce appelle une icône de cube. Le procédé consiste en règles de tracés, qui peuvent s'affranchir de la contrainte du quadrillage et des dimensions. Le rendu de la troisième dimension sur un support de dimension 2 est obtenu par le dédoublement d'un carré et le tracé de lignes de liaisons de biais en ligne de fuite. Ainsi sont associées symboliquement (au sens de Peirce) les figures de carré et de cube.

Si, sémiotiquement parlant, le dessin renvoie manifestement à des icônes, celles-ci une fois qu'elles sont tracées ne produisent pas toutes le même effet : certaines sont brouillées, voire illisibles, d'autres au contraire sont saisissantes, elles sautent aux

³ Cet élève avait besoin du quadrillage et de faire son dessin dans ces dimensions.

yeux. Quelque chose se passe au niveau perceptif et/ou cognitif. Une telle efficacité peut donner lieu à des développements ou des sémoses sensiblement différents. Par exemple, sachant dessiner des cubes on peut chercher à dessiner des figures comportant plusieurs cubes de telle sorte que non seulement le volume de chacun d'eux soit bien rendu, mais encore que cela soit fait sans distorsion et selon le même point de vue, bref on cherche à trouver une perspective commune. Une telle icône est un diagramme reliant des images des objets représentés à leurs positions respectives, donc à des relations spatiales. L'effet est au final de rendre l'espace, le dessin produit alors un signe spatial.

Les choses peuvent prendre une autre tournure lorsqu'on cherche à utiliser ce qu'on a appris/compris de ce procédé de dessin de cube pour dessiner d'autres polyèdres comme un prisme triangulaire, une pyramide ou un octaèdre. On cherchera à répliquer l'effet de volume. Pour cela, on aura identifié quelques règles de tracé qu'on supposera opérantes et qu'on cherchera à généraliser. Certes, dans un tel cas, on ne se contente plus d'obtenir des images séparées de ces polyèdres, mais la mise en relation opérée dans son action ne sera pas non plus spatiale. Les images des différents polyèdres et de leur dessin - par répliques et spécifications de règles générales de tracé - s'organisent en diagrammes de relations conceptuelles. On crée des dessins de polyèdres qui certes sont des objets de l'espace mais qui, par le truchement du signe, s'en détachent. Voyez par exemple la figure 5 ci-dessous.

En Suisse romande ce procédé n'est pas enseigné systématiquement, on n'en trouve pas mention dans les manuels des six premiers degrés de l'école. On ne lui attribue manifestement pas une grande valeur didactique. Au-delà du fait qu'il produit une icône, on ne sait pas vraiment de quelles connaissances du cube ou de l'espace il est porteur. Ce procédé semble faire souvent illusion tant sur le dessinateur lui-même que sur celui qui pourrait attribuer à son auteur des connaissances qu'il n'a pas. On ignore également ce que les élèves gagnent à l'apprendre. Il semble que, par son efficacité perceptive, ce procédé se ferme sur lui-même et on ne sait alors pas très bien comment le développer conceptuellement. Néanmoins, dans le cas de ces situations, tout banal et anecdotique qu'il puisse être, ce procédé a bien fonctionné

⁴ Notons que comme $\sqrt{2}$ vaut presque 1.5, les quadrilatères latéraux et supérieurs du dessin de la figure 1 sont quasiment des losanges.

comme un savoir distinctif : la plupart des élèves tout en l'ignorant y ont aussitôt reconnu quelque chose qu'ils pourraient facilement apprendre. C'était certes un effet, mais en retour cet effet enrichissait les significations qu'eux, l'enseignante et moi-même pouvions donner au cube. En ce qui me concerne, ces considérations me renvoyaient à des « informations » collatérales, tant du côté de la psychologie que des mathématiques.

Du côté de la psychologie, on trouve des éléments intéressants dans des recherches comme celles de J.-M. Dolle et alii (1974) ou celles de J. Caron Pague (1985). Pour ne prendre que deux aspects, non des moindres, ces recherches montrent :

- 1) l'enjeu qu'il y a dans l'évolution des dessins et des représentations du cube en particulier des traits qui figurent comme faces latérales du cube;
- 2) la différence qu'il y a entre dessins de cubes en opaque et en transparence (le procédé considéré ici produit un dessin en transparence, la planche de la figure 2 les présente en opaque).

Selon mon observation, il y a un rapport certain entre l'impact de l'apparition de ce procédé dans la situation expérimentée et les aspects relevés dans les études sur les dessins « spontanés » des enfants. Le procédé a permis aux élèves d'obtenir un effet qu'ils avaient peut-être recherché d'expérience. Ils l'ont non seulement facilement assimilé mais ils l'ont encore investi de sorte que, confrontés à de nouvelles tâches, ce procédé est devenu un moyen d'exploration de quelques polyèdres.

Le dessin, produit par le procédé, est en quelque sorte fermé sur le cube qu'il permet de représenter. Des procédés analogues permettent de dessiner des cônes, des cylindres (J. Caron Pague, 1992), toutes sortes de prismes, etc. Comme je l'ai mentionné, ce sera une toute autre affaire de représenter divers objets en perspective c'est-à-dire de représenter des vues dans lesquelles seront disposés les uns par rapport aux autres différents objets. Ainsi, pour ne prendre qu'un exemple, nous avons pu observer des élèves dessiner deux cubes accolés en choisissant une perspective orientée à gauche pour le cube de gauche et orientée à droite pour le cube de droite, de telle sorte qu'ils dessinaient bien les deux objets, mais comme chacun pour lui-même, quitte à introduire une distorsion de vue (les cubes dessinés n'étaient alors adjacents que par une arête). Ainsi, le procédé tel que nous le considérons ici n'est qu'un procédé qui donne du volume à une image et n'est pas

un procédé à même de rendre toute relation spatiale. F. Boule (2002) a bien compris le saut qu'il y a entre les deux et que je formulerai ainsi : le passage d'un signe de volume à un signe d'espace. Mais comme je l'ai mentionné plus haut, F. Boule discute du passage du volume à l'espace – ce qui suppose la donnée d'un point de vue. Cela n'est pas la seule sémiologie que nous pouvons envisager. Le procédé peut se développer en un signe de polyèdre. C'est ce qui a été entrepris dans la présente étude ainsi que dans des recherches ultérieures, dont l'une d'elles, entreprise dans le cadre d'un projet de J. Giroux (à paraître).

On trouve ce procédé au cœur d'un ouvrage de F. Lo Jacomo (2002) intitulé : *Visualiser la quatrième dimension* et dont le sous-titre est : *Des images perçues dans les miroirs ... à des objets mathématiques*. Ce livre repose sur une métaphore, celle du principe de dédoublement d'une figure de dimension n pour en trouver son correspondant en dimension $n+1$. Le schéma du procédé de dessin est repris ici comme un procédé d'imagination. C'est sur lui que repose toute la démonstration de l'auteur parce qu'il permet de visualiser la transformation toute conceptuelle qui consiste à passer d'un espace tridimensionnel à un espace quadridimensionnel et d'obtenir le dessin d'un objet de dimension 4 à partir de celui de ses constituants de dimension 3. Tout ceci se retrouve illustré par les diagrammes reproduits ci-dessous.

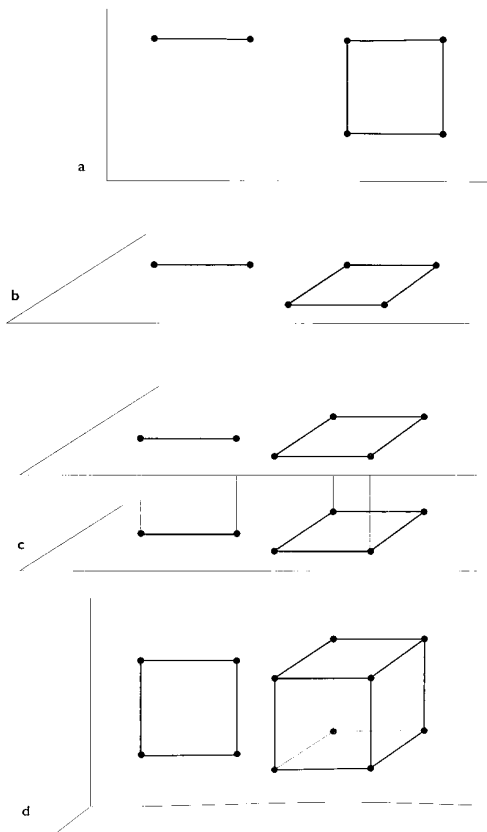


Figure 2 (Lo Jacomo, 2002)
Construisons un carré et un cube

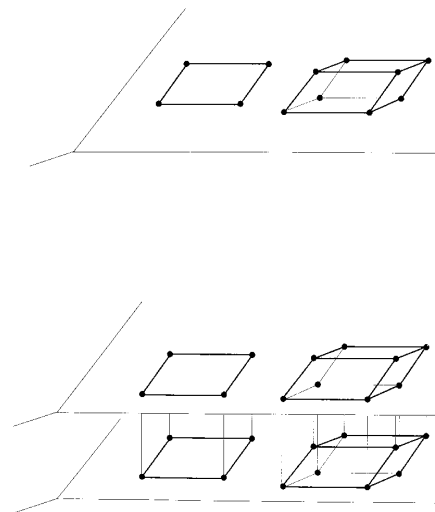


Figure 3 (Lo Jacomo, 2002)
... et basculons-les dans un hyperplan
horizontal, cela permet de construire un
cube et un hypercube

On notera une modification sémiotique très significative : les traits en biais du procédé de dessin du cube sont repris, selon les conventions en usage, pour signifier l'hyperplan (voir figures 2 et 3). Ainsi, cette sorte d'inversion fait que maintenant **la perspective spatiale préfigure le dessin de l'objet**. Quant aux traits de liaison ils sont désormais signifiés par des verticales, et en traits tirés, et connotent le passage à une dimension supérieure, comme par surplomb. Ces signes sont bien entendu symboliques au sens peircéen (H. Chaachoua 1997 étudie cette question). On ne vise plus du tout un effet perceptif, mais ce dernier est pris comme un signe d'une opération conceptuelle et les diagrammes que propose F. Lo Jacomo nous servent d'entrée dans le développement d'une métaphore.

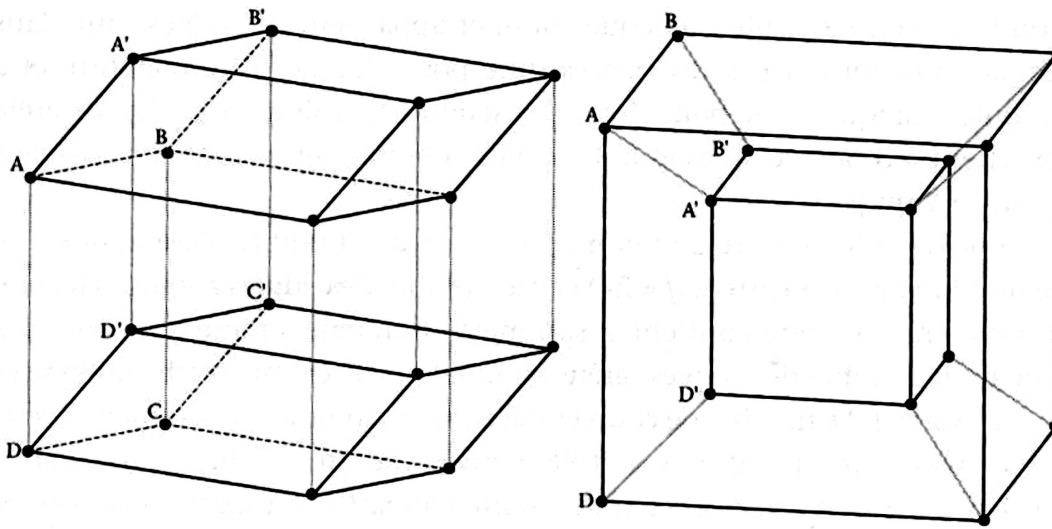


Figure 4 (F. Lo Jacomo, 2002)
Deux représentations de l'hypercube.

Le petit procédé que notre élève a produit intéresse à la fois les psychologues et les mathématiciens. Entre deux, son caractère vague et clos à la fois le dévalorise quelque peu aux yeux du didacticien. Il est en effet peu porteur pour tous ceux qui arrêtent leurs considérations aux seules images qu'il produit. Il l'est moins dès que l'on prend en compte que les images qu'il permet de produire donnent à penser. Ainsi par ses répliques il peut supporter une conceptualisation. En effet les images que ces répliques produisent seront constituantes de diagrammes dont certains permettent de figurer des relations entre polyèdres. Ce sont de telles relations que nous avons explorées dans les situations de cette étude. La thèse de cet article est que j'ai pu observer la constitution de tels diagrammes entre les polyèdres et leurs dessins et que, de ce point de vue, l'exploration faite avec les élèves présente une analogie certaine avec l'exploration de la quatrième dimension par le mathématicien telle qu'évoquée par F. Lo Jacomo:

Carré, cube, hypercube [...] c'est un jeu classique pour les mathématiciens de prolonger tout ce qui est prolongeable, de généraliser tout ce qui est généralisable : que voyons-nous dans un carré ? Deux côtés horizontaux reliés par deux côtés verticaux. Dans un cube ? Deux carrés horizontaux reliés par des arêtes verticales. Qu'est-ce qui nous

empêche de créer un hypercube, en tant que deux cubes « horizontaux » reliés par des arêtes « verticales » ?

Ce n'est pas l'objet hypercube que je vais essayer de faire apparaître prestidigitatoirement. C'est le concept, cette construction mentale que nous projetons sur ce que nous voyons pour pouvoir le manipuler mentalement. L'espace où nous nous déplaçons est de dimension 3, nous n'y verrons pas des hypercubes. Mais rien ne nous empêche de manipuler mentalement, donc de visualiser intellectuellement le concept d'hypercube. (Lo Jacomo, 2002, p. 29-31).

2. Principes de l'exploration menée en classe

J'ai adopté trois principes dans l'exploration de mes recherches en classe. Le premier principe est de viser des activités aussi simples que possible et de tenter de contrôler ainsi l'inévitable dérive vers la sophistication des tâches; le second principe est de viser la diversité des mises en relations entre signes divers, ce qui suppose la production de multiples répliques de mêmes signes; le troisième est de jouer sur l'effet des signes, ce qui entraîne trois choses : des surprises, la tentative de reproduire ces effets, des variations et modulations qui ne restent pas sur un type permanent de relation à l'objet d'étude (Conne 2006).

Je m'intéresse particulièrement à des procédés figuratifs, dessins, pliages, ... qui font de l'effet. Ils sont tout à la fois valorisés - ce sont de jolis « trucs » - et dévalorisés; ils se limitent à leur effet trop aisément reproductible. Comment ne pas tomber dans une telle ornière qui nous éloigne des mathématiques ? Telle est une des questions et défis didactiques auxquels je consacre mes recherches. Cette recherche s'est déroulée de fin avril à mi-juin 2004 et s'est produite dans une classe spécialisée de niveau 4^{ème} primaire, comportant 12 élèves sortis du cursus scolaire pour des raisons que l'on dira psychosociales essentiellement. Ces élèves me connaissaient pour les avoir visités régulièrement depuis 2 ans à raison d'une fois par semaine. Je collaborais de longue date avec leur enseignante. Je m'intéressais au thème de la géométrie de l'espace et me posais diverses questions relatives aux expériences que pouvait susciter pour eux la confrontation avec différents matériels : un jeu de plots solides en bois ; les polydrons - matériel de confection de polyèdres par assemblage de plaques polygonales (régulières) en plastique de différentes couleurs ; objets usuels tels ballon de basket, verres de limonades, cylindres en carton ; traçages de lignes sur ces surfaces soit avec règles et crayons, soit par collage de bande adhésive de carrossier ; pliages et bricolages en papier,

avec des tiges en bois, etc. Ma perspective, fortement inspirée de la sémiotique peircienne, considère chacune de ces expériences comme différentes modalités sémiotiques pour « produire du volume » physiquement ou perceptivement. C'est à la fin de cette exploration qu'est consacré ce chapitre. Les séances dont il sera question se situent à la suite d'un travail sur un matériel fait de plots en bois, constitué autour de l'idée de découpages du cube tels que décrits sur la figure 5.

Les élèves y avaient tous été familiarisés lors d'activités que j'avais menées avec eux. D'une manière ou d'une autre, ils avaient tous sérié l'ensemble des pièces données en vrac, puis assemblé les pièces afin de reconstituer les 10 cubes, tout d'abord sans autre contrainte de consigne, puis selon le principe de n'assembler que des pièces identiques. Ces tâches avaient induit des comparaisons systématiques des pièces selon leur volume : soit en relation au plot cube pris comme étalon, soit par des relations entre des assemblages de petits morceaux en plus gros, soit des relations selon l'idée de découpes. Une synthèse commune avait été faite qui, sans aller dans tous les détails, indiquait que tous ces morceaux étaient obtenus par itérations de découpes en deux des cubes et de leurs portions, montrant ainsi l'idée de découpe comme schéma directeur pour penser ce matériel. J'ai fait remarquer que sur les faces du cube apparaissent des *lignes de découpe* ou d'assemblage⁵.

⁵ J'avais aussi évoqué qu'on pourrait imaginer sur des modèles en polyèdres de telles lignes de découpe, par exemple sur tétraèdres, octaèdres et que ces lignes pouvaient le cas échéant suivre des arêtes.

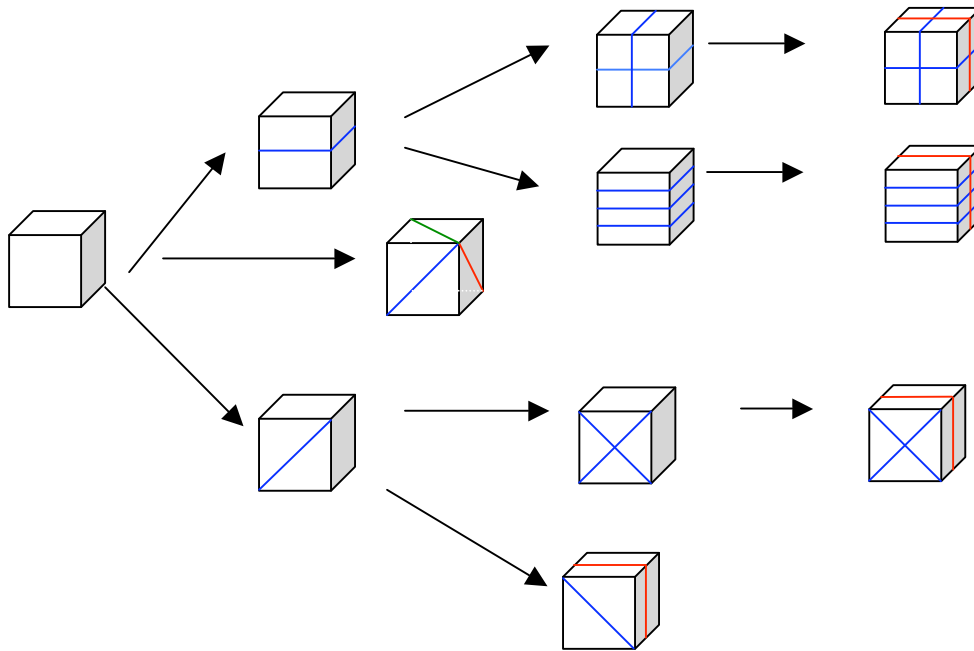


Figure 5

Matériel de cubes découpés à reproduire en dessin par les élèves. ⁶

Cette recherche a occupé 5 séances de 1h – 1h30 de la fin avril à la mi-juin 2004, en collectif ou en individuel. Entre ces séances, l’enseignante a mis à disposition un temps pour que les élèves accomplissent certains devoirs que je leur avais demandés. À la première rencontre, j’ai disposé sur une table les 11 cubes (le cube étalon et les 10 cubes assemblages). J’ai demandé aux élèves de les dessiner de telle manière qu’on puisse reconnaître chacun des assemblages. Je leur ai distribué des feuilles, blanches d’un côté, quadrillées de l’autre. Si un élève disait ne pas savoir dessiner en volume, je répondais de se débrouiller pour qu’on puisse distinguer les différents cubes. À la deuxième rencontre, j’ai demandé aux élèves de dessiner de mémoire les 11 cubes. Il n’y a eu que peu de différences entre les dessins produits lors de ces deux séances. Ceci rend d’autant plus significatives leurs productions. Connaissant ces élèves et la difficulté à leur faire produire des dessins précis de polygones d’après modèle et sur quadrillage, j’étais pleinement conscient du défi que je leur avais lancé et j’ai été très surpris par la qualité graphique de leurs réponses. À la **troisième rencontre**, j’ai présenté au rétroprojecteur les dessins des

⁶ Elle a été confectionnée par une étudiante.

élèves récoltés lors des deux séances précédentes en commentant avec eux les productions⁷. Je leur ai systématiquement demandé si l'entier du matériel avait été représenté et si on était sûr de ce que représentait chaque dessin. Nous avons comparé les dessins des uns et des autres. J'ai présenté les productions en les regroupant comme dans mon analyse ci-dessous, en gardant pour dernières celles sur lesquelles apparaissaient des dessins de plusieurs faces, voire de cubes en volume. J'ai présenté en dernier la production sur laquelle un élève avait systématiquement représenté le cube dessin selon le procédé déjà décrit. Le pivot de cette suite se situe au moment où les élèves ont voulu apprendre le procédé de dessin en transparence du cube en perspective cavalière et l'appliquer au dessin du matériel. Cet apprentissage a donc motivé une seconde reprise de la première tâche et a engagé la suite sur d'autres voies. Deux autres événements importants ont façonné cette nouvelle sémiose.

Le premier a eu lieu lorsqu'un élève a trouvé le moyen de généraliser le procédé de dessin du cube à un prisme de section triangulaire. Fait notable, l'élève qui a introduit le procédé de dessin du cube n'a pas su le généraliser ainsi. J'y reviendrai. La tâche concernant le cube et ses découpes s'est ouverte au dessin de polyèdres et a occasionné quelques discussions et tentatives de trouver des figures respectant les proportions des prismes à représenter : $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$ - de deux manières - et $\frac{1}{8}$ de cubes. Le second fait a été que les élèves se sont mis à chercher comment dessiner des pyramides et l'octaèdre. Il révèle que les élèves ont tenté de répliquer le schéma du procédé - duplication de faces et lignes de liaison - sans toutefois comprendre exactement ce qu'il y avait à dupliquer ou quels sommets relier. De ce fait, pour rendre le volume d'une pyramide ou d'un octaèdre, certains élèves ont dédoublé le dessin entier d'une pyramide (figure 21). Diverses solutions de ce genre ont été proposées et tentées au tableau noir. Le principe est quasiment celui par lequel F. Lo Jacomo (2002) représente l'hypercube. Bien entendu, pour les élèves, leurs idées ne signifiaient pas autant que cela. On voit pourtant ici le potentiel d'ouverture du signe sur des horizons conceptuels de plus en plus abstraits. Ce fait n'est pas à négliger. Il m'aura entre autres permis de donner une idée aux élèves (comme à leur enseignante) du travail d'un mathématicien et ce, comme prolongement de ce qu'ils avaient à apprendre (enseigner).

⁷ Le nom des auteurs avait été soustrait bien sûr des copies..

3. Quelques aspects de la sémiose développée lors de ces séances

La première tâche, effectuée à trois reprises, s'inscrit dans la métaphore d'un ensemble de cubes que l'on aurait découpé selon diverses combinaisons en prenant comme principe, lors de découpes successives, de toujours découper un cube et pas ses morceaux séparément⁸. Ces découpes sont considérées comme planes et transversales aux paires de faces parallèles du cube⁹. Elles ne sont qu'évoquées, et les élèves, eux, disposent de plots qu'ils peuvent re-assembler en cubes. Dans ces assemblages, les plots sont accolés, faces sur faces, arêtes sur arêtes, sommets sur sommets. La description en termes de sommets arêtes et faces n'est pas très indiquée pour décrire la découpe ou le re-assemblage de solides car ces deux opérations font apparaître ou disparaître dans la masse certaines faces, arêtes et sommets. On peut indiquer les coupes par leurs traces sur les faces du cube. Je propose de distinguer les *traits de coupe(s)* qui indiquent sur une face la direction de la coupe des *lignes de découpe(s)* qui indiquent la suite des arêtes produites par la coupe sur les faces du cube. Les re-assemblages des pièces se font, eux aussi, le long de ces lignes. Puisqu'on ne considère que des coupes très particulières, on peut indiquer de manière univoque une coupe par ses *traits de coupe* sans devoir représenter la *ligne de découpe* toute entière. Dans les cas simples que nous étudions ici, un trait de coupe se marquera transversalement à une face. Par contre certains segments de lignes de coupes peuvent se confondre à des arêtes du cube¹⁰, dans ce cas, il est rare que les élèves l'indiquent. Ils se contentent de dessiner les lignes visibles du cube re-assemblé.

La tâche demande aux élèves de produire une série de dessins représentant un ensemble de 10 cubes re-assemblés selon 10 combinaisons de découpes en deux ainsi que le cube étalon considéré ici comme non découpé. Pour ce faire les élèves doivent produire un dessin représentant chacun de ces re-assemblages. Leurs

⁸ Et ceci sans considérations aucune sur la manière dont on pourra réaliser effectivement de telles découpes.

⁹ La découpe en trois pyramides est un cas particulier, on ne peut l'obtenir directement par des découpes transversales en deux. En coupant un cube diagonalement, en deux puis encore en deux, on obtient deux de ces pyramides (tiers de cube) ainsi que deux tétraèdres (sixièmes de cube), bien connus des géomètres.

¹⁰ Dans les cas généraux de coupes planes comme, par exemple, dans celui de coupe pour développement d'un polyèdre, les lignes de coupes privilégiées seront celles qui sont constituées par une suite d'arêtes.

dessins vont devoir combiner un signe représentant le cube à découper ou un élément significatif de ce dernier – ici une, deux ou trois faces, ainsi que le dessin des lignes de découpes sur le cube ou des traits de coupe sur les faces représentées. Les élèves dessinent les 11 re-assemblages les uns à la suite des autres, ce qui en constitue une série. Cette série est organisée et cela se manifeste par des relations que l'on peut faire entre les dessins de lignes de découpes ou traits de coupes : par exemple, traits transverses parallèles aux arêtes du cube ou en diagonale, découpes en croix, étoiles ou quadrillage. Pour ces raisons, je considérerai dans toute mon analyse les dessins des élèves comme des diagrammes du matériel à dessiner et le les ai classés en tant que tels.

La même tâche de reproduction sera effectuée par trois fois, les deux premières sans que j'intervienne sur les productions des élèves, me contentant de les faire produire et de les récolter, la troisième après une intervention de ma part en collectif. Nous avons recueilli une variété d'images que je commenterai à peine parce qu'elles renvoient assez exactement à ce que J.-M. Dolle (1974) ou J. Caron-Pargue (1985) ont pu observer de manière bien plus complète et contrôlée. Dans leurs deux premières planches, la plupart des élèves ont représenté des carrés sur lesquels figuraient des traits qu'on peut interpréter comme les traits de coupes. Ces dessins peuvent aussi bien avoir représenté les coupes que les cubes re-assemblés. Dans certains cas, il est impossible de départager ces deux interprétations sur la seule donnée des dessins recueillis. Dans d'autres, on peut conclure au dessin des cubes re-assemblés soit parce que les dessins de carrés sont marqués de manière à indiquer le volume soit parce que les séries de dessins présentent des dessins de carrés et de cubes.

Le passage de la tâche de dessin d'après modèle (première séance) à celui de dessin de mémoire (seconde séance) centre les élèves sur le diagramme qui a pour fonction d'évoquer le matériel et la métaphore qui y préside. La correspondance avec le matériel devient symbolique au sens où l'entend Peirce, c'est-à-dire qu'elle repose sur des conventions de lecture des traits que les élèves ont retrouvées au détour de leurs dessins.

La sémiologie se prolonge alors par une discussion sur les représentations en opaque ou en transparence du cube. À la possibilité du signe d'évoquer un matériel absent s'ajoute la possibilité de représenter ce qui est caché à la vue et, ceci, de deux manières : ce qui se trouve sur une face cachée ou ce qui se trouve au coeur du cube

re-assemblé. Notons que la relation opaque/transparent rencontre celle entre *traits de coupes* et segments de *lignes de coupe* comme cela apparaît nettement sur les images des figures 11 et 19 ci-dessous. Ceci deviendra un aspect saillant lors de la troisième reprise de leur dessin du matériel.

Le procédé de dessin du cube en transparence et en perspective cavalière leur donne la possibilité de reproduire à volonté des images du cube. Ce signe acquiert une certaine autonomie vis à vis de la situation. Il devient support à des variations et combinaisons de traits désignant les différents éléments des cubes découpés. Puis le procédé devient lui-même sujet à variations et combinaisons permettant de produire le dessin de divers polyèdres. Les situations ont occasionné un périple jalonné par différents diagrammes. Nous avons quitté la métaphore d'un cube découpé et d'un diagramme de cubes re-assemblés pour élaborer un diagramme des divers morceaux ainsi obtenus. A la suite de quoi un nouveau diagramme s'est progressivement constitué faisant correspondre procédés de dessin et images des volumes obtenus et nous a introduit à une typologie des polyèdres et à une nouvelle métaphore : l'idée d'exploration de la variété de polyèdres ou de volumes en prismes, pyramides, ...ballons – si je puis dire - ou cylindres, cônes, boules. La situation s'arrête sur une ouverture à l'hypercube tel qu'exposé dans un ouvrage de mathématiques.

4. Signes des cubes découpés

Examinons de plus près les premières planches des élèves que nous avons commentés lors de la troisième rencontre.

a) Ce diagramme représente l'ensemble des morceaux de cubes, dessinés en 2D, grosso modo de profil, répétés autant de fois qu'il le faut pour permettre la reconstitution d'un cube. Un seul élève l'a proposé. Notons que lors de la troisième reprise de la tâche, je demanderai la production d'un diagramme des pièces : dessin des types de morceaux et indication chiffrée du nombre de morceaux nécessaires pour obtenir le cube, mais cette fois avec l'exigence de fournir des images 3D.

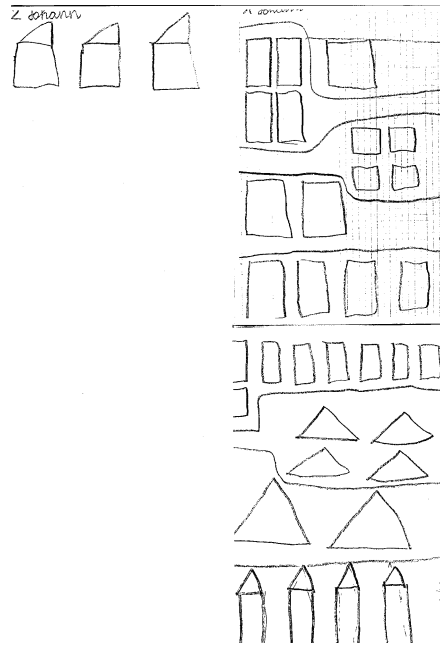


Figure 6

Diagramme de silhouettes des pièces répétées selon leur nombre

b) Les autres diagrammes sont pour la plupart constitués d'images de faces des cubes. Pour certains d'entre eux, une seule face de chaque cube est représentée. Certaines de ces faces sont accompagnées de marques de l'épaisseur du cube. D'autres comportent des dessins de plusieurs faces d'un même cube mais ce, de manière ad hoc, selon la difficulté à désigner le cube et en représentation opaque. Dans aucun des cas un dessin systématique du cube découpé n'est proposé.

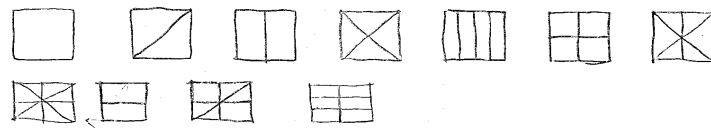


Figure 7

Diagramme constitués de carrés et de *traits de coupe*¹¹.

Du matériel, sept cubes peuvent être identifiés par les *traits de coupe* indiqués sur une face seulement. En effet, les coupes se font transversalement à la même paire de faces du cube. Ce sont ici les six premières images et la dernière. Les quatre autres cas exigent une coupe transversalement à une autre paire de faces et nécessitent

qu'on indique les *traits de coupe* sur deux faces au moins. L'élève a bel et bien pu produire 11 signes de cubes, mais à partir du septième signe, les figures proposées ne sont pas à l'image des *traits de coupes* (pour le dernier il y a découpe en 6 parts alors que le matériel présente une découpe en 8 parts).

Les deux diagrammes ci-dessous comportent chacun sept images des *traits de coupes*. Dans chacun des cas, la coupe médiane en moitié est répétée : horizontalement et verticalement. Certains motifs, en étoile ou quadrillage, ne sont pas à l'image des *traits de coupe*. On notera particulièrement à la figure 8 les marquages de profondeur et la solution trouvée pour distinguer la découpe de cube en quarts et en huitièmes par l'inscription de petites croix dans chaque quartier de l'image. À la figure 9, on notera les deux dessins de cubes en opaque.

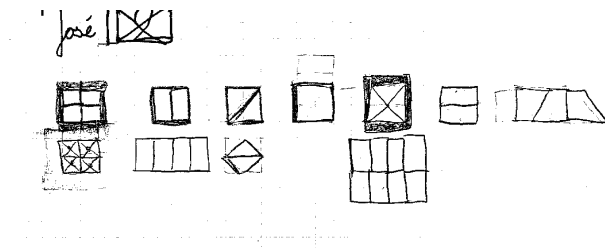


Figure 8
Diagramme des cubes découpés

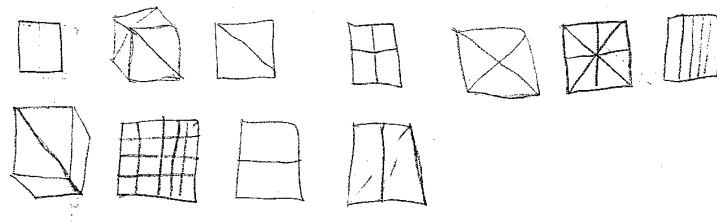


Figure 9
Diagramme comportant deux figures en perspective

c) Comme je l'ai mentionné ci-dessus, pour 4 des 11 cubes découpés, les traits de coupes à indiquer doivent se faire sur 2 faces au moins parce que ces coupes ne se font pas toutes transversalement à la même paire de faces. Pour la plupart des

¹¹ On notera que certains motifs ne correspondent à aucun des 11 cubes modèles.

élèves, le carré représente bel et bien le cube, c'est une image où le volume et la face sont confondus. Représenter des *traits de coupe* selon deux faces, voire trois, ne permet plus une telle confusion. Il se trouve qu'un élève a proposé pour son diagramme des images de cubes constitués de 2 ou 3 faces éclatées.

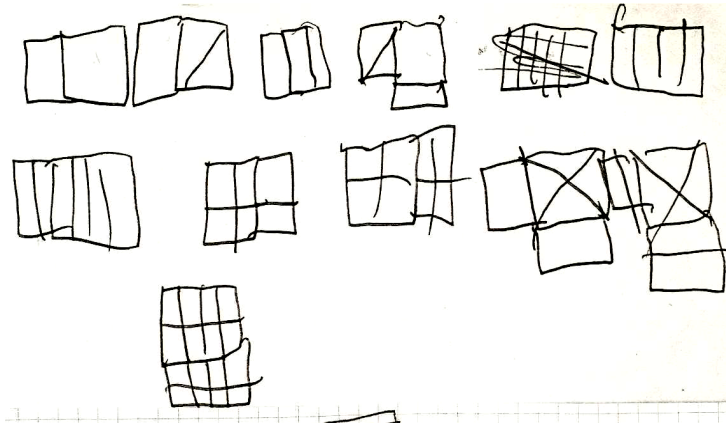


Figure 10

Diagramme dont les images de cube sont en développement

Cette production est exceptionnelle. Sur le moment, personne d'entre nous, chercheur, enseignante ou autres élèves n'y a porté une attention suffisante. J'invite le lecteur à examiner de près la série de dessins de gauche à droite, ligne par ligne. Si les troisième et quatrième dessins de la première ligne ne sont pas clairs, seul le dernier dessin qui pourrait désigner un cube découpé en 16 parties ne correspond pas au matériel. Il semble aussi que le cube découpé en 3 pyramides manque. Pour bien comprendre le système que trouve cet élève, qui semble s'être mis progressivement en place, il faut examiner les 2 derniers dessins de la seconde ligne. Ils représentent trois faces de cubes, et les deux découpes de cubes en quart, par croix diagonale, ainsi qu'en huitième, en découpant encore une fois en deux, transversalement à une autre paire de faces et parallèlement aux arêtes. On comprend alors que la même idée, quart puis huitième, a été trouvée pour la paire précédente de dessins où ne figurent que deux faces – découpe en croix droite. C'est la même chose pour la paire constituée du dernier dessin de la première ligne et du premier dessin de la seconde. J'interprète la série des dessins de la première ligne comme des ébauches de ce système : 1°: 2 faces du cube non découpé, 2°: 2 faces du cube coupé en 2 selon une diagonale, 3°: peut-être 2 faces du cube découpé en 2 (coupe droite), 4°: peut-être 3 faces du cube découpé en 4 selon une diagonale et une seconde découpe droite sur une autre paire de faces et, enfin, les trois paires de

découpes en quarts et huitièmes que j'ai déjà indiquées. Les réponses de cet élève à la tâche de la seconde séance confirment cette interprétation. Il propose 2 images mono faces, 7 images bifaces, 2 images trifaces. 2 ou 3 des images bifaces ainsi que les 2 images trifaces représentent la face latérale « en fuite » - traits de biais convergents.

d) Le diagramme de la figure 11 est constitué par la réplique de l'image des 11 cubes, en transparence sur lesquels les *traits de coupe* ou des segments de *lignes de découpe* sont répliqués sur différentes faces, cachées ou visibles. Cette question a été discutée avec les élèves à la troisième séance. Aucune ligne de découpe complète et aucune ligne interne n'est dessinée. Par ailleurs, on notera les marques d'une hésitation entre transparence et opaque et l'absence de marquage des lignes cachées (par exemple le recours conventionnel à des traits tirés).

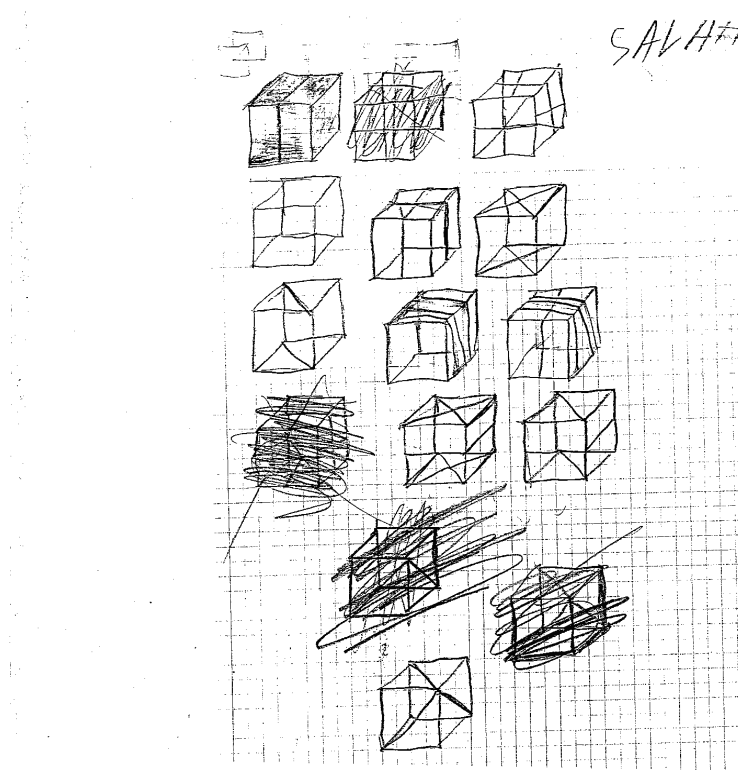


Figure 11

Diagramme dont les images sont des cubes transparents et en perspective cavalière avec réplique des *traits de coupe* ou de segments de la découpe

5. Une autre métaphore donne lieu à d'autres images.

Lors de la deuxième séance, j'envisageais le dessin de polyèdres et voulais profiter du matériel de polydrons avec lequel les élèves savaient construire quelques polyèdres comme tétraèdres, pyramides à base carrée, pentagonale, hexagonale, etc. pour les leur faire dessiner. Je me demandais aussi si la métaphore de la découpe pourrait être reportée à ce matériel. Sur ce point, mes observations antérieures m'avaient montré l'impact du matériel et fait comprendre que les polydrons ne pouvaient pas remplacer les bons vieux plots en bois, pour la simple et bonne raison que des coques ou des boîtes ne sont pas les mêmes choses que des plots. De plus, sur un matériel comme les polydrons, on ne peut pas réaliser de coupe autrement qu'en suivant les arêtes. Autrement, il faut l'imaginer en recourant à différents marquages : feutre, bande adhésive, élastique, etc. Chaque élève a donc choisi un ou deux modèles de polyèdre coque de son choix et devait en faire le dessin. Le résultat est qu'aucun de ces dessins n'a été fait en 3D. Les images produites sont de trois types : silhouette du polyèdre, polygone silhouette avec lignes internes indiquant les faces (par exemple un losange fait de deux triangles), pyramides vues du dessus : polygone de base et sommet en son centre relié aux coins de la base, dessin de telle ou telle pièce et, parfois, contour de la pièce de polydron elle-même, dessin du patron de leur polyèdre complets ou fragmentaires. Il semble donc que ce qui est devenu saillant pour les élèves avec ce matériel soit les plaques de construction et leurs assemblages, ce qui montre que leurs images s'inscrivent dans une toute autre métaphore que celle de la découpe.

Une seule exception est à signaler, l'auteur de la figure 11 a voulu dessiner un grand tétraèdre que nous avons confectionné en polydrons et dont les faces sont constituées de 4 plaques triangulaires. Il a effacé son dessin, sans doute parce que ce dernier ne le satisfaisait pas. On peut voir néanmoins ce qu'il a tenté de faire : le dessin d'une prisme triangulaire dont la face est celle du tétraèdre. Il l'a reproduite en décalé et tiré un trait de liaison entre les deux sommets de ces triangles (mais pas à leur base). Puis il a ébauché le dessin des plaques sur chaque face. On distingue que l'auteur a voulu dessiner une plaque latérale, comme il la voyait sur le tétraèdre et que cela introduit sur son dessin un triangle mal orienté par rapport à ses faces. Je suppose que c'est à ce moment là qu'il a décidé de tout effacer. Notons que quelques semaines plus tard, il fera spontanément une nouvelle tentative de ce

dessin. Cet élève, dont la tentative de dessiner un tétraèdre aboutit au dessin d'un prisme triangulaire, n'arrive pas à le produire volontairement. Ceci, et bien d'autres indices laissés par les élèves sur leurs dessins montrent bien que les élèves n'ont qu'une compréhension limitée du procédé.

6. Cubes découpés et pièces comme nouveaux diagrammes.

La troisième rencontre a été l'occasion de discuter avec les élèves de leurs productions et ce, avec plus de détails encore que ma présentation ci-dessus. En particulier nous avons discuté un petit peu de la figure 10 et surtout, nous avons comparé les avantages et inconvénients des représentations en opaque et en transparent, évoqué le marquage par des traits tirés afin d'indiquer les arêtes et les faces visibles en transparence seulement. Puis j'ai fait venir l'auteur de la figure 11 en lui demandant de nous dessiner un cube découpé en 4, selon deux coupes diagonales. J'ai mentionné des lignes de découpe interne au cube. Ensuite, j'ai demandé qui voulait venir nous dessiner au tableau une des portions ainsi obtenues (prisme triangulaire long). Plusieurs élèves sont venus s'essayer et les propositions se sont avérées très proches de ce que J.M. Dolle (1974) et J. Caron-Pargue (1985) ont obtenu, avec une préférence pour le dessin d'un triangle dont un, deux, voire les trois côtés sont bordés d'une bande rectangulaire ou parallélogramme. Un élève a proposé un dessin en opaque que ses camarades ont jugé trop allongé. L'auteur de la figure 11 a déclaré forfait. Petit événement pour la classe, l'auteur de la figure 8, a proposé de dessiner le prisme en traçant deux triangles décalés et en reliant les sommets correspondants, trouvant ainsi à généraliser le procédé de dessin du cube. Dès lors, j'ai repris au tableau la démonstration du procédé de dessin du cube et du prisme et comme les élèves désiraient redessiner le matériel avec des images 3D, je leur ai demandé de dessiner aussi les pièces «portion» de cube.

Le procédé de dessin du cube transparent en perspective cavalière permet aux élèves de répliquer le cube autant de fois que nécessaire. La tâche consiste alors pour eux à reporter sur les faces visibles ou cachées des cubes les diverses figures de découpe qui deviennent alors elles-mêmes des sous unités diagrammatiques. Les dessins de figure 11 ci-dessus l'illustrent déjà parfaitement. les quatre planches qui suivent nous en montrent divers exemples. Rappelons aussi que les planches qui

suivent ont été faites comme devoir sans que les élèves aient donc le matériel à leur disposition.

Dans la figure 12, on notera que l'élève a reporté des *traits de coupes* comme il aurait pu le faire sur la représentation d'une image carré-cube et qu'il représente des découpes inexistantes en une étoile à 8 branches et en carreau de 9. On notera aussi la manière dont il représente les prismes triangulaires correspondant, selon lui, aux coupes indiquées.

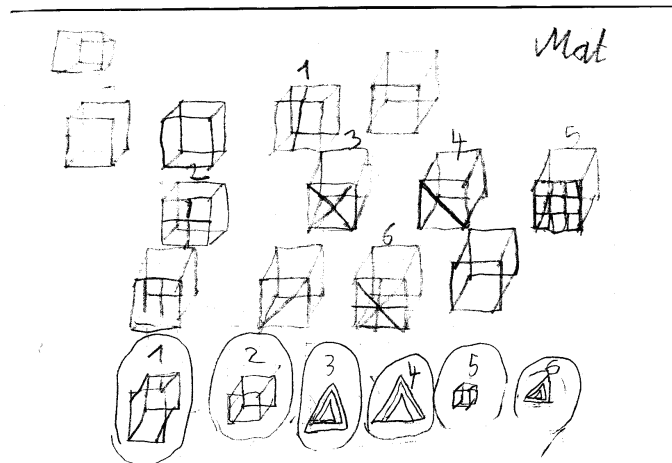


Figure 12
Diagramme en transparence
Figures de coupe sur la face antérieure

La figure 13 montre en outre le diagramme des cubes découpés en prismes triangulaires et les prismes correspondants dessinés en proportion approximative. On notera une erreur puisqu'il y a répétition de la même *figure de coupe* en quart (une croix diagonale). On notera surtout le fait que pour le cube découpé en huitièmes, cette *figure de découpe* est dessinée trois fois, indiquant ainsi le plan de coupe médian horizontal.

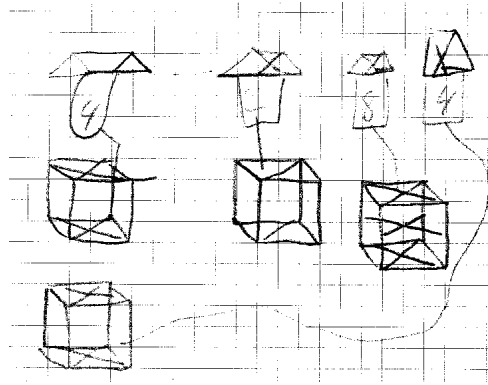


Figure 13
Diagramme en transparence
Figure de découpe sur un plan médian

Dans la figure 14, on examinera attentivement les lignes de coupes. Dans le deuxième dessin, la ligne du bas ne correspond pas à celle du haut, les lignes de coupe non diagonales sont orientées selon une autre perspective que celle adoptée pour le cube (dessin no 5) et les morceaux sont comme inscrits dans le dessin du cube.

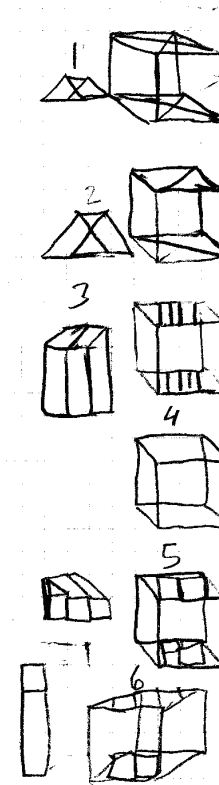


Figure 14
Diagramme avec images en transparence et figures
sur une paire de faces parallèles

Dans la figure 15, on notera que les figures de coupe sont reproduites sur les faces supérieures et inférieures du cube, sans que ces figures correspondent aux *segments des découpes* que montre le matériel. On notera le dessin des pièces comme des prismes, en transparence pour les prismes triangulaires et en opaque pour les parallélépipèdes.

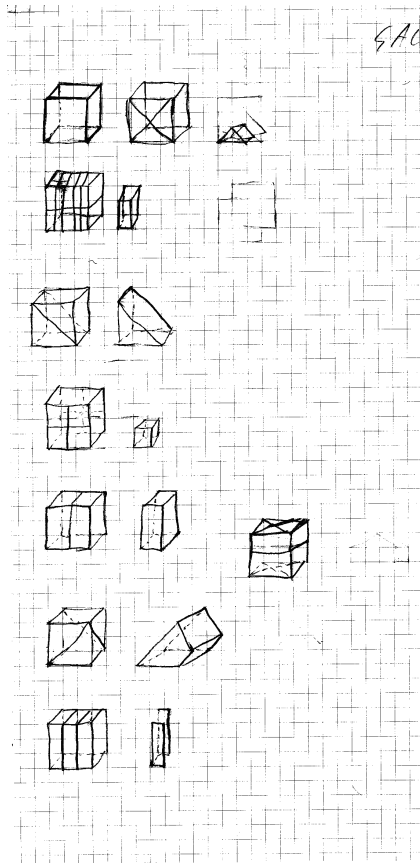


Figure 15
Diagramme en transparence avec lignes en pointillés

7. Quatre productions remarquables.

a) Le diagramme de la figure 16 est très schématique a été produit par l'auteur de la figure 10.

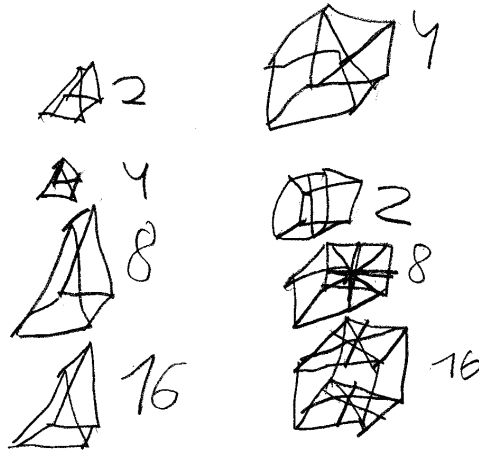


Figure 16

Correspondance numérique entre portion de cube et figures de coupe

Les relations numériques l'emportent et correspondent pour le rapport moitié, quart, huitième, seizième respectivement à un trait, une croix, une étoile, une étoile dédoublée en haut et en bas qui signifient peut-être des figures de coupes.

b) La figure 17 est remarquable parce que dans son diagramme l'élève reporte sur les images de prismes les figures de découpe des cubes et les fait ainsi correspondre au nombre indiquant à quelle portion du cube nous avons affaire.

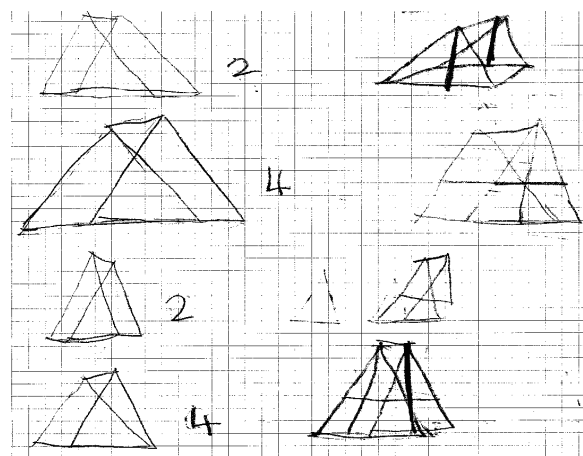


Figure 17

Correspondance numérique entre portions de cube et figures de coupe

c) Le diagramme de cette élève (figure 18) est intéressant par la manière dont elle s'y prend pour obtenir le dessin des portions de cubes. Notons tout d'abord que le premier diagramme de cette élève était du type de la figure 7, mais encore moins élaboré et que les tentatives de cette élève pour dessiner la pyramide et l'octaèdre témoignent de son rapide progrès et de son intérêt pour le dessin en 3D. Elle l'a manifesté par plusieurs propositions astucieuses. En voici une. Sur l'image de cube en transparence, cette élève reporte des *segments de la découpe* mais seulement sur les faces « visibles ». Pour obtenir le dessin de deux des moitiés de cube, elle copie le dessin de coupe et en efface la moitié ce qui, vu qu'elle n'a pas dessiné l'entier de la *découpe*, donne un dessin incomplet.

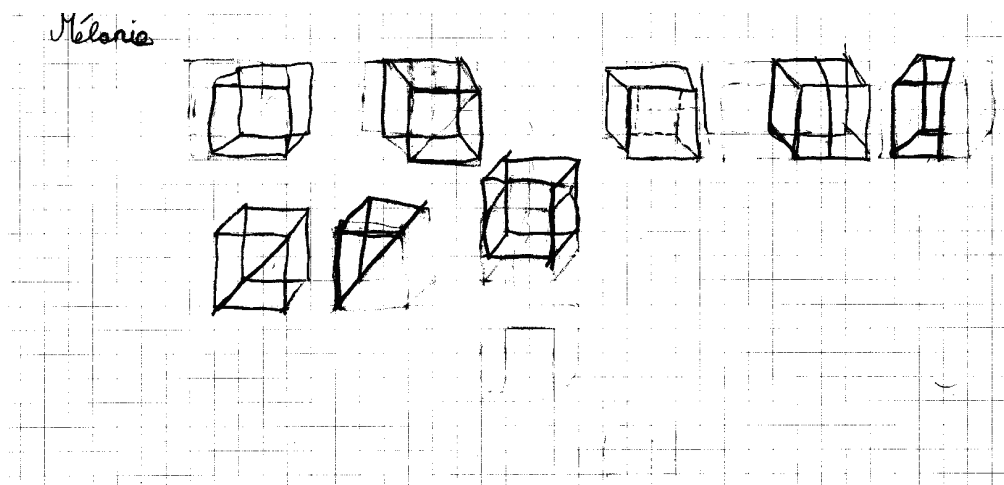


Figure 18
Diagramme avec cubes à moitié effacés

d) Ce diagramme présente plusieurs aspects notables. Le premier est que les cubes découpés sont dessinés en transparence, avec des arêtes en traits tirés. Les segments ou figures de la découpe ne sont dessinés que sur des faces « visibles ». Sur le dernier dessin, le report des de celles-ci est erroné puisqu'il est fait sur des faces adjacentes. Les portions de cube sont dessinées en opaque. Enfin le dessin et la disposition des quarts de cube est remarquable : il y a au moins deux perspectives adoptées, l'une pour les pièces du bas et de gauche, l'autre pour les pièces de droite et du haut; les pièces latérales présentent deux faces visibles, et celle du haut et du bas trois. Ici on voit bien le travail dans le sous diagramme constitué par l'image du cube découpé et celles de ses parties séparées.

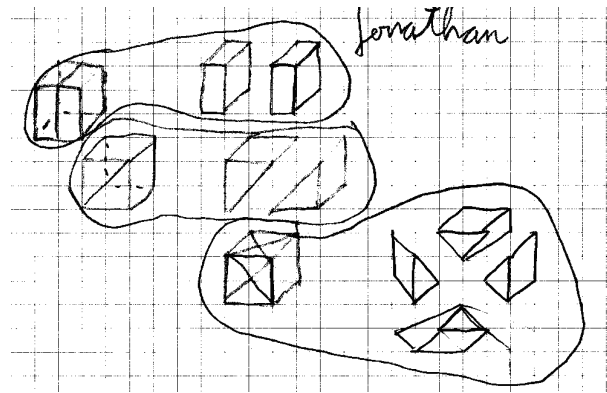


Figure 19
Dessin des portions « éclatées »

8. Représentation de la pyramide tiers de cube.

a) L'élève qui a réussi le premier à généraliser le procédé de dessin au prisme triangulaire a aussi cherché à dessiner la pyramide tiers de cube. Il butait sur deux problèmes : 1) représenter la base de la pyramide représentée par une ligne horizontale puis un segment horizontal sis entre deux segments latéraux fuyant vers la gauche et vers la droite et; 2) représenter visibles les 4 arêtes latérales de la pyramide. Il effaçait ses tentatives. Je lui ai alors proposé de dessiner la pyramide en tenant le modèle tête en bas. Sans hésiter une seconde, il a dessiné la base puis, en dessous, le sommet auquel il a relié les coins de la base. On retrouve son dessin sur la figure 20.

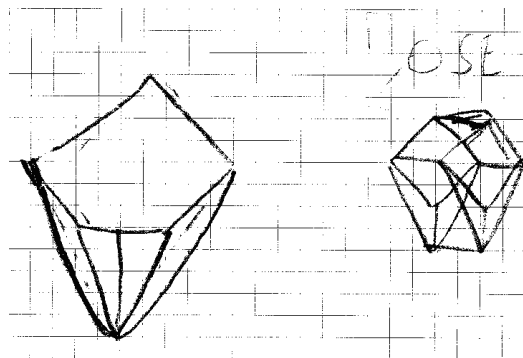


Figure 20
Problème de la profondeur pour la pyramide

Pour corriger la forme de la base, il a exécuté un nouveau dessin (fig. 21) : base en forme de losange, sommet de la pyramide, liaison des coins de la base au sommet. Il se disait gêné par l'arête postérieure (cachée), qui coupait la base en deux et venait se confondre avec l'arête antérieure. Une discussion s'est alors engagée entre quelques élèves sur le moyen de rendre de la profondeur à ce dessin. Un de ses camarades a proposé d'inscrire dans la base losange un plus petit losange (en couronne) et de relier les sommets de ces deux losanges (comme un enfoncement). Lui, il a tenté dessiner deux copies de pyramide en opaque, décalées et de relier les sommets correspondants. On trouve son dessin sur la figure 20 ci-dessus. Sur la figure 21, on notera que la pyramide vue de dessus devient un tétraèdre.

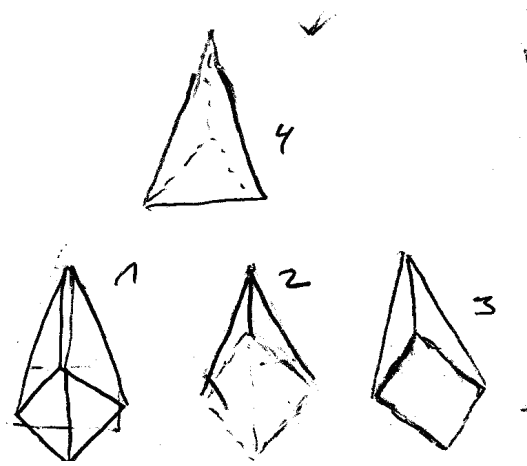


Figure 21

Pyramide vue de dessus et de dessous. Problème de l'arête cachée

b) L'icône usuelle de la pyramide est celle des égyptiens, pyramide à base carrée dont le sommet est au dessus du milieu de la base. Les élèves trouvaient très amusant de dessiner des pyramides vues de dessus ce qui donne un carré et ses diagonales et, à la faveur de cette image, ils confondaient souvent pyramide à base carrée et tétraèdre (grosso modo régulier). La pyramide tiers de cube est décentrée, son sommet est au-dessus d'un des coins de la base et elle présente deux faces verticales. Le procédé de dessin de la pyramide renversée place le sommet comme un point de fuite. Ceci ne permet pas de bien indiquer la position du sommet par rapport à la base. Jusqu'ici j'avais recouru à deux sortes de modèles de polyèdres, les plots et les coques (polydrons). Les coques ne me permettaient que de faire une

pyramide à base carrée (et faces équilatérales) et les plots ne fournissaient que la pyramide tiers de cube¹². J'ai pensé qu'en demandant aux élèves de réaliser une maquette de pyramide avec des tiges et de la pâte à modeler, et en insistant sur le fait que je voulais obtenir la même pyramide que le tiers de cube, j'arriverais à leur faire dépasser les limites de la représentation dessinée. Je ne jouais plus seulement sur des plots et des coques, le *corps* et *l'enveloppe*, mais encore sur la *structure*. Tout ce qui est confondu dans les traits du dessin. Le résultat de la figure 22 est à ce titre probant. Parmi les bricolages que j'ai pu récupérer seules deux pyramides étaient grosso modo au modèle. Les autres étaient des tétraèdres, certains réguliers, d'autres à faces verticales, des pyramides à base parallélogramme non plane, ainsi qu'un prisme triangulaire.

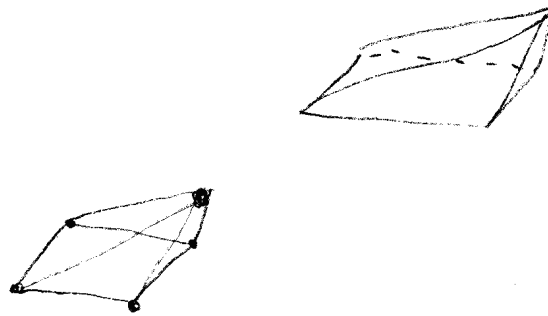


Figure 22

La pyramide tiers représentée selon le procédé avec trait tiré et comme maquette de tige de brochettes et de pâte à modeler

¹² Avec quatre d'entre elles on peut faire une pyramide usuelle – égyptienne - à base carrée.

c) L'élève qui avait tenté un mois plus tôt de dessiner le grand tétraèdre puzzle en polydrons a voulu essayer à nouveau. Sous ce dessin, effacé se trouve un dessin de la structure en tétraèdre qu'il a construite avec les tiges de brochettes et la pâte à modeler.

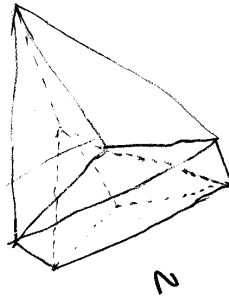


Figure 23
Nouvel essai de dessin du grand tétraèdre

9. Présentation de l'hypercube.

Le procédé de dessin du cube en perspective peut être aménagé pour obtenir n'importe quel prisme, il suffit de dessiner au lieu d'une face carrée, le polygone qu'on veut. En ce qui concerne une pyramide à base carrée et l'octaèdre, on peut trouver aussi moyen de s'inspirer du procédé, il suffit pour la pyramide de dessiner deux triangles qui partagent un même sommet et pour l'octaèdre, deux losanges qui ont en commun deux de leurs sommets opposés. D'autres procédés de dessin de polyèdres procèdent eux aussi selon un dédoublement, et c'est elle encore qui préside aux dessins de l'hypercube (voir figure 4) proposés par F. Lo Jacomo (2002).

C'est le dessin de l'octaèdre, présenté comme double pyramide, qui pour moi a donné lieu aux productions et essais les plus intéressants, hélas tous sur le tableau noir et qui furent fort difficiles à recopier. Manifestement tous les élèves ont cherché à obtenir le dessin de l'octaèdre par dédoublement. En comparant leurs essais on se rend compte qu'ils ont alors rencontré deux problèmes essentiellement : savoir quelle figure dédoubler en la décalant et quels sommets relier. Tout comme montré sur la figure 18, certains élèves ont carrément dessiné deux losanges et relié tous les traits entre eux. De plus, la réplique de la figure était soit représentée à côté, translattée, soit à l'intérieur du premier dessin, cela c'était déjà présenté dans le cas du dessin de la pyramide. Ces idées correspondent aux celles de la figure 4. Une élève a eu l'idée d'accoler ses deux losanges sur un même sommet, mais n'y est

arrivée qu'au prix de courber les arêtes du second losange. Un autre élève a tenté de faire un dessin de double cube et d'obtenir des faces de forme losange en effaçant certains traits. Finalement je leur ai indiqué deux manières de dessiner l'octaèdre selon des procédés analogues. Pour clore ces séances, je leur ai présenté et commenté la figure 4.

Ce qui était patent dans ce cas plus nettement encore que dans tous les autres c'est que les élèves tentaient de résoudre un problème, cherchaient par essais erreurs certes, mais ne manquaient pas d'imagination. Il y avait nettement un exercice de pensée graphique et de résolution de problème. Une chose s'est confirmée dans de nombreuses observations par la suite : la multiplicité des images et dessins produits. Ils n'arrêtent pas de dessiner et l'activité n'a aucune peine à être relancée. En particulier, l'auteur des figures 8, 18 et 19, poursuivant sur sa lancée a produit un dessin dont je n'ai jamais pu savoir ce qu'il devait représenter mais qui correspondait assez exactement à une des figures du livre de M. F. Lo Jacomo (2002).¹³ Qui plus est, comme je passais dans les rangs pour faire feuilleter le livre par les élèves, ce dernier n'a pas manqué de remarquer la coïncidence et c'est ainsi que j'ai pu l'observer à mon tour. Bien sûr, il est impossible que l'élève ait voulu dessiner ce que représentait la figure dans le livre.

Conclusion : le procédé de dessin comme catalyseur.

Au bout de cette recherche, je comprends mieux tout le parti didactique qui peut être tiré de l'apprentissage de tels procédés. Le procédé de dessin a eu une fonction de catalyseur, les élèves s'en saisissent même si leur compréhension est limitée. Il en va ici comme des algorithmes de calcul écrit. Le procédé de dessin du cube examiné est centré sur la représentation de faces du cube. Pour les autres polyèdres, comme par exemple pour la pyramide ou l'octaèdre, se pose la question des arêtes qui font ou ne font pas partie du contour apparent de l'objet. Je ne m'y suis pas arrêté ici. J'ai tablé sur cette compréhension limitée associée à la quasi infaillibilité de l'effet de ce procédé pour porter l'exploration du cube vers celle des autres polyèdres à la faveur d'un *interprétant dynamique* : pour créer du volume on double une figure et on la relie par des traits. Au fil de l'étude, le procédé adopté devient de plus en plus

schématique. Comme le rappelle F. Lo Jacomo, ce schéma procédural joue un rôle fondamental dans la connaissance de l'espace : dimension, symétries, dédoublement et découpes, dont découpes en moitié. Pourtant dans ces situations, ce procédé n'a jamais été expliqué en tant que tel, ce qui aurait donné lieu à un cours sur le dessin géométrique.

Il ne vient à l'esprit de personne qu'on puisse prétendre dessiner d'après modèle tout en fermant les yeux. Par contre, comme ce fut le cas lors de la seconde séance, on peut dessiner de mémoire. Disposer d'un procédé aussi schématique que celui que j'ai étudié permet de produire, sans modèle, le dessin de cubes ou d'autres polyèdres. Qu'est-ce que je regarde lorsque je dessine ainsi ? La chose est si facile que je puis le faire les yeux fermés. Alors qu'il semble aller de soi qu'on puisse dessiner quelque chose qu'on n'a pas sous les yeux, cela étonne les élèves qu'on puisse dessiner ainsi, sans lire ses propres traits. Dans tout ce que je viens d'évoquer, le dessin est sensé ressembler suffisamment à son modèle pour le représenter, et regarder son tracé évoluer revient à contrôler le cours de la restitution du modèle. De ce point de vue, je serais tenté de dire qu'en dessinant on regarde une ressemblance et dans ce cas, c'est bien une relation triadique qui lie le modèle tel qu'il nous paraît, ce que l'on en sait et enfin le tracé que nous faisons.

Enseignants comme élèves sont nombreux à déclarer tout de go ne pas savoir dessiner, quand ils ne vont pas jusqu'à déclarer avoir une mauvaise représentation de l'espace! Le procédé permet de savoir un petit peu mieux dessiner, il comble en partie cette ignorance. Et il suscite des relations perceptives entre les traits du dessin lui-même. Ces considérations permettent de ne pas se formaliser du fait que les élèves apprennent, disons, un «truc». Certes, le procédé devient si mécanique que, comme le faisait remarquer un collègue, on se demande si après cela on saurait dessiner un cube matériel tel qu'on le voit, mais d'un autre côté, la facilité du dessin suscite l'audace. Les élèves se sont prêtés au jeu au point qu'ils ont volontiers cherché à dessiner d'autres polyèdres que le cube. Les problèmes rencontrés pour accommoder leurs images les ont obligé à questionner à nouveau leurs modèles, leurs dessins et leurs procédés. Pour autant que le dessinateur ne s'arrête pas au produit fini, qu'il admette que les images obtenues ne seront pas parfaites, il pourra

¹³ Il s'agit de la planche n° 3.15, figure du haut à droite, p. 74 du livre.

s'accommoder de la facilité du procédé pour appuyer son étude sur de telles esquisses. La clé est bien là, dans le mot *esquisse*, je veux dire un dessin facile à réaliser de sorte qu'on puisse le jeter sur le papier en considérant d'emblée qu'il sera voué à être repris. C'est là aussi en géométrie toute la valeur du dessin à main levée contre le dessin aux instruments. L'essentiel est donc dans la dynamique, dans le processus même de dessin. Et c'est pour cette raison que l'approche par la sémiotique de Peirce me semble actuellement être la plus pertinente pour ces questions.

La réussite du travail d'esquisse se mesure à ce qu'il donne à connaître : affinement du regard, relations entre points de vue, complétion des représentations de ces objets non seulement pour eux-mêmes mais encore et surtout en relation les uns avec les autres, etc. Dans ses esquisses, tour à tour le dessinateur quitte l'objet dessiné pour le procédé, puis revient à son modèle. Il prend ainsi appui sur les qualités et défauts de ses esquisses comme de ses conceptions. Lors de nos séances, les moments de dessin avec modèle et de dessin sans modèle se sont succédés naturellement, et cette relation de présence ou d'absence du modèle s'est reportée dans le contexte du dessin en perspective qui peut être soit en opaque, soit en transparence. Un dessin produit l'image d'un objet tel qu'il se voit à partir d'un certain point de vue. La perception n'est pas aussi strictement limitée. Le procédé de dessin en transparence permet de représenter un peu de ce qui est perçu au delà de ce qui serait visible, par exemple les faces cachées. Plus, il permet aussi de représenter ce qui est à l'intérieur, et qui, lorsqu'on a affaire à un modèle opaque, ne peut ni être vu ni être perçu. Dans les situations relatées ici, la confrontation du support matériel, présent ou évoqué, avec les dessins en 3D, en opaque ou en transparence, est le moteur d'une exploration qu'on peut suivre à la trace des diagrammes esquissés par les élèves : diagrammes du matériel de cubes découpés, diagrammes des différents morceaux que l'on obtient ainsi, diagrammes des jeux de transparence ou d'opaque pour rendre le cube et ses parties, diagrammes des prismes en fonction de leur silhouette et tailles respectives¹⁴, diagrammes de la variété de polyèdres en fonction des variations du procédé. Là autour s'articulent différentes métaphores, conceptions, voire conceptualisations du matériel étudié :

¹⁴ Le procédé ne permet pas de bien contrôler l'échelle du dessin et donc de rendre compte finement des tailles relatives aux différents polyèdres.

cube découpé, catégories de polyèdres comme portions de cube, variation du procédé de dessin, etc.

Au bout de cette analyse, un parti pris dans la poursuite de mes recherches se dégage : le but n'est pas de faire apprendre aux élèves à dessiner des cubes et des polyèdres comme s'ils les connaissaient¹⁵ par ce qu'ils en verraient ou par ce qu'ils en sauraient, ni de leur faire produire des dessins qui refléteraient l'état de leurs connaissances de ces objets. Ici le dessin n'est qu'un signe du (type de) polyèdre à représenter en vue d'en apprendre un peu plus. Dans ce type de situation, la connaissance que les élèves ont des polyèdres est supposée se transformer au fur et à mesure de leurs esquisses.

¹⁵ C'est-à-dire les connaissaient suffisamment compte tenu des exigences que l'on donnera au dessin.

Références bibliographiques (bibliographie de quelques sources d'inspiration)

- Boule F. (2001). *Questions sur la géométrie et son enseignement*. Paris Nathan.
- Caron-Pargue J. (1985). *Le dessin du cube chez l'enfant : organisations et réorganisations de codes graphiques*. Éditions Peter Lang, Berne.
- Caron-Pargue J. (1992). A functional analysis of decomposition and integration in children's cylinder drawing, *British Journal of Developmental Psychology*, 10, 51-69.
- Chaachoua H. (1997). Géométrie dans l'espace. Le point sur la lecture des dessins par des élèves en fin de collège. *Petit X n° 48*, Irem Grenoble, pp. 37-68.
- Conne F. (1992). Savoir et connaissance dans la perspective de la transposition didactique, *Recherches en didactique des mathématiques*, 12, nos 2-3, pp. 221-270.
- Conne F. 2004. Jouer la surprise, *Educateur n° 7*, p. 35-37.
- Conne F., Favre J.-M. & Giroux J. (2006). Répliques didactiques aux difficultés d'apprentissage en mathématiques : le cas des interactions de connaissances dans l'enseignement spécialisé. In P.A. Doudin et L. Lafortune (éds), *Intervenir auprès d'élèves ayant des besoins particuliers*. Presses de l'Université du Québec, Montréal. pp. 118-141.
- Conne, F. (2006). La didactique des mathématiques comme didactique d'une science étonnante. In Numéro spécial de l'Educateur, *La recherche en Education*, pp. 21-26.
- Dolle J.-M., Bataillard C. et Guyon J., 1974, La construction représentative de l'espace volumétrique chez l'enfant : le cube. *Bulletin de psychologie*, n° 311 10 - 12 pp. 578-589.
- Fisette J. (1993). *Introduction à la sémiotique de C.S. Peirce*, Éditions XYZ, Montréal.
- Fisette J. (1996). *Pour une Pragmatique de la Signification*, Éditions XYZ, Montréal.
- Giroux, J. (à paraître). *Conduites atypiques d'élèves du primaire en difficulté d'apprentissage*. Recherches en didactique des mathématiques, Éditions La pensée Sauvage.
- Lo Jacomo F. (2002). *Visualiser la quatrième dimension : des images perçues dans les miroirs ... à la construction des objets mathématiques*. Éditions Vuibert, Paris.
- Morand B., (2004). *Logique de la conception. Figures de sémiotique générale d'après C. S. Peirce*. L'Harmattan, Paris.
- Peirce C. S. (1978). Lettres à Lady Welby, in *Écrits sur le signe*, rassemblés, traduits et commentés par G. Deledalle, Éditions Seuil, Paris, pp. 19-57.

Annexe 1: Quelques définitions de termes peirciens proposées dans des citations de Peirce et de J. Fisette (1993).

Signe (Peirce) :

(...) *something by knowing which we know something more.* (C.P. 8.332)

Quatre traductions :

Un signe est :

1) « quelque chose dont la connaissance nous permet de connaître quelque chose de plus. » (J.-J. Thomas).

2) « quelque chose par la connaissance duquel nous connaissons quelque chose de plus. » (G. Deledalle).

3) « un signe est une donnée de connaissance conduisant, du fait même de son existence comme objet de savoir, à un plus, à un acquis, à un savoir supplémentaire » (J. Fisette).

4) quelque chose dont la connaissance nous porte quelque chose de plus à la connaissance. (F. Conne).

Signe (bis) et représentamen (Peirce) :

« (...) un signe ou représentamen, est quelque chose [1] qui tient lieu pour quelqu'un [3] de quelque chose [2] sous quelque rapport ou à quelque titre. Il s'adresse à quelqu'un c'est-à-dire qu'il crée dans l'esprit de cette personne un signe équivalent ou peut-être un signe plus développé. Ce signe qu'il crée, je l'appelle interprétant du premier signe. Ce signe tient lieu de quelque chose : de son objet (C.P. 2.228). »

Les chiffres renvoient aux trois constituants du signe et ont été ajoutés par J. Fisette.

Constituants du signe (J. Fisette, p. 11) :

« Le signe ou le représentamen est donc donné comme *une interaction dynamique entre trois éléments appartenant à des types logiques de différente nature* :

Fondement :

Le premier constituant du signe, la facette du signe, immédiatement perceptible.

Objet :

Ce à quoi renvoie le fondement : ou bien, ce à quoi l'interprétant renvoie le signe dans un processus de sémiologie. Deledalle dit le référent ; mais c'est aussi vrai, d'une certaine façon de la référence. Par contre, la notion d'objet va encore plus loin ; il s'agit aussi d'une forme de représentation du référent ; (...)

Interprétant :

Il ne s'agit pas d'une personne ni d'un interprète, mais bien d'une fonction. L'interprétant peut être saisi comme la résultante, la portée, l'aboutissement, la retombée, le destinataire, le datif du travail de sémiologie opéré à l'intérieur du signe : en somme, il s'agit d'un état second du signe, le plus dont parle la première citation de Peirce ci-dessus. »

Le fondement peut être (J. Fisette, p. 24)

un *qualisigne* qui renvoie à la pure sensation, à la simple possibilité d'existence

un *sinsigne* qui renvoie à une entité existant pour elle-même sans autre considération

un *légisigne* qui renvoie à la notion de convention, de code, d'habitude, bref à la pré-codification.

La relation du fondement à l'objet peut être :

iconique, l'objet est saisi comme simple possibilité d'exister : il fonctionne sur la base de la similarité ;

indiciel, l'objet est saisi dans son unicité, sa singularité, comme simplement existant : il fonctionne sur la base de la contiguïté ;

symbolique, dans la mesure où l'objet est saisi suivant son aspect de valeur codifiée.

Interprétant :

rhème : l'interprétant, le sens, l'aboutissement du processus de sémiose en reste au niveau de la pure potentialité (possibilité) ;

dicisigne : le sens, l'aboutissement du processus de sémiose est donné dans son existence individuelle : c'est la raison pour laquelle, à ce niveau, on parle de la réalisation, de la communication, de la pragmatique ;

argument : le sens, l'aboutissement du processus de sémiose est lui-même pris comme objet de la sémiose : le signe parle de lui-même comme signe, comme objet de savoir. D'où la théorie.

Signes iconiques (Peirce) :

«Je définis une icône comme un signe qui est déterminé par son objet dynamique en vertu de sa propre nature interne.

Un signe peut être iconique, c'est-à-dire qu'il peut représenter son objet principalement par sa similarité, peu importe son mode d'être. Si un substantif est requis, un représentamen iconique peut-être appelé hypoicône. Toute image matérielle, telle qu'une peinture, est largement conventionnelle dans sa manière de représenter : mais en elle-même, sans légende ni étiquette, elle peut être appelée hypoicône.

Les hypoicônes peuvent être grossièrement divisées selon le mode de Priméité dont elles participent. Celles qui participent de qualités simples, ou Premières Priméités, sont des images ; celles qui représentent des relations, principalement dyadiques, ou regardées ainsi entre les parties d'une chose, par des relations analogues dans leur propres parties, sont des diagrammes ; celles qui représentent le caractère représentatif d'un représentamen par la représentation d'un parallélisme dans quelque chose d'autre, sont des métaphores.» C.P. 2.276-277.

Annexe 2 : Détails de la séquence

- Les 27 avril et 4 mai, les élèves ont été amenés à dessiner les 11 cubes du matériel (découpés en demi, quarts, huitièmes et tiers.). J'ai récolté les dessins des élèves, ils ne les ont plus consultés. Le 27 avril (première séance), les élèves n'avaient qu'un accès limité au matériel. Ils pouvaient le voir de leur place, et venir au plus 3 fois chacun l'examiner de près, mais alors ils ne pouvaient venir que les mains nues. Le 4 mai (deuxième séance) les élèves devaient produire de mémoire les dessins de chacun des cubes. Ensuite, ils ont choisi parmi différents polyèdres du matériel polydrons, celui ou ceux qu'ils voulaient dessiner. Ces polyèdres étaient : les tétraèdre, hexaèdre, octaèdre, décaèdre que l'on peut construire avec les plaques triangulaires, un tétraèdre dont la face comporte 4 plaques triangulaire, un cube, une pyramide à base carrée, un prisme triangulaire et un pentagonal à faces latérales carrées. En devoir, je leur demandais de marquer avec une bande adhésive une *ligne de découpe* en deux moitiés de leur modèle en polydrons (ce qui matériellement ne peut pas être réalisé puisque ces modèles ne sont que des coques). Une telle tâche était susceptible d'ouvrir la situation vers une autre sémiose encore, cette piste a été abandonnée.

- Le 18 mai (troisième séance), en collectif : présentation et discussion sur chacune des productions des élèves. Au cours de ces deux séances : mise en évidence des deux procédés de dessin de cube en opaque et en transparence, discussion sur leur préférence pour l'un ou l'autre des procédés, problème de dessiner les pièces du matériel, propositions au tableau. Nous nous arrêtons sur la possibilité de représenter le prisme triangulaire, solution trouvée; reprise du procédé de dessin du cube en transparence : l'élève qui l'a produit en a fait la démonstration au tableau, quelques élèves viennent s'y essayer. Fort de ces nouveaux savoirs : procédé de dessin du cube et procédé de dessin du prisme, je propose une nouvelle tâche, à effectuer comme devoir pour le 8 juin : dessiner les 11 cubes en faisant usage du procédé de dessin, dessiner en vis à vis de chacun des cubes un des morceaux qui le constitue, et indiquer le nombre de tels morceaux nécessaire pour obtenir le cube.

- Le 8 juin (quatrième séance), en collectif au tableau noir, puis en individuel : reprise du dessin des prismes triangulaires, comment rendre les proportions des pièces, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$ et $\frac{1}{8}$ de cube. En individuel : premières tentatives avec certains de dessiner la pyramide du matériel (pyramide droite, $\frac{1}{3}$ de cube), présentation de la pyramide tête en bas, ou couchée. Présentation par les élèves de leur tentative de dessiner une pyramides au tableau. Je termine par dessiner au tableau la pyramide $\frac{1}{3}$ de cube. Je demande aux élèves pour la prochaine fois de confectionner cette pyramide avec des tiges de bois (brochettes) et de la pâte à modeler (jointive). Le 15 juin (cinquième séance), en collectif au tableau noir, problème : dessiner l'octaèdre présenté en polydrons et sur la pointe; propositions de solutions au tableau. Je montre deux ou trois manières de faire. En clôture, je rappelle l'idée commune de tous ces procédés de dessins : dédoubler une face et relier les sommets. Je présente en transparent la figure 2.5 du livre de F. Lo Jacomo (ci-dessus), puis je parle de la 4^{ème} dimension et je les invite, en passant auprès de chacun, à feuilleter cet ouvrage). Deux élèves veulent relever une des planches qu'ils y trouvent. Récolte des bricolages des élèves.

Annexe 3 - Notes et précisions 2015

1° p. 222

La transformation de situation que je veux relater concerne le dessin et plus particulièrement le dessin commun d'un cube en perspective cavalière, puis la généralisation de ce procédé au dessin d'autres polyèdres produisant les signes supportant une première exploration du monde des polyèdres par des élèves de 4^{ème} année primaire dans l'enseignement spécialisé.

2° p. 222

On trouve une illustration de mes propos dans un ouvrage de F. Lo Jacomo (2002) intitulé : *Visualiser la quatrième dimension* et dont le sous-titre est : *Des images perçues dans les miroirs ũ à des objets mathématiques*. Ce livre repose sur une métaphore, celle du principe de dédoublement d'une figure de dimension n pour en trouver son correspondant en dimension $n+1$.

Or, en ce qui concerne le dessin d'objets 3D comme de cubes, c'est bien là que le procédé de perspective cavalière rend efficaces – perceptivement – des relations inefficaces : le doublement décalé de la face antérieure du cube et les traits de liaison de biais. Mais, à son tour, ce procédé considéré dans sa structure, dédoublement et traits de liaison, est ce qui rend conceptuellement efficaces des relations spéculatives concernant l'existence possible d'objets et d'un espace de dimension 4, en devenant signe de prolongement d'un espace à un espace de dimension directement supérieure. Ce signe peut déjà être évoqué comme passage d'espaces de dimensions familières : de la dimension 1 à la dimension 2, de la dimension 2 à la dimension 3. C'est justement ce qu'explique et illustre l'auteur. Sémiotiquement parlant, cet ouvrage montre qu'une fois bien identifié ce lien entre le niveau symbolique, à savoir les règles de tracé – règles de perspective - et le lien indicial - l'effet cognitivo-perceptif de volume obtenu – ce signe peut fonctionner comme une connaissance utile à l'exploration d'objets conceptuels.

3° p. 224

Dans mon observation une telle image a fait événement. L'effet perceptif de volume leur a indiqué que leur camarade avait quelque chose à leur apprendre.

4° p. 226

Un des commentaires de J. Giroux explicite mon propos :

Progressivement, le processus interprétatif des dessins produits engendre un nouveau signe : le dessin en perspective cavalière comme l'aboutissement d'une sémiologie. Individuellement, les élèves reprennent les différentes étapes de ce procédé. La très grande majorité des élèves réussissent ainsi, au cours d'une séance, à développer cette nouvelle habitude, au sens peircéen, du dessin du cube en perspective cavalière. (ũ) La première expérience qu'ils ont du dessin en perspective est généralement celle du cube. Il est possible que la «liaison» des carrés par les arêtes produise une image, plus précisément une «icône» au sens peircéen, dont la force du signe est justement de révéler un effet tridimensionnel et participe à l'émergence de la figure géométrique comme un signe interprétant marquant la relation entre le dessin et l'objet mental qu'est le cube. Ce signe, la figure du cube, peut alors se prolonger dans d'autres signes pour interpréter en tant que figures d'autres dessins de polyèdres. (J. Giroux, 2008)

5° p. 226

Comme je l'ai indiqué un tel développement sémiotique est celui que F. Lo Jacomo a exploité dans son ouvrage, quelques citations relatives aux premières figures proposées permettent la reconnaissance des questions mathématiques en jeu dans une telle situation. Dans son

introduction l'auteur présente et compare concept intuitif et concept physique de dimension pour enchaîner comme suit :

Mais rien n'empêche de créer encore un autre concept de dimension, un concept géométrique où on retrouve les angles et les distances. Certes, on ne pourra pas se déplacer physiquement dans cette quatrième dimension, mais on pourra la visualiser, tout comme on visualise les autres objets géométriques. Et c'est le défi que je me propose de relever dans le présent ouvrage : montrer que des objets mathématiques peuvent être visualisés, que même pour ces concepts qui ne se réfèrent à rien du monde matériel qui nous entoure, une image visuelle permet de mieux en faire le tour et en dégager les propriétés.

En réalité, je ne vous propose pas seulement d'étudier ces objets mathématiques, mais de les admirer ũ de contempler un beau concept mathématique, un hypercube ũ que dis-je un hypercube ! un hypericosaeŕe ũ

6° p 229

L'exploration faite avec les élèves présente une certaine analogie avec l'exploration de la quatrième dimension par le mathématicien telle qu'évoquée par F. Lo Jacomo dans sa conclusion :

J'ai voulu, dans cet ouvrage d'initiation, ouvrir une porte vers un aspect trop souvent négligé des mathématiques. J'ai vécu moi-même un moment très fort lorsque j'ai commencé à construire mentalement l'hypericosaeŕe. C'était en 1980, lors d'une randonnée à vélo en Finlande. Pendant une halte, je me suis précipité sur un papier et un crayon pour me rendre compte qu'ils ne m'étaient d'aucun secours, car je n'étais pas encore capable de dessiner les figures du présent ouvrage, je devais d'abord visualiser les objets que je construisais purement mentalement. Pour la première fois, les mathématiques prenaient une autre dimension en s'affranchissant de tout support écrit, et cette possibilité de visualiser mentalement des objets mathématiques, je l'ai ressentie comme une libération. A l'heure où l'on s'interroge sur l'avenir de notre enseignement scientifique, il me semble important de promouvoir la beauté de cette science en vous faisant partager, je l'espère, un peu de plaisir. Non, les mathématiques ne sont pas une enfilade de symboles abscons, et j'espère que le présent ouvrage abondamment illustré contribuera à donner à un assez grand public une autre image des mathématiques. (Op.cit., p. 118)

7° p. 230

L'idée de découpage est une métaphore au sens de Peirce. Il s'agit d'une exploitation parmi bien d'autres possibles d'un tel matériel. Un autre exemple fameux de matériel est celui du cube soma. Président à ce dernier d'autres métaphores que le découpage du cube : celle du puzzle et celle de la confection de pièces avec des cubes unités, tout comme on trouve des puzzles plans, le Tan Gram, ou des polyominos.

8° p. 231

Au cours de ces deux années, le travail avec elle s'était déroulé selon différents dispositifs, que je n'énumérerai pas ici. Dans le cas et le thème qui nous occupe, j'avais préalablement travaillé avec les élèves pris soit individuellement soit en groupe de deux sans que je m'occupe de proposer les mêmes choses à chacun. Durant tout ce temps, c'est-à-dire lors des activités précédentes, durant des activités elles-mêmes, entre les séances et après la dernière d'entre elles, il a été régulièrement fait référence aux polyèdres ainsi qu'aux quelques fiches d'exercices qui leur sont consacrées dans le manuel. Nous nous étions entendus, l'enseignante et moi-même, sur le principe que mes interventions et expériences en classe s'inscrivaient en parallèle à son travail ordinaire et qu'elle en profiterait pour faire faire à ses élèves les exercices du manuel concernant ce domaine. Ces fiches ne concernaient ni le dessin, ni les découpes du cube, ni une classification de polyèdres. Ces derniers étaient plutôt étudiés séparément les uns des autres et sans faire de lien avec le fait que leurs faces soient polygonales. Les relations entre les deux séries d'activités étaient laissées aux élèves et ne pouvaient se faire qu'à un niveau très général et global.

J'ai poursuivi l'activité d'exploration du matériel de cubes découpés en invitant les élèves (et leur enseignante) à représenter des objets qu'ils ne savent pas dessiner et en les mettant au défi de trouver des dessins permettant d'identifier chacun d'eux.

9° p. 233

La tâche demande aux élèves de produire un diagramme représentant ce matériel, c'est-à-dire un ensemble structuré de signes qui comportent trois niveaux de relations : **premièrement** une correspondance du dessin et du modèle matériel : dessiner sur modèle c'est contrôler que les traits du dessin correspondent à des éléments perceptibles du modèle; **secondement**, un parallélisme entre les correspondances qu'on peut établir entre les éléments matériels entre eux et celles de leurs dessins respectifs; **troisièmement**, les relations entre les traits qui composent chaque dessin de cube découpé.

10° p. 235

Ce signe acquiert une certaine autonomie vis à vis de la situation. Par le truchement du jeu entre principe de découpe appliqué au cube et formes rendues des morceaux obtenus qu'il est alors possible de voir sur le dessin. Je ne dis pas que pour autant tout le monde arrive à bien voir, mais c'est à ceci que tous s'essayent avec plus ou moins de succès. Cela est toujours possible même si ce n'est pas toujours effectivement fait.

11° p. 238

Pour rendre le volume les élèves avaient donc le choix soit entre des marquages particuliers, par exemple en épaississant le bord de leur carré, ou alors par le dessin du cube en perspective - en opaque ou en transparent.

Accepter de représenter un cube par deux de ses faces, comme dans la figure 10 est, à mon avis, la marque d'une grande abstraction. Cette production est, dans notre situation, « atypique » (au sens J. Giroux 2008). Sur le moment, personne d'entre nous, chercheur, enseignante ou autres élèves n'y a porté une attention suffisante - mis à part son auteur bien sûr. Il faut dire que ce dernier ne semblait pas s'être donné la peine de s'appliquer pour ses dessins, ses traits sont approximatifs. Pourtant ils témoignent d'une compréhension profonde du problème posé et la solution trouvée est admirable.

12° p. 241

L'auteur des figures 11 et 24, celui là même qui a introduit le procédé de dessin du cube en perspective cavalière n'arrivera pas à l'adapter pour dessiner le prisme triangulaire, Ce fut un autre élève qui l'aura trouvé. Cet événement n'aura échappé à personne dans la classe !

13° p. 248 précision.

Plus tard, j'ai demandé à l'auteur de la figure 20 de montrer au tableau noir à ses camarades comment il dessinait la pyramide renversée (sans modèle). Il a produit une pyramide à base pentagonale (pointue vers l'arrière) qui montrait donc quatre de ses arêtes. Je lui ai fait remarquer. Pour corriger la forme de la base, il a alors exécuté un nouveau dessin (figure 21) : base en forme de losange, sommet de la pyramide, liaison des coins de la base au sommet. Il se disait gêné par l'arête postérieure (cachée), qui coupait la base en deux et venait se confondre avec l'arête antérieure. Une discussion s'est alors engagée entre quelques élèves sur le moyen de rendre de la profondeur à ce dessin. Un de ses camarades a proposé d'inscrire

dans la base losange un plus petit losange (en couronne) et de relier les sommets de ces deux losanges (comme un enfoncement). Lui, il a tenté dessiner deux copies de pyramide en opaque, décalées et de relier les sommets correspondants (on trouve son dessin sur la figure 20). Sur la figure 21, on notera que la pyramide vue de dessus devient un tétraèdre.

14° p. 250

Finalement je leur ai indiqué deux manières de dessiner l'octaèdre selon des procédés analogues (dédoublément d'une figure simple, traits de liaison). Pour clore ces séances, je leur ai présenté et commenté la figure 4, en leur expliquant que le même procédé était à l'œuvre.

15° p. 252

Dire ceci introduit dans la relation un nouveau terme : *savoir dessiner*. Cela souligne que nous avons affaire à un diagramme puisque savoir dessiner suppose la maîtrise des relations entre nos tracés afin de les rendre signifiantes de celles que nous voyons ou savons de notre modèle. Le procédé permet de savoir un petit peu mieux dessiner, il comble en partie cette ignorance. Et il suscite des relations perceptives entre les traits du dessin lui-même. Jouer là-dessus permet de dépasser la bien fruste opposition entre dessiner ce qu'on voit et dessiner ce qu'on sait : le dessin est lui aussi un objet qu'on voit et dont on sait quelque chose.

16° p. 253

On peut alors non seulement représenter ce qui peut être perçu du modèle mais qui, du seul point de vue qu'on le dessine, reste caché, mais encore représenter des choses qui, de quelque façon qu'on tourne l'objet, ne peuvent être perçues parce que situées à l'intérieur du plot.

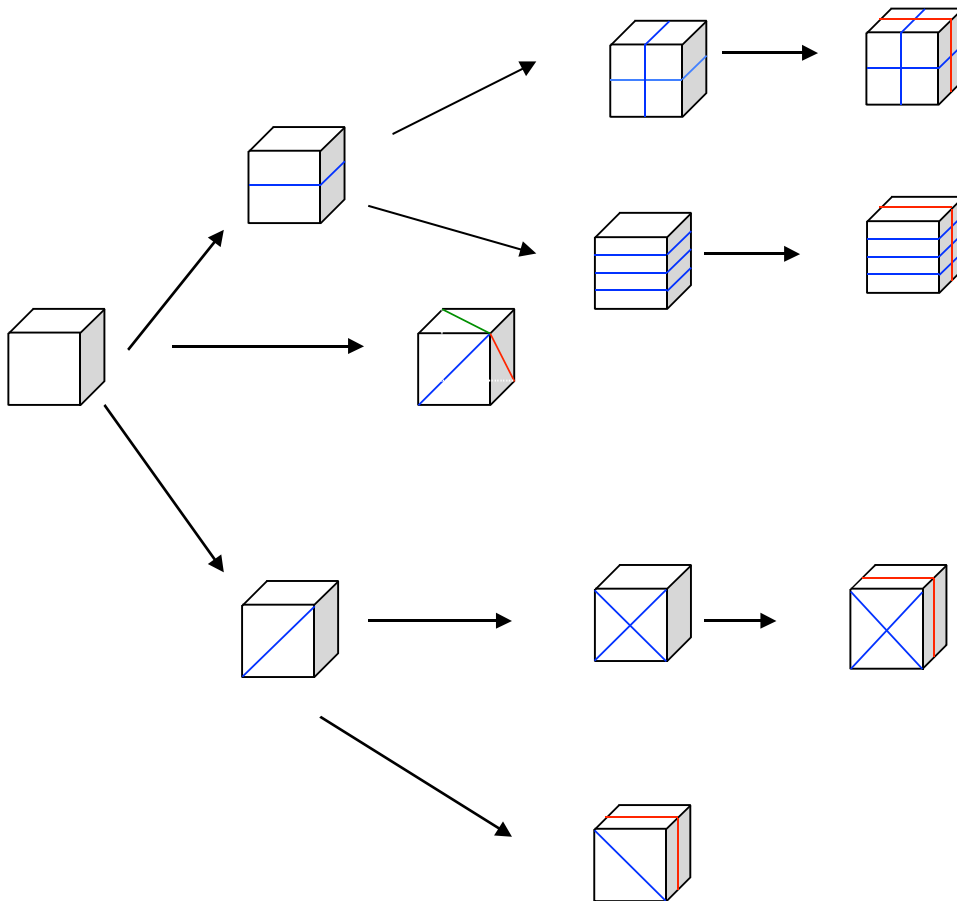
17° p. 254

Le dessin et l'objet, présent ou évoqué, ne se renvoient pas l'un à l'autre seulement sur un mode dyadique, cette relation enrichit la représentation de l'objet en faisant venir à l'esprit des élèves de nouveaux interprétants. Une fois le dessin fait, nous ne regardons plus tout à fait l'objet de la même manière et nous ne lisons plus notre dessin comme nous l'avions fait. La perception et la connaissance sont indissociablement liées dans une dynamique.

Annexe 4 14. 12. 2006

Clélia¹, voici des exemples d'images, de diagrammes et de métaphores.

Le premier est une planche que m'a faite une étudiante. C'est censé représenter un matériel fait de plots en bois.



Sur cette figure, tu vois des images de cubes dessinés de sorte qu'on ne voie pas à travers, en opaque, et comme si on les voyait légèrement de haut et de côté vers la droite. Il y a aussi des lignes dessinées, en trois couleurs, puis des flèches. L'ensemble n'est pas l'image de plusieurs cubes que l'on aurait disposés sur la table, parce que les cubes de droite devraient alors avoir une forme un peu différente, en fait chaque cube est dessiné comme si on le voyait de la même manière. Si je voyais deux cubes séparés, je ne pourrais les voir en même temps de la même manière parce que l'un serait plus à droite que l'autre, ou plus loin de moi que l'autre, il m'apparaîtrait plus petit, etc. Donc, comme tous les cubes sont dessinés de la même manière, cette planche qui représente des images de cube n'est pas l'image d'une collection de cubes.

De plus, il y a des flèches qui ne sont pas des images de choses, mais qui signifient aussi quelque chose. Et sans que je ne te l'aie dit, tu auras compris quelque chose avec ces flèches.

¹ À une de mes nièces qui avait 12 ans.

Elles veulent dire que les cubes ont quelque chose à voir entre eux. Ainsi si tu suis les flèches du haut, tu pars d'un cube sans ligne, puis apparait sur deux faces une ligne simple, puis une croix et une nouvelle ligne sur la face du haut, puis trois croix! Et en plus, certains cubes sont situés les uns en dessous des autres, ce qui veut dire qu'ils sont aussi comparables d'une certaine manière. Si tu suis la ligne de flèches du haut et la 4^{ème} ligne de flèches, alors il se passe presque la même chose dans les deux cas.

Ce n'est pas difficile de repérer tout cela : il suffit de *regarder les images et d'observer le diagramme*, et *d'imaginer une histoire qui raconte tout cela*. C'est ainsi que l'on fait des mathématiques.

Ainsi, tu auras déjà remarqué qu'il y a un cube qui est tout seul à gauche, qui n'a pas de traits. Il est comme le nom de famille des images : ce sont tous des cubes, et tous fait dans le même moule, ce sont des *répliques* de cubes.

Tu remarqueras aussi qu'il y a un cube au milieu un peu isolé, il n'y a pas de cube à sa droite, ni exactement au dessus de lui, ni exactement au dessous, cela veut dire que c'est un cube un peu spécial. C'est le *vilain petit cube* de la famille.

Tu as déjà vu aussi que parmi les traits certains sont droits et certains sont en diagonale, tu vois des traits sur une, deux ou trois faces des images de cube.

Une figure (une planche) qui représente un certain nombre d'images et qui nous invite à la comparer comme je l'ai encore fait, s'appelle *un diagramme*. Car cela représente des comparaisons entre différentes choses qui se ressemblent et ont des différences. (Le vilain petit canard ressemble assez à un petit canard pour qu'on le prenne pour un canard, mais il est différent des autres, puisqu'il est vilain. Il ne deviendra beau que lorsqu'il ne sera plus canard, mais cygne.)

Mais ces comparaisons nous racontent aussi une petite histoire. Cette histoire est celle d'un cube en bois, plein : *un plot*, (celui de gauche) que l'on aurait coupé en deux, une fois, puis deux fois, puis trois fois. On le coupe en le sciant bien droit. On peut le couper parallèlement à ses bords (on dit ses arêtes), ou en diagonale d'une face. Si on coupe une seule fois, on aura fait des moitiés (deux qui ont la même forme chacune). Tu remarqueras qu'on peut faire des moitiés de formes différentes, mais tu le savais déjà bien sûr. Puis si on rassemble les deux moitiés et qu'on les tient ferme ensemble et qu'on scie encore une fois en deux, on obtient des quarts, et si on fait encore une fois comme ça, on obtient des huitièmes. Bon on ne le coupe pas, parce que cela prendrait trop de temps et parce que cela ne serait pas aussi simple que je le dis, mais nous on s'en fout parce qu'on fait des mathématiques et pas du bricolage.

Je fais faire cela à des enfants (et des étudiants) avec de la pâte à modeler et un fil à couper la pâte à modeler (deux bouchons et un fil de nylon, parce que c'est la meilleure manière de couper de la pâte à modeler, elle ne se scie pas bien). Tu peux essayer, tu verras c'est amusant ce qu'on peut faire comme coupe. Surtout si tu coupes deux fois en diagonale, comme c'est indiqué justement sur ce cube qui est tout seul au milieu de la planche. Je te laisse la surprise de trouver ũ si jamais tu en as la curiosité, sinon tant pis. Saches seulement que les morceaux que tu obtiendrais ont été étudiés par les mathématiciens chinois, il y a fort longtemps, quand ils étaient, dit-on, mille fois meilleurs que les européens, les arabes et les indiens.

Ainsi donc cette planche illustre, c'est-à-dire **montre une image d'une histoire** (on dit aussi *métaphore*) d'un cube qu'on coupe, elle montre comment couper et **donne à imaginer** les formes que l'on obtient, et les relations entre ces formes (on peut ainsi obtenir les mêmes morceaux en suivant un autre ordre de coupe). Cela dit qu'un cube a plusieurs sortes de moitiés et plusieurs sortes de quarts, tout a plusieurs sortes de moitiés, et si une moitié de cube a elle-même plusieurs sortes de moitiés, alors le cube aura forcément plusieurs sortes de quarts car (sic) une moitié de moitié de cube est un quart de cube, et ainsi de suite.

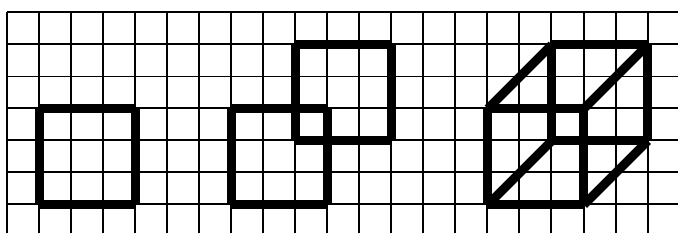
Ainsi notre histoire nous permet de comparer des coupes et des formes diverses. On peut par exemple voir avec cette histoire de coupe qu'on peut faire un cube en assemblant trois pyramides identiques. Cette histoire nous parle donc *des relations* qu'on peut voir avec tous ces plots. Cela peut aider à comprendre les fractions par exemple, et fraction veut dire morceaux, fractionner veut dire couper, et donc notre histoire de coupe est aussi une histoire de fractions. Ce matériel est une métaphore pour apprendre les fractions.

La planche donne une image de ces relations, on dit *un diagramme* parce que ce n'est pas une image d'un objet, ni même d'une collection d'objets, mais c'est une **image de comparaisons de différents objets. Et pour bien montrer cela, on a recouru à une image d'objets** que l'on a répétée (répliquée) plusieurs fois (en fait c'est le traitement de texte qui l'a dessinée cette image). L'étudiante qui a fait cette planche ne l'a pas trouvée tout de suite, elle a dû pas mal bosser pour y arriver. Car moi je lui avais laissé deviner que c'était une histoire de fractions de cubes. Elle reconnaissait les objets, avait compris quelques unes des relations qu'il y a entre ces objets, mais a mis du temps pour trouver l'histoire que toutes ces relations illustraient.

Voilà, dans mon langage, une image d'histoire est une métaphore, une image de relations est un diagramme et une image d'objet(s) est une image. Pour ne pas répéter trop souvent le mot *image*, je préfère dire : ***une icône d'histoire est une métaphore, une icône de relations est un diagramme et une icône d'objets est une image.***

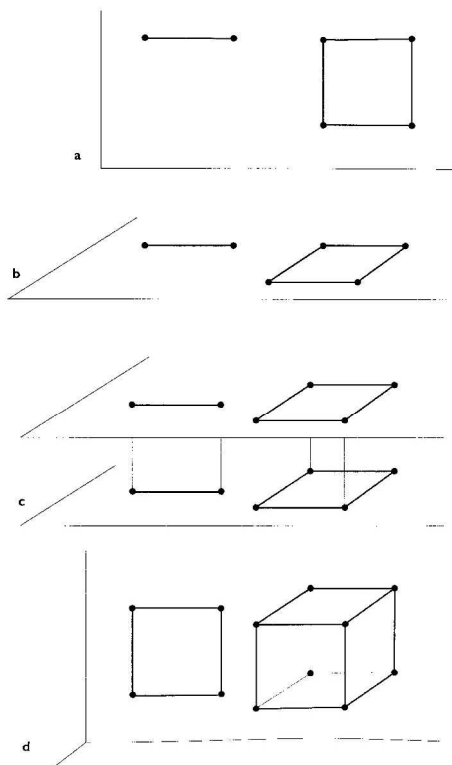
Une dernière chose puis des exemples qui pourraient t'amuser.

Une histoire parle toujours d'objets, de choses, d'animaux ou d'individus et elle dit des relations entre ces objets, ces choses, ces animaux, ces individus. Le Petit Prince parle d'un aviateur, d'un petit prince, d'une rose, d'un renard, de planètes etc. On ne peut pas raconter d'histoire sans parler de relations entre objets, donc on ne peut pas avoir une métaphore qui ne contienne pas des diagrammes et des images. Un diagramme montre des relations entre des objets, mais pour cela il doit montrer des images de ces objets. Donc une métaphore contient des diagrammes et un diagramme contient des images. Une métaphore est comme une poupée russe.



Ci-dessus, c'est un *diagramme*. Il comporte des *images*, des images de carré et une image de cube (tout à droite) ainsi que l'image d'un quadrillage. On lit ce diagramme de gauche à droite comme une bande dessinée. Les relations que cela montre sont un carré, deux carrés identiques au premier mais l'un décalé vers le haut et la droite, et ces deux carrés dont on a relié les sommets, ce qui donne, **surprise**, l'image d'un cube. L'histoire que cela raconte est celle d'une manière de dessiner facilement un cube (on dit en perspective cavalière) et le quadrillage est là pour faciliter la tâche.

Cette histoire se trouve dans un livre de mathématique qui nous propose de voir des objets qui auraient 4 dimensions ! (Pour bien voir ces figures il te faut imprimer les pages où il y a ces figures, et lire ce qui est écrit en tout petit). L'histoire raconte que si on veut dessiner un segment on dessine deux fois un point et on les relie, que si on veut dessiner un carré, on dessine deux fois un segment et on relie leurs sommets, que si on veut dessiner un cube, on dessine deux fois un carré et on relie les sommets et si on veut dessiner un hypercube, c'est-à-dire un cube en dimension 4 (que l'on ne peut pas voir mais qu'on peut très bien imaginer), il n'y a qu'à dessiner deux fois un cube et relier les sommets. Le livre te donne deux manières de le faire (tu peux repasser les traits qui sont presque effacés sur mon scan).



FIGURES 2.1. CONSTRUCTION DU CARRÉ ET DU CUBE
Construisons un carré et un cube...

L'HYPERCUBE

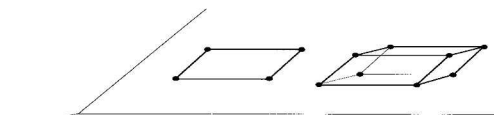


FIGURE 2.2. HYPERPLAN HORIZONTAL
... et basculons-les dans un hyperplan horizontal

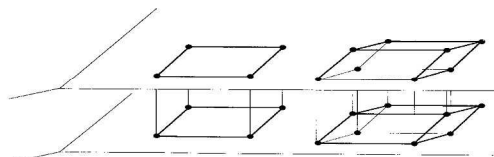


FIGURE 2.3. CUBE ET HYPERCUBE
... cela permet de construire un cube et un hypercube

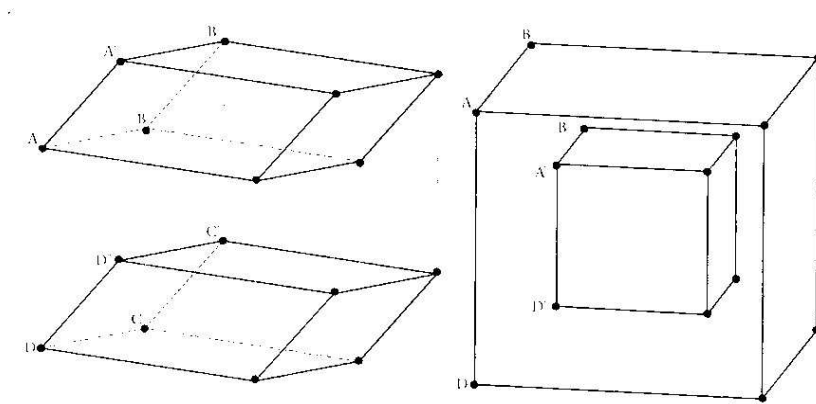


FIGURE 2.5. AUTRE REPRÉSENTATION DE L'HYPERCUBE

... l'hypercube admet lui aussi plusieurs représentations. C'est celle de droite que nous utiliserons désormais.

Avec les élèves, j'essaie de deviner les histoires que les élèves racontent avec leurs dessins en mathématiques, puis je discute avec eux pour savoir si j'ai bien ou mal deviné ou si nous ne pouvons pas raconter encore une toute autre histoire. Et d'histoires en histoires, c'est ainsi que nous travaillons et apprenons les mathématiques. Car les maths, c'est comme les histoires, c'est sans fin. Bien sûr nous aimons les histoires drôles, mais encore plus celles qui nous apportent plein de surprises. Surtout celles qui nous font passer d'une dimension à l'autre.

Tiens voici comment un élève de 4ème primaire a dessiné le matériel de cubes décrit par la planche de la page 1. Il a utilisé le truc pour dessiner les cubes en perspective, puis a mis les traits de coupe. Si tu regardes bien les dessins, tu y verras des trucs marrants. Tu peux essayer de deviner comment sont les lignes que feraient la scie si on coupait comme il nous l'indique.

Puis je t'ai copié d'autres histoires. J'ai mis très longtemps pour trouver ce que les élèves y avaient dit. Ces dessins sont tous un peu curieux, c'est que j'aime, parce qu'il comportent quelque chose à comprendre. Comme j'aime comprendre, j'aime les choses un peu mystérieuses.

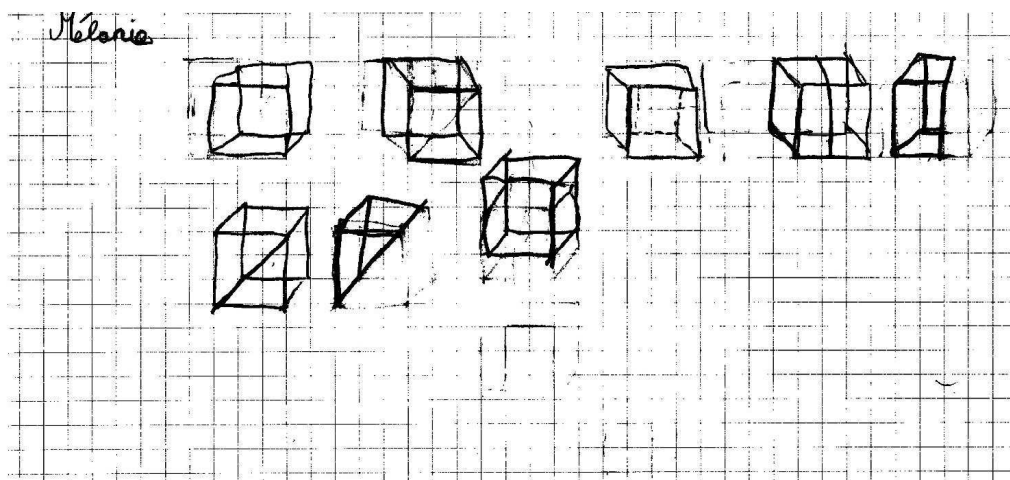
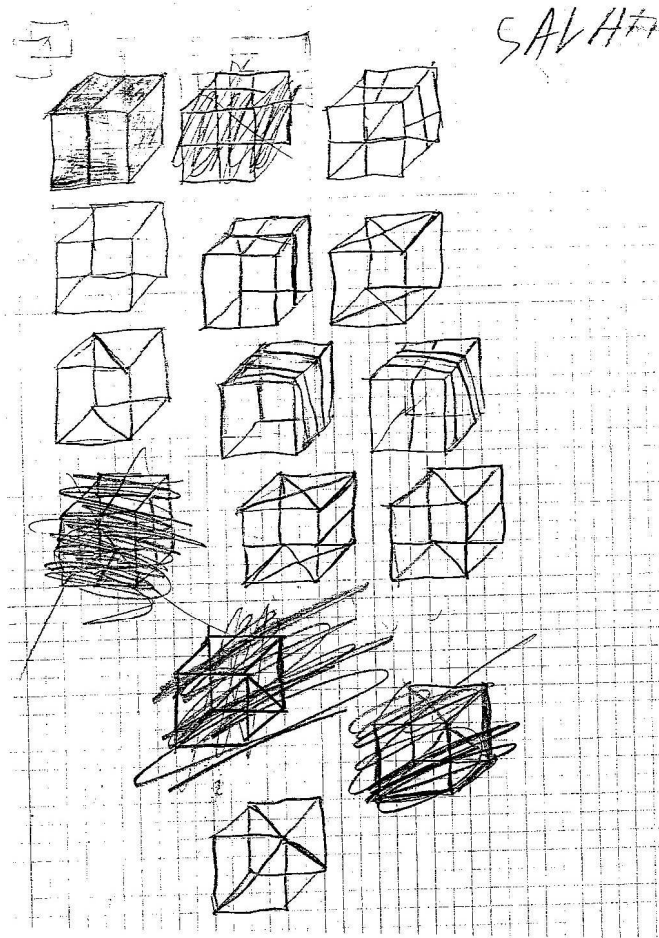
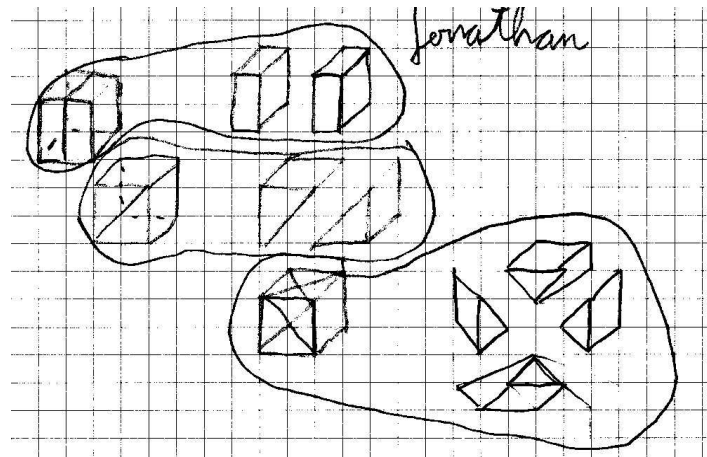
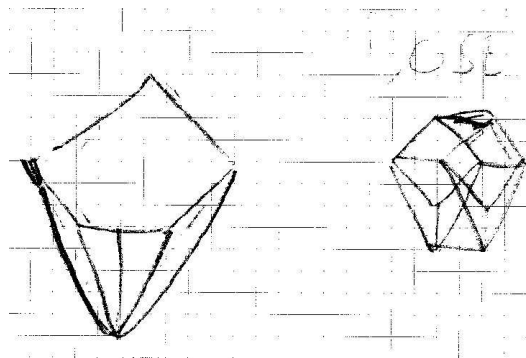


Diagramme avec cubes à moitié effacés pour représenter des moitiés de cubes.
 Mélanie était un peu coquine, elle a eu plein d'idées aussi originales.



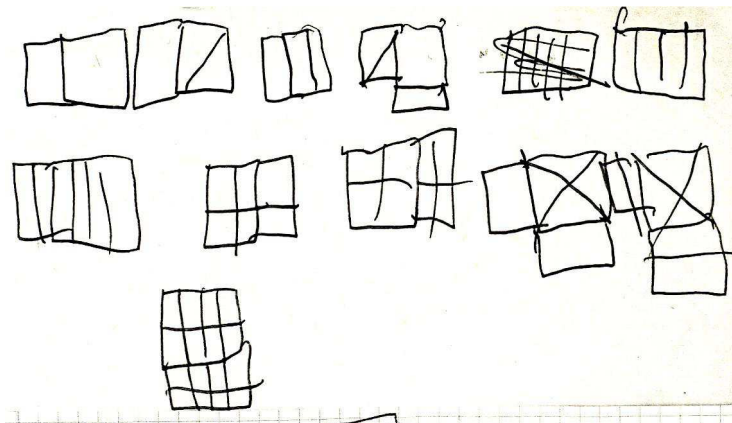
Dessin des portions « éclatées ».

Ci-dessus, tu dois bien regarder le dernier cube, coupé en quatre et éclaté, c'est pas mal essayé (mais faux). Personne n'avait demandé à cet élève de dessiner une chose aussi « compliquée ».

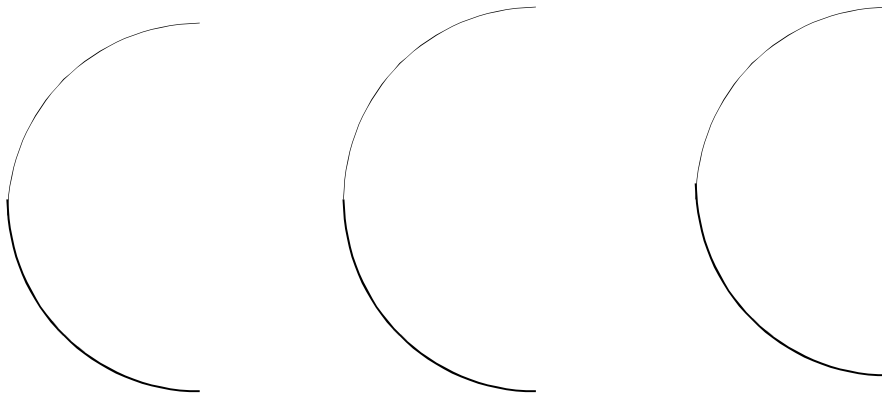


A droite, dessin de deux pyramides reliées entre elles, comme pour une hyper pyramide. Lui c'était le passionné des mondes 3D, 4D et des pyramides.

Voici pour finir, le dessin de l'élève le plus intelligent de la classe, c'est aussi un dessin assez vilain. Il représente presque tous les cubes de la planche de la page 1. J'ai mis très longtemps à comprendre que c'était un dessin super intelligent. Pour cela j'ai dû beaucoup réfléchir et à plusieurs reprises. Je savais que son auteur était un fortiche, mais cela ne m'a pas aidé pour comprendre ce qu'il avait pensé. Et puis on avait l'impression que cet élève ne se donnait pas la peine de bien dessiner, ũ mais bon, comme il avait suffisamment compris cette histoire qu'est-ce qu'on pouvait lui dire?



Maintenant toute autre chose, c'est aussi une métaphore, cela s'appelle un RÉBUS, il est en italien, je le trouve génial.



Semicherci, non C, sono <-----> Se mi cerchi non ci sono

Ce sont des demi cercles, non des C <-----> Si tu me cherches, je n'y suis pas.

François