



HAL
open science

SAVOIRS A PERTE DE VUE

François Conne

► **To cite this version:**

| François Conne. SAVOIRS A PERTE DE VUE. 2006. halshs-01114874v2

HAL Id: halshs-01114874

<https://shs.hal.science/halshs-01114874v2>

Preprint submitted on 12 Feb 2015 (v2), last revised 18 Feb 2015 (v3)

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

SAVOIRS A PERTE DE VUE

François Conne

9 avril 2006¹

RESUME

Dans *Preuves et Progrès en Mathématiques* (Bulletin Inter-Irem, 21, 1995, p. 8), W. P. Thurston pose la question suivante : « Comment les mathématiciens font-ils progresser la compréhension des mathématiques ? »

Pour moi, une question didactique y fait écho : L'idéal d'un enseignement des mathématiques n'est-il pas de laisser les mathématiques enseigner ? Ou, dit autrement, comment d'*élève en* mathématiques on devient *élève des* mathématiques ? Au fil de mes recherches, je l'ai déclinée de diverses manières, et s'en sont suivies beaucoup d'autres. Par exemple : Quelles mathématiques sont-elles susceptibles de le faire ? Ou encore : Si en classe ce sont les mathématiques qui enseignent, ne le font-elles pas tout autant aux professeurs qu'aux élèves ?

Savoirs à perte de vue décrit comment, sur la base de cette question, j'en suis venu à m'engager dans la recherche en didactique des mathématiques. J'y précise ensuite comment une question si générale a servi de cadre à une problématique de recherche portant sur l'enseignement de la géométrie à l'école primaire. Cela introduira le lecteur intéressé à un autre article : *Quelques pas esquissés dans l'univers des polyèdres* (Conne F. 2006), qui relate comment l'apprentissage d'un procédé schématique de dessin de cube en perspective cavalière introduit les élèves d'une classe spécialisée dans l'univers des polyèdres et les fait élèves de ces mathématiques là.

MOTS CLES

Mathématiques, didactique, perspective pragmatiste, savoir, ignorance, signification, conception, possible, enseigner, habitude, expérience, intuition, imagination, Peirce.

POSITION EPISTEMOLOGIQUE

En question

En hommage à Gisèle Lemoyne, je voudrais exprimer explicitement ce qui a motivé, il y a plus de trente ans maintenant, mon choix pour la recherche en didactique des mathématiques (à l'époque en Suisse romande on disait : *psychopédagogie des mathématiques*). Je m'étais engagé dans des études de mathématiques avec la ferme intention de me consacrer à la recherche en mathématiques. Au milieu de mes études, dans une période d'intense travail, j'ai été entraîné par quelques camarades à assister à une conférence donnée au CERN² par A. Grothendieck³. Je ne me suis jamais remis du choc reçu.

¹ Texte écrit à l'occasion du colloque « Les difficultés d'apprentissage en mathématiques : une problématique en transformation depuis 30 ans. Hommage à Gisèle Lemoyne », congrès de l'ACFAS, Chicoutimi, 10-11 mai 2005. La date du 9 avril 2006 est celle de la rédaction du texte. Il constitue le propos introductif de la première version du texte « Quelques pas esquissés dans l'univers des polyèdres. Suivi de situations de dessin en 4^{ème} primaire de l'enseignement spécialisé. » (Conne, 2006)

² Organisation européenne pour la recherche nucléaire.

³ Note 2015 : Pour en savoir plus sur A. Grothendieck <http://images.math.cnrs.fr/> Pour écouter la conférence : <http://www.youtube.com/watch?v=ZW9JpZXwGXc> .

La première conséquence, quasi immédiate, fut que je me détournais définitivement de ce qui jusqu'ici avait été mon projet – et ce ne fut pas une mince affaire puisque j'abandonnais une perspective que j'avais choisie dès ma prime adolescence. La seconde conséquence, bien plus lente à se décider, fut que je m'orientais vers la recherche sur l'enseignement des mathématiques. Si je puis dire, l'interprétant immédiat de la conférence d'A. Grothendieck fut cette question : **Quelle signification cela a-t-il de savoir les mathématiques ?** Deux ans et demi plus tard, les sémoses développées m'ont incité à chercher activement la réponse dans l'étude de ce qui se passait dans l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques à l'école obligatoire. J'ai décidé de le faire prioritairement chez de jeunes élèves, pour la raison qu'avec eux l'écart était tel que je ne pourrais me dérober.

J'avais bien perçu la question dans toute sa généralité dans les propos d'A. Grothendieck dont le cœur de l'argumentation portait, à ce que je m'en souviens, sur deux piliers essentiellement :

a) une analyse critique du rôle idéologique, social, politique des mathématiques et de la recherche scientifique ;

b) une analyse critique des rapports humains qu'instaurait la pratique ésotérique et sophistiquée des mathématiques et de la science : à tous les échelons, une hiérarchie très sensible entre ceux qui savent et ceux qui ignorent.

Bien que A. Grothendieck n'ait pas vraiment abordé la question de l'enseignement et de la place qu'occupent les mathématiques dans l'enseignement obligatoire, elle était en germe dans tous ces propos et cela ne nous avait pas échappé.

Quelle signification cela a-t-il de savoir les mathématiques ? Au début, j'ai eu la conviction que toute signification que je pourrais trouver pour autrui serait liée à celle que je serais à même de trouver pour moi. La réponse à la question générale dépendait donc de la réponse que je pourrais y trouver moi, pour moi-même. Tout ne pouvait commencer que par là et nulle part ailleurs. Pourtant, j'avais beau tourner et retourner mes arguments dans ma tête et nos discussions, j'étais bien en peine de répondre. J'ai alors pris mon parti de considérer les choses autrement, non plus faire de ma réponse personnelle un préalable à celle de la question générale, mais lier les deux. Ma réponse personnelle serait à la mesure de ma réponse générale (et vice et versa). Je n'avais alors plus qu'à m'engager de front sur deux grands voyages d'instruction : poursuivre un examen de conscience qui soit celui d'un explorateur de ce que pouvait bien être l'enseignement des mathématiques à l'école.

Le professeur pragmatiste

Quelle signification est-ce que cela peut bien avoir que toi, François, tu saches les mathématiques lorsque tu visites cette classe de première primaire, dans ce faubourg lausannois, cette vingtaine d'enfants, leur institutrice et toute l'artillerie qui soutient leurs pratiques ? À l'occasion de ce qui allait devenir mon travail de thèse, je me suis rendu compte que ces significations que je cherchais seraient celles que je pourrais donner au savoir mathématique⁴ et que ces significations concernaient tout autant les élèves, leur institutrice que le projet social lui-même. Il en découlait une nouvelle question : *quelles possibilités procurent pour l'enseignement les écarts entre les savoirs des acteurs de la classe (élèves, professeurs, concepteurs de moyens et de méthodologies, chercheur, ũ) ?* Ceci me permettait de retourner le second argument d'A. Grothendieck dans un sens pragmatique.

Pour ce faire, examinons ce commentaire de B. Morand (2004, p. 50-51). Il commence par rappeler la célèbre maxime du pragmatisme de Peirce

« Considérer quels sont les effets pratiques que nous pensons pouvoir être produits par l'objet de notre

⁴ Il n'y a donc rien d'étonnant que parti sur cette base je me heurte de plein fouet aux questions de transposition didactique.

conception. La conception de tous ces effets est la conception complète de l'objet. » (C.P. 5.18, publié initialement en Français dans la Revue Philosophique, janvier 1879.)

et poursuit :

En effet le pragmatisme ne peut être pris au sens ordinaire du mot tel qu'on peut le trouver aujourd'hui dans sa forme adjectivale en Français : « pragmatique », une variabilité qui s'adapte aux situations (soit une source d'opportunisme et d'éclectisme). Dans le contexte peircien, il s'agit de l'inverse d'une habitude, « un mode d'agir non pas seulement dans telle circonstance probable, mais dans toute circonstance possible, si improbable qu'elle puisse être » (C.P. 5.18). Il s'agit donc d'une régularité active qui gouverne une conduite lors de la survenance d'événements ultérieurs. La non-conformité de ces futurs événements pourra alors initier une nouvelle conception. La thèse pragmatique implique par conséquent une conception de la Vérité comme celle d'un pur espoir dont le contenu ne peut être atteint que par une communauté de recherche et seulement de manière tendancielle, soit par approximation successives.

En adoptant une perspective pragmatiste, l'analyse critique de A. Grothendieck sur les méfaits d'une hiérarchie fondée sur des savoirs de plus en plus ésotériques prend une autre allure. Considérons ce que serait un savoir mathématique complet - une habitude donc, qui, bien entendu n'est jamais atteinte par personne, mais dont les plus savants s'approchent le plus⁵. Considérons en outre ce savoir comme point de mire, un horizon qui borne l'espace dans lequel chacun se meut. La dissymétrie entre personnes, et ce tout particulièrement dans les relations d'enseignement, n'est plus un écart sur une même ligne, mais se triangule dans l'espace ainsi délimité.

Ceci peut être mis à profit par chacun, le moins ignorant comme le moins savant, pour rendre son savoir plus complet. **L'échange didactique ne procède plus tant d'un savoir que le savant communiquerait à l'ignorant mais de cheminements momentanément convergents.** Lorsqu'elles se produisent, les rencontres entre individus se font en aval de leurs parcours respectifs. Pour reprendre les termes de B. Morand, le professeur aura souci de placer ses élèves dans des circonstances favorables à l'adoption de tel ou tel mode de conduite, puis de les préparer à affronter telles ou telles situations parmi les plus probables. Selon leur mode propre d'appréhender les situations auxquelles ils seront confrontés, les élèves ne manqueront pas d'opposer quelques résistances à cette entreprise. L'enseignant peut attribuer exclusivement ces difficultés aux contraintes circonstancielles de l'exercice de son enseignement (et en particulier à certaines particularités de ses élèves). Toutefois il peut aussi les rapporter, du moins pour une partie, à l'incomplétude de son propre savoir relatif à ce qu'il enseigne. Cela revient à ce qu'il considère tant ses difficultés à enseigner que tout ce qui ne manquera pas de lui échapper comme *certaines de ces circonstances improbables auxquelles son savoir, s'il avait été complet, l'aurait d'emblée habitué à répondre*. La non-conformité de ces événements d'enseignement pourra alors initier une nouvelle *conception*⁶. Le voilà ainsi engagé dans un parcours pragmatique seul à même de déterminer toujours plus ce que signifie *savoir les mathématiques*. Dans une perspective pragmatiste, personne n'est jamais assez savant pour être assuré de connaître d'avance tous les accès à ses propres savoirs. En d'autres termes, le professeur pragmatiste ne sait jamais par où l'élève passera pour le rejoindre et le dépasser. Personne ne pourra jamais soupçonner tous les raccourcis.

L'horizon toujours se dérobe

⁵ Bien entendu c'est ici à une spéculation que je vous invite, et je le fais à la manière dont les mathématiciens le font dans leurs raisonnements. De ce point de vue on ne dira jamais assez que la spéculation présente aussi quelques vertus et je trouve que les mathématiciens sont bien trop discrets sur la question.

⁶ Je me tiens aux termes de Peirce. Ici j'interprète « conception » comme « mise en concept » dans un sens voisin de celui de « compréhension » en logique.

Si le savoir tend à l'habitude, n'est-ce pas vers ceci qu'il faut amener l'élève à se mouvoir et ne devons-nous pas commencer par nous contenter de *modes d'agir dans des circonstances probables* (nous retrouvons ici un des paradoxes du contrat), de savoirs partiels provisoires incomplets ? Oui bien sûr comment pourrions-nous faire autrement ? Mais alors comment éviter de retomber dans l'impasse signalée par A. Grothendieck ? Et si cela est inévitable comment se fait-il alors qu'à ma connaissance aucun didacticien, aucun pédagogue, aucun philosophe personne n'a sérieusement pensé les différences et écarts de savoirs entre collaborateurs⁷ ? Ma réponse tient en ceci que personne n'atteint jamais l'horizon⁸, il se dérobe. Penser ces écarts commence par bien comprendre que ce ne sont pas des écarts entre repères absolus, mais que ce sont des écarts entre entités relatives et que par conséquent on ne saurait réduire ces écarts à des écarts de savoir(s) comme s'ils n'étaient pas tout autant des écarts d'ignorance(s) ! Ainsi donc : ne préjuger ni du savoir ni de l'ignorance ; ne pas se suffire de la perspective de savoir, un jour, plus tard ; ne pas se payer d'espoir et encore moins d'un espoir placé en quelque communauté que ce soit, (ne serait-ce pas en effet une sorte d'*avenir radieux* ?), mais, au contraire, n'accepter ces nécessaires limitations que pour mieux considérer **avec elles** ce qui leur est extérieur : qu'est-ce qui fait que ce savoir – cet interprétant – que je destine à l'élève ne saurait être un *mode de conduite* en toute circonstance possible ? Que pourrais-je faire de *modes de conduite* de l'élève en des circonstances non envisagées par les savoirs partiels que je lui destine ? Comment rapporter ce cheminement qui est le sien et que je ne connais pas au lieu où je voudrais qu'il se rende ? Bref, quelle ignorance accompagne nécessairement tel savoir dès le moment où je le considère ainsi comme local et provisoire ?

Il y a là une triade didactique intéressante qui dans tout projet d'enseigner tel ou tel savoir particulier met en relation **savoir, ignorance et quête de significations**. Il en résulte non pas une opposition telle que le savoir vient à réduire l'ignorance et l'ignorance vient contrecarrer l'apprendre, ni même les marques d'une dissymétrie telle que l'enseignant enseigne ce qu'il sait déjà et que l'élève ignore encore mais, bel et bien, la relation de l'ignorance de l'élève à celle de l'enseignant (ou la nôtre en tant que «chercheur»), c'est-à-dire une de ces circonstances possibles (même si improbables) à laquelle nos savoirs ne répondent pas déjà, eux qui ne sont pas encore conception complète de leur objet.⁹

Ainsi donc ma question ne vaut que pour sa portée. Du point de vue didactique, la signification de savoir les mathématiques tient à ce que l'enseignement me fera apprendre, à ce plus qu'il me donnera à connaître comme si le savoir enseigné était aussi : *something by teaching which we know something more*¹⁰.

Signification des savoirs comme indices de sémioses.

Ma position épistémologique procède de l'idée que je n'ai aucune prise sur la totalité du système que j'étudie. Tout ce que je puis faire pour la connaître réside en actions très partielles et particulières et en considérer très localement les effets. Il s'agit donc pour moi de choisir mes entrées, et de voir ce que cela donne. L'entrée qui sera la mienne dans cette communication¹¹ sera cette question : que signifie savoir les mathématiques pour un chercheur en didactique des mathématiques sur le terrain de l'enseignement spécialisé ?

⁷ Dans le *Ménon*, Platon esquivait la question, tout comme Piaget le fait en ramenant tout à des facteurs de maturation de l'intelligence.

⁸ L'article défini suggère l'unicité car il n'y a pas deux horizons (ni plus). Quand on parle d'un autre horizon, c'est que le précédent s'est déjà évanoui.

⁹ Ici je rejoins totalement la perspective de recherche inaugurée par J. Giroux en s'intéressant aux conduites atypiques (Giroux 2008).

¹⁰ Paraphrase de la définition de « signe » par Peirce : « ũ something by knowing which we know something more » C.P. 8.332.

¹¹ Cf. note 1.

Avant d'examiner ceci sur les faits rapportés dans l'article, voici comment je rattache ma question à la sémiotique de Peirce. Prenons une des citations les plus fameuses de Peirce. N. Everaert Desmedt (1990) choisit cette version :

La signification d'un concept est la somme de ses effets possibles sur la conduite (C.P. 5.9).

Tandis que B. Morand en propose une autre.

Considérer quels sont les effets pratiques que nous pensons pouvoir être produits par l'objet de notre conception. La conception de tous ces effets est la conception complète de l'objet. (C.P. 5.18, publié initialement en français dans la Revue Philosophique, Janvier 1879). (Morand 2004, p. 50)

Examinons cela sous une perspective didactique. Les idéalités que sont les objets mathématiques sont dénués de significations propres, et justement en ce sens qu'ils forment des systèmes clos¹². S'ils sont inatteignables ce n'est pas parce qu'ils seraient points limites, mais bien plutôt parce que cet ordre de choses est un ailleurs.

La conception qu'on en a, la signification qu'on leur attribue, toutes ces questions pragmatiques, ne les concerne pas tant eux que nous : je dis qu'elles concernent l'ordre de nos savoirs. C'est alors seulement que cela peut avoir une signification de parler d'approche tendancielle, de points limite, etc.

Les discours didactiques font grandement référence aux significations des savoirs, qui ne sont que des attributions, certes plus ou moins partielles. Serait-il alors possible de paraphraser Peirce et écrire :

Considérer quelles sont les significations que nous attribuons à l'objet de notre savoir. Le savoir de toutes ces significations est le savoir complet de cet objet¹³.

On aurait envie de répondre que non. Pourquoi ? Parce que le savoir se donne plutôt comme une habitude : « *un mode d'agir non pas seulement dans telle circonstance probable, mais dans toute circonstance possible, si improbable qu'elle puisse être* » (C.P. 5.18) et une habitude qui prise en défaut nous oblige à réviser notre conception, c'est à dire nous force à apprendre. On voit donc bien qu'apprendre et savoir sont de l'ordre du pragmatique. Les savoirs sont des interprétants dynamiques.

Mais dans ce procès, les significations que peut prendre un savoir ne sont jamais par avance déterminées, savoir un objet c'est savoir lui attribuer telles ou telles significations, ou encore savoir l'engager dans telle ou telle sémiuse. (En vertu de quoi, apprendre ne peut donc que s'appuyer sur le savoir). Le savoir n'est pas un système complet de significations, celles-ci restent potentielles, possibles, aussi improbables qu'elles puissent être. Elles sont donc quasi synonymes du terme *circonstance* dans l'expression de Peirce. Dit autrement les significations ne sont pas des objets de notre conception mais ne sont que les effets des mises en relations que, par son truchement, celles-ci opèrent.

¹² De mon point de vue, c'est la place qu'ils occupent en ce système qui en fait le sens.

¹³ Que l'on comprenne bien le propos, non pas idéaliste, mais procédant d'une hypostase, afin de s'essayer à nous penser en regard de quelque horizon de connaissance. Ainsi, selon ma dernière paraphrase, on ne sait et ne saura jamais complètement un objet. Notre savoir n'est jamais que partiel, dans les limites des quelques significations de notre conception. On se contente de cela et il y a ici une sorte de pari pragmatique qui justement laisse sa part à l'ignorance. A priori personne n'est tenu à savoir un objet et encore moins à en savoir plus qu'il n'en sait déjà. Il y est seulement invité et si la dévolution prend, s'y trouvera engagé. Chercher à en savoir plus est une quête de significations, non pas une quête de l'objet per se, mais de relations entre cet objet et d'autres.

Je disais dans S&C (Conne, 1992) que *savoir était savoir se mettre en situation*, id est se confronter à telle ou telle circonstance, et que pour cette raison *le savoir était d'emblée enseignable*. Ma paraphrase est donc à corriger comme suit :

*Considérer quelles sont les significations que nous attribuons à l'objet de notre savoir.
La conception de toutes ces significations est ce que signifie savoir cet objet.*

Le savoir est plus un accomplissement qu'un cumul, et s'il couvre une étendue, ce n'est que comme une carte qui, en *couvrant* un territoire, y donne accès au voyageur.

OUVERTURES

Possibles

Cette communication est centrée sur un événement, inattendu, qui s'est produit dans une classe de l'enseignement spécialisé de niveau 4^{ème} primaire¹⁴. Cet événement et les suites qu'il aura connues sont pour une part fortuits, contingents, inattendus sinon surprenants. Cette communication relatara une prise au vol d'un tel événement qui sur le moment s'est entrelacé avec un suivi de réflexions après-coup, entrelacs qui, la vie suivant son cours, va se défaisant de plus en plus, pour laisser la place à une simple narration.

Mais à quelle fin ? L'objet de ma communication est l'idée de possibilité, c'est ce dont je veux avant tout vous entretenir, les explications, les considérations sur le pourquoi et le comment des quelques événements relatés seront ici secondaires, au service de mon propos principal. Dans notre cas il y en a plusieurs qui concordent, et cette concordance fait aussi partie du possible : la possibilité de l'événement déclencheur, la possibilité de sa prise au vol par le chercheur, la perspective d'un apprentissage que cela ouvre pour les élèves, elle-même liée à cette possibilité d'imaginer conceptuellement les choses mathématiques telles qu'un mathématicien a voulu l'illustrer sur l'exemple de l'hypercube et autres polytopes en dimension 4. Ainsi donc, et pour parler le jargon de la sémiotique de Peirce, je choisis comme fil de ma narration une chaîne de possibles, tels seront mes interprétants, telle est la sémiose à laquelle, je vous invite. Puisqu'il est question des idées de C. S. Peirce, disons tout de suite ceci. Je m'intéresse à sa logique des relations, à sa sémiotique à sa phénoménologie¹⁵ comme un soutien à l'ouverture. Il est une chose de rechercher l'ouverture et d'en profiter occasionnellement, il en est une autre de pouvoir allier ouverture de pensée et ouverture à l'expérience. Voilà pour moi où se situe le progrès. Il s'agit d'une triade liant les mises en relations dans lesquelles tant la pensée d'un côté et l'expérience de l'autre nous entraînent. L'ouverture consiste justement en ce que ces mises en relation ne tournent pas à vide dans leur propre domaine, mais ouvrent les unes sur les autres : la pensée sur l'expérience, l'expérience sur la pensée. Je n'ai plus à être convaincu par la portée et la puissance de la logique triadique (si vous me permettez cette expression) proposée par Peirce.

Imagination, expérience et expérience imaginative.

L'habitude, interprétant ultime et savoir complet couvre donc, par principe, toute éventualité, clôt tout le possible imaginable. Pour parler comme les peirciens c'est alors un pur fait, fermé sur la relation dyadique circonstance - conduite (on peut le rapprocher de l'idée d'invariant).

¹⁴ 9-10 ans.

¹⁵ Il me paraît difficile de démêler tout cela. Ma rencontre avec la philosophie de F. Gonsseth, que ce dernier appelait philosophie ouverte, avait déjà eu pour moi cet effet de catalyse. Je m'étais d'ailleurs appuyé sur cet auteur pour justifier le caractère volontairement indéterminé que je donnais au terme « utile » dans ma définition du savoir. Il y a là une convergence indéniable entre la pensée de F. Gonsseth et celle de C. S. Peirce (ce qui est discrètement signalé dans mon article de 1992). La philosophie de Peirce me permet de développer et d'étayer une telle recherche.

L'élaboration des savoirs ne procède pourtant pas par simple cumul, ni par assemblage de briques des habitudes partielles contractées au fur et à mesure de nos apprentissages, études et recherches. Le progrès ne procède pas non plus par simple substitution de nouveau à l'ancien, mais il se produit par généralisations et ces dernières opèrent toujours des remaniements. Ces ouvertures ne se traduisent pas uniquement par des développements mais induisent aussi des refondations. Pour prendre une autre image, l'arbre déploie tout autant ses racines que ses branches.

S'offrent alors de nouveaux accès aux savoirs, et les élèves, incités par la culture ambiante n'attendent pas l'école et le bon vouloir de leurs enseignants pour les emprunter. De nouvelles possibilités, de nouvelles éventualités, de nouvelles opportunités viennent contredire l'ordre que nous attribuons aux savoirs, et par là bousculer nos habitudes didactiques. Comment est-ce possible ? Quoi est alors possible ? Ce sont là des questions tout à fait légitimes et pertinentes que se sont posées les réformateurs des années 60 avec les *mathématiques modernes*. Si leurs réponses n'ont pas été satisfaisantes, leurs questions restent, et pour moi elles sont même d'une très grande acuité. Comme je l'ai dit plus haut, ici se trouve la contribution des questions didactiques à notre quête du savoir et plus généralement aux questions épistémologiques.

L'enseignement vise à élargir pour les élèves le domaine des possibles. L'argument d'un tel mouvement s'engage sur trois fronts triadiquement liés, le premier donnant forme au possible, le second donnant une réalité à cette forme, le troisième générant les transformations de cette réalité :

- a) Ouverture par la pensée (~ image) : la confrontation à des tâches indéterminées, ce qui met l'imagination des élèves à contribution.
- b) Ouverture par l'expérience (~ diagramme) : l'élargissement de ses possibilités suite à l'acquisition et l'exercice de nouveaux savoirs. Dans ce cas les possibilités nouvelles sont déjà toutes déterminées par les savoirs en question ; l'imagination des élèves est relativement peu sollicitée, sont induites plutôt les relations et les règles qu'ils tirent des reprises et répétitions de tâches analogues.
- c) Ouverture par expériences de pensée (~ métaphore) : celle là même qui préside à imaginer les expériences à faire, et surtout anticiper une forme aux résultats possibles¹⁶. Pour le moment cette ouverture là, je la fais pour moi-même, je puis, par mes narrations y inviter mes lecteurs mais je ne sais pas la réaliser en situation, bien que je puisse témoigner que les élèves s'y adonnent parfois.

Intuitions

Mettons en perspective deux citations. La première est un propos de Lucienne Félix, et date de 1951, (*Le premier enseignement de la géométrie*, Cieam 1951, in *Réflexions d'une agrégée de mathématiques au XXème siècle*, p. 166, L'Harmattan, 2005) :

Je crois que la bonne méthode ne consiste pas à ignorer le contenu intuitif de la pensée de nos élèves, ni à faire semblant de l'ignorer pour ne pas en tenir compte, ni à leur interdire d'y faire allusion. Au contraire la franchise doit régner, et puisque au stade logique il faudra bâtir une construction déductive sur cette base intuitive, il faut assurer la solidité de celle-ci.

¹⁶ Ce sont des expériences de pensées qui président à l'élaboration de tout jeu de tâches, puisque le fondement de cette idée est justement de dépasser les tâches vues comme simples actualisations pour aller vers des tâches comme détermination de quelque chose donné au départ comme vague. Le jeu de tâches est une interprétation pragmatique de l'idée de tâche.

En premier lieu, je ne retiendrais ici qu'une expression et une thèse. L'expression est *base intuitive* qu'emploie l'auteure sans considérer comme indispensable de préciser de quelle base elle parle : *base de connaissances*, *base d'expériences*, ou que sais-je ? La thèse est qu'il faut assurer la solidité de cette base afin de pouvoir ériger ensuite la construction déductive de la géométrie.

La seconde citation est de Frédéric Patras, elle ne concerne plus le *premier enseignement de la géométrie*, mais la pédagogie des mathématiques contemporaines. (*La pensée mathématique contemporaine*, PUF 2001, p. 26) :

Faire la part de modernisme dans le style d'exposition et de retour au système d'intuitions originales qui sous-tendent une théorie est sans nul doute l'une des difficultés majeures auxquelles est confrontée la pédagogie mathématique aujourd'hui, car la science est condamnée à être stérile si elle cesse de prendre appui sur une intuition pleine et vivante de ses contenus.

L'expression que je retiens est celle de *système d'intuitions originales* et la thèse est que la pédagogie est confrontée à *faire la part entre modernisme dans le style d'exposition* (d'une théorie) *et retour au système d'intuitions originales* (qui sous-tendent celle-ci).

Ces deux citations considèrent la question pédagogique d'un tout autre lieu et leurs regards sont orientés en sens inverse : alors que L. Félix pense constitution d'une base intuitive, F. Patras pense retour à un système d'intuitions. Il parle de faire la part entre deux choses, elle discute de la part à faire entre base intuitive et construction déductive ultérieure. Ensuite, L. Félix ne dit pas base d'intuitions, sur ce point elle en reste au qualificatif. Parler de système d'intuitions comme le fait F. Patras, suppose que ces intuitions puissent se détacher. Mais se détacher de quoi ? C'est bien là que le propos de L. Félix est trop vague tandis que celui de F. Patras bénéficie, lui, de la référence à une expérience, cuisante certes mais qu'on ne saurait oublier : la tentative de réformer l'enseignement des mathématiques des années 60-70. Or si elle reste allusive sur ce qu'elle entend par *base intuitive*, lui l'est tout autant sur ce qu'il entend par : *modernisme dans l'exposition d'une théorie*. Lisant L. Félix je complète de moi-même : *base de connaissances intuitives fournies par l'expérience*, tandis que F. Patras me fait entendre : *exposé à la fois abstrait et formel d'une théorie*. Certes ma lecture n'est pas naïve, elle est influencée les propositions de Ferdinand Gonseth. Pour l'instant, je voudrais qu'on mesure bien, du point de vue de la transposition didactique, devant quelle alternative nous nous trouvons : sans vouloir y mettre aucune connotation péjorative, et en toute conscience de forcer son propos bien au-delà de sa pensée, je dirais que la thèse de L. Félix suggère l'intérêt d'une *propédeutique encyclopédiste* (car le système d'expériences et de faits auquel elle associe l'intuition est sémiotiquement parlant de nature encyclopédique) *intuitive et motivée*, tandis que celle de F. Patras resterait fidèle à une *propédeutique conceptuelle intuitive et abstraite*. Le rappel d'une opposition qui aura suscité beaucoup d'oukases au temps des polémiques pour ou contre les mathématiques modernes reste important puisque se demander comment faire bénéficier tous les élèves de cette liberté de pensée qui caractérise le style moderne d'exposition des mathématiques (et plus généralement des sciences) est toute autre chose que se demander quelle base d'expériences intuitives il s'agit de construire avec les élèves pour leur offrir accès aux avancées de la science actuelle. À la question de savoir comment l'enseignement pourrait initier les élèves aux sciences de son temps afin de lui faire aussi bénéficier un tant soit peu de ses progrès, la réforme des mathématiques modernes a répondu en cherchant à en faire bénéficier l'enseignement en général - chamboulement des programmes, formation des enseignants etc. Eh oui, le premier ne va pas sans le second. Pourtant cela ne s'accommode pas facilement avec l'idée tout aussi indiscutable qui considère le savoir scolaire comme propédeutique. Il faut en effet trouver une forme à cette propédeutique et c'est sur cet écueil que la réforme des mathématiques modernes est venue buter, disons, pour faire court, par excès de formalisme. Quoiqu'il n'emploie pas ce terme (propédeutique) c'est bien de cette question que discute F. Gonseth dans le premier fascicule de son livre *La géométrie et le problème de l'espace* pour montrer de manière très convaincante que la question doit être dépassée, et qu'il ne s'agit pas de faire la part entre deux choses, mais

quatre, les horizons du schéma du quatrième fascicule de son ouvrage : les horizons respectivement intuitif, expérimental, théorique, axiomatique.

Dans la suite de la citation que je viens de faire de son article, L. Félix ne se contente pas d'évoquer la dualité : base intuitive, construction déductive, mais en précise les liens. Lisez plutôt :

Seulement, quelques précautions, toutes particulières à ce stade, sont à prendre, que le professeur averti de la logique sentira sans peine. Par exemple, l'enfant a l'intuition des segments parallèles, mais cela ne signifie pas qu'il a la notion de droites indéfinies, parallèles ou non : il s'agit d'une notion d'ordre pratique. De même il peut arriver que l'enfant, par pliage par exemple, découvre que la somme des angles d'un triangle vaut à peu près un plat. (Et comment espérer qu'il n'ait jamais entendu formuler cette conclusion?) Qu'importe! Connaissance pratique! Si le maître n'use pas du prestige de l'adulte pour lui imposer une affirmation générale prématurée, sera-t-il si difficile, le moment venu, de faire comprendre à l'enfant la place de cette affirmation parmi les vérités démontrées ? En somme, il faudrait éviter toute affirmation générale qui dépasse l'expérience et que l'enfant croira sur parole, et cependant laisser se construire un schéma pratiquement et sommairement fidèle du monde des figures.

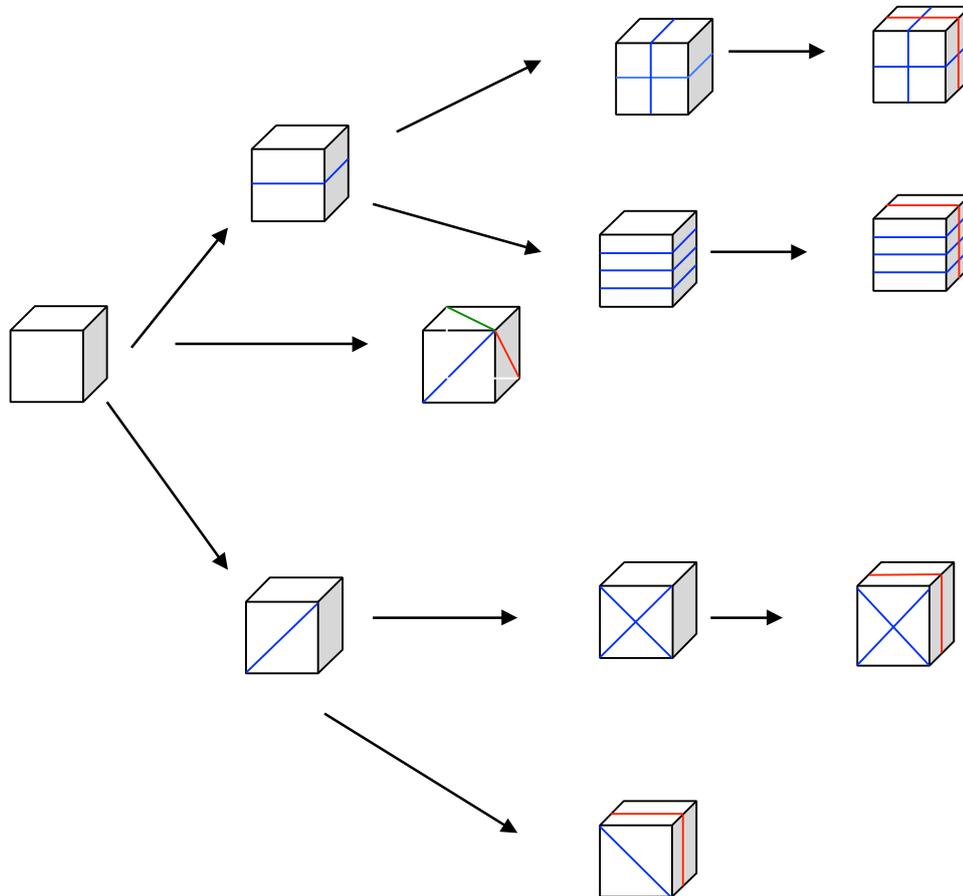
Pour le didacticien que je suis, c'est une question majeure de transposition didactique que j'ai abordée de front dans mon travail de thèse (Conne, 1981). Ce que demande L. Félix est exigeant : que l'enseignant soit à même de reconnaître chez ses élèves (même les plus jeunes), ce qui - dans les expériences faites - ressort de leur intuition, qu'il se garde de fixer (l'intuition) au-delà de ce qui l'occasionne et qu'en l'associant prématurant à des savoirs bien plus généraux, il ne déborde pas, comme par mégarde, des limites du contexte qui la motive. Hélas, nous avons bien dû nous rendre à l'évidence que le conseil est vain, la gageure impossible à tenir. G. Brousseau l'a bien dénoté dans sa discussion sur les paradoxes du contrat (*Le paradoxe de l'adaptation des situations aux fins d'enseignement*. a) *Inadaptation* de la situation à l'*exactitude* du savoir. b) *Inadaptation* de la situation à préparer l'élève à une *adaptation ultérieure*. Brousseau 86, 90). Je l'ai montré d'une autre manière avec la distinction savoir et connaissance (Conne 1992). L. Félix place d'emblée la discussion sur *ne pas ignorer*, elle ne mentionne pas une question de reconnaissance, les deux choses sont bien entendu liées puisqu'on ne saurait reconnaître ce qu'on ignore, puisque, on ne reconnaît qu'en rapport à ce que l'on sait. Toutefois, relativement à ce qu'il peut reconnaître dans les circonstances particulières de l'enseignement, ce que l'enseignant sait est toujours une affirmation générale qui dépasse le contexte et les circonstances dans lesquelles il se trouve (et la lui fait le plus souvent méconnaître, mal lire et mésinterpréter). Et bien sûr, il suffit que l'enseignant la prononce pour qu'elle fasse autorité. Là encore G. Brousseau a bien vu le problème que cela pose : il réside dans la manière de signifier ce que l'on reconnaît aux élèves. Comment donc éviter cet écueil, dit *effet Jourdain*, alors qu'il est nécessaire de reconnaître la connaissance et les savoirs que les élèves mettent en œuvre ? Il n'y a pas de mathématique de ce que manifeste notre intuition lors d'expériences particulières et limitées. Dans cette direction, on ne trouvera pas à résoudre la contradiction. En outre, invoquer la construction d'un *schéma pratiquement et sommairement fidèle* au monde des figures, comme le fait L. Félix en se référant à F. Gonseth, c'est déjà dépasser le cadre de l'expérience actuelle et faire un pas significatif vers la généralité.

Ce que cela donne lorsqu'on prend en plus en charge la dimension sémiotique.

D'un point de vue didactique tant les propos de L. Félix que ceux de F. Patras peuvent être taxés d'idéalistes parce qu'ils ne prennent pas en charge ce qu'implique la réalisation effective d'un enseignement, et en particulier la médiation sémiotique que cela requiert. Dans la recherche déjà mentionnée ci-dessus, je me suis donné pour principe de rendre la dimension sémiotique explicite aux élèves. Ci-dessous, je m'adresse à ma nièce, Clélia, alors âgée de 12 ans (en décembre 2006). Je me donne le même principe et je lui présente quelques exemples de la dite recherche.

Clélia, voici des exemples d'images, de diagrammes et de métaphores.

Le premier est une planche que m'a faite une étudiante. C'est censé représenter un matériel fait de plots en bois.



Sur cette figure, tu vois des images de cubes dessinés de sorte qu'on ne voie pas à travers, en opaque, et comme si on les voyait légèrement de haut et de côté vers la droite. Il y a aussi des lignes dessinées, en trois couleurs, puis des flèches. L'ensemble n'est pas l'image de plusieurs cubes que l'on aurait disposés sur la table, parce que les cubes de droite devraient alors avoir une forme un peu différente, en fait chaque cube est dessiné comme si on le voyait de la même manière. Si je voyais deux cubes séparés, je ne pourrais les voir en même temps de la même manière parce que l'un serait plus à droite que l'autre, ou plus loin de moi que l'autre, il m'apparaîtrait plus petit, etc. Donc, comme tous les cubes sont dessinés de la même manière, cette planche qui représente des images de cube n'est pas l'image d'une collection de cubes.

De plus, il y a des flèches qui ne sont pas des images de choses, mais qui signifient aussi quelque chose. Et sans que je ne te l'aie dit, tu auras compris quelque chose avec ces flèches.

Elles veulent dire que les cubes ont quelque chose à voir entre eux. Ainsi si tu suis les flèches du haut, tu pars d'un cube sans ligne, puis apparaît sur deux faces une ligne simple, puis une croix et une nouvelle ligne sur la face du haut, puis trois croix! Et en plus, certains cubes sont situés les uns en dessous des autres, ce qui veut dire qu'ils sont aussi comparables d'une certaine manière. Si tu suis la ligne de flèches du haut et la 4^{ème} ligne de flèches, alors il se passe presque la même chose dans les deux cas.

Ce n'est pas difficile de repérer tout cela : il suffit de *regarder les images et d'observer le diagramme*, et *d'imaginer une histoire qui raconte tout cela*. C'est ainsi que l'on fait des mathématiques.

Ainsi, tu auras déjà remarqué qu'il y a un cube qui est tout seul à gauche, qui n'a pas de traits. Il est comme le nom de famille des images : ce sont tous des cubes, et tous fait dans le même moule, ce sont des *répliques* de cubes.

Tu remarqueras aussi qu'il y a un cube au milieu un peu isolé, il n'y a pas de cube à sa droite, ni exactement au dessus de lui, ni exactement au dessous, cela veut dire que c'est un cube un peu spécial. C'est le *vilain petit cube* de la famille.

Tu as déjà vu aussi que parmi les traits certains sont droits et certains sont en diagonale, tu vois des traits sur une, deux ou trois faces des images de cube.

Une figure (une planche) qui représente un certain nombre d'images et qui nous invite à la comparer comme je l'ai encore fait, s'appelle **un diagramme**. Car cela représente des comparaisons entre différentes choses qui se ressemblent et ont des différences. (Le vilain petit canard ressemble assez à un petit canard pour qu'on le prenne pour un canard, mais il est différent des autres, puisqu'il est vilain. Il ne deviendra beau que lorsqu'il ne sera plus canard, mais cygne.)

Mais ces comparaisons nous racontent aussi une petite histoire. Cette histoire est celle d'un cube en bois, plein : *un plot*, (celui de gauche) que l'on aurait coupé en deux, une fois, puis deux fois, puis trois fois. On le coupe en le sciant bien droit. On peut le couper parallèlement à ses bords (on dit ses arêtes), ou en diagonale d'une face. Si on coupe une seule fois, on aura fait des moitiés (deux qui ont la même forme chacune). Tu remarqueras qu'on peut faire des moitiés de formes différentes, mais tu le savais déjà bien sûr. Puis si on rassemble les deux moitiés et qu'on les tient ferme ensemble et qu'on scie encore une fois en deux, on obtient des quarts, et si on fait encore une fois comme ça, on obtient des huitièmes. Bon on ne le coupe pas, parce que cela prendrait trop de temps et parce que cela ne serait pas aussi simple que je le dis, mais nous on s'en fout parce qu'on fait des mathématiques et pas du bricolage.

Je fais faire cela à des enfants (et des étudiants) avec de la pâte à modeler et un fil à couper la pâte à modeler (deux bouchons et un fil de nylon, parce que c'est la meilleure manière de couper de la pâte à modeler, elle ne se scie pas bien). Tu peux essayer, tu verras c'est amusant ce qu'on peut faire comme coupe. Surtout si tu coupes deux fois en diagonale, comme c'est indiqué justement sur ce cube qui est tout seul au milieu de la planche. Je te laisse la surprise de trouver ũ si jamais tu en as la curiosité, sinon tant pis. Saches seulement que les morceaux que tu obtiendrais ont été étudiés par les mathématiciens chinois, il y a fort longtemps, quand ils étaient, dit-on, mille fois meilleurs que les européens, les arabes et les indiens.

Ainsi donc cette planche illustre, c'est-à-dire **montre une image d'une histoire** (on dit aussi **métaphore**) d'un cube qu'on coupe, elle montre comment couper et **donne à imaginer** les formes que l'on obtient, et les relations entre ces formes (on peut ainsi obtenir les mêmes morceaux en suivant un autre ordre de coupe). Cela dit qu'un cube a plusieurs sortes de moitiés et plusieurs sortes de quarts, tout a plusieurs sortes de moitiés, et si une moitié de cube a elle-même plusieurs sortes de moitiés, alors le cube aura forcément plusieurs sortes de quarts car (sic) une moitié de moitié de cube est un quart de cube, et ainsi de suite.

Ainsi notre histoire nous permet de comparer des coupes et des formes diverses. On peut par exemple voir avec cette histoire de coupe qu'on peut faire un cube en assemblant trois pyramides identiques. Cette histoire nous parle donc **des relations** qu'on peut voir avec tous ces plots. Cela peut aider à comprendre les fractions par exemple, et fraction veut dire morceaux, fractionner

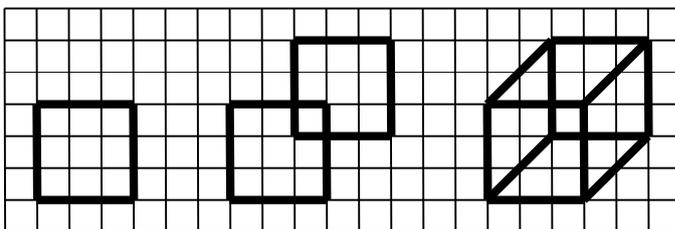
veut dire couper, et donc notre histoire de coupe est aussi une histoire de fractions. Ce matériel est une métaphore pour apprendre les fractions.

La planche donne une image de ces relations, on dit **un diagramme** parce que ce n'est pas une image d'un objet, ni même d'une collection d'objets, mais c'est une **image de comparaisons de différents objets. Et pour bien montrer cela, on a recouru à une image d'objets** que l'on a répétée (répliquée) plusieurs fois (en fait c'est le traitement de texte qui l'a dessinée cette image). L'étudiante qui a fait cette planche ne l'a pas trouvée tout de suite, elle a dû pas mal bosser pour y arriver. Car moi je lui avais laissé deviner que c'était une histoire de fractions de cubes. Elle reconnaissait les objets, avait compris quelques unes des relations qu'il y a entre ces objets, mais a mis du temps pour trouver l'histoire que toutes ces relations illustraient.

Voilà, dans mon langage, une image d'histoire est une métaphore, une image de relations est un diagramme et une image d'objet(s) est une image. Pour ne pas répéter trop souvent le mot *image*, je préfère dire : **une icône d'histoire est une métaphore, une icône de relations est un diagramme et une icône d'objets est une image.**

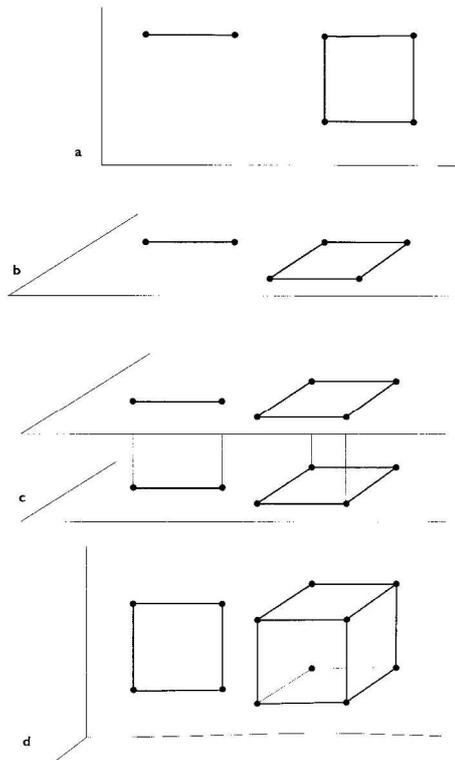
Une dernière chose puis des exemples qui pourraient t'amuser.

Une histoire parle toujours d'objets, de choses, d'animaux ou d'individus et elle dit des relations entre ces objets, ces choses, ces animaux, ces individus. Le Petit Prince parle d'un aviateur, d'un petit prince, d'une rose, d'un renard, de planètes etc. On ne peut pas raconter d'histoire sans parler de relations entre objets, donc on ne peut pas avoir une métaphore qui ne contienne pas des diagrammes et des images. Un diagramme montre des relations entre des objets, mais pour cela il doit montrer des images de ces objets. Donc une métaphore contient des diagrammes et un diagramme contient des images. Une métaphore est comme une poupée russe.



Ci-dessus, c'est un *diagramme*. Il comporte des *images*, des images de carré et une image de cube (tout à droite) ainsi que l'image d'un quadrillage. On lit ce diagramme de gauche à droite comme une bande dessinée. Les relations que cela montre sont un carré, deux carrés identiques au premier mais l'un décalé vers le haut et la droite, et ces deux carrés dont on a relié les sommets, ce qui donne, **surprise**, l'image d'un cube. L'histoire que cela raconte est celle d'une manière de dessiner facilement un cube (on dit en perspective cavalière) et le quadrillage est là pour faciliter la tâche.

Cette histoire se trouve dans un livre de mathématique qui nous propose de voir des objets qui auraient 4 dimensions ! (Pour bien voir ces figures il te faut imprimer les pages où il y a ces figures, et lire ce qui est écrit en tout petit). L'histoire raconte que si on veut dessiner un segment on dessine deux fois un point et on les relie, que si on veut dessiner un carré, on dessine deux fois un segment et on relie leurs sommets, que si on veut dessiner un cube, on dessine deux fois un carré et on relie les sommets et si on veut dessiner un hypercube, c'est-à-dire un cube en dimension 4 (que l'on ne peut pas voir mais qu'on peut très bien imaginer), il n'y a qu'à dessiner deux fois un cube et relier les sommets. Le livre te donne deux manières de le faire (tu peux repasser les traits qui sont presque effacés sur mon scan).



FIGURES 2.1. CONSTRUCTION DU CARRÉ ET DU CUBE
Construisons un carré et un cube...

L'HYPERCUBE

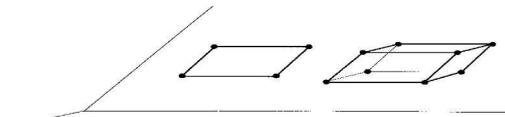


FIGURE 2.2. HYPERPLAN HORIZONTAL
... et basculons-les dans un hyperplan horizontal

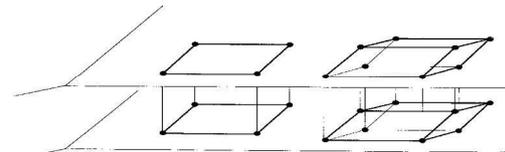


FIGURE 2.3. CUBE ET HYPERCUBE
... cela permet de construire un cube et un hypercube

L'HYPERCUBE

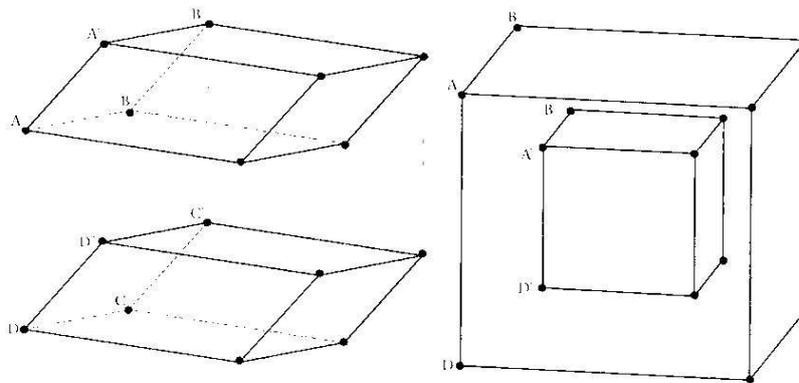


FIGURE 2.5. AUTRE REPRÉSENTATION DE L'HYPERCUBE
... l'hypercube admet lui aussi plusieurs représentations. C'est celle de droite que nous utiliserons désormais.

Avec les élèves, j'essaie de deviner les histoires que les élèves racontent avec leurs dessins en mathématiques, puis je discute avec eux pour savoir si j'ai bien ou mal deviné ou si nous ne pouvons pas raconter encore une toute autre histoire. Et d'histoires en histoires, c'est ainsi que nous travaillons et apprenons les mathématiques. Car les maths, c'est comme les histoires, c'est sans fin. Bien sûr nous aimons les histoires drôles, mais encore plus celles qui nous apportent plein de surprises. Surtout celles qui nous font passer d'une dimension à l'autre.

Tiens voici comment un élève de 4ème primaire a dessiné le matériel de cubes décrit par la planche de la page 1. Il a utilisé le truc pour dessiner les cubes en perspective, puis a mis les

traits de coupe. Si tu regardes bien les dessins, tu y verras des trucs marrants. Tu peux essayer de deviner comment sont les lignes que feraient la scie si on coupait comme il nous l'indique.

Puis je t'ai copié d'autres histoires. J'ai mis très longtemps pour trouver ce que les élèves y avaient dit. Ces dessins sont tous un peu curieux, c'est que j'aime, parce qu'ils comportent quelque chose à comprendre. Comme j'aime comprendre, j'aime les choses un peu mystérieuses.

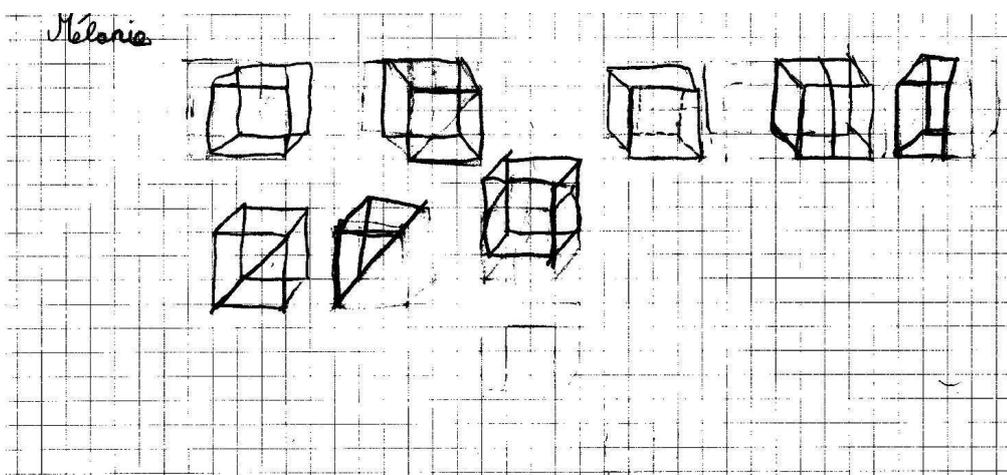
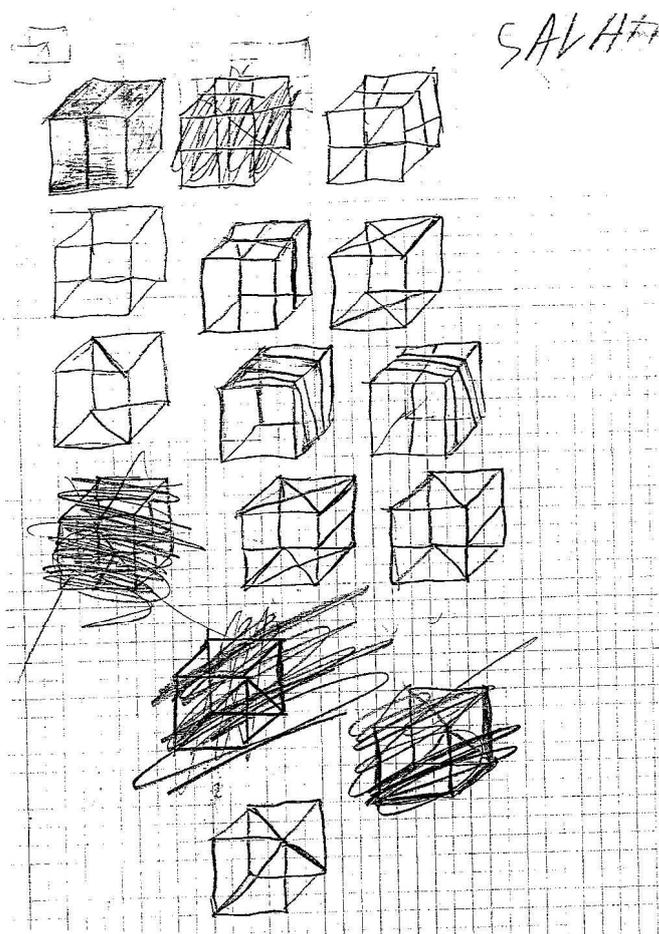
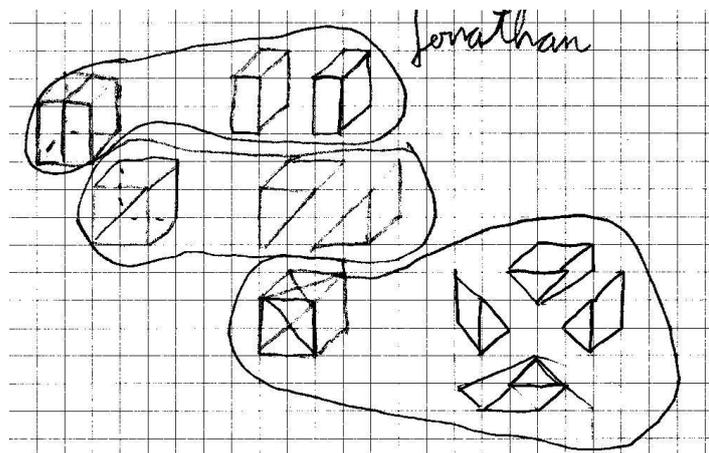


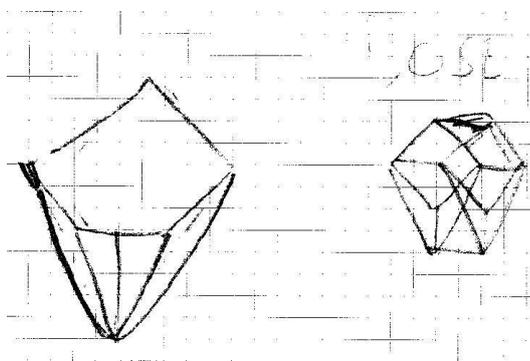
Diagramme avec cubes à moitié effacés pour représenter des moitiés de cubes.

Mélania était un peu coquine, elle a eu plein d'idées aussi originales.



Dessin des portions « éclatées ».

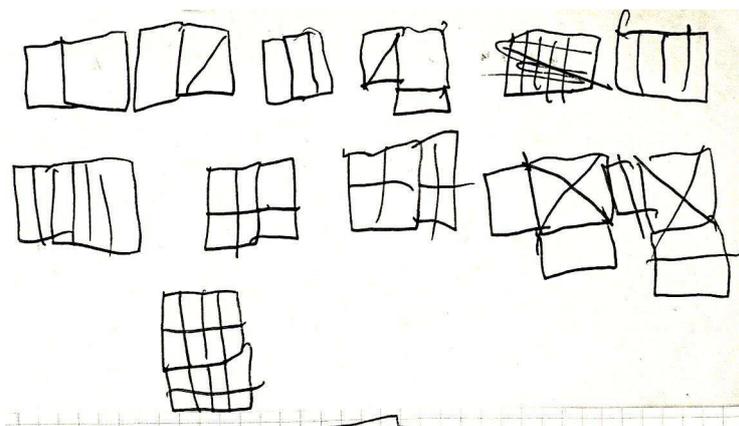
Ci-dessus, tu dois bien regarder le dernier cube, coupé en quatre et éclaté, c'est pas mal essayé (mais faux). Personne n'avait demandé à cet élève de dessiner une chose aussi « compliquée ».



A droite, dessin de deux pyramides reliées entre elles, comme pour une hyper pyramide.

Lui c'était le passionné des mondes 3D, 4D et des pyramides.

Voici pour finir, le dessin de l'élève le plus intelligent de la classe, c'est aussi un dessin assez vilain. Il représente presque tous les cubes de la planche de la page 1. J'ai mis très longtemps à comprendre que c'était un dessin super intelligent. Pour cela j'ai dû beaucoup réfléchir et à plusieurs reprises. Je savais que son auteur était un fortiche, mais cela ne m'a pas aidé pour comprendre ce qu'il avait pensé. Et puis on avait l'impression que cet élève ne se donnait pas la peine de bien dessiner, ũ mais bon, comme il avait suffisamment compris cette histoire qu'est-ce qu'on pouvait lui dire?



Fin de la lettre à Clélia.

REFERENCES

Brousseau, G. (1986). Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. *Recherches en didactique des mathématiques*, 7(2), 33-115.

Brousseau G. (1990) Le contrat didactique : le milieu. *Recherches en didactique des mathématiques*, 9(3), 309-336.

Conne F. (1981) La transposition didactique à travers l'enseignement des mathématiques en première et deuxième année de l'école primaire. Thèse de doctorat. Lausanne. Conne / Couturier - Noverraz, (publiée en 1986). 462 pages. <http://tel.archives-ouvertes.fr/tel-01066233>

Conne F. (1992) Savoir et connaissance dans la perspective de la transposition didactique. *Recherches en didactique des mathématiques*, 12 (2.3), 221-270.

Conne F. (2006) Quelques pas esquissés dans l'univers des polyèdres. Suivi de situations de dessin en 4^{ème} primaire de l'enseignement spécialisé. In J. Giroux & D. Gauthier (dir.) *Difficultés d'enseignement et d'apprentissage des mathématiques. Hommage à Gisèle Lemoyne*. chap 9, pp.219-258. Montréal : Editions Bande Didactique.

Everaert-Desmedt N. (1990) *Le processus interprétatif. Introduction à la sémiotique de Ch.S. Peirce*. Liège : Mardaga Editeur.

Giroux J. (2008), Conduites atypiques d'élèves du primaire. *Recherches en didactique des mathématiques*, 28(1), 9-62.

Gonseth F. (1946-1953) *La géométrie et le problème de l'espace*. Neuchatel : Editions du Griffon (diffusé en France par Dunod).

Lo Jacomo F. (2002). *Visualiser la quatrième dimension : des images perçues dans les miroirs ũ à la construction des objets mathématiques*. Éditions Vuibert, Paris.

Morand B. (2004) *Logique de la conception. Figure de sémiotique générale d'après Charles S. Peirce*. Paris : L'Harmattan.

Peirce Ch.S. (1978) *Ecrits sur le signe rassemblés, traduits et commentés par Gérard Deledalle*. Paris : Seuil.

Thurston W. P. (1995) *Preuves et Progrès en Mathématiques*. Bulletin Inter-Irem, n° 21, pp. 7 - 26