



HAL
open science

Nominalisme ancien, nominalisme moderne

Hourya Benis Sinaceur

► **To cite this version:**

Hourya Benis Sinaceur. Nominalisme ancien, nominalisme moderne. Pierre Edouard Bour; Manuel Rebuschi; Laurent Rollet. Construction: Festschrift for Gerhard Heinzmann, College Publications, 2010, 978-1-84890-016-5. halshs-01122309

HAL Id: halshs-01122309

<https://shs.hal.science/halshs-01122309>

Submitted on 3 Mar 2015

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Hourya Benis Sinaceur
 IHPST, UMR 8590
 CNRS-Université Paris 1-ENS Ulm
Hourya.Sinaceur@ens.fr

Draft / Paru dans : Pierre Edouard Bour, Manuel Rebuschi, Laurent Rollet. Construction. Festschrift for Gerhard Heinzmann. Colledge publications, 2010

Nominalisme ancien, nominalisme moderne

Les entités mathématiques sont-elles des créations de notre esprit ?

Je me propose d'examiner ici un seul aspect de la réfutation par Gödel du nominalisme en philosophie des mathématiques : les raisons avancées pour soutenir que les objets mathématiques ne sont pas des créations de l'esprit. C'est-à-dire, étant données les limites imposées à cet article, j'y envisage uniquement de ce point de vue « Some basic theorems on the foundations of mathematics and their implications », texte de la conférence que Gödel fit en 1951 en guise de vingt-cinquième conférence J. W. Gibbs de la réunion annuelle de l'*American Mathematical Society*. Je me sers aussi à l'occasion, l'examen plus précis étant laissé pour un autre article, des version III et V de « Is mathematics syntax of language ? » écrit entre 1953 et 1959 pour le volume sur Carnap de la série *The Library of Living Philosophers* et publiées également dans le volume III des *C.W.* La version VI, éditée avec la version II par Rodriguez-Consuegra dans *Unpublished Philosophical Essays*, est la plus courte ; elle serait la plus proche de ce qu'aurait publié Gödel, s'il s'y était décidé. Gödel a écrit qu'il *pourrait* publier ses textes, mais il ne l'a pas fait. Sans entrer dans les motifs de cette rétention, on peut juste observer que les questions de philosophie ne se laissent pas trancher définitivement à la manière d'un résultat mathématique démontré.

« The modern development of the foundations of mathematics » écrit en 1961, également édité le volume III des *C.W.*, p. 364-375, contient des compléments intéressants.

Pour ces trois articles j'utiliserai respectivement les abréviations suivantes : G 1951, G 1953-59, G 1961.

Mon propos se limite ici à lire et comprendre G 1951 au ras du texte, sans recours nécessaire à l'énorme littérature qu'il a engendrée. Je tiens évidemment compte des éclaircissements très utiles apportés par les éditeurs des *C.W.*

Mon but est d'examiner l'affirmation de Gödel selon laquelle ses deux théorèmes d'incomplétude auraient pour *conséquence* une philosophie réaliste à la Platon. Ma question est : s'agit-il de conséquence au sens propre, c'est-à-dire de conséquence logique ? Mon intérêt est double : 1) comprendre en particulier G 1951, 2) évaluer le platonisme qui y est défendu par de brefs rapprochements avec d'autres points de vue en philosophie des mathématiques.

Je rappelle les énoncés de 1931 de manière informelle : 1) dans tout système formel du type de celui des *Principia Mathematica* de Russell et Whitehead, où l'on peut exprimer l'arithmétique élémentaire, il est possible de construire une proposition F telle que ni F ni sa négation ne sont démontrables, ou encore il est possible de construire une proposition F vraie et non démontable ; 2) pour tout système formel S supposé consistant, la démonstration de sa consistance est impossible à conduire dans les limites du cadre du langage du système ; en particulier il est impossible de démontrer par des méthodes finitistes (ou finitaires) la consistance d'un système construit selon des règles finitistes (que l'on pourrait dénommer « système hilbertien ») et supposé consistant. Ces théorèmes expriment ce que Gödel appelle le caractère incomplétable ou inexhaustible des mathématiques. Ce caractère manifeste selon

Gödel l'existence indépendante de notre esprit des objets mathématiques et des concepts abstraits. Cette thèse est d'abord présentée à travers la critique des positions qui tiennent les objets mathématiques pour des créations de notre esprit ou des conventions de langage. Je me restreins ici à la critique par Gödel de l'idée que les mathématiques sont des créations de notre esprit. Néanmoins, il me paraît utile de mettre d'abord en place quelques points de définitions et de contextes, en vue de souligner que par 'nominalisme' les philosophes modernes des mathématiques entendent diverses positions, qui diffèrent largement des premières conceptions, forgées au Moyen-Âge. En particulier, Gödel qualifie par ce terme les positions « syntaxiques » de Hilbert et de Carnap.

I. Questions de mots : Nominalisme, conceptualisme

A. Nominalisme

À l'origine ce terme désigne l'attitude philosophique qui consiste à réduire les universaux (genres, espèces) à des *noms*.

Avec l'*Isagogè*¹ du néo-platonicien Porphyre (234-305 ?) apparaît le questionnaire d'où sortira, au Moyen âge, la querelle des universaux opposant réalistes et nominalistes.² Il s'agissait de déterminer

- 1) si les genres et les espèces (a) existent ou bien (b) s'ils ne consistent qu'en des noms désignant des concepts,
- 2) à supposer qu'ils existent, sont-ils des corps (1, (a+c)) ou des incorporels (1, (a+d))?³
- 3) si ce sont des incorporels sont-ils séparés (1, (a+d+e)), ou bien existent-ils dans les sensibles et en rapport avec eux (1, (a+d+f))?

Porphyre n'apportant pas de réponse, les sources des discussions médiévales sont plutôt dans les *Commentaires* de l'*Isagogè* rédigés au début du VI^e siècle par Boèce, traducteur d'Aristote et de Porphyre.

Boèce professe un *conceptualisme*. C'est dire :

1) qu'il soutient, contre les Platoniciens, que les universaux ne subsistent pas séparés des sensibles mais sont seulement « *conçus* comme tels », c'est à dire sont des constructions de l'esprit. Il montre que genres et espèces sont justiciables de la même opération que les concepts géométriques, point, ligne, surface, etc. : « l'abstraction » [*aphairesis*], ainsi dénommée par Alexandre d'Aphrodise (III^e siècle après J. C.) d'après le *De Anima* (III, 7) d'Aristote.

2) Boèce soutient aussi, contre les Stoïciens, que les concepts universels ne sont pas des concepts fictifs ou vides.

Boèce généralise à toutes les formes matérielles (formes engagées dans une matière) une théorie de l'abstraction initialement formulée par Aristote pour les notions de géométrie. Point, ligne, cercle sont les exemples paradigmatiques des « intelligibles abstraits », dont nous parlons *comme s'ils étaient séparés* [*hôs kekhôrismena*] des choses mais qui, en fait, ne le sont pas. Ces produits de l'opération « d'abstraction » aristotélicienne, destinée à négliger les particularités au profit du général, ont tantôt été interprétés comme entités mentales, tantôt comme formes immanentes aux choses et perceptibles dans les choses *en tant que* celles-ci *apparaissent d'une certaine manière*. Dans la première interprétation on peut parler d'un *point de vue sur* les choses, dans la deuxième d'*aspects* des choses elles-mêmes.

¹ Porphyre 1995.

² Pour une présentation du nominalisme des Anciens cf. de Libéra 1999.

³ Pour les Stoïciens, presque tout est corporel, sauf le lieu, le temps, le vide et l'exprimable ; pour Platon, l'universel est un incorporel.

La tradition a retenu la première interprétation, tout en assumant la thèse aristotélicienne que les mots *signifient* les concepts, qui, eux, signifient les choses. Autrement dit, un lien d'adéquation est maintenu entre le point de vue sur les choses et les aspects des choses. Aussi le concept n'est-il pas un être fictif, totalement résorbé dans l'idéalité de la pensée, mais l'acte d'intellection même, non pas objet (fictif) de pensée mais l'activité même de la pensée en connexion avec les choses.

Berkeley et Hume maintiennent l'acception des concepts comme images mentales (« *ideas* »). Peirce souligne le rôle capital des « *ideas* » dans la productivité de l'esprit et la fécondité de l'imagination créatrice⁴. Indépendamment de Peirce et antérieurement à lui, Dedekind a mis en avant le rôle de la formation de concepts dans l'innovation mathématique. Pour lui tout objet de pensée est une « chose mentale » [*geistige Dinge*], et un concept est le corrélat d'un point de vue de l'esprit saisissant plusieurs choses, éventuellement une infinité, en un tout.⁵ Naturellement Dedekind travaille sous l'hypothèse rationaliste, que conserve Hilbert, d'une structure donnée de l'esprit. Gödel accorde une grande attention aux concepts, mais, à l'opposé des conceptualistes, il leur attribue un type de réalité spécifique et *indépendante de l'esprit*. Il distingue son réalisme (platoniste) de ce qu'il définit comme « réalisme aristotélicien » : « J'ai intentionnellement parlé, écrit-il, de deux mondes distincts (le monde des choses et le monde des concepts), car je ne crois pas que le réalisme aristotélicien (selon lequel les concepts sont des parties ou des aspects des choses) soit tenable. »⁶

B. Guillaume d'Ockham⁷ (1287-1347) et Jean Buridan (vers 1300-1361)

Le mot latin « Nominalistae » s'est imposé au XV^e siècle, probablement chez les adversaires de Guillaume d'Ockham et de Jean Buridan, deux auteurs qui ont transformé la tradition aristotélicienne et professé un *nominalisme* de type moderne.⁸

Ockham réinterprète l'abstraction de manière à ce que celle-ci ne soit plus l'induction abstractive à partir de plusieurs choses : un concept spécifique peut être « abstrait » à partir d'un unique individu, ce qui implique que le concept mental d'une chose singulière se double d'une connaissance « abstractive » susceptible de s'appliquer à d'autres individus similaires. L'abstraction consiste « à penser à part ce qui ne peut être donné à part » et engendre une connaissance abstraite aussi bien du singulier⁹ que du général. Selon Ockham les seules entités à pouvoir être des universaux sont les concepts. Du point de vue métaphysique, un concept est un singulier, un terme mental ; il n'est un universel que dans le sens où il se prédique de plusieurs choses, et correspond ainsi à l'*acte de penser* plusieurs objets d'un seul et même coup. Le concept en lui-même n'est ni l'essence des choses ni le mot qui le désigne¹⁰, mais un geste mental spécifique : le signifier, lequel ne vise pas à *vide* (le signifié étant *transparent* dans le concept). Cette manière de voir a conduit certains de ses plus sûrs

⁴ Peirce 1931-35, *Collected papers*, II, *Elements of logic*, p. 51 et sqq.

⁵ Dedekind 2008, p. 154.

⁶ Gödel 1951, *C.W.* III, p. 321, lignes 32-34.

⁷ J'écris 'Ockham' à l'anglo-saxonne, conformément au choix de la Bibliothèque Nationale de France, tandis que l'usage français habituel est d'écrire 'Occam'.

⁸ Sur le nominalisme de G. d'Ockham cf. Michon 1994. Sur la sémantique d'Ockham analysée du point de vue du nominalisme moderne cf. Pannacio 1991, dont la référence centrale est J. Fodor.

⁹ Ce qui va contre la thèse aristotélicienne qu'il n'y a de connaissance que du général. Cette idée importante n'a peut-être pas reçu toute l'attention qu'elle mérite.

¹⁰ C'est bien entendu l'idée que la sémantique n'est ni le langage matériel, oral ou écrit, ni l'ontologie. Panaccio (p. 74-76) souligne la révolution par rapport à la tradition antérieure : la signification est portée par les concepts, non par les mots.

interprètes à considérer la position d'Ockham comme un « conceptualisme réaliste » : les concepts sont des actes de signification, ou, pour employer un terme commode de la phénoménologie, des « noèses », ce qui convient au caractère *a priori* des concepts selon Ockham.¹¹ De manière similaire Alain de Libéra qualifie le nominalisme d'Ockham de « réalisme gnoséologique » ; on pourrait aussi bien dire « réalisme noétique ». Ces notations ont le mérite de souligner la complexité sous-jacente à l'option médiévale dite « nominaliste », le qualificatif 'réaliste' des différentes caractérisations indiquant que le concept *signifie* une chose réelle.

Le nominalisme de Buridan est plutôt une attitude de parcimonie philosophique qu'une doctrine sur le statut ontologique ou métaphysique des universaux. Selon Buridan, nous pouvons significativement utiliser des propositions contenant des termes comme 'infini' ou 'point' sans pour autant poser l'existence de grandeurs infinies ou de points indivisibles. Cependant il s'en tient à la même position qu'Ockham : aux universaux ne correspond pas quelque chose d'extérieur à l'âme. Un universel ne désigne pas quelque chose mais *comment* nous *concevons* certaines choses, ce qui est une manière de dire qu'un universel n'est pas une chose, mais un concept ; le nominalisme implique un conceptualisme obéissant aux deux thèses essentielles suivantes :

1. les universaux (les entités abstraites), comme les genres et les espèces, sont des noms, des termes,
2. rien n'existe en dehors du particulier.

On soulignera que le nominalisme médiéval a éliminé tant la théorie platonicienne des Idées que la théorie des intelligibles abstraits comme formes immanentes aux choses au profit de l'idée de langage mental, auquel sont subordonnés les langages écrit et oral. Un *terme* général comme 'homme' est associé à un *acte mental* qui applique ledit terme à tous ses signifiés.¹²

En posant la question du statut de l'objet [*objectum*] de la science, le nominalisme engage une prise de position sémantique et/ou ontologique en relation avec la logique. Pour Ockham l'objet d'une science est n'importe quelle *proposition* qui est démontrée, et non la chose singulière extra-mentale à laquelle la proposition renvoie. Pour Grégoire de Rimini (vers 1300-1358) l'*objectum* n'est pas la proposition elle-même mais le signifiable complexe dont elle est l'expression. Buridan critique cette position en arguant que les signifiants sont superflus et peuvent être éliminés sans perte : c'est le principe de parcimonie popularisé sous l'expression « rasoir d'Ockham » et qui sera vigoureusement défendu par W.V. Quine notamment.

C. Les entités abstraites en mathématiques : brèves remarques

En philosophie moderne des mathématiques, on parle d'entités abstraites et non pas d'universaux. À juste titre, car les entités abstraites d'aujourd'hui sont généralement comprises par référence à l'interprétation reçue des Formes ou Idées platoniciennes comme subsistant de manière séparée, et diffèrent donc des universaux du Moyen Âge. En fait, les philosophes des mathématiques discutent de « platonisme » sans renvoyer aux textes de Platon, et on a pu soutenir que l'étude des textes montre que Platon lui-même ne prêtait pas aux objets mathématiques les caractères que le platonisme mathématique actuel attribue aux Idées ou Formes. Platon n'était donc pas "platoniste" au sens des philosophes actuels des mathématiques¹³. Le cœur des discussions actuelles concerne l'hypothèse que les entités abstraites ne sont ni termes ni signes de choses réelles, mais elles-mêmes une réalité

¹¹ Spinoza, influencé par la tradition thomiste qui a considéré les concepts comme des actions mentales, a de même distingué l'*idea* de son *ideatum*.

¹² Panaccio 1991, p. 92 et sqq.

¹³ Cf. McLarty 2005.

intrinsèque *d'un type différent* de celui des choses effectivement existantes. Quant au concept, compte non tenu d'un grand nombre de variantes, il apparaît comme *constitutif* de l'objet scientifique, lequel est censé ou non renvoyer de manière plus ou moins indirecte et médiata à un phénomène. En ce sens le conceptualisme est une composante de postures mathématiques associées à des positions philosophiques diverses. Le nominalisme moderne pose la question de savoir s'il est bien nécessaire d'admettre un type de réalité, celui des entités abstraites comprenant notamment des objets (le troisième monde de Frege), des concepts, des propriétés, des ensembles, des relations et des relations de relations (Gödel), comme distinct de l'existence effective, la « *Wirklichkeit* », qui renvoie au monde sensible ou psychique. Une réponse négative à cette question implique (ou est impliquée par) une attitude empiriste, laquelle est conduite assez naturellement à ne voir dans l'usage de termes correspondant à des entités abstraites que des conventions de langage. Par ailleurs, la formalisation conduit à la considération de signes d'un langage formalisé, fondé sur les règles d'une syntaxe, dont la manipulation correcte se passe d'un recours à la *signification* de ces signes. D'où le lien intime entre formalisme, nominalisme et empirisme dans les discussions philosophiques du premier tiers du XX^e siècle¹⁴.

Il faut distinguer la position minimaliste, qui consiste à accepter et justifier d'une manière ou d'une autre, sinon *l'existence*, du moins *l'usage* des concepts abstraits, du réalisme déclaré, qui consiste à prendre ces concepts pour éléments d'un univers *réel*, que 'réel' veuille dire psychique donc spatio-temporel (conceptualisme réaliste médiéval, mentalisme empiriste moderne), ou qu'il veuille dire immatériel, non situé dans l'espace ni le temps et indépendant de notre esprit : Idées ou Formes de Platon, troisième monde des objets logiques de Frege, concepts de Gödel.

D. Pour Gödel, le nominalisme est très précisément la philosophie correspondant au « programme syntaxique » de Hilbert. Gödel écrit même (G 1951) que le nominalisme implique comme cas particulier le formalisme. Ou encore que « la faisabilité du programme nominaliste implique celle du programme formaliste. » Dans G 1953-59, on peut lire qu' « une grande partie du travail de Hilbert sur la formalisation et la non-contradiction peut être interprétée comme une élaboration partielle de ce programme syntaxique, auquel, philosophiquement, correspond le nominalisme ou le conventionnalisme. »¹⁵ Et un peu plus loin : « le schème du programme syntaxique [est] de remplacer *l'intuition mathématique* par des *règles* pour l'usage des symboles »¹⁶.

Gödel traite ensemble du nominalisme et du conventionnalisme, et parfois emploie le premier terme pour le second. Nominalisme et conventionnalisme peuvent en effet aller de pair, mais pas forcément. Une revue plus complète inclurait donc la fixation des concepts de conventionnalisme et d'empirisme. De même, traiter du platonisme de Gödel de manière plus complète exigerait de recourir à d'autres textes bien connus de Gödel. Mais ici je me limite essentiellement à la lecture de G 1951 et à la critique qui y est faite de la position dite « formaliste », qui a conduit au programme de Hilbert. Pour Gödel il s'agit de montrer que les axiomes et les règles *ne peuvent pas* remplacer l'intuition.

¹⁴ Benis Sinaceur 2009.

¹⁵ C.W. III, p. 336.

¹⁶ Souligné par moi.

II. Les mathématiques ne sont pas notre libre création, notre libre invention (« *our free creation, our free invention* »¹⁷).

Gödel s'en prend au nominalisme d'abord à travers l'idée défendue notamment par Dedekind, Cantor et Hilbert selon laquelle les concepts mathématiques, moteur essentiel du progrès mathématique, sont de libres créations de l'esprit humain.¹⁸ Naturellement 'libres' ne voulait pas dire 'arbitraires'. La liberté de l'esprit créatif est soumise aux lois de l'entendement et à la contrainte de cohérence intrinsèque locale et de cohérence globale (ajustement de ce qui est créé avec ce qui a été créé et confirmé). Philosophiquement, ce courant d'idées est souvent rapporté à Kant, mais alors on devrait retrancher l'esthétique transcendantale. Sans qu'il y ait filiation, mais seulement affinité (comme chez Dedekind) ou justification (comme l'a fait Cantor), ce genre d'idées est plutôt dans la ligne de pensée de Spinoza qui caractérise le concept comme une « action de l'esprit » (*Éthique*, II, déf. III). Malgré certaines confusions fréquentes, ce courant idéaliste ne représente pas une position platoniste, avec un ciel des Idées séparé de la terre, mais une conception de la vérité comme *immanente* à l'idée adéquate. On pourrait donc dire que l'argumentation de Gödel tendait à « falsifier » ce point de vue spinoziste, qui dérive de la tradition scolastique, et à rétablir le recours aux Idées comme garant *transcendant* de la vérité.

Gödel désigne son réalisme platoniste comme un « réalisme conceptuel » et le décrit en ces termes : « les concepts mathématiques constituent une réalité objective autonome, que nous ne pouvons ni créer ni changer, mais seulement percevoir et décrire ». ¹⁹ D'abord et avant tout, il faut bien distinguer ce réalisme conceptuel, qui pose l'existence autonome et indépendante de notre esprit d'entités abstraites, du conceptualisme réaliste de la tradition nominaliste médiévale, dont j'ai rappelé qu'il consiste à considérer les concepts comme un acte de l'esprit, n'ayant donc de réalité que noétique. On peut même dire que le réalisme conceptuel de Gödel, tout en écartant fermement l'ontologie immanentiste ou l'hylémorphisme aristotélicien, vise précisément à réfuter le conceptualisme réaliste du nominalisme médiéval (les universaux dont j'ai indiqué la différence avec les Idées de Platon) ainsi que le nominalisme moderne, qui entend produire une *déflation ontologique*. Pour éviter tout risque de confusion, disons « réalisme des concepts » en parlant de la position de Gödel. Il est utile de reprendre l'analyse par Hao Wang du réalisme des concepts en deux composantes : le conceptualisme et le réalisme. Dans le texte examiné ici, il apparaît que le réalisme est assumé à titre de composante essentielle et non à titre de composante complémentaire du conceptualisme, ainsi que Hao Wang le présente pour son propre compte, en précisant que le conceptualisme laisse ouverte la question de l'existence des concepts mathématiques²⁰.

1. La réfutation de Gödel se fonde sur ses théorèmes d'incomplétude, qu'il trouve plus satisfaisant de reformuler à la lumière de la définition précise du concept de procédure finie

¹⁷ G 1951, C.W. III, p. 314. Selon Wang 1991 (p. 247), une distinction entre 'créer' – à partir de rien – et 'inventer' – à partir d'un donné – permettrait de voir que Gödel n'aurait pas d'objection contre l'idée que les mathématiques sont pour une grande part notre invention. Ce sur quoi Gödel voudrait insister c'est plutôt que les mathématiques dépendent (aussi) de quelque chose qui n'est pas créé par nous. (Mon attention a été attirée sur cet article de Hao Wang par le passage de la page 248 que m'a cité Mark van Atten et que je reproduis un peu plus loin).

¹⁸ Cf. Dedekind 2008, p. 62-63, 74, 138, 150, 226, 229, 246, 292-293, 337 ; Cantor 1932, p. 182 et 206 ; Hilbert 1926.

¹⁹ G 1951, C.W. III, p. 320.

²⁰ Wang 1991, p. 260.

par machine de Turing. Mais il commence par illustrer ce qu'ils indiquent, à savoir le caractère incomplétable ou inexhaustible des mathématiques.

Premier exemple : l'axiomatique appliquée non pas à un système hypothético-déductif comme celui de la géométrie, dans laquelle, d'après Gödel, la vérité des théorèmes est seulement conditionnelle, mais aux « mathématiques proprement dites », c'est-à-dire « au corps des propositions mathématiques vraies en un sens absolu »²¹. Ces mathématiques au sens propre sont réductibles à la théorie abstraite des ensembles. Or pour celle-ci Gödel constate : « instead of ending up with a finite number of axioms, as in geometry, one is faced with an infinite series of axioms, which can be extended further and further, without any end being visible and, apparently, without any possibility of comprising all these axioms in a finite rule producing them »²². Chaque étape de la hiérarchie produite par l'itération de l'opération 'ensemble de' conduit à un nouvel axiome et cela indéfiniment. Il s'agit d'un processus ouvert : à aucun stade on ne peut enfermer toute la théorie dans un nombre fini d'axiomes. La théorie axiomatique des ensembles (ZF) n'épuise donc pas la signification du concept d'ensemble. Dans ce premier exemple, l'incomplétabilité signifie que l'on a affaire à un processus ouvert, sans fin, et que la *signification* d'un concept déborde toute caractérisation axiomatique finie. En particulier, la caractérisation ensembliste des nombres entiers n'est pas un processus clos : la résolution de problèmes arithmétiques par des méthodes de théorie des ensembles a encore des découvertes à faire. Mais l'incomplétabilité ne dépend pas de l'axiomatique de la théorie des ensembles ; c'est un fait indépendant du point de vue adopté, c'est-à-dire indépendante des points de vues classique, intuitionniste et finitiste²³. Et en effet, les théorèmes d'incomplétude sont valides dans une logique intuitionniste. Il en résulte qu'ils peuvent donc aussi bien s'accommoder d'une conception philosophique non platoniste. Mais Gödel, au contraire, tend à montrer que l'intuitionnisme n'exclut pas le platonisme, en arguant par exemple que les constructions de l'esprit travaillent sur un donné : « Le concept central et approprié de Brouwer est construction plutôt que création. Nous construisons quelque chose à partir de quelque chose donnée... Création en ce sens n'exclut pas le platonisme »²⁴.

²¹ G 1951, C.W. III, p. 305. La distinction de Gödel – semblable à celle de Frege – entre géométrie et « mathématiques proprement dites » et le partage corrélatif vérités conditionnelles/vérités absolues sont discutables. En outre, de 'vérité absolue' (vérité non conditionnée) à 'vérité indépendante de notre esprit' la conclusion n'est pas immédiate. Toute difficulté est-elle surmontée par la distinction sur laquelle Charles Parsons attire l'attention (Parsons 1995, p. 55) entre « contenu réel » d'une proposition et « platonisme proprement dit » ? Cette distinction indique en tout cas un point d'accord entre un intuitionniste et Gödel : une proposition mathématique a « un contenu réel » (et n'est ni ne découle d'une convention de langage) et un point de désaccord : le platonisme.

²² G 1951, C.W. III, p. 306-307.

²³ G 1951, C.W. III, p. 308-309.

²⁴ H. Wang 1991, p. 248. Le point est développé plus tard dans la seconde version du texte de Gödel sur le continu de Cantor (1964) : l'intuition mathématique n'est pas censée apporter une connaissance *immédiate* des objets mathématiques, car « comme dans le cas de l'expérience physique nous *formons* nos idées de ces objets sur la base de quelque chose qui *est* immédiatement donné. Seulement ce quelque chose d'autre *n'est pas*, ou pas essentiellement, des sensations. Que quelque chose outre les sensations soit effectivement donné de manière immédiate suit du fait que même nos idées se rapportant à des objets physiques ... contiennent des constituants qualitativement différents des sensations ou de combinaisons de sensations, par exemple l'idée d'objet même ; tandis que d'autre part notre pensée ne peut créer aucun élément qualitativement nouveau, mais peut seulement reproduire

Compte tenu de la définition du concept de procédure finie par machine de Turing, le premier théorème d'incomplétude « est équivalent au fait qu'il n'existe aucune procédure finie pour décider systématiquement tous les problèmes diophantiens du type considéré » puisque « pour tout système consistant, il existe toujours des problèmes diophantiens du type considéré indécidables par les axiomes et règles du système ». Les problèmes diophantiens en question sont les problèmes formulés en partant d'un polynôme P à coefficients entiers à n variables x_i et à m paramètres a_j , et en demandant si l'équation $P = 0$ a une solution en nombres entiers pour toute suite de valeurs entières des paramètres, c'est-à-dire si $\forall a_j \exists x_i (P(a_j, x_i) = 0)$, a_j et x_i ayant des valeurs entières. Dans le cas particulier où $m = 0$ la question revient à se demander s'il existe une procédure finie pour décider si une équation diophantienne arbitraire (équation à coefficients entiers et dont les solutions sont entières) a des solutions : c'est le dixième problème de Hilbert²⁵.

Gödel précise que sa conception des axiomes n'est pas celle de la pratique axiomatique courante, dans la mesure où un axiome mathématique proprement dit doit, selon lui, être « correct et évident²⁶ ». Le point de départ des preuves est nécessairement assumé sans preuve car (ou donc) vrai par évidence. Le raisonnement de Gödel conjoint deux éléments : 1) le fait qu'on n'échappe pas à la nécessité d'assumer sans preuve le (je dirai un) point de départ ; 2) puisque les propositions de départ ne peuvent pas être vraies d'après une *preuve* et qu'elles sont vraies, elles doivent être vraies par *evidence*²⁷. Les concepts de preuve, de vérité et d'évidence sont noués selon la disjonction exclusive suivante : une vérité est ou bien prouvée ou bien évidente (dans les deux cas elle est « absolue »). Le cas de proposition ni évidemment ni démonstrativement vraie n'a donc pas à être envisagé pour les propositions primitives ; il ne se présente que par construction dérivée à partir de propositions primitives évidentes.

Cette conception des axiomes comme vérités évidentes est au rebours, en effet, du mouvement axiomatique du XIX^e siècle, dont une des conséquences philosophiques fut de déboulonner le concept d'évidence de son statut d'ancrage fondateur, de souligner la faillibilité de l'intuition, d'ébranler le caractère absolu de la vérité et de battre en brèche « la théorie sur le monde » pour reprendre l'expression de Quine. Gödel réhabilite les vérités

et combiner ceux qui sont donnés. Évidemment le « donné » sous-jacent aux mathématiques est étroitement lié aux éléments abstraits contenus dans nos idées empiriques » (C.W. II, p. 268).

²⁵ Cf. Undecidable diophantine propositions, C.W. III, 156-175 (je remercie Charles Parsons de m'avoir renvoyée à cet article pour mieux éclairer ce point). Sans nommer Hilbert, Gödel mentionne (p. 165) que le problème est ouvert. La réponse négative a été apportée en 1970 par Yuri Matiassévitch en établissant que le concept arithmétique d'ensemble diophantien est équivalent au concept logique d'ensemble récursivement énumérable. Le théorème de Matiassévitch équivaut à dire que la vérité des énoncés qui s'écrivent comme des égalités polynomiales quantifiées existentiellement n'est pas décidable (cas où $m = 0$) ; ainsi le premier théorème de Gödel peut en être dérivé.

²⁶ « Correct » selon quelles normes ? Le problème avec « l'évidence » a été clairement formulé par Gödel lui-même dans les termes suivants : « Il y a des degrés dans l'évidence. La clarté avec laquelle nous percevons quelque chose est surestimée. Plus les choses sont simples, plus elles sont utilisées, plus elles deviennent évidentes. Ce qui est évident n'a pas besoin d'être vrai » (Wang 1991, p. 237). Dans ce passage il est admis que l'évidence peut aussi provenir d'une pratique, ce qui offre une alternative à la conception platoniste de l'intuition.

²⁷ Plus tard, Gödel écrira : « 'axiom' signifie proposition assumée sur la base d'une évidence intuitive ou à cause de son succès dans les applications » (G 1953-59, version V, C.W. III, p. 361). Voir aussi C.W. II, p. 269. Ici encore la pratique contrebalance l'évidence intuitive.

absolues et la connexion de l'intuition (*insight*) à l'évidence de ce qui *s'impose* à elle. Ce qui complique les choses c'est que cette réhabilitation n'implique pas, selon Gödel, l'assomption du point de vue philosophique *essentialiste* qui accompagnait la conception dans laquelle les axiomes sont des vérités primitives *a priori*, nécessairement évidentes. Selon Gödel, on peut bien, en effet, considérer les faits mathématiques *comme* des faits physiques et donc laisser ouverte la voie empiriste.²⁸ Il importe davantage à Gödel de développer l'analogie entre mathématiques et sciences de la nature sans trancher définitivement entre apriorisme et empirisme. La question se pose pourtant de savoir dans quelle mesure le platonisme ménage réellement une possibilité pour l'empirisme ? En fait, même dans une conception empiriste on se heurte à l'impossibilité de démontrer la consistance des propositions primitives par les seuls moyens admis au départ. C'est donc que l'empirisme lui-même conduit à constater l'*indispensabilité* d'un certain platonisme, comme Gödel l'indique. Le platonisme s'impose donc 1) parce que les axiomes sont des propositions évidemment vraies, 2) parce que la question de la consistance conduit à constater qu'il est indispensable d'accepter 1). La posture philosophique impliquée en 2), basée sur un argument d'indispensabilité, est différente de celle du platonisme « direct » exprimé par 1).

2. Deuxième exemple : reformulation du second théorème d'incomplétude.

Le deuxième théorème rend l'incomplétabilité « particulièrement évidente », car « *il rend impossible que quelqu'un doive établir un certain système bien défini d'axiomes et de règles d'inférence et faire de manière consistante à son propos l'assertion suivante : "je perçois (avec une certitude mathématique)"²⁹ que tous ces axiomes et règles sont corrects et, de plus, je crois qu'ils contiennent toutes les mathématiques* ». Si quelqu'un fait cette assertion, il se contredit lui-même. »³⁰

On relève la formulation, faite non pas d'un point de vue objectif comme c'était le cas pour la reformulation du premier théorème en termes d'indécidabilité d'une certaine classe de problèmes diophantiens, mais du point de vue d'un sujet qui fixe un système, affirme, perçoit, croit et se contredit.

'Toutes les mathématiques' signifie 'toutes les propositions mathématiques vraies' et non 'toutes les propositions mathématiques démontrables'. Gödel reflète la distinction vrai/démontrable, présentée d'abord comme *fait* mathématique *révélé* par son premier théorème, dans la distinction mathématiques objectives/mathématiques subjectives, qui introduit le paramètre de la *connaissance*. Les mathématiques objectives concernent des entités en tant qu'elles existent – ou des propositions vraies – indépendamment de notre pensée. Exemple : $35 = 7 \times 5$; $\forall x \forall y (xy = yx)$. Les mathématiques subjectives concernent ces mêmes objets, mais en tant qu'ils sont démonstrativement *connus* par nous. Il est clair que toute mathématique subjective est objective. Mais l'inverse n'est pas vrai : il y a des mathématiques objectives non (ou non encore) démonstrativement connues de nous. Ainsi, connaissance et preuve sont subjectives et n'épuisent respectivement ni l'être ni le vrai.

Dans l'assertion ci-dessus le 'je perçois' renvoie à une intuition mathématique non dérivable des axiomes. Du point de vue des vérités démontrées, royaume des mathématiques subjectives, il peut exister une règle produisant tous les axiomes évidents. Mais l'entendement humain ne pourrait alors jamais connaître avec une certitude mathématique que *toutes* les propositions ainsi supposées produites sont correctes ; il ne pourrait percevoir la vérité que

²⁸ G 1951, C.W. III, p. 313, 2^e alinéa et note 20.

²⁹ L'intuition consiste en une perception. La certitude mathématique est nécessairement différente de la prouvabilité dans un système formel donné, puisqu'il peut exister dans ledit système des propositions vraies non prouvables.

³⁰ G 1951, C.W. III, p. 309.

d'un nombre fini de propositions et seulement successivement l'une après l'autre. L'assertion que toutes les propositions sont vraies ne pourrait être retenue qu'avec une certitude empirique, c'est-à-dire par induction à partir d'un nombre fini de propositions perçues comme vraies. L'esprit serait ainsi équivalent à une machine finie qui ne comprendrait pas complètement son propre fonctionnement. Cette inaptitude manifesterait selon Gödel non pas l'inexhaustibilité de l'esprit, mais celle des mathématiques objectives, et cela non seulement relativement à un système donné d'axiomes mais relativement à tout système.

Ce second cas d'inexhaustibilité indique aussi un processus ouvert : on ne peut pas enfermer toutes les propositions mathématiques vraies dans un système fini d'axiomes. Mais à l'analogie esprit/machine finie, il ajoute la distinction être/connaître. Si *le sens* d'un concept, *la vérité* d'une proposition peut excéder le cadre d'un système axiomatique, c'est que l'être ne se réduit pas à la connaissance.

Gödel note³¹ que pour un intuitionniste il n'y a que des mathématiques subjectives, c'est-à-dire qu'il n'y pas de distinction entre être et connaître. Un intuitionniste admet en effet que toute vérité est une vérité connue et admet aussi que toute vérité n'est pas une vérité prouvée. Il en résulte qu'il y a un autre mode de connaissance que le mode de la preuve, le mode intuitif. Avec cette conclusion Gödel est d'accord, mais son point de vue demande en plus l'existence objective préalable et indépendante de vérités mathématiques qui s'offrent à l'intuition. Pour lui l'intuition nous connecte à quelque chose d'extérieur à l'esprit.

3. La célèbre disjonction inclusive (notons la D) affirme :

- (a) ou l'esprit dépasse infiniment le pouvoir de n'importe quelle machine finie,
- (b) ou il existe des problèmes diophantiens absolument indécidables.

L'intérêt philosophique de D, souligne Gödel, est d'être vraie indépendamment de la position prise quant aux fondements, pourvu que soient admises comme ayant un sens [*meaningful*] les propositions portant sur tous les entiers³². Gödel précise qu'un intuitionniste affirme la vérité de (a) et nie (b) au sens où il peut exister des propositions dont l'indécidabilité ne peut pas être démontrée³³, et qu'un finitiste tient probablement (a) pour fausse³⁴ (donc affirmerait la vérité de (b)). Bref, « le phénomène de l'inexhaustibilité des mathématiques est toujours présent sous une forme ou sous une autre »³⁵.

Certains logiciens considèrent que poser la question "Existe-t-il des propositions vraies dont on ne peut absolument pas démontrer la vérité ?" caractérise une position platoniste, qui y répond affirmativement, comme le fait Gödel en assumant (b). Pour Prawitz (1980) la réponse est négative, puisque 'vrai' signifie que l'on dispose d'une méthode de preuve. Pour Martin-Löf (1996) c'est à peine si la question se pose, car la réponse est évidemment négative dès

³¹ G 1951, C.W. III, p. 310, note 15.

³² G 1951, C.W. III, p. 310-11.

³³ En ce qui concerne (b), Mark van Atten m'a signalé que dans une note datant de 1907/1908 Brouwer avait déjà affirmé que, bien qu'il n'y ait aucune raison de croire que toutes les propositions sont en principe décidables, il se peut qu'il y ait des propositions qui ne soient pas absolument indécidables puisqu'« on ne peut pas toujours démontrer pour une proposition qu'elle est absolument indécidable ». Heyting fait le lien explicite de l'affirmation que l'on ne peut indiquer aucun problème absolument insoluble avec le rejet du tiers exclu (Heyting 1934, p. 16).

³⁴ Boolos signale que d'après Wang 1974, p. 324-26, Gödel pensait que Hilbert avait raison de rejeter (b) ; en effet poser des questions insolubles tout en affirmant que seule la raison peut les résoudre serait admettre une irrationalité de la raison.

³⁵ G 1951, C.W. III, p. 305.

qu'on tient compte de sa propre explication des termes 'proposition', 'vérité', 'preuve'³⁶. Le caractère platoniste de la réponse affirmative de Gödel est donc déjà présent dans la question qui présuppose que être et connaître sont distincts. Cela explique l'affirmation de Gödel selon laquelle son platonisme a joué un rôle heuristique dans la conception tant de son théorème de complétude que de ses théorèmes d'incomplétude³⁷.

Boolos demande s'il existe un autre cas d'inexhaustibilité des mathématiques que les deux cas invoqués par D. Autrement dit, le phénomène a-t-il plusieurs instances ou est-il caractéristique des théorèmes de Gödel ? Mais même dans la seconde éventualité, la portée philosophique (aussi bien que technique) n'en serait à mon avis pas diminuée. Bien au contraire, la réflexion fut lancée, notamment par G. Kreisel, sur les liens, à divers niveaux d'abstraction, entre formel et informel. Cependant *dérivée* D du second théorème pose des difficultés qui n'échappent pas à Gödel.

4. Deuxième partie de G 1951 : « les conséquences philosophiques »³⁸.

Cette deuxième partie laisse supposer que la première partie *n'a* traité *que* des aspects mathématiques des théorèmes d'incomplétude, ce qui n'est pas tout à fait le cas.

Avertissement préalable : l'état insuffisamment développé de la philosophie ne permet pas de tirer ces conséquences avec une rigueur mathématique (logique). Gödel continue néanmoins à utiliser les termes 'conséquence' et 'implication', peut-être en attendant que le développement de la philosophie permette ultérieurement de leur donner la rigueur logique voulue. Mais malgré des progrès, le processus de munir la philosophie de rigueur logique reste ouvert aujourd'hui. De fait, une tension, sinon une véritable opposition, se manifeste entre, d'une part, la prudence de Gödel qui reconnaît qu'il ne peut y avoir de lien de dépendance logique entre ses théorèmes et le platonisme, et d'autre part, sa propension à invoquer constamment ses résultats logiques pour *légitimer* d'une *manière scientifique* ses vues philosophiques.

Ainsi il fait observer que D milite contre le matérialisme, que l'on affirme la vérité de (a), ou de (b), ou des deux à la fois. En effet si (a) est vraie, alors on affirme que l'esprit humain ne peut pas être réduit au cerveau (machine ayant un nombre fini de parties). Si (b) est vraie, alors il semble que les mathématiques ne se réduisent pas au pouvoir de création de notre esprit. Par là, D semble ainsi impliquer une forme de platonisme tout en laissant la porte ouverte à l'empirisme. Car l'analogie entre le monde mathématique et le monde physique porte *en elle-même* la double option du platonisme (les objets mathématiques existent d'une manière aussi objective que les objets physiques) et de l'empirisme (l'usage de la généralisation inductive à partir d'un certain nombre de faits vérifiés n'est pas moins justifié en mathématiques qu'en physique³⁹).

Cependant sont présentés trois arguments en faveur du platonisme. Je vais exposer chacun d'eux, suivi de quelques commentaires. Puis, signalé chaque fois par le signe \succ , j'examinerai s'il y a véritablement quelque lien de *dépendance* entre la critique de l'idée que nous créons les concepts mathématiques et l'affirmation du platonisme.

Supposons donc que les mathématiques soient notre libre création.

³⁶ Martin-Löf présente sa conception comme une sémantique de la preuve plutôt qu'une sémantique de la vérité. L'intuition est focalisée sur le processus de la preuve tandis que pour Brouwer l'intuition construit d'abord des objets (intuition de la dyade) sur lesquels se greffent les constructions ultérieures.

³⁷ Lettres à Hao Wang, dans Wang 1974, p. 8-9.

³⁸ G 1951, C.W., III, p. 305, 2^e ligne : « philosophical consequences ». p. 311, 2^e alinéa, 2^e ligne : « philosophical implications ».

³⁹ Plus tard Gödel dira que même concernant des objets physiques nos idées contiennent des éléments abstraits (voir supra note 24).

1^{er} argument. L'ignorance relative aux objets que nous créons serait seulement due à un manque de clarté ou à des calculs compliqués, et elle disparaîtrait (en principe du moins) lorsque nous atteignons une clarté parfaite. Or les développements des fondements des mathématiques ont permis d'atteindre, selon Gödel, un « indépassable » degré d'exactitude ; cela n'a pourtant presque en rien aidé la solution de problèmes mathématiques. Notre ignorance et l'existence de problèmes insolubles ou non encore résolus conforte la croyance en l'existence d'objets et de faits mathématiques indépendants des actes et décisions de notre esprit.

Le fait qu'une meilleure compréhension des fondements n'entraîne « pratiquement » pas de meilleure maîtrise des problèmes joue, selon Gödel, *contre* la création des concepts. Gödel suppose en effet que nous ne pouvons pas ne pas connaître assez clairement les objets que nous créons. L'objet est transparent pour son créateur. Le créateur « connaît nécessairement toutes les propriétés de ses créatures, car celles-ci n'ont aucune autre propriété que celles qu'il leur a données ».⁴⁰

➤ Mais sommes-nous si *définitivement* au clair sur les fondements ? On peut raisonnablement en douter. De plus, le fait qu'un problème mathématique se pose et se déploie dans une sphère d'*objectivité* ne signifie pas que les éléments de cette sphère ont une *existence extérieure* à notre esprit. Enfin, le rationalisme radical de la conscience, œuvrant dans la pleine transparence instantanée, est mis en question par le témoignage de nombreux mathématiciens, tel Poincaré, qui porte au contraire à penser que l'intuition ne s'accompagne pas forcément d'une transparence entière et immédiate, mais suit un cheminement mental plus ou moins long et complexe dont seul le terme ultime apporte éventuellement une illumination décisive et à effets nécessairement rétrospectifs.

Gödel disqualifie par avance cette dernière objection en disant que, de toutes façons, nous ne créons pas à partir de rien, mais à partir d'un donné. Ce donné nous imposerait un point de vue platoniste, même si viennent s'y édifier des constructions de notre cru. Selon lui, l'intuitionnisme bien compris n'exclut pas le platonisme.

Mais la position de Gödel est étrangement atténuée lorsqu'il ajoute que si nos créations étaient le produit de notre raison, alors les faits mathématiques exprimeraient au moins en partie les propriétés de la raison, laquelle, par ce biais, aurait « une existence objective »⁴¹. En effet, considérer la facture de la raison comme une *donnée objective* est accepté aussi bien par les empiristes (comme l'indique Gödel page 313), les intuitionnistes (Brouwer), les mathématiciens classiques affirmant que notre esprit crée les *concepts* mathématiques selon des processus fondamentaux de l'esprit (Dedekind, Cantor, Hilbert), et même les matérialistes qui développent une conception neuronale de l'activité du cerveau (Changeux). Comprendre 'existence objective' en un sens platoniste ne va donc pas de soi.

De même pour « le donné ». Gödel considère qu'il s'agit d'un donné physiquement extérieur à l'esprit. Le mathématicien opère *comme* un physicien : Gödel fait la comparaison à plusieurs reprises. Mais s'il y a toujours forcément un « donné » *préalable* au travail de l'esprit, ce préalable n'est pas *ipso facto* extérieur à l'esprit.

Michael Detlefsen pense que pour établir l'analogie entre perception sensorielle et appréhension mathématique on doit répondre aux questions suivantes : 1) le faux peut-il

⁴⁰ G 1951, C.W., III, p. 311.

⁴¹ G 1951, C.W., III, p. 312. Boolos a bien noté (p. 298) que la difficulté tient à ce qu'on doit (ou peut) entendre par « existence objective », et de même pour « indépendant » et « donné ».

s'imposer⁴² à nous de telle manière que nous le prenions pour vrai – ainsi qu'il arrive dans les phénomènes d'illusion optique par exemple – ? 2) Le phénomène de contrainte est-il plus sûrement une marque de l'existence et de propriétés d'objets extérieurs qu'il n'est l'effet de dispositions mentales profondément ancrés ? 3) La familiarité et l'entraînement n'affectent-elles pas autant la perception mathématique qu'elle affecte notre perception sensorielle ? 4) Y a-t-il une connexion systématique entre fiabilité et familiarité ? 5) Y a-t-il des moyens fiables de distinguer entre ce qui s'impose à nous par l'effet sur nous d'objets extérieurs et ce qui s'impose à nous par l'effet de dispositions mentales ?⁴³

Dans la dernière phrase de la version V de G 1953-59, Gödel écrira que le contenu d'une proposition est fonction de la question que l'on pose à son propos. La position de Gödel sur le rapport du contenu d'une proposition et l'activité de l'esprit apparaît plus complexe si l'on tient compte d'observations de ce genre qui viennent modifier son credo fondamental selon lequel nous percevons les concepts et leurs relations par une intuition de la raison comparable à la saisie sensorielle d'objets physiques.

2^e argument. À supposer que nous créons quelque chose (des entités nouvelles), les théorèmes viennent restreindre la liberté de création. Pour Gödel, ce qui exerce une restriction, cela existe nécessairement indépendamment de et extérieurement à l'acte de création. Au fond, pour Gödel, les *théorèmes* renforcent l'effet supposé des *problèmes* : nous ne faisons pas ce que nous voulons, nous sommes « menés » par des questions et des réponses qui s'imposent à nous (c'est l'argument essentiel du platonisme spontané de nombreux mathématiciens, par exemple Alain Connes).

Ici encore, la situation est plus complexe qu'il n'y paraît au premier abord. En effet, en tant que contraintes les théorèmes sont indépendants de notre création mais en tant que démontrés ils appartiennent au royaume des mathématiques subjectives. Ils représentent donc, pour Gödel, des propositions objectivement vraies et démonstrativement (subjectivement) reconnues vraies.

➤ On peut objecter que le fait que les objets et relations mathématiques obéissent à des contraintes de validité n'implique pas *ipso facto* qu'ils soient *indépendants* de notre création. Cela peut impliquer seulement que leur création n'est pas *arbitraire*, qu'elle est conditionnée par un ensemble de facteurs, parmi lesquels on compte la facture de notre esprit, les données du problème⁴⁴ à résoudre, les caractéristiques des phénomènes physiques ayant éventuellement suscité le problème, les outils dont nous disposons ou que nous forgeons pour le résoudre, les normes spécifiques de cohérence du ou des champs où s'inscrit, actuellement ou potentiellement, le problème. Il est possible de soutenir à la fois, ainsi que l'a fait Dedekind, que les concepts mathématiques sont créés, construits, plutôt que découverts et que la construction n'est ni arbitraire ni conventionnelle mais correspond à certaines connexions objectives nécessaires : celles conformes aux lois de l'esprit et celles dictées tant par la cohérence logique que par l'ajustement des concepts mathématiques nouveaux aux concepts anciens (cohérence mathématique). Pour Dedekind, l'entendement fini et progressif (*Treppen-Verstand*) vise à s'approcher indéfiniment de la Vérité, point de fuite de l'inlassable recherche de définitions précises et

⁴² C'est surtout dans la seconde version de son article sur le continu de Cantor (1964) que Gödel considère cet aspect en écrivant que « les axiomes s'imposent à nous comme étant vrais » (« *force themselves on us as being true* »).

⁴³ Detlefsen 2010.

⁴⁴ 'Problème' doit, selon moi, être conçu comme une tâche et non comme une proposition du langage sur des objets non linguistiques.

de preuves rigoureuses.⁴⁵ Les concepts, que Dedekind caractérise (« crée ») par des définitions explicites énonçant des conditions nécessaires et suffisantes (en bref, par des axiomes) n'existent pas par eux-mêmes de toute éternité ; ils sont des *instruments* inventés par l'esprit pour poursuivre cette recherche⁴⁶. Dedekind prend en compte développement historique d'une science : c'est le processus de la connaissance qui est indéfini (ouvert), non le nombre de vérités au royaume des mathématiques objectives.

L'objectivité des *théorèmes* n'implique pas l'existence *indépendante* de notre pensée d'*objets*, de concepts ou de faits mathématiques⁴⁷. On peut considérer en effet que l'objectivité des théorèmes est contemporaine de la preuve, non pas antérieure à elle. Déconnecter *l'objectivité* des théorèmes de l'existence d'*objets extérieurs* revient à distinguer la *vérité* d'une proposition de sa supposée *existence* indépendante, c'est-à-dire à distinguer la sémantique de l'ontologie, et à distinguer la connaissance intuitive de l'existence d'un quelque chose antérieur et extérieur à cette intuition⁴⁸. Gödel affirme que la connaissance intuitive précède nécessairement la preuve⁴⁹. Cela n'implique cependant pas que l'*être* est antérieur au *connaître* ou indépendant de lui. Gödel dit que toute vérité connue implique une vérité indépendante de la connaissance. On peut aussi considérer que toute vérité est une vérité connue (Brouwer, Prawitz, Martin-Löf).

3^e argument. Si les objets mathématiques sont notre création, alors nous créons, par exemple, les entiers et les ensembles d'entiers par deux actes différents. Or, pour prouver certains théorèmes sur les entiers nous avons besoin du concept d'ensemble d'entiers. Donc, pour trouver les propriétés de certains objets de notre imagination, il nous faut d'abord créer d'autres objets, ce qui est, selon G, une bien « étrange » situation.

➤ Cette « étrange » situation est familière en mathématiques : recourir à l'invention d'un nouveau concept ou de nouvelles méthodes permettant de démontrer ou redémontrer différemment des théorèmes sur des concepts anciens. C'est typiquement le cas, par exemple, de la théorie des proportions d'Euclide et de la méthode des coupures de Dedekind, ou du théorème fondamental de l'algèbre pour lequel il existe différents énoncés et de nombreuses démonstrations⁵⁰, qui furent un puissant moteur pour l'évolution de la recherche et une meilleure compréhension des nombres complexes. Par ailleurs, du point de vue philosophique, et en réponse à ce malaise de Gödel, on pourrait dire qu'on peut concevoir, à la manière de Husserl, les propriétés comme des objets potentiels qui s'actualisent dans un acte de thématization. Et, pour Husserl, la conscience constitue l'objet dans un acte caractérisé par la corrélation de la pensée avec ce qui est

⁴⁵ Dedekind 2008, p. 136, 222.

⁴⁶ Benis Sinaceur 2008.

⁴⁷ De nombreux auteurs, parmi lesquels Hao Wang qui pense ne pas pouvoir éviter une forme de platonisme, remarquent que l'objectivité des vérités mathématiques est moins sujette à controverses que l'existence autonome d'objets mathématiques.

⁴⁸ Même un sympathisant du platonisme comme Ch. Parsons reconnaît qu'il y a une différence entre dire que nous avons une intuition des *vérités* mathématiques et dire qu'il existe des *objets* transcendant notre connaissance auxquels se rapportent ces vérités – il qualifie ce second point de vue « réalisme transcendantal » (Parsons 1995, p. 71).

⁴⁹ G 1951, C.W. III, p. 317.

⁵⁰ De nos jours encore sont publiées des démonstrations nouvelles, par exemple dans le cadre croisé de la géométrie algébrique réelle et de la topologie algébrique effective (en particulier, la démonstration constructive de Michael Eisermann, de l'Université de Stuttgart, à paraître dans *The American Mathematical Monthly*)

pensé, la corrélation d'un acte noétique avec son noéma. Mais en 1951 Gödel n'a pas la familiarité qu'il aura ultérieurement avec l'œuvre de Husserl.

Conclusion

G 1951 appuie le platonisme sur divers arguments qui introduisent beaucoup plus de nuances qu'il n'est aisé d'en retenir. Sans parler des surdéterminations apportées par les textes postérieurs. En particulier, j'ai laissé de côté, faute de place, l'argument selon lequel nous devons d'abord connaître le sens [*meaning*] des concepts mathématiques avant de poser les axiomes les mettant en œuvre et qu'une proposition analytique est vraie « en vertu du sens de ses termes » ou « en vertu de la nature des concepts qui y occurrent ». Autrement dit quelle relation y a-t-il entre sens d'un terme et nature du concept désigné par ce terme ? Le sens préexiste-t-il au concept ? L'intuition se rapporte-t-elle à un objet ou à une signification ? Questions qui méritent une autre étude.

Gödel précise pour finir qu'il n'a évidemment pas apporté de preuve du platonisme, mais que le platonisme, c'est-à-dire « la conception selon laquelle les mathématiques décrivent une réalité non sensorielle existant indépendamment des actes et des dispositions de l'esprit humain », lui semble la seule position tenable. Il invoque la croyance de Charles Hermite en l'existence d'« un monde de vérités mathématiques » comparable au « monde des réalités physiques ». Cependant, ce qu'il pourrait maximalement asserter, selon lui, c'est d'avoir réfuté le nominalisme, identifié ne l'oublions pas avec le programme syntaxique de Hilbert, et fourni de forts arguments contre l'idée que nous créons les concepts mathématiques. Pourtant il a pu soutenir que cette idée, bien comprise, n'exclut pas le platonisme ; de même, du fait que ses théorèmes d'incomplétude sont valides en logique intuitionniste, il infère non pas qu'ils ne sont pas intrinsèquement liés au platonisme, mais que l'intuitionnisme n'exclut pas le platonisme ; de même encore il montre que l'empirisme, une fois posée la question de la consistance des propositions primitives, ne peut se passer d'un certain platonisme. Autrement dit, aucune des positions citées *n'exclut* le platonisme, même si aucune ne le défend et que l'intuitionnisme le combat frontalement. Finalement il faut bien reconnaître que le lien des théorèmes d'incomplétude au platonisme mathématique ne pourrait se présenter comme une contrainte, du reste non nécessairement identique à la relation de conséquence logique, que sous l'assomption de thèses philosophiques particulières sur la vérité et la connaissance. Plutôt que conséquence le platonisme est la présupposition.

Je remercie vivement Mark van Atten pour ses remarques sur une toute première version de cet article. Je remercie très vivement Charles Parsons qui m'a conduite à préciser certains points-clés de l'argumentation et Michael Detlefsen pour ses remarques très suggestives qui vont beaucoup plus loin que mon propos limité. Je remercie enfin Manuel Rebuschi et Joseph Vidal-Rosset auxquels la présente version doit un certain nombre de clarifications.

Références

Benis Sinaceur

2008 "Nécessité et fécondité des définitions : fondements de la théorie des nombres de Richard Dedekind (1831-1916)", in *Définition, Rôle et fonctions en logique et en mathématiques*, P. Joray et D. Miéville eds., CdRS, Université de Neuchâtel.

2009 Tarski's practice and philosophy: between formalism and pragmatism, in Lindström et alii eds., *Logicism, Intuitionism, Formalism*, Synthese Library **341**, 357-396.

Bernays Paul

1935 Sur le platonisme dans les mathématiques, *L'enseignement mathématique* **34**, 52-69.

Réédition dans Bernays 2003, 83-98.

2003 *Philosophie mathématique*, trad. franç. de *Abhandlungen zur Philosophie der Mathematik*, Darmstadt, Wissenschaftliche Buchgesellschaft, 1976, Paris, Vrin.

Cantor Georg

1932 *Abhandlungen mathematischen und philosophischen Inhalts*, éd. E. Zermelo ;

reproduction Olms, 1966.

Dedekind Richard

2008 *La création des nombres*. Textes réunis, traduits, introduits et annotés par Hourya Benis Sinaceur, Paris, Vrin.

Detlefsen Michael

2010 Discovery, Invention and Realism: Gödel and others on the Reality of Concepts, à paraître.

Gödel Kurt

1986-2003 *Collected Works*, volumes **I, II, III, IV, V**, éd. S. Feferman & alii, New York-Oxford, Oxford University Press.

1995 *Unpublished Philosophical Essays*, éd. F.A. Rodriguez-Consuegra, Basel-Boston-Berlin, Birkhäuser Verlag.

Heyting Arend

1934 *Mathematische Grundlagenforschung, Intuitionismus, Beweistheorie*, Berlin, Springer.

Hilbert David

1926 Über das Unendliche, *Mathematische Annalen* **95**, 161-190. Trad. anglaise dans van Heijenoort 1967, 367-392.

1928 Die Grundlagen der Mathematik, *Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Hamburgischen Universität* **6**: 65-83. Trad. anglaise dans van Heijenoort 1967, 464-479.

Libéra Alain de

1999 article "Nominalisme" du *Dictionnaire d'Histoire et Philosophie des Sciences*, sous la direction de Dominique Lecourt, PUF, 1999, 694-698.

Michon Cyrille

1994 *Nominalisme, la théorie de la signification d'Occam*, Paris, Vrin.

Martin-Löf Per

1996 On the meanings of the logical constants and the justifications of the logical laws, *Nordic Journal of Philosophical Logic*, 1(1), 11-60.

McLarty Colin

2005 'Mathematical Platonism' versus gathering the dead: what Socrates teaches Glaucon, *Philosophia Mathematica* (III) **13**, 115-134.

Panaccio Claude

1991 *Les mots, les concepts et les choses. La sémantique de Guillaume d'Occam et le nominalisme d'aujourd'hui*. Montréal-Paris, Bellarmin-Vrin.

Parsons Charles

1995 Platonism and mathematical intuition in Kurt Gödel's thought, *The Bulletin of symbolic logic* **1**, 44-74.

Peirce Charles Sanders

1931-35 *Collected papers, I-IV*, éd. C. Hartshorne et P. Weiss, Cambridge (Mass.)

Porphyre

1995 *Isagogè ou Introduction aux Catégories d'Aristote* (vers 268). Traduction latine par Boèce (508), trad. fr. Jules Tricot (1947), introd. A. de Libera, Paris, Vrin, 1995.

Prawitz Dag

1980 Intuitionistic logic: A philosophical challenge", in *Logic and Philosophy*, 1-10, G. H. von Wright (ed.), Martinus Nijhoff Publishers, The Hague.

Wang Hao

1974 *From mathematics to philosophy*, London, Routledge and Kegan Paul.

1991 To and from philosophy - discussions with Gödel and Wittgenstein, *Synthese* **88**, 229-277.