

Between algebra and geometry : undulations and cusps of algebraic curves in the correspondence of Gabriel Cramer

Thierry JOFFREDO

PhD Student, Archives Poincaré, Université de Lorraine, Nancy



Laboratoire
d'Histoire des Sciences
et de Philosophie
Archives Henri Poincaré

26th Novembertagung, 26th-28th nov 2015, Turin

Plan

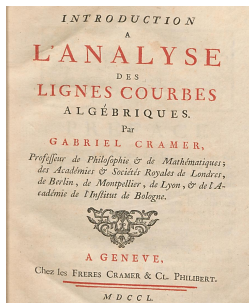
Introduction

Discussing cusps of the second kind with Euler

Discussing undulations (double inflexions) with d'Alembert

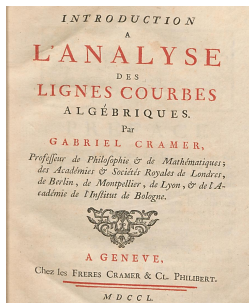
Conclusion

Introduction à l'analyse des lignes courbes algébriques (Gabriel Cramer, Genève, 1750)



- ▶ Classification of the algebraic curves of the first five orders ;
- ▶ Almost 700 pages with numerous and various examples, 33 boards of drawings ;
- ▶ Infinite branches, singular points, tangent lines, extrema, curvature...
- ▶ Totally calculus free ! Algebraic methods only.

Introduction à l'analyse des lignes courbes algébriques (Gabriel Cramer, Genève, 1750)



- ▶ Classification of the algebraic curves of the first five orders ;
- ▶ Almost 700 pages with numerous and various examples, 33 boards of drawings ;
- ▶ Infinite branches, **singular points**, tangent lines, extrema, curvature...
- ▶ Totally calculus free ! Algebraic methods only.

Discussions about nature and existence of some kinds of singular points

- ▶ Cusps of the second kind : correspondence with Euler (oct 1744-jul 1745)
- ▶ Undulations (double /multiple inflexions) : correspondence with d'Alembert (sep-oct 1750)



Plan

Introduction

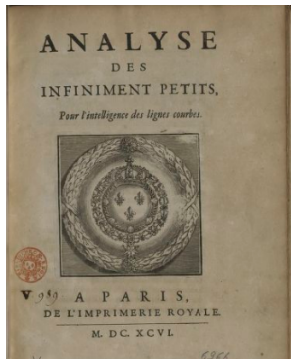
Discussing cusps of the second kind with Euler

Discussing undulations (double inflexions) with d'Alembert

Conclusion

Mathematical background

L'Hopital, *Analyse des infiniment petits*, 1696.



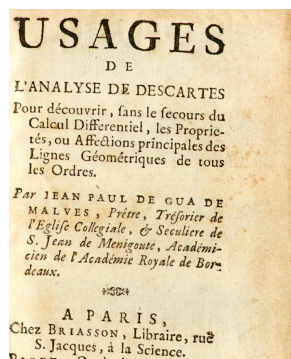
Thierry JOFFREDO

Maupertuis, *Sur quelques affections des courbes*, 1729



Between algebra and geometry : undulations and cusps of algebraic curves in the correspondence of Gabriel Cramer

De Gua de Malves, *Usages de l'Analyse de Descartes*, 1740

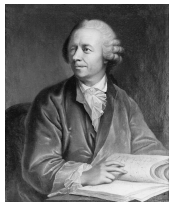


Euler to Cramer, 1744 october 20th



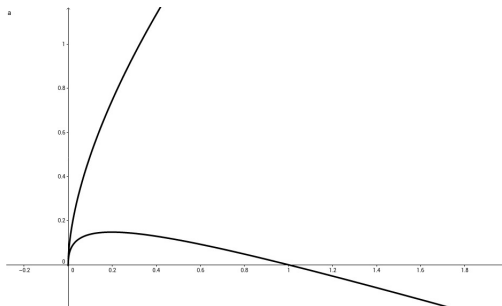
*"Il s'y trouve même des recherches si épineuses, où il faut apporter toute l'attention possible pour ne s'y tromper pas, ce qui m'est arrivé en développant la nature du **point de rebroussement de la seconde espece**. Mr le Marquis de l'Hopital avoit fait voir qu'il y avoit en effet des courbes douées d'un tel point, mais Mr Gua de Malves pretend, que les deux branches de la courbe, qui forment ce point, s'étendent tousjours de l'autre coté, de sorte que selon lui ce point n'est autre chose, qu'une intersection de deux branches, qui se croisent à un angle infiniment petit. Les raisons qu'il en apport[e] me sembloient asses fortes, et j'en ai encore trouvé d'autres, qui m'ont déterminé à croire, qu'il avoit raison, comme Vous aures sans doute remarqué en parcourant mon ouvrage. **Mais depuis j'ai reconnu très clairement, que je m'étois trompé sur ce point, et qu'il y a effectivement des courbes, qui ont un tel point de rebroussement tout net, sans qu'on le puisse regarder comme une intersection infiniment proche de deux branches.**"*

Euler to Cramer, 1744 october 20th



In this letter Euler gives the first known example of an equation of a curve (fourth order) with a cusp of the second kind :

$$y^4 - 2xy^2 + xx = x^3 + 4yxx$$



Cramer to Euler, 1744 november 11th



*"Le point de rebroussement de la seconde espèce est un véritable Paradoxe. Il est bien vrai que les raisons de Mr de Gua ne m'avoient pas paru tout à fait démonstratives : c'est pourquoi je n'en avois rien dit, me contentant de passer cette espèce de point sous silence dans l'énumération des diverses sortes de points doubles. Mais je vous avoueraï pourtant que, comme vous, j'étois fort prévenu contre l'existence de ces points-là, n'en aiant jamais trouvé avant celui que Vous m'indiquez. **J'ai fait tout mon possible pour chicaner votre Courbe.** Mais il n'y a point moien de resister à l'evidence. **D'abord j'ai voulu croire qu'elle se terminoit en une sorte de petit sac fort allongé,** en cette forme :"*



Cramer to Euler, 1744 november 11th



"Ensuite j'ai examiné, si ce point du sommet ne seroit pas un point de rebroussement ordinaire, dont une branche par une inflexion fort proche du sommet retourne sa concavité vers l'autre branche, comme cela arrive à des courbes que je connois, et dont le sommet à cette figure. Ce qui donnoit quelque apparence à ce soupçon, c'est qu'on peut concevoir ce point, comme formé par l'évanouissement d'une feuille. Car si au lieu de l'éq[uation] $y = 4\sqrt{ax} \pm \sqrt[4]{ax^3}$, on prend $y = \sqrt{ax} \pm \sqrt[4]{ax(x-b)^2}$, la Courbe aura cette forme à peu près et b diminuant à l'infini, la feuille s'évanouit.



Or il est ordinaire qu'un foliolum evanescens produise un point de rebroussement de le prem[ière] espèce. Mais il a falu encore renoncer à cette conjecture."

Cramer to Euler, 1744 november 11th



"En un mot, quelque Construction qu'on imagine, il est constant que la Courbe $y^4 - 2xy^2 - 4x^2y - x^3 + x^2 = 0$ a au sommet un point de rebroussement de la 2e espèce, desquels par conseq[uent] l'existence est mainten[ant] incontestable."

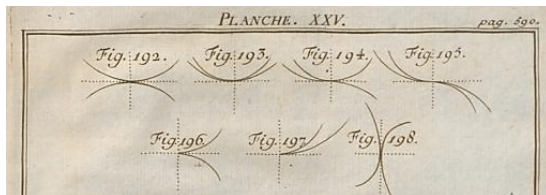
Cramer's conviction is built with geometric investigations, as evidenced by the presence of some figures in the body of the letter.

Three more letters will be exchanged (December 15th 1744, April 26th 1745 and July 6th 1745) until Cramer is definitely persuaded of the existence of the cusp of the second kind.

Cramer, *Introduction*, p 572



"Il y a aussi deux sortes de Rebroussement. L'un, qui est le Rebroussement proprement dit, est une demi-Osculation formée par deux Branches qui tournant leurs convexités l'une contre l'autre, se terminent au point de contact. L'autre, qui est un demi-Embrassement, est formé par deux branches qui tournent leurs concavités d'un même côté & se terminent où elles se rencontrent. On peut le nommer Rebroussement en bec, ou simplement Bec."



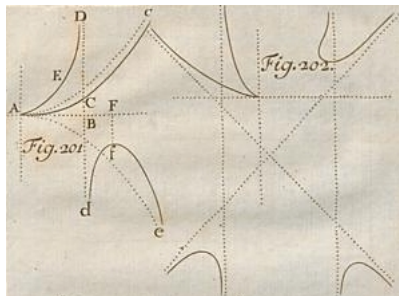
Cramer, *Introduction*, p 590



Cramer gives two examples of equations of curves of the fourth order with such cusps of the second kind (not the same as Euler's one) :

$$x^4 - ax^2y - axy^2 + \frac{1}{4}aayy = 0 \text{ and}$$

$$x^4 + x^3y - x^2y^2 - 2ax^2y + axy^2 + aayy = 0$$



Cramer to Euler, 1750 september 25th



"J'en avois dès 4 ou 5 ans changé quelques endroits du dernier Chap[itre] sur les Rebroussemens, que j'apelle en Bec, au sujet des éclaircissemens que vous aviez eu la bonté de me donner, dans les Lettres que nous échangeions en ce tems-là."

Other letters between Cramer, d'Alembert and Euler (1747-1749) indicate a quarrel involving the formers for the priority of the discover of the existence of the cusps of the second kind, claimed by d'Alembert in the article **REBROUSSEMENT** of the *Encyclopédie*.

d'Alembert, *Encyclopédie* Vol XIII p 842, 1751



"REBROUSSEMENT : *s. m.* (Géometrie.) est la même chose que ce que l'on appelle en latin *flexus contrarius, flexion contraire*. [...] Rebroussement de la seconde espece est un point A (fig. 7. *Analys.*), où les deux branches PM, pm, du rebroussement ne sont pas convexes l'une vers l'autre comme dans le rebroussement ordinaire, mais placées de maniere que la concavité de l'une regarde la convexité de l'autre. [...] Voyez à ce sujet les recherches sur le calcul intégral, imprimées dans le second volume en françois des mém. de l'acad. des Sciences de Prusse.

Je suis le premier qui ait démontré invinciblement l'existence de ces points, que d'habiles géometres avoient attaquée, comme le savant M. Euler l'a reconnu dans les mém. de l'acad. de Berlin de 1750, pag. 112."

Plan

Introduction

Discussing cusps of the second kind with Euler

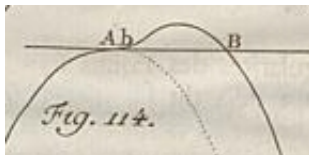
Discussing undulations (double inflexions) with d'Alembert

Conclusion

Cramer, *Introduction* p. 403, 1750



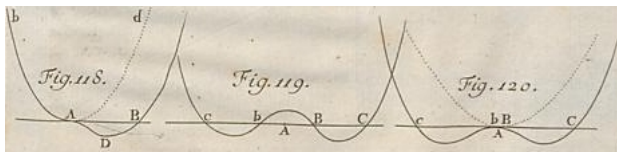
"Mais dans les Lignes du quatrième Ordre & des Ordres supérieurs, une Tangente AB en un point d'Inflexion A peut encore rencontrer la Courbe, comme en B. Si, par quelque supposition, la distance AB devient infiniment petite Ab, la Droite AB ne coupe plus la Courbe, elle ne fait que la toucher. Mais ce contact est équivalent à quatre intersections, ou à deux atouchemens simples, infiniment proches l'un de l'autre. L'inflexion ne paroît plus, quoiqu'elle existe réellement dans un espace infiniment petit, & qu'elle soit sensible à l'Analyse, dont la vüe, si l'on ose parler ainsi, est plus perçante que la nôtre. On donne à ces Points le nom de Points de double Inflexion, ou Points de Serpente ment."



Cramer, *Introduction* p. 403, 1750



"Il est aisé de voir que les Inflexions sont alternativement visibles et invisibles, en passant d'un degré à l'autre. [...] que les Inflexions doubles, quadruples, & en général celles d'un degré pair, sont invisibles, & ne diffèrent en rien, à la vüe, des simples Points de la Courbe : ils ne sont reconnoissables que par les effets de leur existence produit dans le Calcul. C'est proprement ces Points d'Inflexion invisible qu'on nomme Points de serpenement."



d'Alembert to Cramer, september 1750



"Ce que l'on appelle serpentelement infiniment petit, ne me paroît autre chose qu'un point conjugué placé sur une branche de courbe ; j'en dis autant des autres points, & je crois qu'on peut reduire tous les points singuliers à des points conjugués placés sur des branches. Dans le fond tout cela ne signifie autre chose sinon que l'ordonnée de la courbe en tel ou tel point a trois valeurs egales qui ne sont exactement & rigoureusement qu'une meme valeur [...]. Un serpentelement nul n'est autre chose qu'un point simple, et, pour qui veut parler clairement, un serpentelement infiniment petit."

*pour le dire en un point conjugué sous je vous parle un serpentelement nul n'est
autre chose qu'un point simple, et, pour qui veut parler clairement un ser-
pentelement infiniment petit n'est qu'un serpentelement nul. je voudrais savoir
votre pensée là dessus. au surplus je conviens que le fond de tout ce cy peut renfer-
mer des questions de nom, & pourvu qu'on se forme des idées nettes, les termes pour-
voient être arbitraires, sur tout les qu'ilz sont déjà consacré.*

Cramer to d'Alembert, october 2nd 1750



"Je vous demande pardon si je ne pense pas comme vous sur les points de serpentement, & c. Je pense qu'ils different essentiellement des points multiples & en voici la difference. C'est que toute droite qui passe par un point multiple est censée rencontrer la courbe en plusieurs points au lieu qu'il n'y a que la tangente d'un point d'inflexion ou de serpentement qui la rencontre en plusieurs points, toute autre droite ne la rencontre qu'en un seul. [...] Ce qui doit nous faire juger du caractère d'un point qui paroissant ordinaire à la vuë se trouve par le calcul être singulier : c'est de voir d'ou cette singularité prend son origine, en ajoutant à l'éq. quelque terme qui donne à la courbe, un serpentement fini, ou quelque feuille, fleuron, ovale, ou point conjugué, lequel ensuite disparoit par l'évanouissement de quelque connue qui anéantit ce terme ajouté."

Cramer to d'Alembert, october 2nd 1750



"Il est vrai qu'un serpentement infiniment petit n'est qu'un serpentement nul, je conviens encore qu'un serpentement seul n'est qu'un point simple c'est a dire, non multiple ; mais ce n'est pas un point ordinaire ; c'est un point singulier en ce que la Tangente d'un point ordinaire ne rencontre que deux fois la courbe en ce point, au lieu que la Tangente d'un point de serpentement l'y rencontre 4 fois. L'axe qui touche à l'origine la parabole $y^2 = ax$ ne la coupe que deux fois, celui qui touche la parabole $y^4 = a^3x$ la rencontre 4 fois. Mais direz vous, cette difference ne paroît que dans le calcul, & nullement dans la figure. J'en conviens : mais de ce qu'elle ne paroît pas, il ne s'ensuit pas qu'elle ne soit réelle."

In his answer to d'Alembert's objections, based on a geometric point of view, Cramer uses analytical arguments.

d'Alembert to Cramer, october 18th 1750



"J'ay eu tort je l'avoüe de prendre les points singuliers pour des points conjugués ; comme je vous escrivois assés à la hate mes premieres idées, je n'avois point fait attention à la difference que vous y remarqués, & qui est très juste. Cependant je ne goute point ces notions de serpentement infiniment petit ; et je ne comprends pas comment vous pretendés que le serpentement laisse quelque trace, en convenant qu'il est nul. La courbure finie ou infiniment petite, ne change point ce me semble la nature du point, pas plus que deux points simples ne sont differens pour n'avoir pas la même tangente. Tout ce que je vois clairement c'est qu'en ces points la valeur de la tangente ou de l'ordonnée, est triple, / quadruple, quintuple & c. Mais je ne vois avec tout cela qu'un point simple, & qui reellement ne differe point par la nature des points ordinaires. Au reste je veux bien qu'on appelle ce point serpentement infiniment petit comme une maniere abregée de s'exprimer, mais voilà tout."

d'Alembert, *Encyclopédie* vol XV



"SERPENTEMENT : s. m. (Géom.) partie d'une courbe qui va en serpentant.

Le caractere du serpentement est que la courbe peut être coupée en 4 points, par une même ligne droite ; ainsi les serpentemens ne peuvent se trouver que dans les lignes du quatrieme ordre. Voyez Courbe & Equation.

On appelle serpentement infiniment petit, celui où on peut imaginer une ordonnée, qui étant supposée touchante de la courbe, y ait 4 valeurs égales, ou davantage ; par exemple la courbe qui a pour équation $y = \sqrt[4]{x}$ a un serpentement infiniment petit à son origine, puisque si on transporte l'origine à une distance $= a$, en conservant toujours les x , on aura en faisant $y = 2 - a$, l'équation $\overline{2 - a}^4$, qui donne lorsque $x = 0$, quatre valeurs de 2, toute égales à a . [...] Voyez le traité des courbes de M. Cramer. (O)"

Plan

Introduction

Discussing cusps of the second kind with Euler

Discussing undulations (double inflexions) with d'Alembert

Conclusion

Conclusion

- ▶ These letters illustrate transfers of mathematical knowledge between Cramer, Euler and d'Alembert, leading to a clarification of two geometrical notions (cusps of the second kind and double inflexions), which are later institutionalised in reference books ;
- ▶ A focus should be made on the evolution of the mathematical thinking of Gabriel Cramer, between geometrical intuition (with Euler in 1744) and analytical certainty (with d'Alembert in 1750), and what it tells us about the respective statutes of geometry and algebra (analysis) in higher plane curves studies during the XVIIIth century.

Conclusion

- ▶ These letters illustrate transfers of mathematical knowledge between Cramer, Euler and d'Alembert, leading to a clarification of two geometrical notions (cusps of the second kind and double inflexions), which are later institutionalised in reference books ;
- ▶ A focus should be made on the evolution of the mathematical thinking of Gabriel Cramer, between geometrical intuition (with Euler in 1744) and analytical certainty (with d'Alembert in 1750), and what it tells us about the respective statutes of geometry and algebra (analysis) in higher plane curves studies during the XVIIIth century.

Conclusion

- ▶ These letters illustrate transfers of mathematical knowledge between Cramer, Euler and d'Alembert, leading to a clarification of two geometrical notions (cusps of the second kind and double inflexions), which are later institutionalised in reference books ;
- ▶ A focus should be made on the evolution of the mathematical thinking of Gabriel Cramer, between geometrical intuition (with Euler in 1744) and analytical certainty (with d'Alembert in 1750), and what it tells us about the respective statutes of geometry and algebra (analysis) in higher plane curves studies during the XVIIIth century.

Thank you for your attention. A few references :



Bodenmann, Siegfried, et Andreas Kleinert, édés. 2016. *Correspondance de Leonhard Euler avec L. Bertrand, Ch. Bonnet, J. Castillon, G. Cramer, Ph. Cramer, G. Cuenz, G.L. Lesage, J.M. von Loen et J.K. Wettstein*. T. 4A / 7. *Commercium epistolicum*. Basel : Birkhäuser.
<http://www.springer.com/us/book/9783764387433>.







Cramer, Gabriel. 1750. *Introduction à l'analyse des lignes courbes algébriques*. Genève : chez les frères Cramer et C. Philibert.
<http://dx.doi.org/10.3931/e-rara-4048>.



D'Alembert, Jean Le Rond d'. 1751a. REBROUSSEMENT. In *Encyclopédie ou dictionnaire raisonné des sciences, des arts et des métiers*, XIII : 842.
<http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k50545b>.



———. 1751b. SERPENTEMENT. In *Encyclopédie ou dictionnaire raisonné des sciences, des arts et des métiers*, XV : 112.
<http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k505471>.

-  Gua de Malves, Jean-Paul de. 1740. *Usages de l'analyse de descartes pour découvrir sans le secours du calcul différentiel les propriétés ou affections principales des lignes géométriques de tous les ordres*. Paris : Jombert.
-  L'Hospital, Guillaume François Antoine Marquis de. 1696. *Analyse des infiniment petits, pour l'intelligence des lignes courbes*. de l'Imprimerie Royale.
<http://www.e-rara.ch/doi/10.3931/e-rara-10415>.
-  Maupertuis, Pierre Louis Moreau de. 1731. Sur quelques affections des courbes. *Histoire de l'Academie Royale des Sciences. Avec les memoires de mathematique & de physique, pour la meme année, tirés de registres de cette Academie : Année 1729 : 277–282*.
<http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k3527h/f445.image>.
-  Passeron, Irène, éd. 2015. *Correspondance générale 1741-1752*. T. V/2. Jean Le Rond d'Alembert, Œuvres complètes. Paris : CNRS.