



HAL
open science

Jak Fermat pracoval s matematickými křivkami

Jean Dhombres

► **To cite this version:**

Jean Dhombres. Jak Fermat pracoval s matematickými křivkami. Cahiers du CEFRES, 2002, Mathematik Pierre de Fermat, 28, pp.9-47. halshs-01242017

HAL Id: halshs-01242017

<https://shs.hal.science/halshs-01242017>

Submitted on 11 Dec 2015

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Cahiers du CEFRES

N° 28, Matematik Pierre de Fermat

Alena Šolcová, Michal Křížek, Georges Mink (Ed.)

Jean DHOMBRES

Jak Fermat pracoval s matematickými křivkami

Référence électronique / electronic reference :

Jean Dhombres, « Jak Fermat pracoval s matematickými křivkami », Cahiers du CEFRES. N° 28, Matematik Pierre de Fermat (ed. Alena Šolcová, Michal Křížek, Georges Mink).

Mis en ligne en / published on : mai 2010 / may 2010

URL : http://www.cefres.cz/pdf/c28/dhombres_2002_fermat_matematicke_krivky.pdf

Editeur / publisher : CEFRES USR 3138 CNRS-MAEE

<http://www.cefres.cz>

Ce document a été généré par l'éditeur.

© CEFRES USR 3138 CNRS-MAEE



Jak Fermat pracoval s matematickými křivkami¹

Jean Dhombres, Paříž

Je krásný říjnový den roku 2001. Proč právě dnes touží Praha, vybavená tolika významnými evropskými památkami, po nostalgii matematického vyprávění z minulosti? Navíc v období, kdy značná část francouzské společnosti, a věřím, že i širší část společnosti evropské, vidí v Eukleidově vědě jen školní cvičení, v poslední době nesprávně orientované k počítačové praxi. Nejsou dnes matematici tolerováni podobným způsobem, jakým se kdysi i v Praze ve Velkém století tolerovaly latinské verše studentů a pompézní divadelní ceremonie jezuitských kolejí? Byly to příznaky konce dospívání, které výrazně podmiňovaly tyto projevy, dříve než na takto formované osoby dolehly vážné starosti, válka, soudní procesy, finanční problémy a další svízelné záležitosti.

„Nikdy si nepřestanu vážit cvičení, jimiž se zaměstnáváme ve školách“, tvrdil již René Descartes² s nadnesenou ironií v *Rozpravě o metodě* – v intelektuálním životopisu, který musel uveřejnit mimo Francii, v Leydenu v roce 1637. Fermatovi bylo tehdy 36 let, byl v postavení rady v toulouském parlamentu a působil již také pět let v komisi u soudního dvora v Castres. Tato soudní komora spravovala případy z Nantes, jejichž podání mu byla bližší, než jsou nám vzdálené počátky života Francouzské republiky. Nesrovnávejme ale, Fermat musel projednávat v této komoře i nesnadné otázky zavedení tolerančního ediktu v zemi, kterou vždy obývali hugenoti. Tvořili přitom méně početnou sociální skupinu. Proto šlechta, která byla bohatě obdarována za služby Ludvíku XIV., své náboženství nazývala „takzvaně reformované“.

Fermat se kromě veřejné činnosti věnoval matematice. Vyplňoval s radostí svůj volný čas hledáním řešení matematických úloh. Termín „volný čas“ zde můžeme přesněji vyjádřit užitím cicerónského slova „otium“. Dnes se bohužel nemůžeme plně věnovat neodměňované

¹ Z francouzského originálu *Les façons dont Fermat travaillait les courbes mathématiques* přeložily Michaela Kaslová a Vlasta Vopravilová.

² René Descartes, *Discours de la méthode*, édition Adam/Tannery, réédition Vrin, VI, Paris, 1996, s. 5, ř. 19-20.

intelektuální činnosti. Uvažme ještě, že Fermatova matematická činnost nebyla univerzitního typu, ovlivněná vzděláním a vědomostmi získanými ve škole. Fermat nás zve jinam. Jak to přiblížit? Jaké zvyklosti v užívání matematiky ovládaly vyrovnaný život této znamenité osobnosti Velkého století? Nemohla být tato životní rovnováha nalezena v matematice, které se Fermat věnoval? Bylo hledání nového slučitelné s volným časem za předpokladu čiré zvědavosti? A konečně, jsou tyto otázky v rozporu s těmi, které si klade matematik dnes v souvislosti se svým postavením ve společnosti? Historie nám ale pomáhá uvažovat bez kazatelského tónu.

Kalvinismus, s nímž se Fermat setkával při svých soudech v Castres, předepisoval svým stoupencům zpytovat se a nespolehat se v myšlení na jiné osoby, zvláště si nedat „vyprávět pohádky“. Naopak Descartes ironicky vzpomíná na své školní vzdělávání kacířsky: „Věděl jsem, ... že líbeznost pohádek probouzí ducha, jehož také pozvedají pamětihodné historické události. Jsou-li čteny zdrženlivě, pomáhají tvořit úsudek.“³ A když smysl slova „zdrženlivost“ vysvětluje dále, Descartes dodává: „Matematici mají velmi důvtipné nápady, které mohou velice posloužit tomu, jak využít zvědavosti k ulehčení všeho umění a usnadnění lidské práce.“⁴

„*Otium*“ neboli „*volný čas*“, chápaný jako čas pro vzdělávání ducha, jež lze využít ve společnosti a pro společnost. Dával v očích Descartesových matematice opodstatnění. Descartes si velice vážil toho, že dokonce i matematici se mohou hodně naučit při pouhém pozorování práce např. tkalců. Měl také prohlásit, věříme-li dopisu Franze van Schootena Christianu Huygensovi ze 16. září 1658: „*Fermat est Gascon, mois non*“.⁵ Descartes ironicky naznačuje, že měl Fermat snahu vychvalovat své objevy, přestože skromnější by si toho netroufl. Může se ale novinka v matematice uskrovňovat? Ano, myslí si Descartes, ale jen v případě, že v sobě nezahrnuje metodu, která sama může objeviteli poskytnout slávu a skutečnou radost. V 17. století se však setkáváme se zcela novým pohledem, matematická novinka se podobně jako matematická věda jevila po dlouhou dobu jako neměnná pravda.

Snad nikdo kromě těch, kteří Fermata považují za číselného teoretika, nemůže zvažovat kvality Fermata bez srovnání s Descartem. Dnes naštěstí převládají na tomto pražském pamětním semináři přednášející, kteří o něm chtějí mluvit v tomto smyslu. Již jeden z nejstarších známých historiků matematiky, Jean-Etienne Montucla, přerušil své líčení o slávě Descartově, aby uvedl, že jeho sláva je

³ René Descartes, *Discours...*, op. cit., s. 5, ř. 24-25.

⁴ René Descartes, *Discours...*, op. cit., s. 6.

⁵ *Œuvres de Fermat*, éd. C. Henry, P. Tannery, Paris, 1912, IV, s. 122. Na tuto práci budeme dále odkazovat jednoduše: *Œuvres de Fermat*.

srovnatelná s Fermatem. Dal zaznít názoru, s nímž budou téměř všichni souhlasit.

*„Přerušíme zde na nějaký čas líčení o pokroku metody Descartovy, abychom oslavili jednoho z jeho současníků, pro něhož nebyla geometrie menším předmětem zájmu. Pokud se Descartes zmýlil v lidském důvtipu, Fermat jej nahradil v geometrii“.*⁶

Toto rozhodné prohlášení osvícenského člověka – Montuclý, encyklopedisty a uznávaného historika vědy, přetrvává do konce francouzské revoluce. Jeho slova velice dobře vystihla ducha revoluce, vštěpujícího myšlenku pokroku pro všechny. Nepochybně věnuje svůj zájem géniovi, zaujatému matematikou, který se jí dokonce zabývá ve svém volném čase. Když doba dozraje, i jiní budou moci také dobře objevovat. Vždyť matematika je ceněna atmosférou doby, jako přirozená dcera tohoto času více než nemanželská dcera génia. Descartes tak rozhodně neuvažuje. Montucla hledal v pramenech o Fermatovi, zda Fermat sám řekl, čeho si váží, co považuje ve svém díle za nejvýznamnější, čím se nesmazatelně zapsal do dějin vědy. Vychází přitom z jednoho Fermatova dopisu Robervalovi, datovaného srpnem 1636, tedy před Descartesovým vydáním *Rozpravy o metodě (Discours de la Méthode)* a *Géométrie*. Nezapomeňme, že Descartes prohlásil, že *Géométrie* napsal tak, aby i takové osobnosti jako Roberval nemohli porozumět její originalitě. Zařazuje Montucla Fermata do univerzitního sboru myslitelů podobných Robervalovi? Čtème Fermata tak, jak jej cituje Montucla, totiž tam, kde Fermat píše o metodě, jež je čistě technická.

*„... To, čeho si nejvíce vážím, je metoda pro určení všech míst v rovině a v prostoru, způsobem, jímž najdu maxima a minima ve veškerých problémech, a to rovnicí tak jednoduchou jako je tato obyčejná analýza“.*⁷

Pro lepší porozumění tomu, jak lehkomyšlně Fermat zachází s výkladem svých myšlenkových postupů, musíme připomenout význam přívlasku *gaskoňský* ve smyslu, v němž jej Descartes použil pro Fermata. *Obyčejná analýza* je totiž algebra polynomů, kterou Descartes používal ke studiu křivek, které dnes nazýváme *algebraické*, ale které Descartes nazýval *geometrické*. Vyjádření *omnibus problematicis* se vztahuje k obecnosti křivek a souvisí bezpochyby se známým požadavkem Françoise Vièty na samotném konci XVI. století: *„Rozebrat co nejdůkladněji všechny tyto problémy,*

⁶ Etienne Montucla, *Histoire des mathématiques*, Paris, Ch.-A. Jombert, 1758; 2e édition étendue, Paris, H. Agasse, an VII, tome second, s. 137.

⁷ Etienne Montucla, *Histoire des mathématiques*, *op. cit.*, s. 137.

*abychom věděli, jak je všechny vyřešit.”*⁸ *Nullum non problema solvere (žádný problém není neřešitelný).* Maxima a minima, která úryvek popisuje, vyžadují jednoduchou matematickou techniku srozumitelnou ještě dnes.

Fermat ukazuje, že tyto úlohy o extrémech lze převést na úlohy algebraického typu, tj. na řešení rovnice získané derivováním kartézské rovnice křivky a anulováním této derivace. Při četbě slova „metoda“ nepotřebujeme vysvětlení, ale přívlastek „jednoduchá“ ve Fermatově textu nás jistě přivádí k poznání toho, jaký je její skutečný význam. Víme totiž, že Fermat ignoruje odvozování. Popíšu svůj postup zacházení s tímto slovem ve snaze o větší srozumitelnost, ale předpokládejme, že Fermatův postup je vylíčen jednodušeji. I když se Fermat snaží dosáhnout jednoduchosti metody, ale ta v matematice jednoduchá být nemůže, můžeme ji pouze srovnávat s předchozími složitějšími metodami. Descartes, který kladl důraz na jistotu a snadnost matematiky, tuto jednoduchost považuje za nadčasovou.

Pohlížíme-li na situaci z Prahy, mohou se zdát geografické rozdíly mezi francouzskými městy nepatrné. Descartes původem z kraje Tourain, částečně Bretanec po matce, připomíná, že Fermat, na rozdíl od d'Artagnana a třech mušketýrů, kteří tvoří populární dějiny období panování Ludvíka XIII., nikdy nenavštívil Paříž. Fermat náležel jihu Francie, kde zůstal po celý svůj život. Potvrdil tak skutečnost, že je možno přemýšlet a být vtipným, oduševnělým člověkem, aniž by byl pozvednut z Paříže, kde Richelieu organizoval a řídil Francouzskou akademii a kde se ustavovala koncepce absolutní královské moci. Descartes musel z té Paříže, kde byl před rokem 1630 zbožňován, prchat, aby mohl podle svého přání a zvyku myslet svobodně. Paradoxně, aby vyvážil tento útěk, zvolil francouzštinu (pozn. překl. – nikoliv obvyklou latinu), v níž obdivuhodně vykládá *Rozpravu o metodě (Discours de la Méthode)*. Ale jaký to barokní spěch ve změně bydliště vedl Descarta až k osudové cestě do Stockholmu roku 1650? Fermat dává přednost provinciální stabilitě Beaumontu, Toulouse a Castres. Všechna tato města jsou přívětivá a vzájemně si blízká.

V každém případě Fermat nezískal Descartovu jezuitskou průpravu v myšlení, která byla mezinárodně organizována, tzv. *ratio studiorum*. Bylo to řecko-latinské pohanství ušité v heroických barvách protireformace. Základní a střední vzdělání získal mladý Pierre v klášteře de Grandselve, v blízkosti Beaumont-de-Lomagne. Můžeme si myslit, že byl obzvláště vzděláván v latině a

⁸ A Montucla je v tomto případě dosti přesný v popisu Fermata a jeho prací, když říká, že geometrie tu je „buď vyložená klasickou metodou, nebo moderní analýzou“.

v řečtině, ale bezpochyby ne v matematice ani v podobě hry.⁹ Ani v jezuitských kolejích nebyla matematika předmětem rozvinutým a vhodným pro osobnost Descartova typu, kterému bylo přáno právě v jezuitské koleji La Flèche. Diplom bakaláře Fermat obdržel nebo jej koupil na univerzitě v Orléansu, kde nemohl studovat dlouho, snad ještě kratší dobu než Descartes, který podobně studoval práva v Poitiers se stejným cílem získat diplom a ne vzdělání. Ve věku třiceti let je Fermat najednou vyučujícím na právnické fakultě v Toulouse. To však není jistě nic jiného než formalita, protože si také koupil postavení rady parlamentu v Toulouse a komisaře pro žádosti v paláci. Tam, oděn do krásného šatu, získal také zvláštní postavení. Od té doby bylo připojeno k jeho jménu „de“: *Pierre de Fermat*. Ne zvolil latinskou podobu obvyklou v katolických kruzích. Volba francouzského tvaru jména, které s ním bylo spojováno až do posmrtného vydání prací¹⁰, jež uspořádal jeho syn Clément-Samuel, dokládá příklon k protestantům stejně jako synovo druhé křestní jméno, protestantské Samuel. Poznamenejme jen, že jeho první jméno je katolické – Clément. Montucla tedy píše *M. de Fermat*¹¹, ale podle francouzského zvyku se říká Fermat jako se říkalo i La Rochefoucault nebo Montaigne, aniž by se připojovala částice „de“. Descartes píše *Fermat*, vždy jednoduše, ale editor jeho korespondence oslovení upravuje na tvar *M. de Fermat*. Dnešní matematici částici „de“ rovněž vypouštějí a říkají jen krátce Fermatova domněnka.

Když se Fermat stal předsedou rady, nemohl být ničím jiným než katolíkem. Jakmile byla položena otázka o příslušnosti k církvi, Descartes se vyjádřil s vážností, že jeho vztah ke katolicismu je dobrovolný. Také pokud by se Fermat věnoval jen matematice, nezáleželo přece na tom, je-li katolíkem nebo protestantem. Historická tradice, snažící se vysvětlit jeho intelektuální sklony, jej představuje jako ubohého právníka a připojuje přívlastek naivní, aby lépe vystihla jeho podivínství vnímané tehdejší kulturní společností.¹² Descartes, jehož finanční situace byla mnohem horší než Fermatova, ale který na sobě nenesl břemeno rodiny, se rovněž vyjádřil o jeho skutečné naivitě:

*„Car ie ne me sentois point, grâces à Dieu de condition qui m’obligeast à faire un métier de la science , pour le soulagement de ma fortune. Et quoyque je ne fisse pas profession de mépriser la gloire en Cynique, je faisais néanmoins fort peu d’estat de celle que ie n’esperais point pouvoir acquérir qu’à faix titres“.*¹³

⁹ *Hry a matematika si nejsou vždy docela blízké*, viz Jean Dhombres, *Épistémologie portées par le jeu et histoire de l’enseignement des mathématiques*, Colloque de Toulouse sur les jeux et les rallyes mathématiques, 2001, v tisku, 21 stran.

¹⁰ *Varia opera mathematica D. Petri de Fermat Senatoris Tolosani*, Toulouse, Joannis Pech, 1679 ; reedice Berlin, 1861, Bruxelles, 1969.

¹¹ M. de Fermat ve významu Monsieur de Fermat – pán z Fermatu. Pozn. překl.

¹² Montucla, který psal méně než sto let po Fermatově smrti v roce 1665, se vyjádřil o Fermatově horlivosti i v Parlamentu v Toulouse a jeho pověsti jako „jednoho z nejosvícenějších soudců“ (*op. cit.*, s. 143) a odkázal na chválu Fermata, která se objevila v *Journal des savans* v únoru 1665.

¹³ René Descartes: *Discours de la Méthode*, *op. cit.*

Uvažuje o nepravých vědách („faux titres“). Z tohoto pohledu to jsou alchymie, astrologie, magie a všechny diskuse o klamech, které se objevují ve vědě. Fermat a Descartes jsou představitelé své doby, v níž je vidět klesající oblibu astrologie, která dosahovala vrcholu v 16. století.¹⁴ Přesto v roce 1638 se při narození Ludvíka XIV. připravoval úředně horoskop pro jeho budoucnost. Nepravé vědy jsou také tyto: Výřečnost a Rétorika zkrocené na univerzitě „v prostředí – venterie – těch, kteří považují svou profesi za vědění, aniž by poznávali“.¹⁵ (Pozn. překl. *ventus* – latinsky vítr.) Descartes ve svém rukopise správně volí výraz *venterie* – k označení těch, kteří vlají ve větru, ale také k označení chvastounství, když latinská etymologie vzbuzuje pocit planosti toho, co probíhá. Můžeme zde zopakovat, že Descartes není zdrženlivý, pokud jde o Fermata: „*Fermat est Gascon, moi non*“.

Odpovídala Fermatova matematika tomuto přístupu? Fermat se, podobně jako Descartes, nikdy bez zábran nepřizpůsobil baroknímu duchu té doby a chvástivé rétorice. To může klamat v Praze, kde krása a dokonalost realizovaných staveb a dalších ukázek barokního umění vzbuzuje pocit opravdovosti a jistoty. Chtěl bych to věrně přiblížit na klenbě kostela svatého Ignáce v *Collegio Romano* v Římě, kde působili rovněž matematici. Malířem, který ve Fermatově době fresku realizoval, nebyl opravdu nikdo jiný než matematik a jezuita P. Andrea Pozzo. Podpořil později i uveřejnění práce jednoho učenice o perspektivě, aby vychválil schopnost vysvětlit a znázornit křesťanské nebe ve dvou dimenzích, které přece musí být jasnější než ve třech dimenzích, ale nikoliv pro křesťanské myšlení. Celé baroko a jeho obdivuhodné rozpory se realisticky projevuje v tom, v čem se reálné nezdá, podobně jako nepravé vědy „faux titres“, o nichž mluví Descartes.

¹⁴ R. S. Westman: *The Astronomer's Ecole in the Sixteenth Century, History of Science*, XVIII (1980), 105-147; Jean Céard: *La Nature et les prodiges: l'insolite au 16^e siècle en France*, Genève, Droz. 1977.

¹⁵ René Descartes: *Discours de la Méthode*, op. cit., 10-11.



Obr. 1. Triumf sv. Ignáce, Andrea Pozzo (1642-1709).

V baroku je cosi nevyváženého, a proto možná uvádí do pohybu jisté extrémny. Děje se tak díky perspektivě, která projevuje geometrický charakter a hraje v matematice roli karikatury. Descartes a Fermat proto rozhodně netrvají na této paradoxní síle matematiky.

Ani jeden z našich učenců se příliš nepodílí na neoplatónském myšlení, které ovlivňovalo renesanční učence, především Marsilia Ficina ve Florencii. Troufám si říci, že Ficino vytváří z matematiky spoluhráče Krásy a tuto vědu přehnaně vychvaluje. Bylo by obtížné najít, kde Fermat a Descartes v svých pracech připouštějí velebení čísel, a tím spíš pythagorejskou víru, kterou přece měl osvědčit již Pic de la Mirandole na konci 15. století. Fermat se neúčastní této intelektuální atmosféry, jež patří do minulosti. I když měl velmi hlubokou znalost řeckého jazyka, stejně jej nevábila číselná mystika, která byla právě tak prohnílá jako nepravé vědy – „faux titre“, jak je označuje Descartes. (Montucla, který nebyl jen obyčejným helénistou 18. století, mluví o Fermatově „dokonalé znalosti“ řečtiny.)

Není uspokojivé, že nová generace historiků chce vidět (rozumějme z vysvětlení a ukázek podle vlastního Fermatova stylu) v příslušnosti Fermata k soudcovskému stavu, tedy v taláru, možnost odvození jeho matematické záliby. Algebra by mohla působit na pečlivost právníka uspořádat rozumné měřítko odlišností případů, aby mohl objektivně zhodnotit rozdílná dokazování a jejich vhodnost jejich použití v procesech. Proč ne? Nepomůže to k odstranění představy Fermatovy slabé vlohy pro soudcovský stav. Neplýne z toho ani, že můžeme Fermata zbavit obvinění z jeho nekompetence a naivity, která vyvolává v roce 1970 v životopisné esejí jinak význačné uspořádání.¹⁶ Ukazuje především změny v právní praxi nebo teorii, které se tehdy spojovaly s užitím algebry. Budou-li proto opravdu čteny Fermatovy rozsudky, získá Fermat mezi ostatními právníky solidnost opravdového člena parlamentu. Zajímavé svědectví o tom, jaké byly minimální nároky v míře zájmu právníků o teologii, podává Sainte Beuve v XIX. století v literatuře kláštera Port Royal. Historie vědy není sinekura, tj. výnosné zaměstnání bez odpovědnosti a povinností.

Vezměme též v úvahu Fermatův zájem o *teorii pravděpodobnosti*, podobně říká Montucla. Tato záliba by mohla přispívat k rozdělování problémů na kasuistické a na otázky obecně právnícké. Intelektuální setkání Fermata s Pascalem nebylo náhodné, ale nevysvětluje vše. A zvláště chceme-li porozumět tomuto dojmu, který vzniká ve Fermatově přednášce, založené vždy na předchozích zkušenostech a kde se jej znovu lehce dosahuje. Při této příležitosti jej čteme jako novinku. Tak tedy, abychom to mohli tvrdit a považovat za historické tvrzení, musíme se seznámit s právníckými pracemi a životem parlamentu Fermatovy doby a nesmíme být náchylní k válčení, když historikové práva nemluví o nějaké novince „algebraické“ nebo „pravděpodobnostní“. Nic v pracích, které nám Fermat zanechal — a jsou to jen práce vědecké — nedovoluje vytvořit souvislost mezi jeho právníckou funkcí v profesionálním světě a jeho funkcí v oblasti intelektuální (tj. v matematice). Problematický je obecný pojem „funkce“. Druhou funkci si Fermat sám zvolil, zatímco první mu byla téměř vnucena prostředím a dynamikou sociálního vzestupu rodiny.

Podobně jako Descartes, ani Fermat se neúčastnil univerzitního života. Nečinil tak ani François Viète, jejich významný předchůdce v matematice. Mimořádně na tehdejší univerzitě se nevyučuje ta matematika, kterou tito tři muži pěstují, a to je to, co zůstává podstatnou novinkou matematiky 17. století: vznikat a být chápána stranou vzdělávání.¹⁷ Delší dobu nalézáme u některých historiků pro popis matematické činnosti těchto lidí výraz amatéři, „velcí amatéři“ přidávají v anglosaském světě, kde výstřednost má velký rozsah až k Royal Society, která si ani v sedmáctém, ani v osmáctém století neklade úlohu profesionalizovat své členy.¹⁸ Výraz amatér je historicky nevhodný, když uvažujeme, že matematika byla předmětem úvah těchto tří mužů. Viète, Fermat, Descartes

¹⁶ Michael S. Mahoney, *The Mathematical Career of Pierre de Fermat (1601-1665)*, Princeton University Press, Princeton, Second edition, 1994; Catherine Goldstein, *Un théorème de Fermat et ses lecteurs*, Presses Universitaires de Vincennes, Saint-Denis, 1995, zhotoveno při studiu „historie“ vztahující se k Fermatovi.

¹⁷ Situace v Anglii je jiná, inovace univerzitního vzdělávání je umožněna Wallisem. Viz Moredechai Feingold: *The Mathematicians' Apprenticeship*, Sciences, Universities and Society in England, 1560-1640, Cambridge, University Press, 1984.

¹⁸ Julian Lowell Coolidge, *The Mathematics of Great Amateurs*, Oxford, University Press, 1949.

téměř úplně unikají pozornosti vzdělané společnosti.¹⁹ Descartes dobře věděl, kdo se přidal k oznámení o jeho poslední esejí, *Géométrie*, textu, který připojil jako průkazný doplněk k *Rozpravě o metodě* a kde zakládá analytickou geometrii, kterou Fermat také může prohlásit za svoji:

*Jusques icy j'ay tasché de me rendre intelligible à tout le monde, mais par ce traité je crains qu'il ne pourra être lu que par ceux qui savent déjà ce qui est dans les livres de Géométrie.*²⁰

Neptejme se na Fermatovy spoluúčastníky diskusí a na existenci opravdových profesionálů v matematice mimo univerzitu. Jezuitští otcové z koleje v Toulouse jim mohli beze všech pochyb porozumět, a dokonce mohli novinky šířit dále. Fermatova izolace v oblasti matematiky nebyla větší než Descartova v době jeho cestování po Holandsku. Jezuita P. Lalouvière působil v Toulouse a věnoval se zde výpočtům těžiště podle Gregoira a Saint Vincentio. To byl další jezuita velice činný v matematickém bádání, zejména v Praze v roce 1626 až do dobytí města jednotkami protestantů, kdy Gregoire pozbyl většiny svých rukopisů, které pojednávaly o statice. Nehledám v tom vstup Fermata do jezuitské matematiky nebo do vědy s ní spojované názvem.²¹ Mimochodem, Gregoire a Saint Vincentio byl bezvýznamný v řádu a ještě méně významný svou prací *Opus geometricum* z roku 1647, kde tvrdí, že kvadratura kruhu je řešitelná. Descartes v ní brzy z ničeho nic objevil chybu. Péči o její zveřejnění svěřil Christianu Huygensovi. Byla to první publikace tohoto mladého člověka v roce 1651. Necituji tato data a tyto informace, protože slouží k Fermatově oslavě. Lalouvière v Toulouse redigoval rozsáhlé pojednání o Gregoirově kvadratuře. To může poskytnout příležitost k diskusi o pracech Fermata, jenž je také autorem textů o kvadratuře.²² Zmiňme ale pouto, které jak věřím, bude užitečné uvést: Gregoire a Saint Vincentio i Fermat tíhli v matematice k témuž cíli. Není to snad málo pro tyto dva autory, kteří pracovali na problémech zanechaných Řeky, přesnými metodami, které Řekové stanovili jako zákon.²³ Je významné, že to byla tato víra, která pět let po Fermatově smrti napomohla k vydání dvou spisů *Diophanti Alexandrini Arithmeticonum libri sex* a *De numeris multangulis liber unus* s komentáři Bacheta a Fermata, protože shrnují nové analytické objevy. Víra Gregoira a Saint Vincentio v antiku jej dovede k postavení v římské koleji (Collegio Romano) do blízkosti Clavia, vydavatele a komentátora Eukleida.

Nicméně je třeba vzít na vědomí, že Fermat se učil matematice sám. Z knih a jako samouk, proto osamělý a bez učitele, jehož obvyklé působení spočívá ve vysvětlování, i

¹⁹ E.J. Dijkstra, *The Mechanization of the World Picture*, transl. C. Dickshoorn, Oxford, 1961.

²⁰ René Descartes, *La Géométrie*, op.cit., s. 296.

²¹ Viz zvláštní číslo časopisu *Science in Context*, 3, 1969; Luce Giard (éd.), *Jésuites à la Renaissance: système éducatif et production des savoirs*, Paris, PUF, 1999; Antonella Romano, *La Contre-Réforme mathématique, Constitution et diffusion d'une culture mathématique jésuite à la Renaissance*, École française de Rome, 1999.

²² Je umístěna v *Œuvres de Fermat* v textu nazvaném *Ad Laloveram propositiones*, vol. I., 199-209, odkazující se na Lalouvièrovu *Veterum geometria promota*.

²³ V popisu, který udělal Fermat, a z jeho prací dává tedy Montucla přednost rozlišení, když říká, že geometrie je buď „výklad starobylé metody nebo moderní analýza“.

Ut loquitur Diophantus je vazba, kterou Fermat často používá.

když je tento způsob dnes nemoderní. Mezi svými dvaceti a třiceti lety, tj. ve dvacátých letech 17. století, měl Fermat volný čas k sebevzdělávání, nepochybně ke studiu řečtiny a také matematiky bez veškerých pochybností. Je to pro nás situace velmi překvapující, když matematika je nyní součástí obecných znalostí a povinného středního vzdělávání (jen ve Francii už od 1802).²⁴ Na počátku 17. století byla volba matematiky vzácná, téměř volba estéta. Ignác z Loyoly považuje za zdravé pro budoucnost jezuitů věnovat se matematice. Kromě tohoto cizorodého případu řádu jezuitů je třeba odlišit astronomii, která zaujala osobnosti jako je např. Nicolas Claude Fabri de Peiresc, humanista z předchozí generace, který byl podobně jako Fermat ustanovený právník. Působil v Aux-en-Provence, kde jej navštívil např. Gassendi. Peiresc zemřel ve stejném roce, kdy Descartes uveřejnil svou *Geometrii*. Není to kniha od samouka, ale od revolucionáře v tom smyslu, že široce naboural veškeré matematické vědění. Nepoznáme skutečně praktickou matematiku Fermatovu až do vydání *Géométrie*. Nemám zapotřebí lépe chápat Fermatovy myšlenky, když byl předchůdcem Descarta. Stačí mi vidět působení u Descarta ve funkci jeho vlastních koncepcí matematiky během volného času, který vytváří vědce.

Kolem roku 1620, v letech dospívání jak Descarta, tak Fermata, matematika nabyla podoby opravdového vědění, specializované vědy, vyhrazené jen několika „učencům“. Radost z kultury hojně ignorovali, Montaigne byl nepřilíš zastaralým příkladem. Kolem roku 2001 je matematika školní vědou, dobře vymezenou, a věřím, že francouzským povahám už dala vše, co mohla dát, ne-li trochu více. Je to věda užitečná, ale její vývoj je již ukončen. Tento obraz, vyjádřený nedávno ministrem pro vědu, je určitě silně v rozporu s odkazem Fermata „amatéra“ a s jeho báječným tvrzením, které odolávalo tři a půl století hledání důkazu. Nalezl jej nakonec Angličan Andrew Wiles v roce 1995 a tisk poprvé dobře reprezentoval význam tohoto úspěchu. Náhle se ukázala marnost současné technické matematiky, která vstupovala do hry. Paradoxně nebyla žádná možnost, aby měl Fermat s tímto výrokem nějaký úspěch a stejně tak jeho myšlenky nebyly užitečné k řešení. Naopak řekněme, že současný matematik může číst Fermata ke svému užitku, i když jej dokonce tolik jiných už četlo, méně v 18. století, více v 19. století (kdy byly vydány jeho práce i překlady jeho prací) a ještě více ve 20. století. Guy Terjanian zde hovořil o úsilí rozřešit Fermatovu domněnku. Ale dnešní student střední školy bohužel nemá zájem číst Fermata. Otázky, které Fermat řešil, netvoří součást školních osnov nebo jsou zpracovány zcela jinak. Fermatova matematika je pryč pro školu neúčinná! Od doby Fermatovy byla matematika vcelku odsuzována jako málo užitečná.

Dvojitá proměna přece jen nastala a odpovídá nastolení podmínek vědecké revoluce a tomu, co vysvětlil Galilei v roce 1623 v *Saggiatore*, knize dosti málo zajímavé pro ostatní, ale která staví matematiku do role světového jazyka. Dokončil to, co vyzdvihl Rhaeticus citující Kopernika: *non ex plausibilibus opinionibus sed legibus mathematicis*. Ve druhé polovině 16. století jezuité, uklidnění dřívějšími úspěchy, ustanovují matematiku jako nepostradatelnou předběžnou intelektuální průpravu k filosofii, kterou musili dokonale ovládat jezuitští novicové. Matematika se stává logikou „in concreto“, a to je bezpochyby nejlepší způsob, jak se zbavit scholastických argumentů. Ale matematika je nepochybně omezená na určitou oblast Eukleidových *Základů*, které je třeba považovat za výbornou

²⁴ V habsburské říši, tedy i na našem území v Českém království, byla povinná školní docházka zavedena dříve (1773). Pozn. překl.

učebnici. Stejným způsobem se v průběhu 19. století prosadila do klasického humanitního vzdělání i kniha *De viris illustribus*. Užitečnost logiky rozhodla kultivovaně pro matematiku. Nebyla to ta, kterou Descartes uplatnil jako prostředek ušetřit lidskou práci. I když kulturně ospravedlňuje vyučování matematice na středních školách, v každém případě ale brání přednáškám o Fermatovi v našem vyučování.

Užitečnost logiky, která vnikla do vyučování matematiky, je dnes až druhořadá, protože lidé si váží jiné logiky, dávají přednost logice třídění a uspořádání: nazval jsem ji informatikou a zacházením s počítači a jejich sítěmi. Je tedy velmi jednoduché do tohoto nového rámce znovu zařadit Fermata. Nemám rád vazbu „znovu zařadit“, ale dnes, kdy výchova se stává produktem, je třeba ji využít. V tomto smyslu Fermatovo matematické myšlení využívá mnoho algoritmů, opakovaných postupů, které dovolují výklad s důkazy. Jedno z paradigmat utváření informatiky je eukleidovský výpočet největšího společného dělitele dvou čísel. Je to i jedna z nejslavnějších Fermatových důkazových metod, ta o nekonečném sestupu. Nehraje numerická účinnost matematické myšlenky, síla kalkulu v oblastech, kde se myslí odvážně, důležitou roli v oblibě vyučování matematice?

Mluvil jsem o výkladu s důkazy. Jestliže se uvažuje, že informatika ve škole, v gymnáziu, není intelektuální, nýbrž praktické školení, pak je dáno k dispozici užívání logických prostředků. Celé nedávné dějiny informatiky vyprávějí, jak dobrodružní mladí lidé, kteří se zbavili přítěže veškerého školního nebo univerzitního vzdělání, jako „kutilové“ geniálně vymýšlejí nejrůznější systémy a sítě. Zkrátka, rozbíjejí představu o mechanickém opakování. Fermat zavedl nový pojem adekvance („adégalité“ – přibližná rovnost), aby popsal matematickou operaci s křivkami, o nichž dobře věděl, že se nezobrazí v eukleidovském prostoru.

Jiná podstatná historická myšlenka pochází z časů Fermatova mládí a znamená jistě velké nadšení pro matematické školy určené mladým šlechticům. Didier Henrion, překladatel Eukleida, vděčí za své štěstí právě těmto školám. Tam se vyučovala praktická geometrie, bezpochyby ve francouzštině, ale také Eukleidovy *Základy*, knihy Archimédovy a Appolóniovy. K jakému účelu? Umění stavby opevnění (tzv. fortifikace) to tolik nevyžadovalo, a pokud ano, tedy až ve čtyřicátých letech 17. století. Jezuité budovali opevnění a pěstovali válečné umění dle svého programu a zůstali moudře v mezích geometrie.

Fermat nehledal v tradici nic jiného než vlastní obohacení. Díky svým nápadům a výzvám se najednou ocitl v intelektuálním světě na přelomu 17. století. Jedná se jistě o společnost vzdělanců, která byla nazvána „*Republica litterarum*“. Název, který zvolil Fermatův syn pro výbor z díla svého otce, jej zapsal okamžitě do této literární společnosti, které Marc Fumaroli, odborník na rétoriku a na vývoj v 17. století, přikládal charakter tajného spolku za hrozivými válečnými bariérami a pokládal ji za opozici k církvi.²⁵ Čtème tedy tento vysvětlující název díla, vybraného a shromážděného Fermatovým synem:

²⁵ Fumaroli Marc : *Rome et Paris – capitales de la République européenne des lettres*, Hambourg, L.I.T. – Verlag, 1999.

„Accesserunt selectae quaedam ejusdem Epistolae, vel ad ipsum à plerisque doctissimis viris Gallicè, Latinè, vel Italicè, de rebus ad Mathematicas disciplinas aut Physicam pertinentibus scriptae”.

Latinu obklopují dva jazyky: francouzský a italský; Fermat se ve svém díle zabývá matematickými disciplínami v množném čísle a neizoluje jedinou matematiku; fyzika je zmiňována odděleně. Není na škodu upřesnit, že Fermatovi je připisováno i skládání básní, nezbytný „cestovní pas“ do literárního světa. Není překvapující, že tyto básně nikdo dosud neobjevil? Není to jen hra, hra osudného údělu, aby byla zapomenuta již jedenkrát získaná „literární“ pověst. Syn Samuel, přes rady Carcaviho, neodhadl, že jsou užitečné nejen otcovy vědecké práce, ale i další výsledky. Přirozeně respektoval jazykovou sílu literárního světa.

Toto literární společenství dnes úplně zmizelo. Ve Fermatově době se stal se známým po celé Evropě Euricus Puteanus (vlastním jménem Eyrick van den Putte), flanderský *princeps eruditorum* (představitel vydavatelů). Psal o všem: o kometách, o teologii, o historii, o starých peněžích a také o matematice. Zdůrazněme, že byl ve svých dvaceti letech jmenován princem italské poezie, a vykonal tedy „velkou cestu“. V rozporu s těmito svými zájmy ale Puteanus vyučoval na univerzitě, navíc katolické. Nedokázal být otevřeným stoupencem Kopernika. Jeho korespondenci se vzdělanou Evropou a protestanty, jako např. Scaligerem, nemohlo vyvolat ani náboženství ani politika. V roce 1622 se opakovala válka Španělů proti kalvínskému Nizozemí. V roce 1627 Ludvík XIII. obléhal pevnost La Rochelle, ne tolik ve jménu víry, jako spíše v zájmu francouzského království, které bylo jejím velitelem. Španělská podpora byla pouze slovní a protestantskou solidaritu převzala osobnost Lorda Buckinghamha, který se nechal zabít v Anglii. Oběť jako on může hovořit o čisté ráně v osamocení. Existuje-li ještě vůbec nějaká evropská literární společnost, pak tam, kde se užívají místní jazyky, třebaže je zavedli jezuité zvláště k procvičení výmluvnosti a myšlení.

*Ti, kteří jsou nejmoudřejší a kteří řídí nejlépe své myšlení, aby je vyjádřili jasně a srozumitelně, mohou se každý den nejlépe přesvědčit, co nabízejí, i kdyby mluvili pouze špatně bretoňsky a nikdy se neučili rétorice.*²⁶

Descartes přesto dal přeložit svoje dílo *Géométrie* panem van Schootenem do latiny. Fermat psal o matematice jen latinsky, zatímco všechny své rozsudky v parlamentu v Toulouse zhotovoval ve francouzštině, jak vyžadoval zákon.

Fermatovy texty nejsou v žádném případě určeny univerzitě. Odtud je vyloučila podstata samotného kvadrivia. Latina je „pohodlí“, obecný jazyk společenství několika vzdělaných lidí, kteří se zajímají o matematiku. Kalvínský protestant Simon Stevin měl od roku 1585 obrovskou zálibu ve vlámštině, své dílo musel dát přeložit do francouzštiny. A Fermat je mohl bez problémů číst ve verzi, kterou pořídil Albert Girard roku 1629. Byla to především francouzština, která se cvičila vzájemným působením literární společnosti v novém duchu, k níž patřili Fermat i Descartes. Náleželi ke společenství kolem Marina Mersenna, příslušníka řádu minimů, který měl sídlo u nového Place Royale. Tam,

²⁶ René Descartes: *Discours de la méthode*, op. cit. s. 9.

v blízkosti čtvrti sv. Pavla, kde měli jezuité pozemky až k Seině a kde má dodnes útočiště lyceum Karla Velikého, se rozrůstala nová Paříž.

Ačkoliv Mersenne nedělal dojem, že by rozuměl matematice, pochopil, že se v tomto oboru staly věci, které unikly univerzitnímu vědění i vědění jezuitskému. Možná proto, že sám byl nezávislý, měl pro samouka Fermata pochopení. Mersenne se skutečně cíleně neinformoval, ale paradoxně se dozvídal o nových objevech a metodách od členů svého diskusního kroužku. Když se u jezuity de Ganda objevila kvadratura kruhu, hned žádal, aby mu Descartes a Roberval vysvětlili, kde je chyba. Ne, že by nepochopil matematickou myšlenku takovéto kvadratury, vyloženou Gregoirem a Saint Vincentio, ale jeho dopisovatelé, mezi nimiž byl i Fermat, jej již uvědomili, že hledání kvadratury patří minulosti a připomíná boj s marností, kterému se smál již Rabelais. Dotýkáme se zde smyslu nového intelektuálního proudu: vše, co se týká vědy, není stejně využitelné, a zvláště určité věci je nutno zapomenout. Podobně jako u Mersenna bylo hlavním cílem bojovat především proti dvěma skepticizmům: skepticizmu Michela de Montaigne, který je relativismem poznání, a skepticizmu Lutherovu, který je skepticizmem moci.²⁷ Solidnost matematiky začínala mít zvláštní cenu.

Mersenne byl sběratel, např. v jednom spisu nabízí pouze věty z Eukleidových *Základů* bez důkazů a ještě k tomu bez obrázků. Z čeho se tedy může skládat vědecký dopis té doby? 28. dubna 1638 Mersenne píše Descartesovi a k dopisu připojuje obrázek cykloidy.²⁸

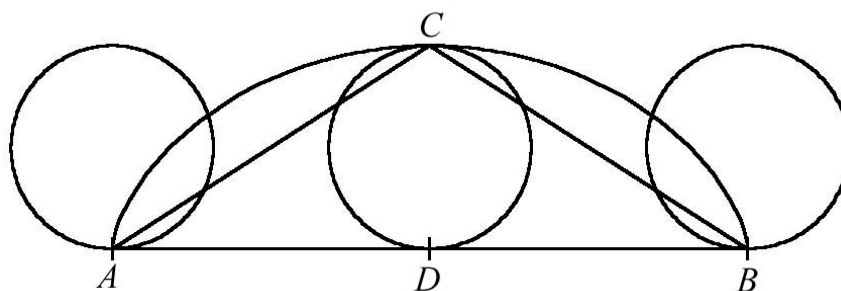
Pane,

*co se týče pana Robervalova, našel množství nových krásných myšlenek, jak geometrických, tak mechanických a kromě jiného Vám řeknu o jedné, abyste věděl, jak stanovil obsah plochy mezi křivkou ACB a přímkou AB, který je trojnásobkem plochy kruhu nebo kolečka; tedy uvedená plocha je vytvořena kolečkem, které se kotálí od A do B v rovině nebo na přímce AB, když přímka AB je rovna obvodu uvedeného kolečka. A potom ukazuje poměr obsahů této plochy a uvedeného kruhu, když má kolečko menší či větší obvod.*²⁹

²⁷ Marin Mersenne: *La vérité des sciences. Contre les sceptiques ou pyrrhoniens*, Paris, Toussainet du Bray, 1625, faksimile, Stuttgart 1969.

²⁸ Křivka, kterou opisuje bod na kružnici, která se zároveň kotálí po přímce, se nazývá cykloida. Pozn. překl.

²⁹ René Descartes: *Correspondance*, II, s. 116.



Obr. 2.

Obsah trojúhelníka $ABC = 2$ krát obsah kruhu o průměru CD .
 Obsah křivočarého dvojúhelníka AC + obsah křivočarého dvojúhelníka $BC =$
 obsah kruhu o průměru CD .

O měsíc později, 27. května 1638, můžeme po několika anekdotách a novinkách číst Descartovu odpověď Mersennovi:

Vy začínáte myšlenkou pana Robervalova, která se týká obsahu plochy pod křivkou, kterou opisuje bod na obvodu kruhu, který si představujeme, že se kotálí v rovině, ... Píšete, že tato myšlenka je moc krásná, ale já nevidím, proč bychom měli dělat tolik humbuku z nalezení věci, která je tak jednoduchá, že každý, kdo zná trochu geometrie, to může sám najít, když po tom pátrá.

...

Nuže povím Vám, že všechny další objevy, takové jako od pana de Fermata i jeho stoupenců, o nichž jsem právě hovořil, jsou podobného rázu.

Mersenne, stejně jako Descartes, se domnívali, že je potřebné zřídit jedno středisko, kde by se posuzovala pravdivost a vhodnost novinek doby tolik bohaté na myšlenky. Akademie věd, nebo Královská společnost v Londýně, se takovými středisky stanou, ale až ve třetí třetině 17. století, protože Akademie v Paříži byla založena až rok po Fermatově smrti a šestnáct let po smrti Descartově, který ji také toužil založit. Přesto si nemyslím, že by se Fermat skutečně o nějakou akademii zajímal. Jistě ne před rokem 1658, kdy se setkával s obtížemi při korespondenci s učiteli, zvláště pak s Angličany. Akademie v sobě zahrnuje profesionalismus, zatímco Fermat konverzoval s ostatními pomocí dopisů *a priori* podle principu rovnosti, uznávaného při literární výměně, protože ta je založena na úrovni píšící osobnosti. Akademie je vědecká svou povahou a určitým domluveným stylem jednání. Fermat se přidržuje jiného stylu: výměny neformálních osobních dopisů mezi sobě rovnými vzdělanci.

V matematice, v oblasti Fermatova vzdělání a bádání, v intelektuální činnosti, kterou Fermat žije jako jeden ze společenství nejduchaplnějších lidí v Evropě, je Mersenne neúnavným služebníkem. Toto společenství, podle Mersenna sloužící protireformaci, posuzovalo velmi ostře pokrok myšlenek a vytvořilo příkrou kritiku starodávnych způsobů. Aristotelova scholastika zpomalila snahy o obnovu samostatného smýšlení. Společenství neneslo téměř žádnou odpovědnost za vzdělávání. (Výjimkou byl Roberval, který působil v Collège de France. Ta nebyla ve skutečnosti univerzitou, kde vzdělávání i bádání musí ospravedlňovat svoji originalitu.) Společenství bylo chráněno univerzitní tradicí.

Společenství bylo víceméně rivalem druhého intelektuálního sdružení, které reprezentoval řád jezuitů. Ten založil svou legitimitu na scholastice a nedal se ovlivňovat žádnými novinkami. Podívejme se např. na zákaz Kopernikova, Keplerova nebo Galieiova „nebe“ daného do klatby. Je udivující, že předpisy Akademie věd z roku 1699 zakazují jezuitům být jejími členy. Po pravdě řečeno, zakazují všem svým členům příslušnost k řeholním řádům.

To, co dělá z Fermata příslušníka Mersennova společenství, skupiny, tak málo akademické, je zřetelně jeho schopnost objevování. Fermat se měl konečně setkat s Pascalem. Setkání se však neuskutečnilo v důsledku Pascalova špatného zdravotního stavu. Příležitost k setkání opět zprostředkoval Mersenne. Podobně se uskutečnily schůzky s Descartem, Desarquem, Robervalem a dalšími. Přečtěme si dopis, který Descartes adresuje 1. října 1638 přímo Fermatovi,³⁰ a povšimněme si kontrastu s tónem dopisu, psaným Descartem Mersennovi.

Pane,

vím dobře, že nepotřebuji souhlas k tomu, abych soudil Váš názor o sobě samém, ale jestli k tomu lze něco dodat, zatímco mi udělujete tu čest, že jste mi napsal, cítím se povinen Vám upřímně přiznat, že jsem nikdy nepoznal osobu, která by toho věděla o geometrii tolik jako Vy.

Tečna ke křivce, která popisuje pohyb kola, je poslední věc, kterou se reverend Otec Mersenne namáhal dát mi Vaším prostřednictvím vědět. Příslušný důkaz je správný. Tím spíš, že se zdá být závislý na vztahu, který je mezi přímkou a kružnicí. Není tak snadné zde aplikovat pravidla, která slouží jiným; a pan Roberval, který je navrhoval a který je bezpochyby jedním z prvních geometrů našeho století, přiznává, že je neumí a současně že nezná jediný prostředek k tomu, aby toho dosáhl. Je pravda, že od té doby řekl také, že už je našel, ale to bylo jistě následujícího dne poté, co se dozvěděl, že Vy a já mu je posíláme. Jisté vysvětlení, které se nabízí, je, že řekl, že je našel v téže době, kdy Váš příspěvek byl chybný, jelikož základna křivky byla větší nebo menší než obvod kruhu, což by se konečně dalo říci i o mém příspěvku, kdyby jej ovšem viděl, neboť se celkově shoduje s Vaším.³¹

³⁰ René Descartes, *Correspondance*, II, s. 406.

³¹ René Descartes, *Correspondance*, II, s. 406-407.

Je velký rozdíl mezi Descartem a Fermatem, co se týče matematiky a nápaditosti, kterou vytvářejí. Descartes vidí v matematice důkaz, že ozřejmění pravdy vedené vhodným způsobem umožňuje rozhodnout obecné otázky a zavádí nové postupy. Nehledá řešení starých problémů, ale snaží se je třídit podle možných metod. Fermat se naproti tomu přiklání k problémům spjatým s tradicí a nachází v nich dokonce nové cesty.

V jedné pozdní Fermatově práci, kde se odvolává na geometrické posloupnosti, vidíme, jak počítat obsah novým způsobem.³² Titul je dlouhý, protože vysvětluje, o čem dílo pojednává; o dosavadních pokrocích v počítání obsahů ploch vymezených křivkami a přímkami a o dřívějších zkušenostech s počítáním kvadratury parabol a hyperbol pomocí geometrické posloupnosti: *Sur la transformation et la simplification des équations de lieux, pour la comparaison sous toutes les formes des aires curvilignes, soit entre elles, soit avec les rectilignes, et en même temps, sur l'emploi de la PROGRESSION GEOMETRIQUE pour la quadrature des paraboles et hyperboles à l'infini.*³³

Chtěl bych analyzovat především první část tohoto textu a ukázat, že dosti obecný přístup, který jsem zaujal k Fermatovi, může být zhodnocen historicky jen v oblasti matematického textu, publikovaného po Fermatově smrti. Zajímá mě skutečnost patrná z názvu, že součet geometrické řady může být chápán jako metoda. Tuto skutečnost, která se objevuje ve vlastním textu, vyjadřuje takto:

*„Necht' je dána geometrická posloupnost, jejíž členy klesají do nekonečna. Pak rozdíl dvou po sobě následujících členů této posloupnosti k menšímu z nich se má jako největší člen této posloupnosti k součtu všech zbývajících do nekonečna.”*³⁴

Překlad ve Fermatových *Œuvres* je upraven trochu jinak:

„Budiž dána geometrická posloupnost, jejíž členy se stále zmenšují. Potom rozdíl dvou sousedních členů této posloupnosti je v poměru k menšímu z těchto dvou členů jako největší člen z celé posloupnosti k součtu všech zbývajících členů až do nekonečna.”

³² Fermat se tím zabýval před rokem 1647, jak dosvědčuje dopis Digbymu z 20. dubna 1657, kde Fermat sděluje, že postupoval podle Torricelliho.

³³ Překlad latinského textu v *Œuvres de Fermat*, III, s. 216-237.

³⁴ Původní latinský text je tento: *Datâ quavis proportione geometricâ cujus termini decrescant in infinitum, est ut differentia terminorum progressionem constituentium, ad minorem terminum, ita maximus progressionis terminus ad reliquos omnes in infinitum sumptos.* Op. cit. s. 44, *Œuvres de Fermat*, s. 255.

Z toho vyplývá, že když $\frac{u}{v} = x$ označuje poměr dvou po sobě následujících členů v a u geometrické posloupnosti, tj. $x_1 = a$, $x_2 = ax$, $x_3 = ax^2$, ... atd., pak dostaneme:

$$\frac{v-u}{u} = \frac{x_1}{S-x_1},$$

kde $S = \sum_{n=0}^{\infty} ax^n = \sum_{n=1}^{\infty} x_n$.

To je zajisté přesný algebraický vzorec, ale Fermat užíval ten, který by mohl být zapsán spíše ve tvaru:

$$(1) \quad \frac{x_n - x_{n+1}}{x_{n+1}} = \frac{x_1}{S - x_1}.$$

Rozdíl ve formulaci není bezvýznamný. Zápis s $\frac{u}{v}$ vypadá, jako by se jednalo o poměr dvou celých čísel. Zde ale musí výsledek platit pro jakékoliv $x \left(= \frac{u}{v} \right)$, nikoliv jen racionální.

Ale zvláště zápis (1) (nebo jeho latinská formulace) byl dostatečně pružný pro použití, které s ním Fermat zamýšlel. Potřebujeme dnes důkaz toho, že (1) je správný vzorec pro součet nekonečné geometrické posloupnosti od prvního členu a s kvocientem x ($x < 1$)? Vypočítá se to snadno:

$$\frac{x_n - x_{n+1}}{x_{n+1}} = \frac{ax^{n-1} - ax^n}{ax^n} = \frac{1-x}{x},$$

což je výraz nezávislý na prvním členu a . Podle vztahu (1) je roven $\frac{a}{S-a}$. Z toho plyne dnešní zápis:

$$S = \frac{a}{1-x}.$$

Fermat nedokazoval vzorec (1), protože jej považoval za známý: matematici přijímají pokrok rychle.³⁵ Ve skutečnosti vzorec (1) a jeho ekvivalenty, podle nichž se hledá vyjádření pro S , a nebo x , vyšly roku 1593 velmi stručně na jedné stránce knihy Françoise Viety. Jsem přesvědčen, že tvar daný Vietou – pouze o 50 let dříve – byl tím, co inspirovalo Fermata pro práci na kvadraturách v takovém rozsahu.³⁶ Fermat se neobracel k nikomu, ani ke studentům. Jeho texty byly určeny matematikům jemu rovným. Zamýšlel je pouze zveřejnit?

Nekonečný součet je pro Fermata východiskem pro kvadratury, jak sám říká: „Unico, quod notissimum est, proportionis geometricae attributo tota haec methodus innititur“.³⁷ Nevěnuje se jen jedné křivce, ale najednou celé třídě křivek, zobecněných parabol a hyperbol. Jedná se o křivky, pro něž je konstantní součin nebo podíl mocnin velikostí vodorovných a svislých úseček: Jsou-li α a β kladná čísla,³⁸ pak

$$AG^\alpha \cdot EG^\beta = konst. \text{ nebo } \frac{AG^\alpha}{EG^\beta} = konst. \text{ Od počátku Fermat používá analytickou}$$

reprezentaci křivek, i když to nejsou rovnice v kartézských souřadnicích. Užívá dvou pohybujících se bodů, a ne jen jediného jako Gregoire a Saint Vincentio.³⁹ Fermat neuvažoval obecnější křivky než ty, které zachovávaly geometrickou posloupnost,⁴⁰ tj. celá geometrická posloupnost úseček odpovídající křivce dávala ještě jednu geometrickou posloupnost souřadnic. Měl tedy jistý nápad, jak využít vztahu (1) v dané souvislosti:

„Definuji hyperbolické křivky jdoucí k nekonečnu tak, aby byl vždycky stejný poměr mezi mocninou AH a AG na jedné straně a mocninami EG a HI na straně druhé, ...“⁴¹

$$\frac{AG^\alpha}{AH^\alpha} = \frac{EG^\beta}{HI^\beta}.$$

³⁵ Viz Dhombres, J: *Les présupposés d'Euler dans l'emploi de la méthode fonctionnelle*, Revue d'Histoire des Sciences, X/2, 1987, s. 179-202, nebo Dhombres, J: *Euler et la rigueur mathématique*, Actes de l'Université d'été, Toulouse, 1987.

³⁶ Viz Dhombres, J: *The analysis of the synthesis of the analysis, two moments of the chiasmus*, in Panza, M., Otte, M. (ed.): *Analysis and Synthesis in Mathematics. History and Philosophy*, Kluwer, 1997, s. 147-176.

³⁷ Toto je pouze geometrická příprava.

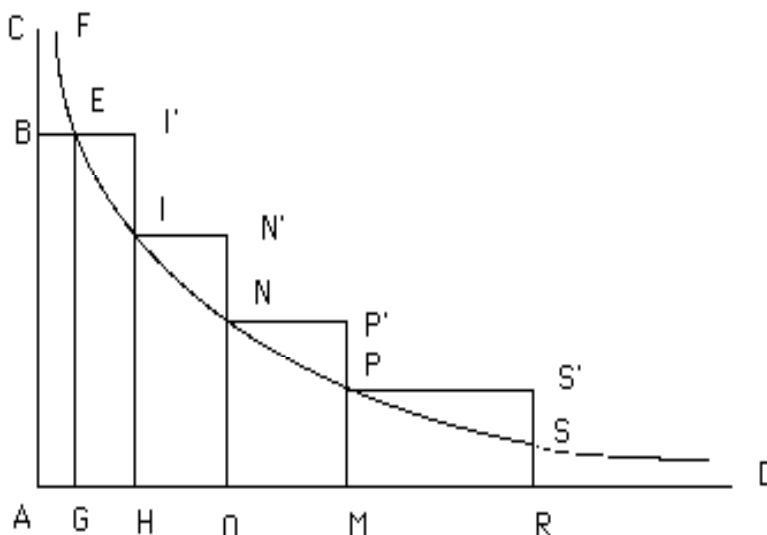
³⁸ Fermat uvedl případ, kde exponenty α a β jsou celá čísla, ale také případ, kde α a β jsou racionální (*sed etiam latera simplicia, quorum exponens est unitas*, s. 256).

³⁹ Viz Dhombres, J.: *L'innovation comme produit captif de la tradition: une théorie des courbes entre Apollonius et Descartes*, M. Panza, S. Roero (éd.), *Geometrie, Flussioni e Differenziale Osservazioni sul rapporto fra tradizione e innovazione nella matematica del Seicento*, La cita del Sole, 1995, s. 17-105.

⁴⁰ Viz Bortolotti, E.: *La memorie, De infinitis hyperbolis di Torricelli*, Archeion, VI, 1925, s. 45-58, 139-152.

⁴¹ Hyperbolas autem definimus infinitas diversæ speciei curvas ... sit ut potestas quædam rectæ AH , ad potestatem similem rectæ AG , ita potestas rectæ GE , vel similis diversa à præcedente, ad potestatem ipsi homogeneam rectæ HI . P. de Fermat: *De æquationum*, Œuvres de Fermat, s. 256.

Fermat umístil na vodorovné ose (viz obr. 3) rostoucí geometrickou posloupnost⁴² s kvocientem q ($q > 1$) počínaje prvním členem AG , následovaný druhým $AH = q \cdot AG$, třetím $AO = q^2 \cdot AG$, čtvrtým $AM = q^3 \cdot AG$, atd. Představme si takové členy geometrické posloupnosti jdoucí k nekonečnu:⁴³



Obr. 3

Po kvocientu q se požaduje, aby se blížil k jedné. Fermat říká: *Necht' jsou členy blízké jeden druhému. Pak podle Archimédovy metody je lze považovat za adekvatní.*⁴⁴ Nevysvětlujme hned toto slovo a spokojme se prozatím s označením vztahu jistých objektů.

Výpočet, který Fermat provedl s $\alpha = 2$ a $\beta = 1$, ukázal, že plochy obdélníků $GHI'E$, $HONI'$, $ONMP'$, $MRS'P$ atd. vytvářejí geometrickou posloupnost⁴⁵ jako délky úseček AG, AH, AO atd. a jako délky GE, HI, ON, MP, RS . Toto dokázali Fermat i Gregoire a Saint Vincentio s použitím teorie proporcí, zejména skládáním poměrů, tj. jejich součinu v dnešním smyslu slova. Fermat nežívá algebru descartovským způsobem. Aplikuje jen kaskádu vlastností geometrické posloupnosti. Tyto vlastnosti vytvářejí zvláštní algebru, které Gregoire a Saint Vincentio dodal geometrickou interpretaci.

Máme-li geometrickou posloupnost, potom rozdíly dvou po sobě jdoucích členů tvoří také geometrickou posloupnost se stejným kvocientem. Jestliže $x_1 \cdot q^{n-1}$ je obecný n -tý člen dané posloupnosti, pak

⁴² Francouzský překlad tohoto textu je ve 3. dílu *Œuvres de Fermat*.

⁴³ Věta vyznačená kurzívou je Fermatova přeložená z latiny.

⁴⁴ *Œuvres de Fermat, op. cit.*, francouzský překlad, s. 218.

⁴⁵ Body $I'N'P'S'$ nejsou pojmenovány na obrázku tak, jak je Fermat označil původně.

také $x_1 \cdot q^n - x_1 \cdot q^{n-1} = x_1 \cdot q^{n-1}(q-1)$ je očividně n -tým členem jiné geometrické posloupnosti. Součiny odpovídajících si členů dvou geometrických posloupností vytvářejí geometrickou posloupnost, jejíž kvocient je součinem odpovídajících kvocientů. To je to, co Grégoire a Saint Vincentio ukázal geometricky (Tvrzení 71, kniha 2., *Opus geometricum*). Obsahy po sobě jdoucích obdélníků $GHI E$, $HON I$, $OMP N$ atd. odpovídají součinu členů dvou geometrických posloupností. Posloupnost GE, HI, ON atd. na jedné straně, na druhé straně však posloupnost rozdílů GH, HO, OM, MR atd.

Lépe to uvidíme, když místo koeficientů použijeme písmena α a β . První posloupnost má kvocient $\frac{1}{q}$, člen umocněný hodnotou $\frac{\alpha}{\beta}$, zatímco druhá má kvocient q . Odtud dostaneme hodnotu výsledného kvocientu součinu, tj. $\frac{1}{q}$ umocněnou na exponent $\frac{\alpha - \beta}{\beta}$.

Fermat se spokojuje s výpočtem poměru prvních dvou obsahů, poměr je rovný převrácenému kvocientu geometrické posloupnosti úseček v případě hyperboly speciálně zvolené pro $\alpha = 2$ a $\beta = 1$. Tento výpočet je generický, protože je zřejmé, že vyjde geometrická posloupnost.

Necht' je koeficient α větší než β . Poněvadž kvocient q je od počátku větší než jedna, posloupnost obsahů obdélníků je klesající, a tak má tedy smysl provést nekonečný součet obsahů. V tomto případě je ve výsledném vztahu S nahrazeno A :

$$A = \lambda (GHI E) + \lambda (HON I) + \lambda (OMP N) + \lambda (MRS P) + \dots,$$

kde λ označuje obsah, viz obr. 3. Obsah prvního obdélníka $GHI E$ je x_1 a lze ho chápat jako konstantu a :

$$a = GH \times GE.$$

Zlomek na levé straně vztahu (1) nabývá hodnoty $q^{\frac{\alpha - \beta}{\beta}} - 1$, ale tímto způsobem to vyjadřujeme dnes. Fermat použil geometrickou interpretaci formule (1), aby v tomto případě vyjádřil kvocient. To vypovídá o Fermatově představivosti.

Tedy pro $\alpha = 2, \beta = 1$, což je případ první zobecněné hyperboly, nabývá $q = 1$. Úměra na levé straně vztahu (1) plyne přímo z obr. 3,

protože je to poměr $\frac{GH}{AG}$. Dosud jsme sledovali posloupnost obsahů obdélníků a nyní je třeba přejít k poměrům týkajícím se délek jejich stran. Je to tím, že Fermat automaticky reprezentoval obsahy po sobě jdoucích obdélníků geometrickou posloupností úseček $AR, AM, AO, AH, AG, \dots$. Je to opravdu posloupnost poměru inverzního k tomu, který byl zaveden na začátku. Takovéto odečítání z obrázku ekonomizuje výsledný tvar: *Sed tres rectaequae constituunt rationes parallelogrammorum, rectae nempe AO, HA, GA sint proportionales ex constructione.*⁴⁶ Pro výpočet celkového součtu této nové posloupnosti stačí znovu interpretovat obecnou formuli (1).

K určení hodnoty levé strany používá Fermat dvou po sobě jdoucích členů a nevyužívá k tomu první člen. Takže pro skutečný výpočet $\frac{X_n - X_{n-1}}{X_{n+1}}$ nahrazuje posloupnost obsahů obdélníků posloupností úseček. První členy obou posloupností se liší. Umístěním $a = GH \times GE$ do jmenovatele dostáváme

$$\frac{GH}{AG} = \frac{a}{A - a}.$$

Rozšířením dospíváme ihned k

$$\frac{GH \times GE}{AG \times GE} = \frac{GH \times GE}{A - a}.$$

Označíme-li B obsah obdélníka $AGEB$, který byl pevně zvolen na obr. 3., tj.

$$B = AG \times GE,$$

dospíváme k rovnosti jmenovatelů

$$(2) \quad A - a = B.$$

Když $\alpha = 3$ a $\beta = 1$, pak stejným způsobem analytický výraz $q^2 - 1$ vede ke kvocientu posloupnosti obsahů obdélníků, které se lineárně odečítají z obrázku. Pak lze interpretovat, jako to již udělal Gregoire a Saint Vincentio, geometrickou řadu, jejíž kvocient je $\frac{1}{q^2}$,

⁴⁶ P. de Fermat: *Varia Opera*, s. 258.

jako řadu úseček. Tato řada může být jednoduše chápána ve smyslu inverzním k řadě výchozí, abychom znali AR, AO, AG atd. I kdyby se lišily první členy řady obdélníků od nové řady úseček, výraz $\frac{X_n - X_{n+1}}{X_{n+1}}$ zůstává stále stejný pro obě řady:

$$\frac{AO - AG}{AG} = \frac{GO}{AG}$$

(*in hoc vero casu, parallelogramum primum erit ad secundum, secundum ad tertium, etc, ut recta AO ad GA; quod statim compositio proportionum manifestabit*).⁴⁷ Přijatá geometrická reprezentace, která umožňuje přechod od obsahů k úsečkám, dává při použití formule (1) vztah

$$\frac{GO}{AG} = \frac{GH \times GE}{A - a}.$$

Ale $\frac{GO}{AG} = \frac{GO \times GE}{AG \times GE}$. Pokud znovu přiřadíme a hodnotu $GH \times GE$, dostaneme následující vztah:

$$\frac{GO \times GE}{GH \times GE} = \frac{a}{A - a}.$$

Tedy

$$(3) \quad A - a = \left(\frac{GH}{GO} \right) B.$$

V dnešní terminologii má poměr $\frac{GH}{GO}$ hodnotu $\frac{1}{1+q}$, kterou získáme zjednodušením zlomku $\frac{q-1}{q^2-1}$, poněvadž $q(q>1)$, a to je poměr řady bodů vyznačených na ose od jejího počátku.

Naproti tomu, když $\alpha=1$ a $\beta=1$, což je v případě obyčejné hyperboly, jakou užíval Appolonios, výpočtem nezískáme nic, jelikož posloupnost obsahů obdélníků není geometrickou posloupností. Všechny obsahy se sobě rovnají a součet všech obsahů by nebyl konečný. Na jedné straně je geometrická posloupnost na vodorovné ose a na druhé

⁴⁷ P. de Fermat: *De æquationum, Varia Opera*, s. 259.

straně aritmetická posloupnost v případě sčítaných obsahů. Vnucuje se tak slovo logaritmus. V této souvislosti to bylo vysloveno až v roce 1649 Alfonsem Sarazou, žákem Gregoira a Saint Vincentio.⁴⁸

Výpočet se také dobře hodí pro takové zobecněné paraboly, pro něž je poměr kladných mocnin konstantní. Začneme *první parabolou, zvanou Apolloniovou*,⁴⁹ jak ji představuje Fermat, kde $\alpha = 1$ a $\beta = 2$.

Vztah, který ji popisuje, má tvar $\frac{AG}{AH} = \frac{EG^2}{LH^2}$. Formální výpočet obsahů obdélníků dává vzniknout geometrické řadě, jejíž kvocient je q umocněný na $\frac{3}{2}$. Tentokrát by bylo třeba zavést na ose geometrickou

posloupnost s kvocientem q , kde $0 < q < 1$, pokud dokážeme efektivně sečíst posloupnost obsahů, která je vyjádřena klesající řadou

$$AG, AH, AO, AM \text{ atd. Výraz na levé straně v (1) je roven } \frac{1 - q^{3/2}}{q^{3/2}}.$$

Takto by to ale Fermat nenapsal, protože se zabýval geometrickou interpretací,⁵⁰ tj. znázorněním řady obsahů řadou úseček. To, co jej vedlo, jsou geometrické průměry. Jestliže pokládá AY za geometrický průměr AO a AH , potom $AY = \sqrt{AO \cdot AH}$, což je $AY = q^{3/2} \cdot AG$. Řada obsahů obdélníka je takto reprezentována geometrickou řadou úseček AG, AY, AM atd. Díváme-li se na tuto řadu postupně a bereme-li v úvahu skutečnost, že $q < 1$ (AY tudíž dává člen menší než AG), pak výraz na levé straně (1) je roven hodnotě

$$\frac{GY}{AY}.$$

Konečně tedy máme

$$\frac{GH \times GE}{A - a} = \frac{GY}{AY}.$$

Poněvadž $a = GH \times GE$, jednoduchá úprava zlomků dává právě tak dobře

$$\frac{GH \times GE}{A} = \frac{GY}{AY + GY} = \frac{GY}{AG}.$$

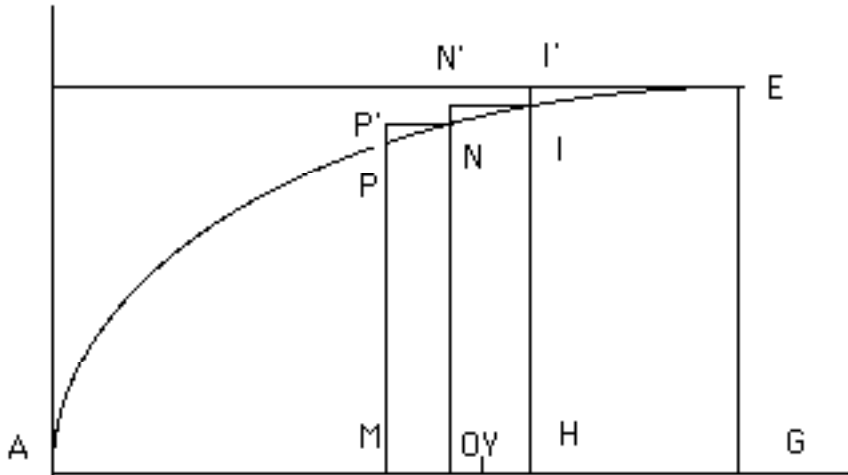
⁴⁸ Dhombres, J.: *Le texte sur les logarithmes de Sarasa*, v tisku.

⁴⁹ To je případ $y^2 = ax$.

⁵⁰ Dhombres, J.: *Figures de style, figures de géométrie*, Theoria 8, 1993, s. 51- 88.

Označíme-li B obsah obdélníka $AG \times GE$, dostáváme nový vzorec:

$$(4) \quad A = \left(\frac{GH}{GY} \right) B.$$



Obr. 4.⁵¹

Můžeme ještě vysvětlit případ jiné „paraboly“ zvané semikubická,⁵² paraboly určené vztahem $\frac{GE^3}{HI^3} = \frac{AG^2}{AH^2}$, o níž pojednává Fermat. Tento poslední případ odpovídá volbě $\alpha = 2$ a $\beta = 3$. Necht' pro řadu obsahů obdélníků je kvocient roven $q^{\frac{5}{3}}$. Analogicky s případem

⁵¹ Fermat umístil tento náčrtek svisle, neboť znázorněný oblouk je obyčejná parabola. Já ale dávám přednost této pozici, abych lépe přiblížil souvislost s předchozím obrázkem hyperboly.

⁵² Podrobně se tomu věnoval již Descartes ve svém pojednání: *Dissertatio: de linearum curvarum cum lineis rectis comparatione*, *Œuvres de Fermat*, I, s. 217-254.

obyčejné paraboly Fermat sestruje délku $AT = q^{\frac{5}{3}} \cdot AG$. Stejný typ výpočtu jako předcházející vede k novému vzorci:

$$(5) \quad A = \left(\frac{GH}{GT} \right) B.$$

Zatím se to netýká kvadratury, ale pouze vztahů mezi součtem geometrické řady obsahů obdélníků umístěných na křivce a obsahem daného obdélníka. Položit přímo $q = 1$ by znamenalo zrušit celou konstrukci a body G, H, O, M a R přitom ztrácejí smysl.

Získané výsledky lze shrnout takto: Označíme-li písmenem S obsah hledané plochy, pak v jednotlivých případech dostáváme:

$$(6) \quad S = B, \quad \alpha = 2, \beta = 1 \quad (\text{hyperbolický případ}),$$

$$(7) \quad S = \frac{1}{2} B, \quad \alpha = 3, \beta = 1 \quad (\text{hyperbolický případ}),$$

$$(8) \quad S = \frac{2}{3} B, \quad \alpha = 1, \beta = 2 \quad (\text{parabola}),$$

$$(9) \quad S = \frac{3}{5} B, \quad \alpha = 2, \beta = 2 \quad (\text{parabolický případ}).$$

Dnešní interpretace jasně umožňuje vidět hyperbolu tam, kde $x^\alpha y^\beta = a$ a kde $\alpha > \beta > 0$, poněvadž pro příslušný obsah platí:

$$I = a^{\frac{1}{\beta}} \int_x^\infty \frac{dx}{x^{\frac{\alpha}{\beta}}} = \frac{a^{\frac{1}{\beta}}}{\frac{\alpha}{\beta} - 1} \cdot \frac{x}{x^{\frac{\alpha}{\beta}}}.$$

Tento obsah dává ještě

$$I = \frac{xy}{\frac{\alpha - \beta}{\beta}}.$$

Způsobem, kterým interpretujeme součin xy jako obsah obdélníka, se obecný Fermatův výrok čte snadno. Je to tvrzení nezávislé na charakteru obecné hyperboly. Pokud číslem $\frac{\alpha}{\beta} - 1$ vydělíme obsah

obdélníka, dostaneme hledaný obsah. Toto tvrzení jako takové už pozbylo zajímavosti. Kde je tedy Fermatův objev?

Fermat znovu objevil kvadraturu Archimédovy paraboly, poněvadž mu postačovalo násobit hodnotu S dvěma, aby obdržel výraz pro parabolický trojúhelník a odtud pro křivočarý trojúhelník. Byla to zřejmá zkouška platnosti použité metody, jelikož kvadratura paraboly byla považována za typický vzorový příklad kvadratury.

Zamysleme se nad charakterem Fermatova objevu. Vhodné použití geometrické řady vede ke zobecnění, poskytuje stejnou metodou kvadraturu celé třídy křivek jdoucích k nekonečnu. Tento způsob vidění má velkou výhodu, že je to čistá geometrická konstrukce, která byla nezbytná i pro kvadraturu Archimédovy paraboly, kde musely být brány v úvahu „průměry“ paraboly⁵³. Úspěch je spjatý se způsobem znázorňování obsahů polygonů řadami čísel (geometrickými řadami) reprezentovanými úsečkami. Je to v souladu s duchem analytické geometrie, neboť křivka není nic jiného než příležitost k výpočtům.

Meze použití této metody závisejí na typu užitých křivek, na jejich popisu pomocí geometrických posloupností. Nemyslím si, že by Descartes mohl považovat tuto důvtipnou Fermatovu metodu za přijatelnou. Ale Fermat se jednou vyjádřil, že by bez použití geometrické řady nepracoval. Sám také zhodnotil svůj přínos jako virtuózní.

Pomocí koeficientů a a b je možné geometricky vyjádřit obsah plochy pod křivkou, obsah směřující k nekonečnu, ať sledujeme souřadnice nebo odpovídající úsečky. Fermat vyniká schopností vyjádřit odlišné případy, pomocí nichž se nekonečno dá zkrotit, tentokrát je to nekonečno nezávislé na druhu křivky, ale závislé na chování každé z nich. Ve skutečnosti Fermat říká, že používá postup nekonečného sčítání v geometrické posloupnosti.

Dále Fermat vysvětluje přechod kvocientu q k jedné. Abychom získali kvocient q rovný jedné, je třeba ztotožnit H a G , což dává $a = 0$ ve vztahu (2). Je třeba předem adekvatizovat hledaný obsah S křivočaré plochy pod hyperbolou, abychom mohli určit i neohraničenou plochu, která má základnu GE a která je ohraničená z jedné strany křivkou GS a z druhé strany nekonečnou asymptotou GOR ⁵⁴, rovnající se B , obsahu obdélníka *aequari spatium rectilineo dato*. Kvadratura byla stanovena podle vztahu (6). Adekvatizací? Bylo snadné v něm rozpoznat použití exhaustivní metody pro přechod od A k S . Název *exhaustivní metoda* zavedl Gregoire a Saint Vincentio pro

⁵³ Pojem průměru se nehodí pro zobecněné paraboly.

⁵⁴ *Œuvres de Fermat*, s. 218.

výpočet obsahů podle Eukleida nebo Archiméda.⁵⁵ V době, kdy Fermat použil termín adekválizace, nebyl ještě obecně rozšířen pro tuto metodu název *exhaustivní*. Fermat proto mohl navrhnout také slovo *adégalizer*, lépe přizpůsobené popisu metody, kterou uváděl v život.⁵⁶ Fermat pracoval s plochou jdoucí k nekonečnu. Adekválizace dobře vysvětluje přechod od A k S .

Existuje také jiné využití adekválizace, jestliže ve vzorcích (3), (4), (5) jsou kvocienty $\frac{GH}{GO}$, $\frac{GH}{GY}$ a $\frac{GH}{GT}$ nahrazeny jednoduchými číselnými zlomky $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$ a $\frac{3}{5}$, které se vyskytují ve výrazech (7), (8) a (9). Fermat nepoužívá formulaci *pomocí metody adekválizace*, ale vysvětluje, *protože intervaly sousedící na základně jsou svou konstrukcí přibližně rovny*. Dále píše, že právě tam znovu objevuje Archimédův výsledek pro parabolu a právě v tom se také liší v metodách: *Methodum autem variare, & diversam ab Archimede viam sectari necessum habuimus.*⁵⁷

Díky výpočtu kvocientu q geometrické posloupnosti na vodorovné ose existuje interpretace této nové *adekválence*: stačí zjišťovat úroveň neurčitého výrazu $0/0$ typu $\frac{1-q}{q^2-1}$ ($q > 1$), nebo

$\frac{1-q}{1-q^{3/2}}$ ($q < 1$) nebo také $\frac{1-q}{1-q^3}$ ($q < 1$) a nebo $\frac{1-q}{1-q^{5/3}}$ ($q < 1$).

Viz $\frac{1-q}{1-q^g}$ pro $g = \frac{a+b}{b}$. Limita je zřejmě $\frac{1}{g}$. Je třeba se opřít

o techniku omezených rozvoje exponenciely a logaritmu. Toto poslední slovo nemůže u Fermata chybět. Skutečně se objevilo: *quae inter se propter nostram methodum logarithmicam censentur aequalia*,⁵⁸ právě když se snažil odůvodnit poměr 3 ku 5 pro (9). V logaritmické metodě se také uplatňuje adekválizace.

Poměr po sobě jdoucích dvou členů geometrické posloupnosti je podle Fermata automaticky nahrazen poměrem dvou čísel, která označují tyto členy v uspořádání geometrické řady, např. poměr $\frac{GH}{GO}$ se

⁵⁵ Dhombres, J.: *Le continu baroque, ou comment ne pas jouer discret*, in: Salanskis, M.: Sinaceur (éd.), *Le labyrinthe du continu*, Springer-Verlag, 1992, s. 47-60.

⁵⁶ Breger, H.: *The Mysteries of Adequare: a vindication of Fermat*, Historia Mathematica.

⁵⁷ *Varia Opera*, s. 48.

⁵⁸ *Œuvres de Fermat*, s. 265 nebo s. 48 originálu z roku 1679.

blíží k $\frac{1}{2}$ a poměr $\frac{GH}{GT}$ se blíží k $\frac{3}{5}$. Tato čísla se objevují v konstrukcích nenápadně. V případě paraboly lze úsečku AG zapsat pro $q < 1$ jako $\frac{1}{q^n} \cdot GX$, kde GX je dostatečně malé a n dostatečně velké, což znamená, že GX je jednotkou základny, která určuje velikost AG podle geometrické posloupnosti. Následující úsečky, rozdíly dvou členů posloupnosti, jsou téměř stejné: to je základní princip pro sestavení tabulky, kde logaritmy jsou celá čísla. Tabulka dává pouze přibližné hodnoty. Tudíž poměr jakýchkoli dvou členů této posloupnosti je právě poměrem jejich příslušného pořadí. V tom spočívá adekvatizace: je to přibližná rovnost, která vznikne přechodem k logaritmu.

V případě hyperboly je princip stejný, počínaje GH , až na to, že délka úsečky AD vyjádřená pomocí $q^n \cdot AG$ pro $q > 1$ sice není nekonečná, ale je obecně značně velká. Avšak to není na škodu, jelikož usuzování se nutně zakládá na aproximaci logaritmu.

Nakonec se aritmetická a geometrická posloupnost setkávají při studiu velikostí plochy pod hyperbolou využitím exhaustivní metody podle Gregoire a Saint Vincentio, jinak nazývané *adekvatizace* podle Fermata *ut loquitur Diophantus*. Toto setkání přineslo pojem logaritmu.

Adresa: Prof. Dr. Jean Dhombres, *École des Hautes Études en Sciences Sociales, 54, Boulevard Raspail, F- 75 006 Paris, Francie,*
e-mail: jean.dhombres@damesme.cnrs.fr