



HAL
open science

La Genealogía Dialógica de la Igualdad Interacción e Igualdad en la Teoría Constructiva de Tipos

Shahid Rahman, Nicolas Clerbout, Juan Redmond

► **To cite this version:**

Shahid Rahman, Nicolas Clerbout, Juan Redmond. La Genealogía Dialógica de la Igualdad Interacción e Igualdad en la Teoría Constructiva de Tipos . 2016. halshs-01330097

HAL Id: halshs-01330097

<https://shs.hal.science/halshs-01330097>

Preprint submitted on 9 Jun 2016

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

La Genealogía Dialógica de la Igualdad Interacción e Igualdad en la Teoría Constructiva de Tipos¹

Shahid Rahman² Nicolas Clerbout³ y Juan Redmond⁴

I. Introducción

La pregunta sobre la naturaleza de la noción de igualdad tiene raíces antiguas y venerables que se remontan a los albores del concepto de ciencia y racionalidad. En la tradición occidental, la historia de sus fuentes escritas va desde el célebre poema de Parménides, los desafíos de Heráclito, las reflexiones de Platón y Aristóteles,⁵ la introducción del símbolo “=” por Robert Recorde en 1557⁶, hasta las propuestas de Frege y las preguntas de Wittgenstein.

Fue claro desde el inicio que la consideración detallada de la noción de igualdad requiere no solo de una ponderación meticulosa de la relación entre el nivel ontológico y el nivel proposicional, o más generalmente entre signo y objeto pero, una investigación tal precisa también de la introducción de distinciones conceptuales tales como: igualdad numérica (o extensional) / cualitativa (o intencional); principio ontológico / lógico; definición real / nominal. La historia de aquellos estudios sobre la noción igualdad que ponen de relieve la interacción entre el nivel ontológico y el proposicional es abundante y compleja y atraviesa toda la historia de la ciencia.

Es nuestra intención proveer elementos de análisis que vinculen la noción de interacción argumentativa, concebida dentro de un cuadro dialógico para la lógica constructiva con las nociones de igualdad ontológica (la así llamada *igualdad definicional*) y proposicional (la igualdad como un predicado, i.e., el así llamado *predicado de identidad*) desarrolladas en la *Teoría Constructiva de Tipos* (de ahora en adelante TCT) de Per Martin-Löf. Más precisamente, la tesis principal del presente trabajo, que no es de índole histórica – al menos en esta fase de nuestra investigación – es que los niveles ontológico y proposicional de la **igualdad**

¹ Los resultados presentados en el presente artículo fueron obtenidos en el marco del proyecto Fondecyt Regular N° 1141260 y en el marco de los programas de investigación *Argumentation, Décision, Action* (ADA) de *Maison Européenne des Sciences de l'Homme et de la Société* – USR 318, el eje transversal de investigación *Argumentation* del laboratorio UMR 8163: STL y el proyecto ANR SEMAINO.

² Université de Lille, UMR: 8163 STL, ADA-MESH (NpdC).

³ Instituto de Filosofía, Universidad de Valparaíso.

⁴ Instituto de Filosofía, Universidad de Valparaíso.

⁵ El diálogo *Teeteto* de Platón (185a) es frecuentemente citado como una de las primeras fuentes en hacer uso explícito de tal principio. Más aún el *Parménides* (137c-d) prefigura ya los debates que ocuparon mucho tiempo después a los pensadores más finos de la historia.

⁶ Recorde (1557):

And to avoide the tedious repetition of these woordes : is equalle to : I will sette as I doe often in woorke use, a paire of paralleles, or Gemowe lines of one lengthe, thus : =, bicause noe 2 thynges, can be moare equalle.

No hay números de páginas en esta obra, pero el fragmento citado está abajo del título “The rule of equation, commonly called Algebers Rule” que aparece más o menos a los tres cuartos del libro. Tomamos la cita desde Granström (2011, p. 33).

tienen sus raíces en una forma específica de interacción dialógica, gobernada por lo que en la literatura sobre enfoques lúdicos de la teoría del significado llamamos la *regla formal*, la *jugada de espejo* (*copy-cat moves*) o, más recientemente, la *regla socrática*. La idea principal es que las formas explícitas de igualdad intencional expresadas en un juicio resultan, a nivel estratégico, de las elecciones del Proponente copiando las elecciones de su adversario para introducir una definición real. En este marco, las expresiones de igualdad codifican una clase particular de interacción argumentativa.⁷ El predicado estándar de igualdad proposicional de la lógica de primer orden es introducido en una etapa posterior, como resultando de una igualdad establecida a nivel ontológico – sin embargo, si bien mencionaremos brevemente el caso del predicado de identidad, en el presente artículo nos restringiremos a discutir el caso de la igualdad definicional.

Mientras la Teoría Constructiva de Tipos contribuye en aclarar la diferencia crucial entre los niveles ontológico y proposicional y sus roles respectivos, el enfoque dialógico permite mostrar que el nivel ontológico tiene sus raíces en la interacción argumentativa. En este marco las expresiones de igualdad hacen explícita la interacción argumentativa en la cual los dos niveles tienen sus bases.

De estas consideraciones se sigue la organización del presente trabajo: empezaremos con una discusión del tratamiento de la identidad en la TCT – desarrollando las ideas introducidas brevemente más arriba – y luego presentamos nuestro análisis, que bien puede comprenderse como el de una genealogía.

II. Igualdad **ontológica y proposicional** en la Teoría Constructiva de Tipos

II.1 Algunos postulados relevantes de la Teoría constructiva de tipos

En la TCT, las constantes lógicas son interpretadas a través de la correspondencia Curry-Howard entre proposiciones y conjuntos. Una proposición se interpreta como un conjunto cuyos elementos representan las pruebas de la proposición. También es posible visualizar un conjunto como la descripción de un problema y sus elementos como las soluciones al problema de una manera similar a la explicación de Kolmogorov del cálculo proposicional intuicionista. Además, en TCT los conjuntos se entienden también como tipos, de modo tal que las proposiciones pueden ser vistas como datos o tipos de prueba.⁸

El objetivo filosófico fundamental de la TCT es de desarrollar un *enfoque de interpretación total* (*fully interpreted approach*)⁹, donde se presta especial atención a:

[...] *evitar mantener contenido y forma aparte. En su lugar exhibiremos ciertas formas de juicio e inferencia que son utilizadas en pruebas matemáticas y al mismo tiempo daremos una explicación semántica de tales formas de juicio. De esta manera, hacemos explícito lo que se suele tomar por sentido implícitamente.* Martin-Löf (1984, p.3, nuestra traducción)

En relación con la tarea de explicitación, se trata de poner en el nivel del lenguaje objeto características que determinan el significado y que se formulan usualmente en el nivel meta.

⁷ Reencontramos así una vez más en las enseñanzas de Platón y Aristóteles los vínculos entre la constitución dialéctica del significado y la identidad. Sin embargo, como ya mencionamos, no podemos aquí indagar las fuentes históricas de nuestra propuesta. Dejamos esto para un trabajo futuro.

⁸ Ver Nordström/Petersson/Smith (1990) y Granström (2011).

⁹ Ver Sundholm (1983,1986, 1997, 2001, 2013).

De acuerdo con el punto de vista lógico de la TCT, las premisas y la conclusión de una inferencia lógica no son proposiciones sino juicios:

Una regla de inferencia se justifica explicando la conclusión bajo el supuesto de que las premisas son conocidas. Por lo tanto, antes de que una regla de inferencia pueda ser justificada, debe explicarse qué es lo que hay que saber para tener el derecho de hacer un juicio sobre cualquiera de las diversas formas en que las premisas y la conclusión pueden tener. (Martin-Löf 1984, p.4, nuestra traducción)

Otros dos principios básicos de la TCT son los siguientes:

- Ninguna entidad sin tipo
- Ningún tipo sin identidad

En consecuencia, podemos tomar la afirmación de que un individuo es un elemento del conjunto A como la afirmación de que dicho individuo instancia o ejemplifica el tipo A . Un conjunto se define en TCT especificando sus elementos canónicos (**aqueellos que no son definidos por medio de otros elementos**), y aquellos, los no-canónicos, de los que se puede mostrar, usando algún método prescrito de transformación, que son iguales (en este conjunto) a uno canónico; esto último es lo que prescribe el segundo principio básico y que, en otras palabras, consiste en la introducción de una relación de equivalencia en un conjunto. Así, si A es un tipo y tenemos un objeto b que satisface las condiciones correspondientes entonces b es un objeto de tipo A . Esto se escribe formalmente $b : A$.¹⁰

En consecuencia,

$b : A$

$A \text{ true}$

Y pueden ser leídas como:

b es una prueba de la proposición A
 b es un elemento del conjunto A
 b satisface con las expectativas de A
 b es una solución al problema A

A es verdadera
 A tiene un elemento
 A es satisfecha
 A tiene una solución

Es esencial distinguir entre el *elemento de prueba* b (*proof-object*), el tipo A y el juicio $b : A$, que establece, en este ejemplo, que b es un elemento de prueba para la proposición A (si A es del tipo proposición). En lógica estándar, que hay una prueba para una proposición dada se expresa en el nivel de metalenguaje. El hecho de que haya algo (un elemento) b que fundamenta la proposición de que *Primus le debe 100 monedas a Secundus* (lo que supondría la afirmación correspondiente) se da en el análisis habitual a nivel metalenguaje. En TCT, el fundamento de una afirmación se formula en el nivel de lenguaje objeto por medio de la afirmación de que hay un elemento-prueba de la proposición correspondiente.

Siempre que en TCT se introduce una nueva expresión se lo hace por medio de lo que se llama una explicación semántica. En el caso de la introducción de un nuevo tipo, la explicación

¹⁰ Martin-Löf usa el signo " \in " con el fin de indicar que algo, por ejemplo a , es de tipo B ; incluso sugiere que se puede entender como la cópula "es". Nordström/Petersson/Smith (1990) también hacen uso de esta notación, mientras que otros autores, como Ranta (1994), utilizan el doble punto ":". Granström (2011) distingue el doble punto del epsilon, donde el primero se aplica a los elementos no canónicos y el segundo a los canónicos. Nosotros vamos a utilizar el doble punto.

semántica consiste en (1) describir sus objetos canónicos, (2) proporcionar un algoritmo para reconocer si un objeto no canónico es o no de ese tipo y (3) dar las condiciones que permitan establecer la **igualdad** (o no) de dos objetos respecto a ese tipo. El punto 3 se entiende como la tarea de definir una relación de equivalencia apropiada. De este modo, aserciones de la forma $a = b : A$, afirman que los dos objetos a y b satisfacen la relación de equivalencia definida para el tipo A . La aserción $a = b : A$ es también llamada una aserción de igualdad definicional, dado que por mediante de ella se introducen definiciones explícitas – por ejemplo de funciones (ver sección 3.2). Una tal igualdad se transmite entonces por reflexividad, simetría y transitividad, y por substitución de iguales definicionales. (cf. Ranta (1994), p. 52).

Por obvias razones de espacio, no vamos a dar una descripción detallada y precisa de la TCT aquí. En la próxima sección nos limitaremos a transmitir los puntos relevantes para los objetivos del presente trabajo mediante la discusión de la conjunción y de una versión *simplificada* de las reglas para el existencial. Para más información sobre esta perspectiva véase Martin-Löf (1984), Ranta (1988, 1994), Nordström et al. (1990), Primiero (2008) y Granström (2011).

II.2 Las bases de la lógica intuicionista de predicados en el cuadro de la TCT

II.2.1 Cuatro tipos de reglas

Dado que en este marco teórico las proposiciones son conjuntos, los operadores lógicos están definidos como operadores conjuntistas. El significado de tales operadores se establece por medio de cuatro tipos de reglas diferentes, a saber: reglas de formación, de introducción, de eliminación y reglas de igualdad:

Reglas de formación. La inclusión explícita de reglas de formación en un sistema inferencial es una de las características más distintivas de la TCT. Las reglas de formación establecen simultáneamente la sintaxis y los tipos básicos a los que corresponden las constantes lógicas y no lógicas del lenguaje considerado. Más precisamente, las reglas de formación especifican bajo qué condiciones podemos inferir que algo es un tipo (conjunto), y bajo qué condiciones podemos decir que dos tipos (conjuntos) son iguales. Por ende, dado que la buena formación incluye no solo los modos de composición sintáctica sino también la identificación de los tipos básicos correspondientes, podemos decir que las reglas de formación despliegan al mismo tiempo las reglas de buena formación sintáctica y semántica específicas a un lenguaje determinado.

De hecho, toda demostración TCT¹¹ comienza verificando que las expresiones del juicio a demostrar resultan de la aplicación de las reglas de formación correspondientes. Es éste el modo de implementar en el cuadro de la TCT la idea de un lenguaje totalmente interpretado: cuando leemos una demostración TCT de abajo hacia arriba ella despliega los elementos sintácticos y semánticos del juicio demostrado.

Reglas de introducción. Las reglas de introducción que definen los tipos del sistema, prescriben el modo de formar elementos canónicos y el modo de determinar si dos elementos canónicos son iguales.

Reglas de eliminación. Ellas establecen el modo de definir funciones (llamados selectores) en el conjunto definido por las reglas de introducción.

¹¹ Recordamos al lector que usamos la expresión *demostración TCT* como una abreviación de la expresión *demostración en el cuadro de la teoría constructiva de tipos*.

Reglas de igualdad. Como ya mencionamos en la sección anterior, las reglas de igualdad especifican el modo en el que operan los selectores definidos por las reglas de eliminación y como ejecutar su computación dados los elementos canónicos generados por las reglas de introducción.

II.2.2 Elementos de prueba e igualdad definicional

El ejemplo más claro de interacción entre proposiciones y elementos de prueba en un sistema de inferencia es el caso de la conjunción.¹² La proposición $A \wedge B$ (o el conjunto $A \times B$) se explica, estableciendo que un elemento canónico de $A \wedge B$ es un par de elementos de prueba (a, b) donde $a : A$ y $b : B$ - es decir, donde a es un elemento de prueba de A y b de B :

$$\frac{A : prop \quad B : prop}{A \wedge B : set} \wedge\text{-F} \qquad \frac{a : A \quad b : B}{(a, b) : A \wedge B} \wedge\text{-introducción}$$

Con el fin de definir \wedge -eliminaciones vamos a hacer uso de cierto tipo de operadores llamados *selectores*, a partir del cual se pueden definir nuevas funciones que extraen aquellos componentes que constituyen un elemento de prueba complejo c (como por ejemplo $c = (a, b)$). En el caso de la conjunción los selectores son la función de proyección p y q que tiene como valor el lado izquierdo y derecho del par de elementos de prueba respectivamente. Por lo tanto, si c es un elemento de prueba para la conjunción, entonces $p(c)$ nos da el componente izquierdo de c y $q(c)$ su componente derecho.

$$\frac{c : A \wedge B}{p(c) : A} \wedge\text{-p-eliminación} \qquad \frac{c : A \wedge B}{q(c) : B} \wedge\text{-q-eliminación}$$

Si sabemos que $c = (a, b)$, entonces $p(c)$ restaura el componente izquierdo de c (obtenido por la regla de introducción) esto es: $p(c) = p((a, b)) = a$, tal que $a : A$, análogamente $q(c)$ restaura el componente derecho:

$$\frac{a : A \quad b : B}{p((a, b)) = a : A} \wedge\text{-izq-}\beta\text{-igualdad} \qquad \frac{a : A \quad b : B}{q((a, b)) = b : B} \wedge\text{-der-}\beta\text{- igualdad}$$

Aquí tenemos ejemplos claros de cómo usar la noción de igualdad definicional mencionada anteriormente: las funciones de proyección p y q se definen explícitamente por medio de una regla de inferencia de modo que, **dados los elementos de prueba a y b , la proyección q de (a, b) es definicionalmente igual a b** , respecto a la relación de equivalencia que define el tipo B , y análogamente se introduce la proyección p .

También se puede introducir una regla dual, llamada η , y que puede ser definida de la siguiente manera:

$$c : A \wedge B$$

¹² Cf Sundholm (1986).

$$\frac{}{(p(c), q(c)) = c : A \wedge B} \quad \wedge\text{-}\eta\text{-igualdad}$$

Estas reglas de igualdad definicional, como ha señalado Sundholm (1997 p. 200) no son más que versiones lineales de las etapas de normalización de Prawitz mencionadas anteriormente.

Desde el punto de vista del juicio, las reglas del existencial están estrechamente ligadas a los juicios en el que ocurren proposiciones existenciales. En efecto, una forma simplificada de tales reglas da como resultado:

$$\frac{A : \text{set} \quad \begin{array}{c} (x : A) \\ \dots \\ B(x) : \text{prop} \end{array}}{(\exists x : A)B(x) : \text{set}} \exists\text{F} \qquad \frac{a : A \quad b : B(a)}{(a, b) : (\exists x : A)B(x)} \exists\text{I}$$

$$\frac{(c) : (\exists x : A)B(x)}{p(c) : A} \exists\text{-}p\text{-eliminación} \qquad \frac{(c) : (\exists x : A)B(x)}{q(c) : B(a)} \exists\text{-}q\text{-eliminación}$$

$$\frac{a : A \quad b : B(a)}{p((a, b)) = a : A} \exists\text{-}izq\text{-}\beta\text{-igualdad} \qquad \frac{a : A \quad b : B(a)}{q((a, b)) = b : B(a)} \exists\text{-}der\text{-}\beta\text{-igualdad}$$

La diferencia entre el caso proposicional y el caso de la cuantificación reside en la *dependencia*. En efecto, la regla de formación del existencial muestra que el componente derecho del existencial es una proposición que depende de su lado izquierdo. Más precisamente la parte derecha del existencial es una función proposicional definida sobre el conjunto que constituye su parte izquierda. En otras palabras, mientras que las componentes de una conjunción son tipos independientes entre sí, la segunda componente del existencial es un tipo dependiente del tipo del primer componente.

Un paralelismo similar puede establecerse entre las reglas para el universal y la implicación (véase Martin-Löf, 1984, p. 16-18).

Una vez que las igualdades ocurren en la demostración se transmiten por medio de la reflexividad, la simetría y la transitividad, y por la substitución de iguales definicionales. (Véase Ranta, 1994, p. 52).

Como ya anunciamos no discutiremos en el presente artículo el caso de la igualdad proposicional.

III El Cuadro Dialógico y la Teoría Constructiva de Tipos

La idea principal del presente estudio es que la noción de Sundholm de *supuesto epistémico* (1997) es muy cercana a la *regla socrática* o *regla formal* que distingue al enfoque dialógico de los otros enfoques lúdico-teóricos.

Esta noción ha sido explícitamente relacionada con el enfoque dialógico por Per Martin Löf en una conferencia reciente llevada a cabo en el IHPST de París en 2015 sobre los lazos entre lógica y ética:

“[...] cuando se está dando cuenta de la noción de inferencia inmediata, la noción de demostración no está aún a nuestra disposición. Por ello, decir [cuando queremos explicar qué es una inferencia inmediata], asumamos que $J_1 \dots J_n$, nos hace blanco de la acusación que nuestra explicación es circular. [...] La solución aquí es no asumir que las premisas son conocidas en un sentido cualitativo [del término conocer], esto es, ser demostradas, sino que simplemente debemos asumir que han sido afirmadas (aserción), lo que equivale a decir que otros han tomado la responsabilidad por ellas, y ahora la pregunta que se abre es si estoy dispuesto a hacerme responsable de la conclusión. [...] Esta parece ser la definición apropiada de la noción de supuesto epistémico en el sentido de Sundholm.¹³

Es, en efecto, la tesis principal del presente artículo es que si vinculamos la regla socrática con la igualdad definicional obtendremos un modo simple y directo de implementar el enfoque de la teoría constructiva de tipos dentro del marco dialógico.

En la sección siguiente vamos a dar una breve introducción a la dialógica estándar, es decir, el marco dialógico para TCT.

III El Cuadro Dialógico y la Teoría Constructiva de Tipos

La Lógica dialógica fue iniciada a finales de la década de 1950 por Paul Lorenzen y luego desarrollada por Kuno Lorenz¹⁴, ambos inspirados por la noción de Wittgenstein de significado como uso. La idea básica del enfoque dialógico, de la lógica, es que el significado de las constantes lógicas está dado por las normas o reglas para su uso y estas reglas se entienden como formas específicas de estructuración de la interacción argumentativa. Esta característica argumentativa subyacente a la dialógica, a menudo lleva a clasificarla como una teoría pragmática del significado. El enfoque dialógico de la lógica no es una lógica, sino un marco de significado pragmático en donde diferentes lógicas pueden desarrollarse, combinarse y/o compararse. Sin embargo, aquí vamos a limitarnos a las versiones dialógicas de la lógica clásica y la intuicionista.

¹³ Transcripción de Ansten Klev de la charla de Martin-Löf's en París en mayo 2015, traducido por los autores del presente artículo. Véase también el papel de Dutilh Novaes (2015) que desarrolla ciertas reflexiones sobre la normatividad en la lógica en conexión con el cuadro dialógico.

¹⁴ Los principales trabajos originales se recogen en Lorenzen / Lorenz (1978). Para una visión histórica ver Lorenz (2001). Otros trabajos se han recogido más recientemente en Lorenz (2008, 2010a, b). Una relación detallada de los acontecimientos recientes desde Rahman (1993), se puede encontrar en Rahman / Keiff (2005), Keiff (2009) y Rahman (2012). Para la metalógica subyacente, ver Clerbout (2013, 2014a, b). Para presentaciones en libros de texto ver: Clerbout (2014b), Redmond / Fontaine (2011) y Rückert (2011). Para estudios de la relación entre la dialógica, lógica y juegos, véase Rahman / Keiff (2010), Rahman / Tulenheimo (2009), Marion/Rückert (2015). Rahman y sus colaboradores comenzaron recientemente a estudiar el enfoque dialógico de la CTT, ver Clerbout / Rahman (2015), Rahman / Clerbout (2014, 2015), Rahman / Clerbout / Jovanovic (2014), Rahman / Jovanovic / Clerbout (2015) y Rahman / Redmond (2014).

En un diálogo dos partes discuten sobre una tesis respetando ciertas reglas fijas. El jugador que afirma la tesis se llama Proponente (**P**), su rival, que pone en tela de juicio la tesis, se llama Oponente (**O**). En su forma original, los diálogos fueron diseñados de tal manera que cada una de las partidas termina, después de un número finito de jugadas, con sólo un jugador ganador. Acciones o jugadas en un diálogo, a menudo son entendidas como elocuciones o como actos de habla. En otras palabras, la idea es que las reglas del diálogo no se aplican a expresiones aisladas del acto de elocución en que fueron proferidas sino, en el contexto del desarrollo de un juego dialógico. Las reglas se dividen en reglas de partículas o reglas para las constantes lógicas (*Partikelregeln*) y reglas estructurales (*Rahmenregeln*). Las reglas de partículas regulan aquellas jugadas que constituyen *peticiones* o *requerimientos* (a las jugadas del rival) y aquellas que son *respuestas* (a esas peticiones), mientras que las reglas estructurales determinan el curso general de un juego dialógico (también llamado *diálogo*).

Crucial para el enfoque dialógico son los siguientes puntos:

1. La distinción entre significado local (reglas para las constantes lógicas) y significado global (incluido en las reglas estructurales).
2. Las reglas para el significado local sean formuladas para jugadores anónimos.
3. La distinción entre el nivel de partida (triumfo de una partida) y el nivel estratégico (existencia de una estrategia ganadora).
4. Una noción de validez que equivale a una estrategia ganadora para **P**.

En la sección siguiente, presentaremos brevemente la lógica dialógica estándar. La idea es introducir los elementos de la lógica dialógica de una forma auto-contenida antes de enriquecerla con los aportes de la TCT.

III.1 Lógica dialógica estándar

Sea **L** un lenguaje de primer orden construido en base a conectivas proposicionales, cuantificadores, un conjunto numerable de variables individuales, un conjunto numerable de constantes individuales y un conjunto numerable de símbolos de predicado (cada uno con una *n*-aridad fija).

Ampliamos el lenguaje **L** con dos etiquetas **P** y **O** que corresponden a los participantes del diálogo y el signo de interrogación "?". Cuando la identidad del jugador no importa (lo que llamamos un *jugador anónimo*), utilizamos variables **X** o **Y** (siendo $X \neq Y$).

Tabla Reglas de partículas para la dialógica estándar

Afirmación	$X! \varphi \wedge \psi$	$X! \varphi \vee \psi$	$X! \varphi \rightarrow \psi$	$X! \neg \varphi$
Ataque	$Y?_L$ y/o $Y?_R$	$Y? [\varphi, \psi]$	$Y! \varphi$	$Y! \varphi$
Defensa	$X! \varphi$ y/o $X! \psi$	$X! \varphi$ o $X! \psi$	$X! \psi$	--

Afirmación	$X! \forall x \varphi$	$X! \exists x \varphi$
------------	------------------------	------------------------

Ataque	$\mathbf{Y} ?[! \varphi(x / a_i)]$	$\mathbf{Y} [! \varphi(x / a_1), \dots, ! \varphi(x / a_n)]$
Defensa	$\mathbf{X} ! \varphi(x / a_i)$	$\mathbf{X} ! \varphi(x / a_i)$ con $1 \leq i \leq n$

En ambas tablas el símbolo “!” anuncia que a continuación sigue una proposición que el jugador del que se trate debe defender si la atacan. Tenemos además que una expresión del tipo a_i es una constante individual y $\varphi(a_i/x)$ expresa la proposición obtenida mediante la sustitución de cada ocurrencia de x en φ por a_i . Cuando una jugada consiste en una pregunta de la forma ‘? [$\varphi_1, \dots, \varphi_n$]’ o de la forma $?_L, ?_R$ entonces el otro jugador elige una proposición entre $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ y la juega. Así, podemos –en términos de qué jugador tiene una opción– distinguir entre la conjunción y disyunción, por una parte, y la cuantificación universal y la existencial, por otra parte. En los casos de la conjunción y la cuantificación universal, el retador (o atacante) elige la proposición por la cual preguntar. Por el contrario, en los casos de disyunción y cuantificación existencial, el defensor es el único que puede elegir entre varias proposiciones. Obsérvese que no hay defensa en el caso de la regla de partículas para la negación.

Las reglas de partículas proporcionan una descripción abstracta de cómo se procede en el diálogo a nivel local: especifican el modo en el que una proposición puede atacarse o defenderse de acuerdo con su constante lógica principal. Las reglas de partículas son reglas para jugadores *anónimos*¹⁵ en el sentido de que el defensor puede ser tanto **P** como **O** (por eso también se las llama *reglas simétricas*).

La segunda clase de reglas que hemos mencionado, las reglas estructurales, otorgan las condiciones exactas en las que una oración dada genera un juego dialógico. Un juego dialógico para φ , escrito $D(\varphi)$, es el conjunto de todas las partidas con φ como *tesis* (ver la regla de inicio más abajo). Las reglas estructurales son las siguientes:

SR0 (Regla de inicio): Sea φ una proposición compleja de **L**. Para cada $\mathbf{p} \in D(\varphi)$ tenemos:

$$\begin{aligned} \rho_{\mathbf{p}}(\mathbf{P}-A) &= 0, \\ \rho_{\mathbf{p}}(\mathbf{O}-n:=i) &= 1, \\ \rho_{\mathbf{p}}(\mathbf{P}-m:=j) &= 2 \end{aligned}$$

COMENTARIO: En otras palabras, cualquier partida p en $D(\varphi)$ comienza con $\mathbf{P} ! \varphi$. Llamamos φ a la tesis de la partida y del juego dialógico correspondiente. Después de esto, el oponente y el proponente eligen sucesivamente un número entero llamado *rango de repetición*. El papel de este entero es asegurar que cada partida termine después de un número finito de jugadas que queda especificado en la siguiente regla estructural (**SR1**).

SR1 (Regla clásica):

- Toda jugada después de la elección de los rangos de repetición es: bien un ataque, bien una defensa.
- El rango de repetición elegido por un jugador representa el número máximo de veces que puede desafiar a o defenderse de una jugada determinada del adversario.

SR1i (regla intuicionista): Los jugadores sólo pueden defenderse del último de los ataques aún no respondido.¹⁶

SR2 (Regla formal): El proponente puede afirmar una proposición elemental, solo si **O** la afirmó ya antes.

¹⁵ La simetría de la reglas inmuniza el enfoque dialógico contra conectivas del tipo *tonk*. Cf. Redmond / Rahman (2016).

¹⁶ Esta cláusula también se conoce como la regla de *responda primero a la última obligación* (*Last Duty First*) y permite desarrollar juegos para la lógica intuicionista.

Esta regla es una de las características más sobresalientes de la lógica dialógica. Como se discute en Marion / Rückert (2015) la regla se remonta a la reconstrucción de Aristóteles de la dialéctica platónica: la idea principal es que, cuando una proposición elemental es desafiada (atacada), entonces –desde el punto de vista puramente argumentativo– la única respuesta posible es apelar a las concesiones del oponente (es decir, sin hacer uso de una autoridad más allá de las jugadas realizadas durante la interacción argumentativa). De hecho, uno podría ver la regla formal como la implementación de un tipo de *jugada de espejo* (conocida en teoría de juegos como *copy-cat strategy*): *mis razones para afirmar tal proposición son exactamente las mismas que las tuyas cuando concedió Ud. la misma proposición*¹⁷.

En el caso de juegos en los que se permite que la tesis sea una proposición elemental, hay que reformular la regla formal de la siguiente manera:

SR2* (Regla formal modificada): **O** puede atacar una proposición elemental si y sólo si él mismo aún no la afirmó. Sólo el oponente puede atacar proposiciones elementales. El proponente se defiende, de un ataque a una proposición elemental, mostrando que en el ulterior desarrollo del juego el oponente será forzado a conceder la proposición elemental atacada, digamos en la jugada n . En cuanto **O** jugó n , entonces **P** se defiende del ataque respondiendo *sic* (n) (léase: porque tú mismo acabas de conceder en n la misma proposición elemental).

Prosigamos ahora con el resto de las definiciones y reglas estructurales:

- Decimos que una partida es terminal cuando no puede ampliarse en jugadas sucesivas lícitas. Decimos que es **X**-terminal cuando la última jugada en la partida es una jugada del jugador **X**.

SR3 (Partida ganada): El jugador **X** gana la partida **p** sólo si es terminal **X**.

- Una *estrategia* para un jugador **X** en $D(\varphi)$ es una función que para cada partida no-terminal **p**, asigna una jugada M a una jugada de **Y** que es el último miembro de **p**, tal que, si extendemos **p** con M obtenemos una nueva partida.
- Una estrategia de **X** es *ganadora* en $D(\varphi)$ si jugando de acuerdo con ella nos lleva a una victoria de **X** para φ sin importar cómo juegue **Y**.

La próxima definición relaciona la estrategia ganadora para **P** con validez:

- **P** tiene una *estrategia ganadora* para φ , si y solamente si, φ es válida en la lógica clásica y/o en la lógica intuicionista jugando de acuerdo con las reglas clásicas y/o intuicionistas.

III.2 El cuadro dialógico para la TCT

Desarrollos recientes en lógica dialógica muestran que el enfoque TCT de significado es muy natural para aquellas teorías lúdicas del significado en las que ciertas interacciones fundamentales para la constitución del significado son expresadas explícitamente en el nivel del lenguaje objeto. Más generalmente, si el significado es concebido como constituido durante la interacción, todas las acciones involucradas en la constitución del significado de una expresión, como las *elecciones*, deben ser expuestas explícitamente en el lenguaje objeto.

En 1988 Ranta comenzó a explorar la forma de relacionar la CTT con la semántica lúdica. La idea de Ranta es definir una proposición como el conjunto de sus estrategias ganadoras. En principio la idea es simple y atractiva dado que, para establecer la correspondencia con CTT, lo que queda por hacer es relacionar estrategia ganadora con demostración. Sin embargo desde el punto de vista inherente a la perspectiva lúdica, reducir el significado a un conjunto de

¹⁷ Véase Clerbout / Keiff / Rahman (2009) y Rahman / Keiff (2010).

estrategias ganadoras es insatisfactorio. Una estrategia ganadora, como explicado en los párrafos precedentes, se compone de partidas (*plays* o *games*), pero las reglas que determinan el desarrollo de una partida no son reducibles a la función que describe una estrategia ganadora. En otras palabras, es la partida la que provee la base más elemental del significado como interacción y la que determina el concepto dialógico de proposición. Dada esta distinción entre nivel de partida y nivel de estrategia, y dado que a la vez queremos implementar la idea de CTT de asociar una proposición con los elementos que la justifican, parece natural distinguir los *objetos lúdicos* que se asocian a una proposición en el nivel de partida – tal como en “ $p : \varphi$ ”, que leemos “ p es un objeto lúdico para φ ” – de los objetos estratégicos asociados a una proposición en el nivel estratégico. Son estos últimos los que corresponden a los elementos de prueba de la CTT. Desde esta perspectiva el trabajo de Ranta constituye el final y no el principio del proyecto de un cuadro dialógica para la CTT.

A fin de desarrollar un tal proyecto, en publicaciones recientes – Clerbout/Rahman(2015), Rahman/Clerbout(2013, 2014, 2015) – enriquecimos las expresiones que forman parte de un juego dialógico con expresiones de la forma “ $p : \varphi$ ” (en dónde a la izquierda de los dos puntos se encuentra un objeto lúdico y a la derecha una proposición) cuyo significado provendrá de reglas locales y estructurales específicas, que describirán los modos de composición y análisis de los objetos lúdicos expresados. En realidad, en el contexto del significado de las constantes lógicas las reglas de la dialógica estándar nos proveen de la información relevante.

Informalmente hablando podemos pensar el objeto lúdico como aquello sobre lo que se basa una afirmación dada. Si el jugador \mathbf{X} afirma una proposición, por ejemplo φ , una tal afirmación presupone que hay algo, aquello que llamamos el objeto lúdico p , en lo que se basa una tal afirmación (aún si la afirmación es tentativa), y que le permite a \mathbf{X} aceptar poner tal afirmación en juego frente a un adversario que la desafía. El objeto lúdico es el que hace que el contenido de una afirmación prefigure un diálogo generado por ella.

En el contexto del significado de las constantes lógicas las reglas de la dialógica estándar nos proveen la información relevante para describir los objetos lúdicos correspondientes.

Antes de comenzar con enriquecer el lenguaje del cuadro dialógico estándar con objetos lúdicos, discutamos primero cómo implementar en la dialógica la noción de formación de proposiciones característica de la CTT.

III.2.1 La Formación de proposiciones

En la lógica habitual en general y también en la dialógica estándar, las reglas que rigen las constantes lógicas presuponen reglas de buena formación. Tales reglas son habitualmente parte del metalenguaje de un sistema lógico determinado. Inspirados por la TCT queremos introducir aquí reglas en el lenguaje objeto que permitan verificar si una expresión determinada está bien formada, y más particularmente si una expresión determinada es o no una proposición. Tales reglas son reglas locales que completan el significado local de las unidades mínimas del lenguaje lógico del sistema. Por razones de brevedad solamente presentaremos una versión condensada. Más aún, nos restringimos aquí al caso de la formación de constantes lógicas. Para una presentación completa véase Clerbout/Rahman (2015).

Tabla I: Reglas de formación

Afirmación	Ataque	Defensa
[mientras que " $\varphi \mathbf{K} \psi$ " expresa una	[en caso que haya varios ataques	

conectiva diádica, "(Qx : A) $\varphi(x)$ " expresa un cuantificador]	posibles, es el atacante el que elige]	
$\mathbf{X} ! \varphi \mathbf{K} \psi : prop$	$\mathbf{Y} ?_{F\mathbf{X}1}$ y/o $\mathbf{Y} ?_{F\mathbf{X}2}$	$\mathbf{X} ! \varphi : prop$ y/o $\mathbf{X} ! \psi : prop$
$\mathbf{X} ! (Qx : A) \varphi(x) : prop$	$\mathbf{Y} ?_{F\mathbf{X}1}$ y/o $\mathbf{Y} ?_{F\mathbf{X}2}$	$\mathbf{X} ! A : set$ y/o $\mathbf{X} ! \varphi(x) : prop (x : A)$
$\mathbf{X} ! \perp : prop$	–	–

III.2.2 Diálogos con objetos lúdicos

En la tabla que presentaremos a continuación ocurren expresiones que llamamos *instrucciones*. El objetivo de tales expresiones – que, como discutiremos más abajo, son funciones – es de permitir describir las componentes de una proposición compleja, aun cuando no hayamos identificado el objeto lúdico específico que corresponde a esta proposición. Es por ello, por ejemplo, que la reglas locales para la conjunción $p : \varphi \wedge \psi$, no incluyen de forma explícita los componentes p_1 y p_2 , sino las expresiones

$$L^\wedge(p) \text{ y } R^\wedge(p),$$

que llamamos *instrucciones*, que se leen respectivamente como

- Toma el compuesto izquierdo del objeto lúdico p para la conjunción, y
- Toma el compuesto derecho del objeto lúdico p para la conjunción

Los índices recuerdan que los compuestos provienen de objetos lúdicos específicos para la constante lógica en cuestión. Es así que mientras que $L^\wedge(p)$ corresponde al compuesto izquierdo de un objeto lúdico para una conjunción, $L^\vee(q)$ corresponde al compuesto izquierdo de un objeto lúdico para una disyunción.

También aquí daremos una versión abreviada.

Tabla II: Significado local con objetos lúdicos

Posit	Challenge	Defence
$\mathbf{X} ! p : \varphi \vee \psi$	$\mathbf{Y} ?[\varphi/\psi]$	$\mathbf{X} ! L^\vee(p) : \varphi$ o $\mathbf{X} ! R^\vee(p) : \psi$ [el defensor elige]
$\mathbf{X} ! p : \varphi \wedge \psi$	$\mathbf{Y} ?_L$ y/o $\mathbf{Y} ?_R$ [el atacante elige]	$\mathbf{X} ! L^\wedge(p) : \varphi$ y/o $\mathbf{X} ! R^\wedge(p) : \psi$
$\mathbf{X} ! p : \varphi \rightarrow \psi$	$\mathbf{Y} ! L^\rightarrow(p) : \varphi$	$\mathbf{X} ! R^\rightarrow(p) : \psi$

$\mathbf{X} ! p : (\exists x : A)\varphi$	$\mathbf{Y} ?_L$ y/o $\mathbf{Y} ?_R$ [el atacante elige]	$\mathbf{X} ! L^\exists(p) : A$ y/o $\mathbf{X} ! R^\exists(p) : \varphi(L(p))$
$\mathbf{X} ! p : (\forall x : A)\varphi$	$\mathbf{Y} ! L^\forall(p) : A$	$\mathbf{X} ! R^\forall(p) : \varphi(L^\forall(p))$

Substitución de afirmaciones dependientes (Subst-AD) ¹⁸		
$\mathbf{X} ! \pi(x_1, \dots, x_n) (x_i : A_i)$ ("π" es una afirmación)	$\mathbf{Y} ! \tau_1 : A_1, \dots, \tau_n : A_n$ (τ_i es un objeto lúdico de la form $a_i : A$ o bien de la forma $x_i : A$)	$\mathbf{X} ! \pi(\tau_1 \dots \tau_n)$

El uso de instrucciones requiere dos reglas, a saber:

- *resolución de instrucciones*, que establece cómo atacar una instrucción y como defenderla mediante la elección de un objeto lúdico,
- *substitución de instrucciones*, que asegura que una vez que una instrucción determinada ha sido resuelta por medio de la elección un objeto lúdico, digamos b , entonces toda vez que la *misma instrucción* vuelva ocurrir, la misma instrucción será siempre reemplazada por el mismo objeto lúdico b .

Esto muestra que las instrucciones son funciones predefinidas: ambas despliegan el concepto dialógico de función. En efecto, en Dialógica las funciones son reglas de correspondencia tales que si un jugador juega un elemento de un dominio predeterminado, entonces el contrincante debe relacionarlo con su imagen, de manera que la relación satisfaga la unicidad de la valuación. En el caso particular de instrucciones, el contrincante Y preguntará de llevar a cabo la acción requerida por la instrucción. Por ejemplo, la acción requerida para la defensa de la instrucción $R^\forall(p)$ consiste en elegir un objeto lúdico para R^\forall dado el argumento p . Cuando una tal acción ha sido llevada a cabo decimos que la *instrucción ha sido cumplida* y llamamos a la acción misma *resolver una instrucción*. Ahora bien, con el objetivo de asegurar la unicidad de la valuación, debemos asegurarnos que la resolución de instrucciones para un argumento determinado siempre dará la misma valuación. Esto es, si $R^\forall(p)$ ha sido resuelta una vez con, supongamos, p_1 , siempre que $R^\forall(p)$ ocurra durante el juego debe ser substituida del mismo modo, es decir, con p_1 . Ése es el rol de la regla de substitución de instrucciones.

Presentaremos ahora ambas: las reglas de resolución y las reglas de substitución de instrucciones. Para ello haremos uso de la siguiente terminología:

Decimos que la instrucción I^κ ha sido introducida por la jugada X- m (donde “κ” corresponde a una constante lógica específica); sii

¹⁸ Esta regla es la expresión (a nivel de partida) de la regla que regula la substitución de variables en el seno de un juicio hipotético. Véase Martin-Löf (1984, pp. 9-11).

I^κ es de la forma $L^\forall(\dots)$, y X usó la instrucción para atacar el universal afirmado por el contrincante Y.

I^κ es una de las otras formas descriptas en las tablas para el significado local y el jugador X afirma la constante lógica atacada ahora por Y.

Cada nueva ocurrencia de I^κ que resulte de la aplicación del rango de repetición sobre κ en una jugada siguiente m' cuenta como una nueva introducción.

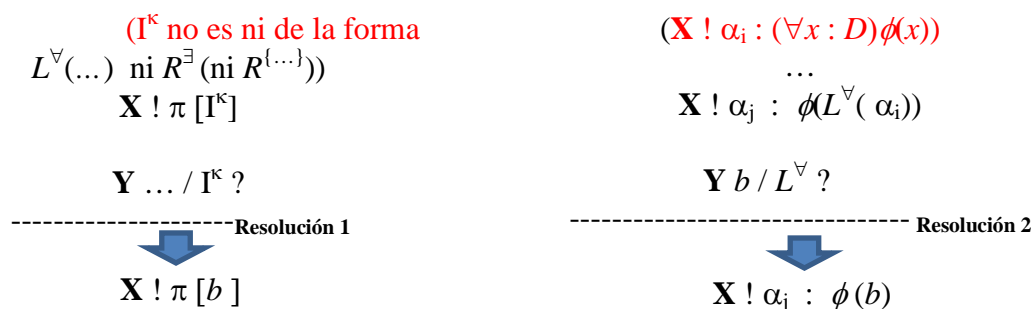
SR3.1 Resolución de Instrucciones

- Si un jugador introduce una instrucción del tipo I^κ el adversario puede exigirle que **reemplace esta instrucción por un objeto lúdico apropiado**.
- El objeto lúdico resultante será llamado *una m-resolución de I^κ* .
- Instrucciones del tipo I^κ (donde “ κ ” es una constante lógica específica), introducido por una jugada m debe ser resuelta por el jugador que introdujo la instrucción.

Esta regla conduce a la tabla siguiente donde presentamos el caso simple de solo una instrucción. La tabla despliega la regla de modo vertical en lugar de usar la clásica doble columna. En efecto, las expresiones por encima de la línea de puntos expresan la instrucción y la forma de atacarla. Debajo de la línea de puntos encontramos la respuesta al ataque. El orden de arriba hacia abajo corresponde, respectivamente, a la secuencia de jugadas dentro de un diálogo.

La expresión entre paréntesis en la parte superior de la regla de resolución establece la condición para la aplicación de la regla:

SR3.1 Resolución de Instrucciones



$(\alpha \text{ es algún objeto lúdico o instrucción})$

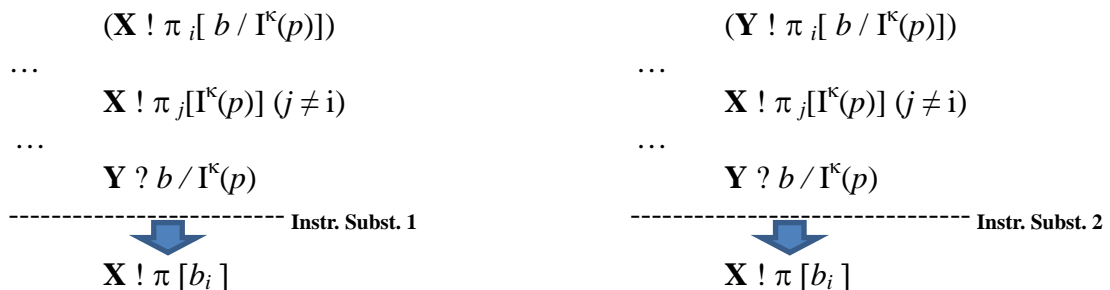
Condiciones de aplicación de SR3.1

- 1) La instrucción atacada ha sido introducida en la jugada m y no hay objeto lúdico que sea una m -resolución de tal instrucción.
- 2) La instrucción no aparece como componente de una igualdad definicional.

SR3.2 (Substitución de instrucciones)

Si el objeto lúdico b es una m -resolución de Γ^k , donde la instrucción ha sido ya introducida por alguno de los dos jugadores, y X realiza alguna otra jugada de la forma $\pi_j[\Gamma^k(p)]$ que no introduce $\Gamma^k(p)$, entonces el jugador Y puede preguntar a X de substituir $\Gamma^k(p)$ por b in π_j .

SR3.2. Substitución de Instrucciones



Condiciones de aplicación de SR3.2

- 1) La jugada en la que se afirma $\pi_j[\Gamma^k(p)]$ **no** introduce $\Gamma^k(p)$
- 2) La instrucción no aparece como **componente de una igualdad definicional**.

Resolución de Funciones: Las reglas anteriores también se aplican a la resolución de funciones.

Un marco dialógico enriquecido con objetos lúdicos hace evidente en el lenguaje objeto que el uso de la jugada de espejo (copy-cat) no sólo consiste en copiar la proposición del oponente, sino también en el acto de asumir como razón de la proposición afirmada exactamente la misma razón aducida por el oponente. Otra manera de ver la jugada de espejo es que proporciona la expresión dinámica de la reflexividad. Esto nos lleva a la siguiente sección y al tema principal de nuestro estudio.

IV Las Raíces dialógicas de la igualdad

IV.1. La Regla Formal y la Fundamentación inmanente

Como ya mencionamos, una de las características más sobresalientes de la dialógica es la llamada regla formal que está basada en la idea Platónica¹⁹ que

- no hay mejor fundamento para una afirmación en un argumento que una fundamentación inmanente a ese mismo contexto de argumentación. El Proponente fundamenta su afirmación apelando a las mismas razones que el Oponente concedió durante tal argumentación. Es ésta fundamentación inmanente que da origen al *razonamiento formal*²⁰

¹⁹ Cf. *Gorgias* (472b-c)

²⁰ Trabajos recientes de Crubellier (2014, pp. 11-40) y Rahman/ McConaughey/Crubellier (2016) muestran que esta regla también ocupa un lugar central en el desarrollo de los vínculos que llevan de la dialéctica Aristotélica a la silogística.

Subrayemos aquí los siguientes puntos:

- 1) El razonamiento formal resulta de un tipo específico de interacción.
- 2) El razonamiento formal resultante no pueden entenderse aquí como carente de contenido y reducido a un movimiento puramente sintáctico.

Ambos puntos son importantes para entender la crítica generada contra el razonamiento formal en general y contra la lógica en particular. Sólo en el último periodo de la historia de la filosofía el razonamiento formal se ha reducido a manipulación sintáctica - presumiblemente la primera aparición explícita de un enfoque sintáctico de la lógica se debe a Leibniz y su "pensée aveugle" (aunque cabe decir que esta noción de Leibniz no era reductora). La noción de razonamiento formal, tanto en Aristóteles como en Platón, no es ni "estática" ni "vacía de significado": la idea que subyace a esta forma de interacción es que el significado y la justificación de una afirmación es el resultado de lo que se ha presentado durante la interacción argumentativa.

Comencemos nuestro estudio mediante la presentación informal de un ejemplo que muestra cómo introducir la igualdad definicional en el lenguaje objeto a partir de un proceso argumentativo:

Supongamos que el Proponente adelanta la tesis de que si el Oponente concede la conjunción, por ejemplo $A \wedge B$, él (el Proponente) será capaz de defender con éxito la afirmación $B \wedge A$. Es decir, **P afirma que posee una estrategia ganadora para la transformación conmutativa de la conjunción**. Presentemos muy informalmente el desarrollo dialógico de esta tesis:

1. $\mathbf{O} ! p : A \wedge B$ (concesión)
2. $\mathbf{P} ! q : B \wedge A$
3. $\mathbf{O} ?_L$ (el Oponente lanza su ataque preguntando por la componente izquierda)
4. $\mathbf{P} ! L^{\wedge}(q) : B$
5. $\mathbf{O} L^{\wedge}(q)?$ (\mathbf{O} demanda a \mathbf{P} que resuelva la instrucción eligiendo un objeto lúdico)
6. $\mathbf{P} ?_R$. **Dado que el objetivo aquí es de desarrollar una estrategia ganadora, vamos a suponer que \mathbf{P} hace la jugada más inteligente, y ésta es sin duda lanzar un contraataque: la idea es forzar a que sea \mathbf{O} el primero en elegir un objeto lúdico para B . Una vez que \mathbf{O} haya ella hecho su elección \mathbf{P} puede simplemente copiar esa elección:**
7. $\mathbf{O} ! R^{\wedge}(p) : B$
8. $\mathbf{P} R^{\wedge}(q)?$ \mathbf{P} pide a \mathbf{O} que resuelva la instrucción escogiendo un objeto lúdico para el lado derecho de la conjunción.
9. $\mathbf{O} ! b : B$ (\mathbf{O} **resuelve** la instrucción eligiendo **el** objeto lúdico b)
10. $\mathbf{P} ! b : B$
Ahora \mathbf{P} tiene la información que necesitaba y copia la elección de \mathbf{O} para contestar el desafío de \mathbf{O} lanzado con la jugada 5:

Esto provee una de las ramas de la estrategia ganadora. La otra rama está constituida por la serie de jugadas que resultan si \mathbf{O} inicia el juego con un ataque a la derecha. Sin embargo, debe quedar claro que las secuencia es completamente análoga.

Demos ahora un paso más en profundidad haciendo más explícito el uso de la jugada espejo :

- Desde un punto de vista estratégico, **P** está considerando al objeto lúdico de la parte derecha de p como definicionalmente equivalente al de la parte izquierda de q . En efecto, la estrategia ganadora para $B \wedge A$ está constituida por el par (b, a) tal que b es definicionalmente equivalente a la parte derecha de $A \wedge B$ y a definicionalmente equivalente a su parte izquierda.

$$\begin{aligned} (R^\wedge(p), L^\wedge(p)) &: B \wedge A \\ R^\wedge(p) &= b : B \\ L^\wedge(p) &= a : A \end{aligned}$$

No importa que objeto lúdico elija para la parte derecha de la conjunción, **P** lo copiará (copy-cat) cuando resuelva la instrucción $L^\wedge(q)$.

La igualdad expresa en forma compacta la interacción que produce la estrategia ganadora. En efecto, si **O** resuelve $R^\wedge(p)$ con el objeto lúdico b , y **P** cumple con la instrucción $L^\wedge(q)$ elige el mismo objeto lúdico, entonces **P** no está solamente haciendo uso de la concesión $b : B$ de **O** sino que también está eligiendo para **B** el mismo objeto lúdico que **O** había elegido para la resolución de $R^\wedge(p)$. Por ello, si se le preguntara a **P** de justificar $b : B$, él podrá responder con la igualdad definicional $R^\wedge(p) = b : B$, léase *yo elegí b como justificación de B pues tú mismo justificaste B con b .*

El punto de vista estratégico es sólo una generalización del procedimiento que se lleva a cabo en el nivel de juego. Por lo tanto, nuestra presentación informal tomará la siguiente forma (partimos de movimiento 10, ya que los precedentes permanecen sin cambios)

9. **O** ! $b : B$ (**O** cumple con la instrucción eligiendo el objeto lúdico b)
10. :**P** ! $b : B$
11. **O** ! ? = b
12. **P** ! $R^\wedge(p) = b : B$

Este ejemplo concierne la igualdad definicional entre elementos de un conjunto. Consideremos ahora también el caso de la igualdad proposicional, es decir, la igualdad definicional entre dos proposiciones que son dos instancias del tipo *prop*. Tomemos, por ejemplo, la tesis de que existe una estrategia ganadora para $p : (\exists x : A)B(x)$ si el oponente concede $q : (\forall x : A)Bx$. El nivel de juego que conduce a la constitución de una estrategia ganadora se basa en el hecho de que **P** puede elegir para la resolución de una instrucción para el primer componente del existencial – *es decir un elemento del dominio de cuantificación A* , un objeto lúdico, por ejemplo a , que es *definicionalmente igual* al que elemento elegido por **O** para resolver la instrucción de la primera componente del universal. La formulación explícita de este proceso conduce a la igualdad definicional $L^\forall(q) = a : A$. Ahora bien, dado que la resolución de $L^\forall(q)$ se extenderá a $B(L^\forall(q))$, obtenemos que $B(L^\forall(q))$ y $B(a)$ son proposiciones equivalentes, es decir $L^\forall(q) = B(a) : prop$. Desde el punto de vista estratégico esta forma de igualdad resultará para cualquier elemento de A que **O** elija. En nuestro caso la siguientes igualdades condensan la estrategia ganadora: $L^\exists(p) = L^\forall(q) : B$ y $B(L^\forall(q)) = B(L^\exists(p)) : prop$.

La introducción de la reflexividad de la igualdad definicional emerge como resultado una jugada de espejo por medio de la cual **P** "copia" un objeto lúdico a postulado antes por **O** para la misma proposición, tal que cuando **O** introduce a lo hace como resultado de uno de los siguientes casos:

1. introduce a para resolver exactamente la misma resolución que llevó a \mathbf{P} a elegir a .
2. introduce a como parte de una afirmación que es la misma que copia \mathbf{P} .

En suma, esto sugiere que la jugada de espejo de la formulación estándar de la dialógica para juegos formales, en realidad contiene implícitamente dos formas distintas de igualdad definicional: la reflexiva y la no reflexiva. Es el cuadro de la TCT que permite hacer explícita las diferentes formas de copias movilizadas por la jugada de espejo.

Una cuestión importante a tratar, antes de desarrollar las consideraciones precedentes, es la distinción entre *diálogos materiales* y aquellos que permiten las jugadas de espejo: los llamados *diálogos formales*. Son ellos el foco principal de nuestro estudio.

Los diálogos donde los razonamientos formales tienen lugar asumen lo siguiente:

1. La formación de las proposiciones que constituyen la tesis se ha llevado a cabo antes de iniciar el diálogo *hasta el nivel de las constantes lógicas*
2. La formación de los constituyentes elementales de conjuntos o proposiciones (los objetos lúdicos correspondientes) se desarrolla durante el diálogo. De hecho, es parte del rol epistemológico que caracteriza a los diálogos formales, que es el oponente quien proporciona la formación de estos constituyentes.
3. La tesis de un *diálogo formal* es una afirmación hipotética. El inicio de un juego tal consiste en la concesión de parte de \mathbf{O} de los supuestos epistémicos presupuestos por la afirmación. El objeto lúdico de una tesis es, por tanto, una función cuyos argumentos son proporcionados por \mathbf{O} . Si el conjunto de hipótesis está vacío, entonces el ataque de \mathbf{O} equivale a la exigencia de mostrar que el objeto lúdico que el Proponente afirmó que existe para la proposición φ , tiene la estructura interna requerida por φ (de acuerdo con las reglas locales).

IV.2 La regla socrática y la igualdad definicional

Las consideraciones precedentes nos llevan a una reformulación cuya idea básica es la siguiente:

- Expresiones elementales de \mathbf{P} que resultan de la resolución de instrucciones pueden ser atacadas por \mathbf{O} .
- La respuesta a estos ataques consiste en la afirmación de una igualdad definicional. Y se distinguen los casos reflexivos y no reflexivos mencionados en la discusión precedente
- De hecho, una igualdad definicional afirmada por \mathbf{P} expresa la igualdad entre un objeto lúdico, introducido por \mathbf{O} , y una instrucción también introducida por \mathbf{O} . Desde un punto de vista estratégico (como se discute en la literatura más relevante) sabemos que aquellas expresiones que han sido introducidas por \mathbf{O} corresponden a los resultado de la aplicación de reglas de eliminación de un sistema de deducción natural. Las reglas de igualdad definicional de la TCT se aplican a los selectores introducidos por las reglas de eliminación. Por lo tanto, las reglas dialógicas que prescriben como introducir una igualdad definicional corresponden a las reglas de igualdad definicional de la TCT.

Esta idea será implementada en dos series de tablas, una para los casos no-reflexivos y otra para los casos reflexivos. Sin embargo las tablas no cubren los casos de transmisión de una igualdad ya establecida (la transmisión se efectúa por la forma usual, es decir, empleando reflexividad, transitividad y simetría)

Las tablas emplean las siguientes convenciones notacionales:

- La notación " g " (léase *funcstrion*) expresa o bien una instrucción o bien una función -
- Las expresiones sobre la línea establecen las condiciones requeridas para que **P** pueda hacer la jugada descrita debajo de la flecha. Tales condiciones se dividen en dos conjuntos. El conjunto izquierdo, el conjunto de *condiciones de ataque*, describe la forma de atacar y las jugadas que permiten ese ataque. El conjunto derecho, el conjunto de condiciones de respuesta, describe aquellas jugadas de **O** que permiten a **G** de afirmar la igualdad descrita debajo de la flecha.
- La notación " $Y ! a / g : A$ " representa la condición "Y substituyó g con a en A "
- La expresión "*type*" en la afirmación " $\varphi : type$ " expresa que se trata o bien del tipo *set* o bien del tipo *prop*.
- La expresión $g_i \neq g_k$ indica que los funcstriones son sintácticamente diferentes: por ejemplo., $L^\forall(p)$ and $R^\exists(q)$.
- " A " y " $A(a)$ " corresponden a expresiones elementales. " α " es una expresión elemental de alguna de las dos formas A o $A(a)$. La resolución de un funcstrión que ocurre en $A(g)$ da como resultado una proposición elemental

El empleo de las reglas siguientes presupone que **P** afirmó una expresión elemental o una igualdad definicional de la forma $g_k = a : A(b)$.

Tabla SR5.1: Regla Socrática I

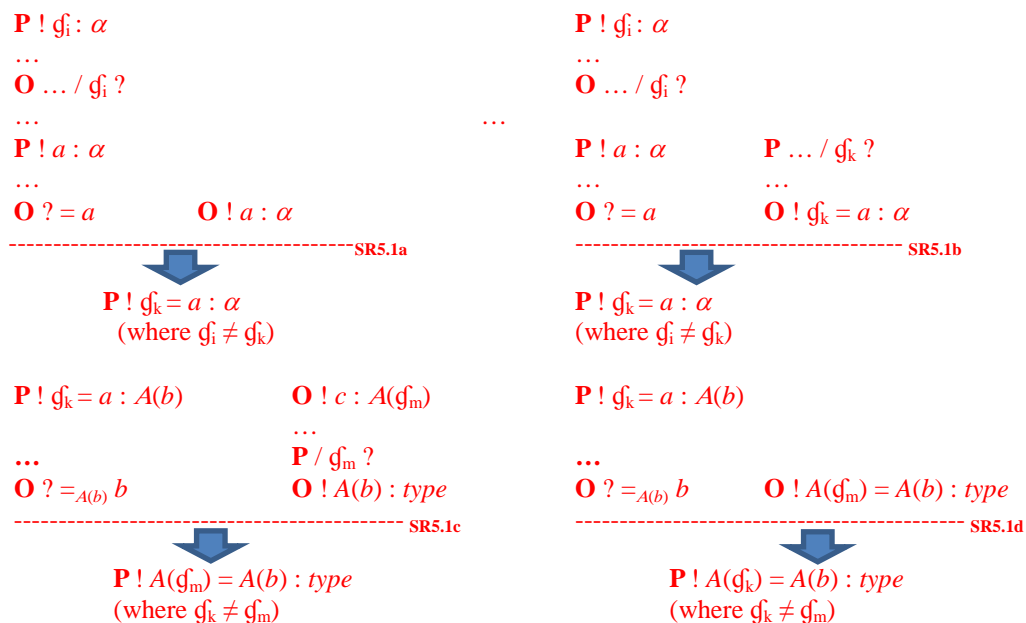


Tabla SR5.2: Regla Socrática II (Reflexividad)

Supuesto: Reflexividad no resulta de la resolución de instrucciones encajonadas.

" α " stands for an elementary proposition either of the form A or $A(b)$

$$\begin{array}{l}
\mathbf{P} ! g_i : \alpha \\
\dots \\
\mathbf{O} \dots / g_i ? \\
\dots \\
\mathbf{P} ! a : \alpha \\
\dots \\
\mathbf{O} ? = a \quad \mathbf{O} ! g_i = a : \alpha \\
\hline
\mathbf{P} ! a = a : \alpha
\end{array}
\quad \text{SR5.2a}$$

$$\begin{array}{l}
\mathbf{P} ! g_i : \alpha \\
\dots \\
\mathbf{O} \dots / g_i ? \\
\dots \\
\mathbf{P} ! a : \alpha \quad \mathbf{P} \dots / g_i ? \\
\dots \\
\mathbf{O} ? = a \quad \mathbf{O} ! a : \alpha \\
\hline
\mathbf{P} ! a = a : \alpha
\end{array}
\quad \text{SR5.2b}$$

$$\begin{array}{l}
\mathbf{P} ! g_i : \alpha \\
\dots \\
\mathbf{O} \dots / g_i ? \\
\dots \\
\mathbf{P} ! a : \alpha \\
\dots \\
\mathbf{O} ? = a \quad \mathbf{O} ! a : \alpha \\
\hline
\mathbf{P} ! a = a : \alpha
\end{array}
\quad \text{SR5.2c}$$

$$\begin{array}{l}
\mathbf{P} ! g_k = a : A(b) \quad \mathbf{O} ! c : A(g_j) \\
\dots \\
\mathbf{P} \dots / g_j ? \\
\dots \\
\mathbf{O} ? =_{A(b)} b \quad \mathbf{O} ! A(b) : type \\
\hline
\mathbf{P} ! A(b) = A(b) : type
\end{array}
\quad \text{SR5.2d}$$

$$\begin{array}{l}
\mathbf{P} ! g_k = a : A(b) \\
\dots \\
\mathbf{O} ? =_{A(b)} b \quad \mathbf{O} ! A(g_j) = A(b) : type \\
\hline
\mathbf{P} ! A(b) = A(b) : type
\end{array}
\quad \text{SR5.2e}$$

$$\begin{array}{l}
\mathbf{P} ! g_k = a : A(b) \\
\dots \\
\mathbf{O} ? =_{A(b)} b \quad \mathbf{O} ! A(b) : type \\
\hline
\mathbf{P} ! A(b) = A(b) : type
\end{array}
\quad \text{SR5.2f}$$

- Cabe notar que las afirmación de **O** en **SR5.2c** y en **SR5.2f** no son el producto de una resolución.
- Después del empleo de una de las reglas **O** no puede volver a usar el mismo tipo de ataque para las mismas expresiones

IV.3 Presentación breve de un ejemplo célebre

Per Martin-Löf (1984, pp. 50-51) mostró que la version intensional del así llamado *Axioma de Elección* puede ser demostrado (la demostración le valió el *premio Kolmogorov*). Clerbout/Rahman (2015) abocaron un estudio meticuloso y detallado de la interpretación dialógica de tal prueba.

Desde el punto de vista dialógico la idea fundamental de la demostración es que la estrategia ganadora de **P** se desarrolla a partir de jugadas que copian las elecciones del Oponente que resultan de las obligaciones contraídas por **O**. Más precisamente, **P** defenderá el consecuente de la implicación principal ejerciendo el derecho de copiar las elecciones de **O**. Por razones de

espacio solo presentamos aquí uno de los juegos posibles que definen el núcleo de la estrategia ganadora

O			P	
	A1: $C(x, y) : set(x : A, y : B(x))$ A2: $B(x) : set(x : A)$		$\rho : (\forall x : A) (\exists y : B(x)) C(x, y) \rightarrow (\exists f : (\forall x : A) B(x)) (\forall x : A) C(x, f(x))$	0
1	m:=1		n:=2	2
3	$L \rightarrow (\rho) : (\forall x : A) (\exists y : B(x)) C(x, y)$	0	$R \rightarrow (\rho) : (\exists f : (\forall x : A) B(x)) (\forall x : A) C(x, f(x))$	6
5	$v : (\forall x : A) (\exists y : B(x)) C(x, y)$	3	$/ L \rightarrow (\rho)?$	4
7	$/ R \rightarrow (\rho)?$	6	$g : (\exists f : (\forall x : A) B(x)) (\forall x : A) C(x, f(x))$	8
9	? _L	8	$L^{\exists}(g) : (\forall x : A) B(x)$	10
11	$/ L^{\exists}(g)?$	10	$g_1 : (\forall x : A) B(x)$	12
13	$L^{\forall}(g_1) : A$	12	$R^{\forall}(g_1) : B(a)$	28
15	$a : A$	13	$/ L^{\forall}(g_1)?$	14
21	$R^{\forall}(v) : (\exists y : B(a)) C(a, y)$	5	$L^{\forall}(v) : A$	16
17	$/ L^{\forall}(v)?$	16	$a : A$	18
19	? = a	18	$L^{\forall}(g_1) = a : A$	20
23	$(v_2) : (\exists y : B(a)) C(a, y)$	21	$/ R^{\forall}(v)?$	22
25	$L^{\exists}(v_2) : B(a)$	23	? _L	24
27	$t_1 : B(a)$	23	$/ L^{\exists}(v_2)?$	26
29	$/ R^{\forall}(g_1)?$	28	$t_1 : B(a)$	30
31	? = t ₁	30	$L^{\exists}(v_2) = t_1 : B(a)$	32
33	? = $B(a)^a$	32	$B(L^{\forall}(g_1)) = B(a) : set$	36
35	$B(a) : set$	A ₂ -subst	$a : A$	34

Descripción:

Jugada 3: Después que **P** postula la tesis y los rangos de repetición han sido establecidos **O** comienza atacando la implicación material.

Jugada 4: **P** contraataca exigiendo la resolución de $L \rightarrow (\rho)$.

Jugadas 5, 6, 7, 8: Después de las respuestas en 5 y 6 **O** exige la resolución de $R \rightarrow (\rho)$. **P** responde eligiendo el objeto lúdico g , compuesto por g_1 que resuelve f y g_2 , el objeto lúdico que constituye el segundo elemento del par requerido por la afirmación del existencial.

Jugada 9: **O** puede ahora elegir entre la derecha y la izquierda, el presente juego se desarrolla a partir de la segunda opción de **O**.

Jugadas 10-18: Estas jugadas son producto directo de las reglas.

Jugadas 19-20: Estas jugadas introducen la primera igualdad definicional del juego: **P** afirmó $a : A$ en la jugada 18. Dado que es una expresión elemental, **O** la ataca preguntando por la justificación que la respalda. **P** responde afirmando que el objeto lúdico escogido es el mismo que eligió **O** para defender A cuando resolvió $L^{\forall}(g_1)$.

Jugadas 31-36. Estas jugadas requieren cierto cuidado. En efecto, no le basta a **P** defender la jugada 30 con la igualdad $L^{\exists}(v_2) = t_1 : B(a)$. **P** tiene también que justificar $B(a)$. Con el fin de llevar a cabo la defensa **P** recurre a la formación de $B(a)$ que resulta del supuesto epistémico $B(x) (x : A)$ (A2). Esto le permite establecer la igualdad crucial de la victoria $B(L^{\forall}(g_1)) = B(a) : set$.

V. Conclusiones

Una forma más general de presentar la perspectiva dialógica sobre la igualdad definicional es que tiene sus raíces en aquellos derechos y obligaciones que resultan de jugadas en las que objetos lúdicos son introducidos con el fin de respaldar la afirmación de una proposición. Más aún, desde una perspectiva dialógica, la igualdad definicional es el resultado de la interrelación entre jugadas de espejo que definen un razonamiento formal. La contribución dialógica al aná-

lisis desarrollado por la TCT es hacer explícito que los aspectos normativos de una demostración lógica provienen de un nivel más básico de interacción en el que la igualdad definicional expresa el concepto fundamental del razonamiento formal.

Otro resultado del presente estudio que consideramos digno de mencionar es que proporciona una comprensión más profunda del enfoque dialógico sobre la noción de armonía en la TCT desarrollado en Rahman/Redmond (2015b). En efecto, dado que Rahman/Redmond (2015b) mostraron que la noción de armonía en TCT – que se desprende de las reglas de igualdad definicional – está relacionada en el cuadro dialógico con la noción de independencia de jugadores; y dado que en el presente estudio se muestra que **la igualdad definicional es el producto de la regla Socrática, podemos entonces concluir la siguiente caracterización de armonía dialógica: la armonía es el producto de reglas de interacción que combinan la independencia de jugadores con la Regla Socrática que establece el paradigma de un razonamiento inmanente.**

Agradecimientos:

Referencias

- R. Brandom (1994). *Making it Explicit: Reasoning, Representing, and Discursive Commitment*. Cambridge: Harvard University Press.
- R. Brandom (2000). *Articulating Reasons: An Introduction to Inferentialism*. Cambridge: Harvard University Press.
- N. Clerbout (2014a). "First-order dialogical games and tableaux". *Journal of Philosophical Logic* 43(4), pp. 785–801.
- N. Clerbout (2014b). *La sémantique dialogique: Notions fondamentales et éléments de metathéorie*. London: College Publications.
- N. Clerbout y S. Rahman (2013). "On Dialogues, Predication and Elementary Sentences". *Revista de Humanidades de Valparaíso* 2, pp. 7–46.
- N. Clerbout y S. Rahman (2015). *Linking Game-Theoretical Approaches with Constructive Type Theory: Dialogical Strategies as CTT-Demonstrations*. Dordrecht: Springer.
- A. B. Dango (2015). *Approche dialogique de la révision des croyances dans le contexte de la théorie constructive des types*. Lille: PHD-Thesis.
- M. Dummett (1973). *Frege: Philosophy of Language*. London: Duckworth.
- M. Dummett (1991). *The Logical Basis of Metaphysics*. London: Duckworth.
- M. Dummett (1993). "Language and truth". En *The Seas of Language*. Oxford: Clarendon Press.
- C. Dutilh Novaes (2015). "A Dialogical, Multi-Agent Account of the Normativity of Logic". *Dialectica*, 69, N° 4 (2015), pp. 587–609.
- W. Felscher (1985). "Dialogues as a foundation for intuitionistic logic". En D. Gabbay y F. Guentner (eds.), *Handbook of Philosophical Logic vol. 3*. Dordrecht: Kluwer, pp. 341–372.
- W. Felscher (1994). "Review of Jean E. Rubin 'Mathematical logic: applications and theory'". *The Journal of Symbolic Logic* 59, pp. 670–671.
- M. Fontaine (2013). *Argumentation et engagement ontologique. Être, c'est être choisi*. London: College Publications.
- J. Granström (2011). *Treatise on Intuitionistic Type Theory*. Dordrecht: Springer.
- G. W. F. Hegel (2013). *Ciencia de la Lógica*. Las Cuarenta. Traducción al castellano de Hegel (1812-1816), *Wissenschaft der Logik*. Nürnberg: Schrag.
- J. Hintikka (1973). *Logic, Language-Games and Information: Kantian Themes in the Philosophy of Logic*. Oxford: Clarendon Press.
- J. Hintikka (1996). *Lingua Universalis vs. Calculus Ratiocinator: An Ultimate Presupposition of Twentieth-Century Philosophy*. Dordrecht: Kluwer.
- R. Jovanovic (2013) "Hintikka's Take on the Axiom of Choice and the Constructivist Challenge". *Revista de Humanidades de Valparaíso* 2, 135–152.
- L. Keiff (2007). *Le Pluralisme Dialogique: Approches dynamiques de l'argumentation formelle*. Lille: PhD - thesis - Lille 3.

L. Keiff (2009). "Dialogical Logic". En E. N. Zalta (ed.), *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*, URL <http://plato.stanford.edu/entries/logic-dialogical/>

K. Lorenz (1970). *Elemente der Sprachkritik. Eine Alternative zum Dogmatismus und Skeptizismus in der Analytischen Philosophie*. Frankfurt: Suhrkamp.

K. Lorenz (2001). "Basic objectives of dialogue logic in historical perspective". En S. Rahman y H. Rückert (eds.), *New Perspectives in Dialogical Logic*, volumen especial de *Synthese* 127 (1-2), pp. 255–263.

K. Lorenz (2010a). *Logic, Language and Method: On Polarities in Human Experience*. Berlin/New York: De Gruyter.

K. Lorenz (2010b). *Philosophische Variationen: Gesammelte Aufsätze unter Einschluss gemeinsam mit Jürgen Mittelstraß geschriebener Arbeiten zu Platon und Leibniz*. Berlin/New York: De Gruyter.

P. Lorenzen y K. Lorenz (1978). *Dialogische Logik*. Darmstadt: Wissenschaftliche Buchgesellschaft.

P. Lorenzen y O. Schwemmer (1975). *Konstruktive Logik, Ethik und Wissenschaftstheorie*. Mannheim: Bibliographisches Institut, segunda edición.

M. Marion y H. Rückert (2015). "Aristotle on Universal Quantification: A Study from the Perspective of Game Semantics". *History and Philosophy of Logic*. DOI: 10.1080/01445340.2015.1089043

P. Martin-Löf (1984). *Intuitionistic Type Theory. Notes by Giovanni Sambin of a series of lectures given in Padua, June 1980*. Naples: Bibliopolis.

B. Nordström, K. Petersson y J. M. Smith (1990). *Programming in Martin-Löf's Type Theory: An Introduction*. Oxford: Oxford University Press.

D. Prawitz (2012). "Truth and Proof in Intuitionism". En P. Dybjer, S. Lindström, E. Palmgren y G. Sundholm (eds.), *Epistemology versus Ontology: Essays on the Philosophy and Foundations of Mathematics in Honour of Per Martin-Löf*. Dordrecht: Springer, pp. 45–68.

G. Primiero (2008). "Constructive modalities for information". Presentación en el evento *Young Researchers Days in Logic, Philosophy and History of Science*, Brussels, 1-2 Septiembre de 2008.

G. Primiero (2012). "A contextual type theory with judgmental modalities for reasoning from open assumptions". *Logique et Analyse* 220, pp. 579–600.

S. Rahman (1993). *Über Dialogue, Protologische Kategorien und andere Seltenheiten*. Frankfurt/Paris/N. York: P. Lang.

S. Rahman (2012). "Negation in the Logic of first degree entailment and *tonk*: A dialogical study". En S. Rahman, G. Primiero, y M. Marion (eds.), *The Realism-Antirealism Debate in the Age of Alternative Logics*. Dordrecht: Springer, pp. 213–250.

S. Rahman (2014). "From Dialogue To Dialogue: Conversations and the Dialogical Approach to Meaning". En C. Bowao y S. Rahman (eds.), *Entre l'orature et l'écriture. Relations croisées*. London: College Publications, pp. 70–106.

S. Rahman (2015). "On Hypothetical Judgements and Leibniz's Notion of Conditional Right". En A. Armgardt, P. Canivez, y S. Chassagnard-Pinet (eds.), *Legal reasoning and Logic. Past & Present interactions*. Dordrecht: Springer, en prensa.

S. Rahman y N. Clerbout (2013). "Constructive Type Theory and the Dialogical Approach to Meaning". *The Baltic International Yearbook of Cognition, Logic and Communication: Games, Game Theory and Game Semantics* 8, November 2013, pp. 1–72. También en línea: www.thebalticyearbook.org.

S. Rahman y N. Clerbout (2014). "Constructive Type Theory and the Dialogical Turn". En J. Mittelstrass y C. von Bülow (eds.), *Dialogische Logik*. Münster: Mentis, pp. 91–148.

S. Rahman, N. Clerbout y R. Jovanovic (2015). "The Dialogical Take on Martin-Löf's Proof of the Axiom of Choice". *South American Journal of Logic* 1(1), pp. 179–208.

S. Rahman, N. Clerbout y L. Keiff (2009). "On Dialogues and Natural Deduction". En S. Rahman y G. Primiero (eds.), *Acts of Knowledge: History, Philosophy and Logic. Essays Dedicated to Göran Sundholm*. London: College Publications, pp. 301–336.

S. Rahman, N. Clerbout y Z. McConaughey (2014). "On play-objects in dialogical games. Towards a Dialogical approach to Constructive Type Theory". En P. Allo y B. v. Kerkhove (ed.), *Modestly radical or radically modest. Festschrift for Jean-Paul van Bendegem*. London: College Publications, pp. 127–154.

S. Rahman y L. Keiff (2005). "On how to be a dialogician". En D. Vanderveken (ed.), *Logic, Thought, and Action*. Dordrecht: Kluwer, pp. 359–408.

S. Rahman y L. Keiff (2010). "La Dialectique entre Logique et Rhétorique". *Revue de Métaphysique et de Morale* 66(2), pp. 149–178.

S. Rahman y J. Redmond (2015). "A Dialogical Frame for Fictions as Hypothetical Objects". *Filosofia Unisinos* 16(1), pp. 2–21.

A. Ranta (1988). "Propositions as games as types". *Synthese* 76, pp. 377–395.

A. Ranta (1991). "Constructing possible worlds". *Theoria* 57(1-2), pp. 77–99.

A. Ranta (1994). *Type-Theoretical Grammar*. Oxford: Clarendon Press.

S. Read (2008). "Harmony and modality". En C. Dégremon, L. Keiff y H. Rückert (eds.), *Dialogues, Logics and Other Strange Things: Essays in Honour of Shahid Rahman*. London: College Publications, pp. 285–303.

S. Read (2010). "General Elimination Harmony and the Meaning of the Logical Constants". *Journal of Philosophical Logic* 39 (5), pp. 557–576.

R. Recorde (1557). *The Whetstone of Witte*. London: John Kingston.

J. Redmond (2010). *Logique dynamique de la fiction: Pour une approche dialogique*. London: College Publications.

J. Redmond y M. Fontaine (2011). *How to Play Dialogues: An Introduction to Dialogical Logic*. London: College Publications.

J. Redmond y S. Rahman (2016). "Armonía Dialógica: tonk, Teoría Constructiva de Tipos y Reglas para Jugadores Anónimos". *Theoria* 31(1), pp. 27–53.

G. Sundholm (1983). "Constructions, proofs, and the meaning of logical constants". *Journal of Philosophical Logic* 12(2), pp. 151–172.

G. Sundholm (1986). "Proof-theory and meaning". En D. Gabbay y F. Guenther (eds.), *Handbook of Philosophical Logic vol. 3*. Dordrecht: Reidel, pp. 471–506.

G. Sundholm (1997). "Implicit epistemic aspects of constructive logic". *Journal of Logic, Language, and Information* 6(2), pp. 191–212.

G. Sundholm (1998). "Inference versus Consequence". En T. Childers (ed.), *The Logica Yearbook 1997*, Prague: Filosofia, pp. 26–36.

G. Sundholm (2001). "A Plea for Logical Atavism". En O. Majer (ed.), *The Logica Yearbook 2000*, Prague: Filosofia, pp. 151–162.

G. Sundholm (2009). "A Century of Judgment and Inference: 1837–1936". En L. Haaparanta (ed.), *The*

Development of Modern Logic. Oxford: Oxford University Press, pp. 263–317.

G. Sundholm (2013). “Inference and Consequence in an Interpreted Language”. Presentación en el Workshop *Proof theory and Philosophy*, Groningen, Diciembre 3-5 de 2013.

G. Sundholm (2016). “Independence Friendly Language is First Order after all?”. *Logique et Analyse*, en prensa.

S. Thompson (1991). *Type Theory and Functional Programming*. Addison-Wesley.

L. Wittgenstein (1922). *Tractatus Logico-Philosophi*