



HAL
open science

Sur le fil de nos expériences - saison 2

François Conne

► **To cite this version:**

| François Conne. Sur le fil de nos expériences - saison 2. 2004. halshs-01508950

HAL Id: halshs-01508950

<https://shs.hal.science/halshs-01508950>

Preprint submitted on 15 Apr 2017

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Distributed under a Creative Commons Attribution - NonCommercial - NoDerivatives 4.0 International License

Sur le fil de nos expériences

- Saison 2 -

François Conne

(Sophie Gobert pour l'édition)

- Résumé - **Potentialités des élèves en écho aux richesses mathématiques** ó pp.3-4
- Épisode 10 - **Autour de la régularité d'un polygone** ó pp.6-17
- Épisode 11 - **Une fiche de mathématiques** - pp.19-43
- Épisode 12 - **Narration et jeu de tâches** - pp.45-67
- Ouverture - **En direction de la formation** - pp.69-78
- Ouverture - **En direction de la recherche** ó pp.80-83
- Conclusions générales aux douze épisodes - **Au fil de textes où j'ai cherché à transposer celui de nos expériences : surprises, jeux de tâches et narrations** ó pp.85-86
- Bibliographie complète de la saison 2 ó pp.88-89

Résumé

12.04.16

Potentialités des élèves en écho aux richesses mathématiques.

Donc la langue est un ensemble de conventions nécessaires adoptées par le corps social pour permettre l'usage de la faculté du langage chez les individus (définition). La faculté du langage est un fait distinct de la langue, mais qui ne peut s'exercer sans elle. Par la parole on désigne l'acte de l'individu exerçant sa faculté au moyen de la convention sociale qui est la langue. Dans la parole, il y a l'idée de réalisation de ce qui est permis par la convention sociale.

F. de Saussure, cité in Maniglier P. 2006, p.144.

(Edition Engler, tome 1, p.32, n° 160, extrait leçon de Saussure, 2ème cours, p.6 du cahier de l'étudiant A. Riedlinger.)

Un diagramme

Dans son livre, P. Maniglier présente cette triade de la théorie de Saussure : *langage, langue, parole*. J'y trouve une résonance particulière avec l'esprit de toutes mes recherches consacrées à l'expérience dans l'enseignement des mathématiques au défi des conditions de l'enseignement spécialisé. L'idée directrice à l'enseigne des travaux de ddmes est la suivante : explorer les potentialités des milieux d'expériences mathématiques (à quoi correspondrait la langue) à révéler le potentiel d'élèves (à quoi correspondait le langage) en bute à l'échec scolaire, et ce, en nous intéressant à faire dialoguer leurs productions - dessins, découpages, commentaires - aux nôtres (que je comparerais à des prises de paroles dans les échanges).

Je me permets de reformuler cela dans les termes saussuriens ci-dessus. L'analogie de notre projet consisterait à explorer en quoi et comment les richesses de la langue (nous disons explorer et étirer le milieu mathématique) supportent et entretiennent la faculté de langage de ces élèves et nous les révèlent (nous parlons de leurs potentialités d'investir ces milieux). Qu'il soit entendu que ces richesses et potentialités ne se manifestent qu'à la faveur de nos interlocutions.

En résumé - moyennant une petite inversion rhétorique -, nous explorons les potentialités des milieux géométriques à être parlants pour les élèves et ainsi, lors de nos échanges, à susciter leurs prises de paroles mathématiques.

*

Alors que les neuf épisodes de la première partie abordent sous des angles divers la thématique de l'expérience dans l'enseignement des mathématiques mis à l'épreuve des conditions de l'enseignement spécialisé, les trois épisodes de cette deuxième partie illustrent ces considérations sur l'examen fouillé d'un cas : une fiche de géométrie, intitulée *Croix*

Géniale, proposée par les manuels suisses romands pour des élèves de 8-9 ans de l'école ordinaire. Le dernier épisode (le 12) évoque une recherche effectivement menée dans une classe. Il se contente d'en relater les tenants. Mon article : *L'expérience comme signe didactique indiciel* (2008) s'y réfère précisément. En outre, une autre recherche sur le thème de la *croix géniale* a été menée et pilotée collectivement par le groupe ddmes, dans d'autres classes et pour des élèves plus âgés. Elle non plus n'est pas abordée dans ces épisodes. Ces deux recherches ont donné lieu à plusieurs présentations et ateliers en colloques et écoles d'été (Favre 2008).

Les trois épisodes de cette seconde partie, tous dédiés au thème de la *croix géniale* ont pour principal objectif de convaincre les chercheurs et enseignants de l'immense potentiel d'analyse que procure une prise en considération sérieuse de la dimension sémiotique dans nos pratiques, tant mathématiciennes que didacticiennes. Ces épisodes proposent quelques mises en perspective sémiotiques. Pour ma part, je trouve que ce champ a été bien trop peu exploré. J'estime aussi que les recherches qui l'ont fait ont été menées de manière trop superficielle et, le plus souvent, sur la base de trop de méprises à propos de Peirce aussi bien que de Saussure. Depuis la rédaction de ces épisodes, l'étude de l'activité *croix géniale* est devenue un emblème de nos travaux à ddmes.

Ces épisodes sont une invitation que je fais aux lecteurs. Voilà aussi pourquoi j'ai été heureux de trouver dans le livre de Maniglier de quoi mettre cette deuxième partie de mon feuilletton à l'enseigne de Saussure.

Textes cités

Conne F. (2008) *L'expérience comme signe didactique indiciel*, *Recherches en didactique des mathématiques* 28 (2), 219-264.

Favre J.-M. (2008) *Jeu de tâches : un mode d'interaction pour favoriser les explorations et les expériences mathématiques dans l'enseignement spécialisé*, *Grand N* 82, 9-30.

Maniglier P. (2006) *La vie énigmatique des signes. Saussure et la naissance du structuralisme*. Paris : Léo Scheer.

Episode 10

18.02.04 (corrigé 5.08.05) - 25.01.16

Autour de la régularité d'un polygone

Je vais maintenant évoquer des recherches plus récentes et plus liées à une activité proposée par le manuel de 3^{ème} primaire de Suisse romande. Ces recherches ont été menées de manière un peu différente. Pour une part, elles ont été pilotées par une enseignante dans sa classe et je n'y ai participé qu'à titre d'observateur. Pour une autre part, j'ai échangé sur ce même thème lors du séminaire de recherche que j'anime à l'université, et enfin sur ce même sujet nous avons une recherche en cours avec le groupe d'adultes à Lausanne. Je ne mentionnerai donc ici que certains aspects de ces travaux.

Il s'agit donc de recherches portant sur une croix grecque régulière, que je désignerai par l'expression **croix de type cg** ; c'est une croix dont le centre est un carré et dont les branches sont quatre carrés de même dimension que le centre. La croix suisse, l'officielle de notre drapeau national, n'est pas aussi régulière et la croix de St André a des branches en biais par rapport à son cadre.

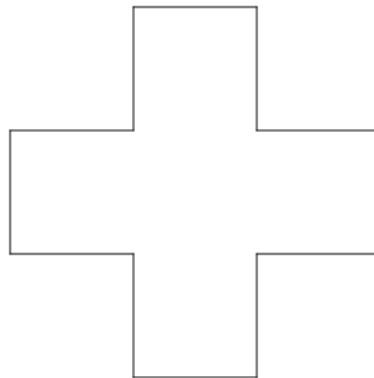


Figure d'une croix de type cg.

Je rappelle que je ne fais pas l'œuvre de psychologue. Dans mes propositions, il y a une mine d'expérimentations à faire pour un psychologue qui voudrait cataloguer les procédures et représentations des élèves, voire étudier le fonctionnement de la représentation, par exemple sur les symétries. Tel n'est pas mon projet, et d'ailleurs je ne dispose d'aucun moyen ou infrastructure pour entreprendre une étude de ce genre. Mon projet se trouve à la fois en amont et en aval d'une étude classique de psychologie cognitive. En amont parce que je pars de données accessibles à l'expérience, et en aval parce que je parle de faire usage de cette « sensibilité » aux modes de faire et représentations des sujets ainsi qu'à leurs dynamiques que nous apportent les études de psychologie cognitive. Je travaille sur le retour du savoir sur l'expérience. Comme dans les lignes ci-dessous, je parle de représentation, voici une citation pour signaler son lien avec la problématique générale (Conne 1992, p. 278) :

« Lorsque le sujet reconnaît le rôle actif d'une connaissance sur la situation, pour lui le lien inducteur de la situation sur la connaissance devient inversible, il sait. Une connaissance ainsi identifiée est un savoir, c'est une connaissance utile, utilisable dans le sens qu'elle permet d'agir sur la représentation. »

Une expérience entre régularité et symétrie

Tous les propos que je développe ici sont basés sur des observations effectives et ne sont pas de simples hypothèses, ni extrapolations théoriques comme pourrait le laisser croire le style que j'ai choisi pour vous évoquer nos observations.

On peut exprimer de différentes manières la « régularité de la croix en question », par exemple que tous ses côtés sont égaux. La croix est un polygone non convexe de 12 côtés égaux et les angles de ce polygone alternent une séquence de 4 fois : 90° , 90° , 270° . C'est donc quasiment un polygone régulier à 12 côtés. Tout le monde connaît cette croix, mais pas tous ne savent dire de but en blanc combien elle possède de côtés. Aux gens à qui j'ai posé la question, il a fallu un petit moment de réflexion, voire même une esquisse et un dénombrement pour répondre. Le plus petit polygone convexe dans lequel il est inscrit est un octogone lui aussi quasi régulier (dont les côtés alternent 4 fois : 1, et 2, mais dont les angles valent tous 135°).

Lorsque je demande aux élèves de découper un triangle dans une feuille de papier, la plupart du temps ils découpent une pointe dans le bord en deux coups de ciseaux, ce qui leur donne un morceau de forme triangulaire. La chute est alors une feuille entamée d'un coin ; assez rares sont les gens qui coupent un coin de la feuille avec un seul trait de ciseaux. Lorsque je m'étonne qu'ils aient pu obtenir une figure à 3 côtés alors qu'ils n'ont découpé que 2 côtés, cela passe pour une exagération de ma part. Pourtant si je demande de dessiner un triangle sur une feuille de papier, rares sont ceux qui dessinent une pointe à partir du bord de la feuille. Tous tracent trois lignes pour marquer les trois côtés.

Si je dis qu'en un trait de ciseaux, je puis découper une croix dans une feuille de papier, beaucoup de gens sont étonnés, intrigués, se sentent défiés à trouver par eux-mêmes¹. Plusieurs fois mes étudiants m'ont demandé à voir, soit publiquement, soit dans des apartés sur courriel. Ce qui frappe les gens c'est non seulement que l'on puisse découper 12 côtés d'un coup, mais que tantôt les angles puissent être saillants et tantôt rentrants de 90° . Pour de plus savants, la surprise est aussi de pouvoir obtenir un nombre de côtés qui ne soit pas une puissance de 2.

Pouvoir découper une croix d'un seul trait de ciseaux peut faire l'objet d'une expérience. Nos tentatives de pliage seront guidées par les propriétés de symétrie de la croix de type cg, ainsi que celles de la forme du morceau de papier dans lequel on découpe, exactement comme c'était le cas dans l'exemple tout simple du triangle.

Notez bien que ce qui m'intéresse ici est l'expérience à laquelle nous invite le fait de savoir qu'une telle possibilité existe.

Afin de bien caractériser cette perspective, je signale un résultat général de la géométrie des pliages : pour tout polygone, il existe un moyen de pliage pour arriver à le découper en un seul coup de ciseaux (pour autant que l'on dispose de papier suffisamment fin, bien entendu).

¹ On pourra se suffire à produire une croix dont les branches soient rectangulaires et identiques, obtenir une cg est un petit peu plus délicat.

Face au défi de découper une croix en un seul coup de ciseaux, je n'ai jamais vu quelqu'un commencer par dessiner la forme de la croix qu'il s'agit d'obtenir. La figure reste donc relativement indéterminée, et, pour guider son action, faire les bons plis et bien orienter son coup de ciseaux, le sujet se base sur ses représentations des symétries qu'il reconnaît à la croix. Et, ce, d'autant plus s'il désire obtenir une croix grecque régulière.

Par contre dans le cas d'un polygone, par exemple une sorte de cygne (cf. annexe), la figure est déjà dessinée. Dans ce cas, le sujet aura à plier afin d'obtenir que tous les traits des côtés viennent se superposer et/ou s'aligner. Il opère au moyen de plis de bissectrices des angles du polygone, afin de faire se superposer tous les côtés du polygone, certains *en bosse* et d'autres *en vallée*, et aussi à quelques plis perpendiculaires aux côtés. Cela se constate aisément dans le cas d'un triangle. Il agit donc sur autre chose que dans l'expérience évoquée ici.

Avec mes étudiants, j'ai aussi souvent proposé une situation "renversée": étant donnée une feuille pliée et repliée de manière quelconque (pliée deux fois de suite), en un seul coup de ciseaux bien placé, obtenir un triangle. Dans le cas du découpage de la croix, il faut à la fois déterminer les plis et penser à la forme à obtenir. C'est ce qui amène à penser en termes des symétries de la croix.

Il en va de même que l'on travaille en mode de dessin, de découpe ou de pliage : dans l'expérience sont toujours en jeu des relations entre la forme à obtenir et la forme du substrat ou forme de la feuille ou orientation vis à vis de repères plus globaux, comme bord de la table etc.

La régularité de la croix cg nous renvoie à un petit groupe d'isométries. Mais ce n'est qu'une expression parmi d'autres, et l'expérience évoquée en est un modèle parmi d'autres possibles, les possibilités de pavage d'un plan avec des croix de type cg en fournirait un autre modèle, qui renverrait au même schéma d'isométries². En résumé, les diverses expressions que l'on peut donner et se faire du caractère régulier de la figure ne sont pas équivalentes.

Faire l'expérience de la croix de type cg est donc aussi faire l'expérience de sa régularité et, à terme, de ses isométries. C'est ce que nous avons voulu étudier. Tout cet épisode sera consacré à l'exploration de différents modes d'approches expérimentales de la croix et de l'articulation de ces modes.

Dessins

Il y a différents moyens de produire un dessin. Ces moyens peuvent être le dessin, une découpe, ou encore un agencement de marques de plis, mais ils pourraient aussi être des repères pour des visées, auquel cas le dessin ne sera pas matériel, bien sûr, etc. Le mot dessin est donc à prendre dans une signification sémiotique.

Cela dit les moyens de production d'un dessin seront par ailleurs plus ou moins directs. Ce qui peut vouloir dire par exemple, plus ou moins sous le contrôle perceptif direct du producteur³.

² Ici les mots *modèle* et *schéma* sont utilisés au sens de F. Gonseth (1949). On pourrait préciser les choses dans le sens de ce qui est proposé dans l'épisode 6, pp.51-54, Saison 1 de *Sur le fil de nos expériences* (Conne 2003-2004). Je ne le fais pas ici.

³ Attention, direct ne veut pas dire exclusif !

On peut parler aussi de contrôles perceptifs indirects, le sujet peut en effet orienter son contrôle perceptif sur une image plus simple que celle de l'objet dont il cherche à produire le dessin. Par exemple, je veux découper un triangle dans une feuille de papier et je me contente de découper de biais, dans le coin. Mon action est sous contrôle perceptif, mais ici c'est une image⁴ rectiligne qui dirige ce contrôle.

Ce contrôle est engagé très différemment lorsqu'il s'agit par exemple de produire un dessin à main levée, ou à la règle, ou encore dans le dessin d'une étoile chérifienne, obtenu *sans lever le crayon*, pour lequel le contrôle va aussi s'exercer par le rythme du geste.

Par exemple, je me suis demandé si j'arriverais, sans trop réfléchir, à dessiner d'un trait de crayon une étoile à 7 pointes (branches). J'ai essayé, n'ai pas trouvé du premier coup mais assez rapidement quand même. Je ne me rappelle pas trop comment j'y suis arrivé si ce n'est qu'immédiatement après avoir réussi je me suis dit : « je dessine un carré et je dévie au dernier moment en coupant les coins ». Cette image m'est venue d'une représentation d'une étoile à 8 branches. Et d'ailleurs je ne suis jamais certain lorsque j'ai achevé mon dessin, il me semble régulièrement qu'il y a 8 pointes, je vérifie et constate tout aussi régulièrement qu'il y en a bien 7. Je ne dois pas disposer mentalement de *subitizing* d'une étoile à 7 branches !

Mais je suis alors rendu conscient de ceci : au moment où je dessine, je ne compte pas, je ne m'occupe pas du nombre de pointes, ni de traits, cela reste hors contrôle. En gros, je combine trois modules (schéma syntaxique), celui du carré et celui de couper les coins dont je viens de créer le dessin, et celui de fermer la courbe. L'analyse que je vous livre est bien entendu après coup ; dans l'action, je n'avais qu'une intuition qui a porté mon geste à la réussite.

Pourtant, j'ai pu enseigner à d'autres à dessiner de cette manière des étoiles à 7 branches, je dispose maintenant d'une recette très suggestive : « tu fais un carré puis avant de le fermer tu dévies pour couper les angles ».

Le contrôle ici est perceptif et intellectuel, en particulier il établit des ponts entre diverses figures d'étoiles⁵. En ce qui me concerne, la figure d'une étoile à 8 branches par superposition de deux carrés, elle-même liée à la figure d'une étoile de David qui superpose deux triangles, a été la clé ; si on peut dire ainsi, j'ai l'impression de court-circuiter le cycle du carré de l'étoile à 8 branches. La procédure se généralise facilement pour une étoile à 9 branches, etc.

Pour obtenir d'un seul trait de crayon une étoile avec beaucoup de pointes, interviendront d'autres contrôles, en particulier très nettement le rythme du dessin, et aussi un élément de rotation, donc le cercle circonscrit à l'étoile, comme ligne imaginaire dont l'évocation devient de plus en plus prégnante au cours du dessin. Nous obtenons alors une autre sorte d'étoiles que celles obtenues par la procédure précédente.

Là encore ces images et pensées de contrôle sont communicables et partageables. Nous en parlons au séminaire, tout de suite une ou deux personnes saisissent de quoi il

⁴ Percept, image mentale mais aussi idées plus conceptuelles.

⁵ Ce sont des diagrammes au sens où l'entend Peirce.

en retourne, montrent leur geste et finalement tout le monde finit par *voir* ce dont il s'agit.

Je m'amuse beaucoup à déclarer aux élèves que je puis dessiner un cube au tableau noir tout en fermant les yeux (images mentales donc). Je ne suis pas doué en dessin, mais n'ai pas non plus eu à m'exercer beaucoup pour arriver à une telle performance. Cela vous paraîtra sans doute anecdotique, mais ne l'est pas du tout dans mon esprit. Je fais cela pour signifier quelque chose aux élèves.

L'idée m'en est venue lorsque je travaillais avec un élève profondément psychotique, extrêmement doué en dessin de bandes dessinées, et indisponible à l'échange didactique. Lorsque je lui proposais quelque chose à faire, en un éclair il avait la réponse ou l'idée qu'il fallait, puis tout notre échange se brouillait durant les 20 minutes suivantes, après quoi quelque chose pouvait être éventuellement récupéré. Par contre, si après notre séance son professeur lui demandait ce que nous avions fait, il pouvait raconter qu'il avait résolu tel ou tel problème etc. et dérouler lentement de ce que nous aurions été censés faire si il avait été seulement disponible à notre échange. Comme il était doué pour le dessin, je me suis mis en tête d'aborder le dessin géométrique, et me suis demandé si on pourrait exploiter sa facilité dans une approche du dessin géométrique par esquisse plutôt qu'à la règle et au compas. C'est pour m'engager dans une telle logique (sémiose) que j'avais eu cette idée de montrer qu'il était possible de dessiner certaines figures les yeux fermés et cela avait fait son effet dans l'échange, il avait « croché » bien plus longtemps qu'à son habitude.

Ce faisant, je veux faire signe non pas de ma performance mais du fait que c'est une propriété d'une certaine classe de figures que d'être susceptibles de pouvoir être dessinées les yeux fermés. Comme c'est une propriété de certaines figures que d'être constructibles à la règle et au compas, problème qui comme on le sait a eu une importance majeure dans le développement des mathématiques. Il s'agit là d'une idée de transposition didactique centrale dans mon approche de la géométrie à l'école primaire.

Lorsque je fais ma petite performance au tableau, bien des élèves ne me croient pas et vont vérifier tout près de mon visage si je ne triche pas; et certains pensent que je triche quand même. Si je fais ceci, c'est pour montrer qu'on peut dessiner certaines figures, réputées difficiles, hors contrôle perceptif effectif et que c'est relativement facile à apprendre.

En effet, je dessine un cube en perspective cavalière, dont le contour apparent est un hexagone et les lignes « internes » sont en forme de Y. Je combine ces deux modules pour mon dessin et j'ai juste à contrôler mentalement (mémoire) la position de mon hexagone. L'effet est garanti.

Cependant j'ai constaté combien il pouvait être difficile pour les élèves de reproduire, avec ou sans modèle, le simple dessin d'un hexagone. Là encore une réorganisation des traits, par exemple dessiner les paires de côtés parallèles de l'hexagone, est quelque chose dont tout le monde n'a pas fait l'expérience de lui-même.

Mon dessin de cube devient donc une situation qui rend utile de savoir dessiner un hexagone à main levée, manière de faire signe pour relancer l'expérience et rouvrir le savoir. Non pas rouvrir le savoir dessiner un hexagone, mais cet autre savoir, tout

aussi présent dans l'expérience qui est de savoir su réorganiser le dessin des traits de l'hexagone pour respecter a priori certaines propriétés géométriques de la figure.

La sémiotique continue puisqu'on peut alors montrer qu'un jeu de motifs en Y permet de dessiner un pavage par des cubes et de retrouver par ce biais des motifs très fréquemment utilisés dans les arts décoratifs. Tout cela, faut-il le dire, sont des expériences dont un des traits essentiel est mathématique.

Produire le dessin d'une croix

D'entrée de jeu, on peut proposer, à des enfants comme à des adultes de tracer, découper ou faire apparaître par pliage, le dessin d'une croix régulière. Ce que je désignerai désormais par l'expression : *produire le dessin d'une croix*.

On peut varier à l'envi la consigne : croix régulière, croix suisse, croix de type cg, etc. ; on peut varier autant les supports : sur feuille blanche ou quadrillée, sur feuille quadrillée parallèlement aux bords, ou bien de biais, etc. ; on peut varier les instruments : à main levée, à la règle, etc. ; dans le cas du découpage, on peut demander soit de produire une croix, soit de produire un trou au milieu de la feuille ayant la forme d'une telle croix ; etc.

Je fais cette remarque pour indiquer d'emblée la richesse sémiotique dans laquelle cette activité nous place et pour bien signifier que nous allons tenter d'exploiter pleinement cette richesse, et non pas la réduire, afin de mieux cerner les phénomènes, comme on le fait généralement dans l'expérimentation psychologique. Notre hypothèse est en effet que le réel didactique est essentiellement fait de richesse sémiotique, nous ne pouvons pas en faire abstraction. Il incombe au chercheur didacticien de l'étudier sérieusement. (Voir aussi l'annexe de l'épisode 12, pour des signes relatifs aux quadrillages et aux pavages par des croix cg.)

On peut proposer un modèle à copier, c'est le choix qui a été fait dans les manuels de 3P⁶. Mais nous ne le ferons pas d'entrée de jeu.

On peut aussi introduire une ou des contraintes sur le dessin : le faire à main levée, ou au contraire du mieux que l'on pourra, ou encore, dessiner ou découper une croix qui soit la plus grande que l'on puisse faire dans la feuille.

Comme je l'ai indiqué à diverses reprises déjà, j'ai appris à quel point la tâche de produire le plus grand dessin d'une figure sur une feuille de dimension donnée (par exemple feuille A4 ou feuille carrée, ou autre) est fructueuse. Ce que j'avais préalablement éprouvé sur des tâches comme : *obtenir le plus grand losange dans une feuille A4*, ou encore *obtenir le plus grand disque dans un morceau de forme polygonale*. Pour la croix, c'est un de mes collègues (J.-M. Favre) qui a eu l'idée de proposer à ses élèves de dessiner la plus grande croix possible dans une feuille quadrillée de format A4.

Lorsque j'ai observé des sujets en train d'accomplir une telle tâche, trois choses m'ont particulièrement frappé.

⁶ Voir prochain épisode pour une analyse détaillée de la fiche du manuel.

La première est la variété des productions, même de la part d'adultes.

La seconde est que fréquemment sont dessinées des croix « danoises », id est des croix dont le centre est bien carré mais dont les branches sont rectangulaires, et est-il nécessaire de préciser, ces branches sont généralement plus longues que larges. Pourtant le contraire serait possible mais ce n'est pas à ce dessin que le mot *croix* fait penser.

Ce point est corroboré par plusieurs autres observations qui montrent que pour beaucoup de sujets, c'est une régularité **dissociée** de la largeur et de la longueur des branches qui est le caractère le plus saillant : que les branches soient toutes de même largeur (épaisseur) et que conjointement elles soient toutes de même longueur⁷. Par contre que leur largeur soit égale à leur longueur est un caractère qui vient bien après⁸.

Deux choses sont à ce propos particulièrement intéressantes. La première est que ceux qui arrivent à découper une croix en un seul coup de ciseaux arrivent en général à une croix grecque mais pas vraiment de type cg⁹. Ils se contentent d'obtenir que la largeur des branches soit constante et que les branches entre elles soient toutes de même longueur (sans se soucier que la largeur des branches soit égale à leur longueur).

Par ailleurs, il est très facile de faire faire l'expérience de ces caractéristiques : largeur constante et égalités des branches entre elles, comme des invariants de certaines transformations élémentaires de dessin de croix par agrandissement et diminution des croix (comme on peut voir sur les enseignes vertes en néon de certaines pharmacies).

Revenons à la demande de produire le dessin d'une croix régulière, éventuellement avec une contrainte supplémentaire concernant la taille de celle-ci. L'idée de régularité intervient à deux niveaux. Tout d'abord dans l'intention : en réponse à la consigne, le sujet se fait une idée de cette régularité et engage son action en se dirigeant sur elle, *contrôle descendant* disent certains psychologues. Ensuite dans le jugement du résultat ou des premiers éléments qui apparaissent sur le dessin : *contrôle ascendant* disent les mêmes psychologues, ce jugement s'effectue bien avant l'achèvement du dessin. Cela se complique lorsque le sujet s'aide d'une procédure particulière qui prend en charge ces contrôles. Dans ce cas, le sujet passe du contrôle de la tâche à celle des moyens mis en œuvre (on pourrait dire éventuellement de la tâche à des sous-tâches, etc.).

Par exemple, pour découper une croix en un coup de ciseaux dans ma feuille de papier, mon contrôle abandonne totalement l'image de la forme prescrite, qui ne devient d'ailleurs visible qu'au tout dernier acte de la procédure. Je travaille sur autre chose que la forme de la figure. Ce fait occasionne aussi quelques égarements. Cela ne veut pas dire que mentalement un sujet ne puisse pas s'imaginer la forme de la croix; effectivement, j'ai pu observer des sujets s'y essayant. Mais le tenter requiert un certain effort qui est en général motivé par une question que se pose le sujet ou un problème qu'il rencontre dans sa réalisation.

⁷ Ce sont les caractéristiques générales de toutes les croix grecques, les croix de type cg sont des croix grecques dont en plus les branches sont carrés, elles peuvent être obtenues par un assemblage de 5 carrés égaux, un carré central et les 4 branches de la croix.

⁸ On y est peu sensible, et, par exemple, bien des gens s'imaginent que la croix du drapeau suisse a des branches carrées alors qu'il n'en est rien.

⁹ Y arriver nécessite soit un jeu de proportions entre tiers et moitiés, soit un pliage sophistiqué.

Par exemple, en fin de parcours il est fréquent de voir le sujet hésiter entre deux orientations qui lui semblent possibles à son coup de ciseaux. À ce moment il tente de se représenter à nouveau le produit visé. Il lui arrive d'avoir alors l'impression de *ne plus rien y voir*. Afin de reprendre le contrôle du milieu, il se remet à imaginer.

L'observation de ce sur quoi le sujet fait porter son contrôle, et comment celui-ci se déplace, fournit au chercheur des indices de sa représentation de la régularité de la croix. La tâche et les propriétés du milieu font que, momentanément, les choses viennent à échapper à ce contrôle (par le sujet et ses représentations).

Tel élève devant découper un triangle dans une feuille de papier s'exclame : « elles bougent vos feuilles ! »

La manière dont le sujet s'y prend pour rétablir son action et la faire aboutir est aussi un élément essentiel. Être attentif à cela fait partie du contrôle de l'expérimentateur.

Par exemple le sujet qui, jusque-là, faisait son dessin à main levée réclame une règle, ou encore demande s'il doit produire un dessin exact. Et bien entendu, il y aura des moments où il se demandera s'il est préférable de poursuivre ou plutôt de tout reprendre à zéro. Souvent alors, on le voit chercher dans le regard de l'expérimentateur une indication. Tout cela dépend des circonstances. Il y a des sujets pour qui le enjeu le plus fort sera d'achever leur dessin ou découpe et l'ajout de contraintes les autorise à se contenter de nous proposer une réussite partielle. Au départ, ils avaient certes l'intention de réaliser une croix régulière et en cours de route, devant les difficultés qu'ils ont rencontrées, ils s'accommodent d'une croix grossièrement régulière etc. Une telle situation est courante.

Toute personne se proposant de dessiner un objet s'y trouve confronté. Peut-on dire au seul vu du résultat qu'ils ont négligé l'aspect de régularité, voire même qu'ils n'y auraient pas pensé ? Ou, exprimé autrement, l'irrégularité de leur résultat est-il à la mesure de leur représentation de la régularité d'une croix ? Non, bien sûr !

Si je vous demande de me dessiner à main levée un cercle, vous allez vous dire que je suis disposé implicitement à me satisfaire d'un dessin imparfait. Vous disposez d'une représentation du cercle suffisamment élaborée pour savoir que vos dessins resteront grossiers (au regard de l'idée que vous avez du cercle). Dans le cas du cercle c'est comme si vous saviez qu'il est impossible de réussir une telle tâche, à moins de bénéficier de capacités exceptionnelles en dessin ou d'un solide entraînement.

Si en plus je vous demande de le faire les yeux bandés, ou si j'ajoute une contrainte de taille, cela vous autorisera encore plus à admettre certaines imperfections.

Mais au fait, quelles imperfections ? Elles ne sont pas toutes du même ordre car elles sont relatives aux représentations que vous vous faites. Pour observer cela de plus près, j'aurais donc tout avantage à vous laisser vous corriger et même à vous inciter à le faire. Vous aurez alors le choix entre tout reprendre à zéro, corriger des parties entières, faire des retouches ponctuelles.

Par exemple on peut retoucher le dessin ou la découpe du cercle pour le lisser, mais si il est notablement dissymétrique, il faudra reprendre une moitié au moins de la figure.

Ces deux éventualités que j'évoque ici rapidement portent sur deux aspects distincts du cercle : une courbe lisse, et une figure symétrique. Certes on peut lier le premier caractère au second en disant que la figure admet une infinité continue de symétries, et que cela la rend lisse, mais de cela on ne peut pas avoir une représentation autre qu'une image.

Dans cet exemple, vous connaissez les traits à reproduire, mais ne disposez pas des moyens de l'assurer, voire vous ne savez tout simplement pas quels moyens seraient appropriés pour le faire. Tout le monde ne connaît pas le compas et encore moins son maniement. Dans ce cas, et pour autant que la pression exercée sur vous soit assez forte, vous vous exécuterez et advienne que pourra.

Je demande donc de me dessiner ou de me découper une croix régulière. Je me fais quelques idées, pas forcément bien formulées de ce qui viendrait rendre cette tâche délicate. J'encourage les sujets à achever leur production. Puis je leur demande, sans autre élément de comparaison de me donner leur jugement sur le résultat. Puis, s'ils jugent le résultat non satisfaisant, et à moins qu'ils le proposent spontanément je leur demande soit de m'exposer leur critique, soit d'améliorer la figure.

Si dans le cas d'une découpe, je vois l'élève plier sa croix en deux à la fois pour juger de son résultat et y trouver ce qu'il y a à corriger, par exemple en traçant le tour du côté rabattu sur le fond, ou coupant en suivant le bord de la partie rabattue, ou encore en coupant « tous les bouts qui dépassent », je saurais quelque chose de la régularité à laquelle l'élève pense. Je puis qualifier la procédure de *tentative d'égaliser deux parties de la croix*, c'est quelque chose qui entre dans l'identification d'une symétrie, c'est plus qu'une simple perception, mais ce n'est pas non plus le tout de la symétrie.

Certaines parties de la croix sont égales, tel est ce critère de symétrie.

Il n'en irait pas tout à fait de même si l'élève prenait une règle et vérifiait que les côtés de la croix sont tous égaux. Ce ne serait pas égalisation de deux moitiés symétriques.

Du point de vue de l'expérience, une telle procédure d'égalisation est possible sur une forme découpée autant qu'elle l'est sur un dessin, alors que le pliage est plus difficile à réaliser avec un dessin. On peut certes chercher à jouer en transparence, ou piquer des sommets, mais c'est déjà autre chose. Etc.

Si cette action de pliage en deux pour égaliser deux moitiés par trop dissemblables de la croix est assez compréhensible intuitivement, l'élève pourrait aussi proposer de la plier en 4. Est-ce que cela coule de source ou bien est-ce que le passage d'un simple pli à un pli composé représente un pas significatif dans la représentation de la croix ?

Au vu de la pauvreté de mes données je ne connais pas la réponse. Je serais tenté de faire l'hypothèse qu'il y a là un pas. Lorsque dernièrement j'ai observé une élève engager un pliage pour une procédure d'égalisation, j'ai aussitôt essayé de lui suggérer un second pliage, sans réel effet ma-t-il semblé. Ceci me fait penser que le pliage en 4 ne serait pas naturel dans un tel contexte.

En effet, le sujet voulait corriger une imperfection et elle égalisait, elle ajustait un bord sur un autre. Au départ, elle contrôlait perceptivement que deux bords déjà découpés coïncidaient. Elle jugeait des écarts.

J'imagine que matériellement parlant, il serait bien plus laborieux de juger des écarts entre les bords des quatre feuillets d'un pliage en 4 ! C'est sans doute à la faveur d'une autre situation, d'un autre problème, que nous pourrions voir apparaître l'idée de plier en 4.

Et nous l'avons observée en effet, avec d'autres élèves, à propos d'une tâche de découpage d'un trou en forme de croix. Dans ce cas, il y a une technique pour découper des trous qui passe par le pliage de la feuille ce qui ordonne autrement l'action, et ce nouvel ordre devient le signe de la prise en compte de la symétrie a priori de la figure.

Dans un tel contexte, supposons que l'élève ait essayé plusieurs fois et qu'il soit arrivé à force de corrections à un résultat dont il déclare se satisfaire. Si je lui montre que d'un seul coup de ciseaux j'arrive à produire une croix qu'il estime régulière et que je constate qu'il a envie d'apprendre ce « truc », sans forcément le comprendre d'ailleurs, alors je saurais une chose : il perçoit ici le moyen d'arriver à réaliser une croix parfaitement régulière et, ce, "à moindre frais" ! Rien que cela m'apprend énormément sur l'élève et présente l'immense avantage de maintenir ou relancer l'échange. On a la confirmation que s'il le pouvait, s'il savait le faire, il produirait une croix régulière, mais qu'il ne sait pas vraiment y arriver.

Reste à savoir comment il pourrait analyser la régularité en question. Une observation cruciale en ce qui concerne la différenciation de l'idée de régularité de la croix sera de voir si l'élève pourrait ne pas se contenter de plier sa croix par une sorte d'acte de vérification post production, mais qu'il puisse en faire un principe pour la construction de sa croix. Commencer par plier sa feuille donc. Et qu'observe-t-on ?

Certains sujets plient leur feuille en 2 seulement, quelques autres la plient en 4.

On observe que ces mêmes différences se trouvent aussi pour la tâche de découpage d'un trou carré dans une feuille. À ce jour, je n'ai pas encore essayé de comparer ces deux tâches avec les mêmes sujets.

Toutefois ce qui m'importe ne sont pas les sujets, mais la situation à l'expérience de laquelle ces deux occurrences peuvent se produire, et donner ainsi occasion à rebondissement et poursuite de sémiose (ou si vous préférez de la logique de cette situation).

Par contre à ce jour, j'ai rarement rencontré de sujet qui plie sa feuille en 8, et d'ailleurs le format rectangulaire des feuilles peut être un facteur dissuasif, dans ce que je qualifierai d'*anticipation à vue* qui est propre à toute action de ce genre.

En résumé, les difficultés de réalisation qualifient les représentations en jeu. Des représentations trop frustrées, grossières résistent mal aux difficultés matérielles qui se présentent ; des représentations indifférenciées sont souples et modelables, si l'activité oppose moins d'inertie à se réorienter, en revanche elle s'égarera d'autant plus facilement.

Maintenant la simple évocation d'une solution « en un seul coup de ciseaux », placée à un moment opportun de l'échange, est susceptible d'opérer ce basculement que représente le passage d'un *pliage comme procédure d'égalisation* à un *pliage comme procédure garantissant d'emblée une égalité*. Cela agit comme un signe, le signe de l'opérationnalité du pli, lui-même signe de la prise en compte de la symétrie a priori de la figure. D'une manière ou d'une autre c'est triadique : **sur le dessin** il s'agit de faire le lien entre la symétrie de **l'organisation de l'action** et la symétrie de la **figure** dont le dessin est le signe. Faire ce genre de lien, lui-même matérialisé par l'acte et le dessin, entre les propriétés de la croix et celles de l'action pour obtenir une croix, c'est justement ce qu'il y a de mathématique dans cette tâche.

Textes cités

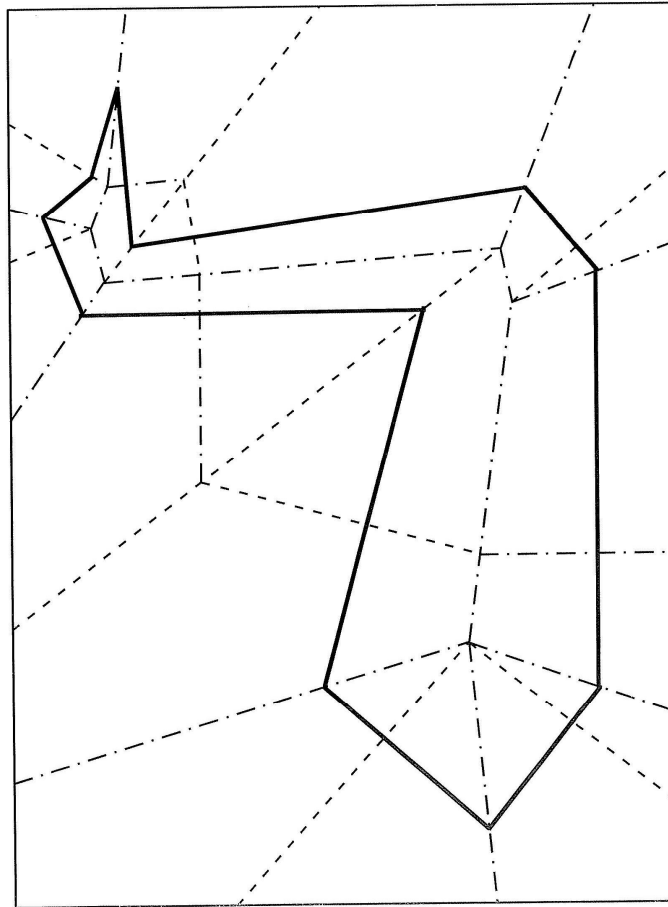
Conne F. (1992) Savoir et connaissance dans la perspective de la transposition didactique. *Recherches en didactique des mathématiques*, 12 (2.3), 221-270.

Ce texte a été à nouveau publié sous la référence suivante : Conne F. (1996) Savoir et connaissance dans la perspective de la transposition didactique. In J. Brun (Sous la dir.), *Didactique des mathématiques ó cinq textes fondamentaux*, pp. 275-338. Lausanne : Delachaux et Niestlé, collection Textes de base en Pédagogie.

Conne F. (2003-2004) Sur le fil de nos expériences. Saison 1, 10 épisodes, 85p. (Édition 2016) <https://halshs.archives-ouvertes.fr/halshs-01296507/>

Gonseth F. (1949) *La géométrie et le problème de l'espace. Fascicule IV : la synthèse dialectique*. Neuchâtel : Ed. Du Griffon.

Annexe : cygne



Episode 11

18.02.2004 - 12.04.2016

Une fiche de mathématiques

Les propos que je développe sur le thème des *croix grecques à branches carrées*, que je désigne désormais sous le sigle **cg** (pour croix grecque ou croix géniale, comme on préférera), se situent à la croisée de deux recherches : d'une part celle que je mène personnellement et qui a pour objet les relations savoir /expérience, d'autre part celle que nous menons collectivement dans le groupe dmes et qui s'inscrit dans une autre perspective. Trois circonstances nous ont amenés à nous intéresser à ces croix régulières (cg). La première est la recherche que nous menons actuellement au sein de notre groupe dmes. Ce projet consiste à choisir des activités proposées dans les manuels officiels de l'enseignement primaire de Suisse romande et d'explorer les potentialités des dispositifs qu'elles introduisent, ceci afin d'aider les enseignants spécialisés à tirer le meilleur parti de ces activités dans les conditions de l'enseignement spécialisé. La seconde est que dans un travail que nous qualifions d'exploratoire, J.-M. Favre a eu l'idée de combiner un aspect de la tâche d'une fiche de 3P qui demande aux élèves de reproduire le dessin d'une croix régulière (cg) avec la contrainte de dessiner la plus grande croix de type cg que l'on puisse faire sur une feuille quadrillée de dimension A4. Il nous a relaté ses premières observations (cf. prochain épisode). La troisième circonstance a été une recherche que je mène avec A. Racheter dans une classe spécialisée de niveau 3P¹. J'ai complété ces études par un travail lors de mon séminaire de recherche 2002/2003 à la Faculté de Psychologie et des Sciences de l'Éducation. Actuellement, le groupe dmes poursuit l'exploration de ce thème (en prolongement à une autre étude portant sur des puzzles géométriques, au niveau de la classe de 5^{ème} primaire).

La fiche de 3P s'intitule *Croix Géniale* et se présente comme suit : livre du maître (Danalet C. et alii, 1998), p. 225 qui reproduit la page 73 du livre de l'élève et y ajoute sous le titre **Tâche**, la description que les auteurs donnent à cette tâche ainsi que quelques commentaires didactiques sous les titres de : "**Nombre d'élèves**", "**Matériel**", "**Déroulement** - Validation", "**Variable** - Matériel").

¹ La numérotation des degrés scolaires indiqués dans ce texte est celle qui était en vigueur en 2003. Depuis lors celle-ci a changé, et il faut l'incrémenter de 2. Ainsi lorsqu'il est indiqué 3ème primaire dans ce texte, cela correspond à la 5ème primaire dans la nouvelle numérotation. Et ainsi pour tous les degrés indiqués ici.

Croix géniale

Tâche

- Dessiner, découper et assembler précisément une figure selon un plan donné.

Déroulement

Validation

- Les élèves contrôlent la précision de leur dessin et de leur découpage en assemblant le carré-solution.

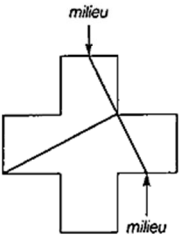
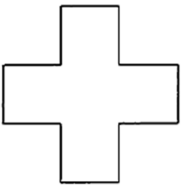
Variable

Matériel

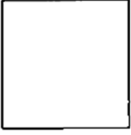
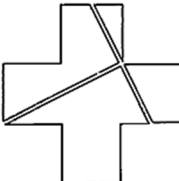
- Aux élèves qui ne parviennent pas à respecter les proportions des côtés de la croix, l'enseignant donne du papier quadrillé de 1 cm, 2 cm ou 3 cm.

Croix géniale

Consigne pour 1 élève
Matériel: papier quadrillé, règle, crayon, ciseaux



1. Dessine une croix qui a exactement la même forme que celle-ci, mais plus grande.
2. Ajoute ces lignes.



3. Découpe ta croix en quatre morceaux.
4. Assemble tes quatre morceaux pour former un carré.

73

Nombre d'élèves

- 1

Matériel

- LE p. 73
- Papier quadrillé 4 ou 5 .nm

Trois niveaux à considérer.

Cette fiche représente pour moi un fort joli exemple de transposition de savoirs à des fins didactiques. Je ne développerai pas ce point ici, et me contenterai d'en dégager l'essentiel. Mon analyse considère la fiche comme la donnée d'un **schéma idéal** dont les facettes se distribuent en trois niveaux.

1° Un niveau expérientiel, l'expérience qui nous sera donnée à vivre en reproduisant la figure, la découpant et en cherchant la solution du puzzle. Il y a déjà expérience par évocation à la seule lecture de la donnée : on se dit « curieux », on est intrigué, ou au contraire on se dit que décidément on n'aime pas les puzzles etc. N'oublions pas non plus que dans toute cette activité, de quelque manière qu'on la décrive ou l'analyse, quel qu'en soit le degré de détails, il restera quelque chose d'irréductible, d'inaccessible : ce quelque chose qui fera que certains s'écrieront : « génial ! », et pas les autres etc. C'est le niveau de la priméité contenue dans l'expérience, ce qu'on qualifie d'expérientiel plutôt que d'expérimental.

2° Le second niveau est celui des choses (comme la croix de type cg), et des faits (ce qui amène les auteurs à la qualifier de *géniale*). Le fait est qu'on peut la découper de telle sorte que les morceaux, réarrangés d'une certaine façon, composent un carré. C'est lui qui est mis en exergue dans cet exercice, et ce, sous la forme d'une expérience pour l'éprouver.

Avant de lire cette fiche, je connaissais ce casse-tête sous une version plus difficile : on demandait de trouver une découpe de la croix qui permette de former un carré. Ainsi posé, le problème est plus difficile puisqu'il vous laisse trouver le découpage. Par contre, une fois que vous aurez trouvé par vous-même ces lignes, gageons que le puzzle ne vous donnera plus trop de fil à retordre. Vous aurez en effet déjà déterminé les relations pertinentes.

J'affirme même que la seule connaissance de cette version du casse-tête me fait aborder et apprécier l'exercice tout autrement qu'un lecteur naïf le ferait. Par exemple, je saurais d'emblée que les lignes de découpe doivent être perpendiculaires entre elles, parce que je l'aurais déjà déduit par ailleurs, ou parce que le simple rapprochement des deux versions du casse-tête me le fera déduire aussitôt.

Les faits contenus en puissance par les deux consignes ne sont pas identiques, même s'ils sont très proches. En particulier elles nous engagent à d'autres expériences.

La consigne classique, celle qui demande à trouver comment découper la croix, nous amène au dessin. Devant trouver à décomposer le dessin de la croix afin d'obtenir une recombinaison en carré, cherchant alors quelle dimension pourrait bien avoir ce carré, ce qui nous donnera une indication pour le découpage de la croix, nous chercherons aussi à dessiner ce carré.

La version puzzle du casse-tête, celle du manuel, nous permet de reporter les pièces les unes contre les autres et ainsi en comparer les longueurs et compléter les angles. Sur un dessin, il nous faut engager d'autres moyens pour de telles comparaisons.

Bref, nous sommes au niveau de la secondéité.

3° Le troisième niveau est celui des idées, des principes, des règles, des généraux. Pour cette fiche, ils sont d'ordre divers.

Mathématiquement tout d'abord, il y a un théorème, et sa ou ses démonstrations, qui recouvrent l'explication du pourquoi et du comment il se fait que la croix de type cg puisse se découper de cette manière². Cela peut nous amener à nous demander si seule la croix de type cg possède cette propriété, et par là à nous constituer une petite théorie sur les types de croix, etc.

Les faits de second niveau que j'ai évoqués ci-dessus sont tous des répliques dans certains contextes réels de ce fragment théorique. Dans l'exercice, on demande aux élèves et aux professeurs de travailler autour d'un ou de quelques faits associés à ce théorème, sans plus.

Pourtant ce théorème est bien plus qu'une référence savante, une légitimation de l'exercice, il est le principe même de l'expérience par laquelle on va éprouver certains faits. C'est la facette mathématique et idéale (sans doute faudrait-il dire idéale) de cette expérience. Nous sommes en tiercité.

Didactique.

Je n'ai pourtant encore examiné qu'une facette mathématique des principes à l'enseigne de la fiche *croix géniale*. Un autre aspect est didactique.

Les auteurs écrivent : « *Validation. /Les élèves contrôlent la précision de leur dessin et de leur découpage en assemblant le carré solution.* ». C'est affirmer que cette activité est telle que l'élève pourra évaluer son travail et ce, au seul vu de son résultat, sans intervention extérieure de l'enseignant, donc sans appel à un argument d'autorité.

Je réexaminerai plus loin la question de savoir jusqu'où on peut donner crédit à une telle affirmation. Ici je veux simplement indiquer que par cette affirmation, les auteurs nous disent que cet exercice applique une règle didactique qu'ils se sont donnée, en regard d'un certain consensus théorique entre didacticiens (par exemple la théorie des situations a mis ce point de la rétroaction du milieu au cœur de ses préoccupations).

Il y a encore d'autres facettes didactiques car l'exercice croise divers genres, en vrac : application d'un mode d'emploi, dessin géométrique sur quadrillage, jeu de puzzle, casse-tête ou résolution de problème, etc. Il est remarquable que les auteurs aient réussi à combiner autant de vertus en un seul exercice !

² On sait que deux polygones qui ont même aire sont équi-décomposables, ce qui banalise le fait qu'un tel puzzle puisse être possible. Mais ici on a plus, on a non seulement qu'ils sont équi-décomposables, mais encore qu'ils le sont en seulement 4 pièces, ce qui est significatif si en outre on sait que le côté du carré et celui de la croix sont incommensurables (dans un rapport de 1 à $\sqrt{5}$). Cette spécificité fait intervenir la conjugaison de deux autres théorèmes : celui de Pythagore pour ce qui concerne les dimensions et les angles droits, et les isométries de la croix qui font qu'on peut paver le plan rien qu'avec de telles croix. Ces deux théorèmes sont indifférenciés dans la formulation en termes de propriétés de polygones qui est faite ici. Mais à l'origine ce fait a été découvert comme un fait de pavages. (Cf la suite).

Les faits d'expérience et ce qui les lie.

Ces dernières remarques sont essentielles pour toute la suite de l'analyse. En effet, ce que propose une fiche telle que celle-ci, c'est rien moins qu'un modèle idéal. Par contre ce qui nous sera donné d'observer, ce sur quoi les enseignants vont agir, voire moduler les consignes parce qu'ils prévoient que tel ou tel élève rencontrera telle ou telle difficulté etc., tout ceci ne seront que des répliques à la fois imparfaites et approximatives de cet idéal. Et tout cela vient se nouer en priméité, permettant par évocation de prendre l'expérience vécue approximativement pour cette expérience authentique et idéale que présente la fiche. (Bref, il y a quelque chose d'une représentation théâtrale dans tout exercice de ce type).

J'ai donc considéré la fiche d'exercice comme un signe représentant l'expérience que l'on veut procurer aux élèves autour de l'étude de l'objet croix de type cg. Cette expérience comporte une facette factuelle objective, et une facette expérientielle irréductible que l'on doit reproduire et qui se manifestera de manière événementielle, comme de l'intrigue, de l'ennui, des surprises, des intuitions fulgurantes etc. Je voudrais maintenant développer un peu plus mon analyse de l'expérience et décrire comment le fragment mathématique qu'il y a derrière ce petit découpage se manifeste par des faits d'expérience liés entre eux.

Comme vous avez pu le constater, l'activité *croix géniale* est construite autour de deux volets (d'un côté points 1, 2, 3 de la consigne, de l'autre, point 4). Le premier consiste à reproduire la figure de la croix, ses lignes de découpage et d'en découper les morceaux. La seconde consiste à résoudre le puzzle du carré. Pour commencer, je me centrerai sur le puzzle, laissant à plus tard l'examen de l'exercice de dessin géométrique. J'ai déjà mentionné que le puzzle renvoyait à un casse-tête de mathématiques récréatives. Comme nous verrons plus loin, l'origine de ce casse-tête donne un tout autre relief au théorème qu'il renferme. Revenons sur le casse-tête, sa donnée, sous sa forme classique ou *croix géniale*, énonce un fait : « On peut découper une croix de type cg de façon à former un carré en réarrangeant les morceaux ainsi découpés ». Cela dit, il existe de multiples manières d'éprouver les faits d'expérience.

L'expérience est mouvante, fluide. Dans l'épisode précédent, j'ai indiqué en quoi la simple connaissance de deux versions du casse-tête peut être informante. Comme je l'ai déjà relevé, nous devons considérer que prendre connaissance d'un fait comme celui de la croix géniale procure déjà une expérience, aussi minime soit elle, qui pourrait se révéler opérante par la suite. Lors de l'épisode précédent, je vous ai annoncé un autre fait : « on peut découper une croix de type cg d'un seul coup de ciseaux. » (Et on peut le faire de deux manières au moins.) Il n'en faut pas plus pour piquer la curiosité. Autre exemple, vous prenez connaissance du casse-tête classique, et sans même l'avoir résolu, en vous contentant de croire que c'est un fait réel (vrai), vous vous dites : « voilà qui donnerait un puzzle amusant ! ». Vous avez alors déjà imaginé une manière de traduire ce fait (ou plutôt une autre version de la propriété qui se cache derrière ce fait).

Peut-être aurez-vous cette intuition, pas forcément formulée, du contraste entre une figure au bord crénelé comme une croix et une figure aux bords rectilignes comme un carré et considéré que les créneaux feront de bons encastremets de pièces. Ce sont aussi des faits d'expérience, des significations que vous trouvez collatéralement. Vous pouvez aussi chercher à réaliser votre idée de puzzle : commencer par dessiner une croix aussi précisément que possible, chercher des lignes de découpe, tenter de recombinaison les morceaux. L'expérience s'est bien développée et au passage, vous aurez pu rencontrer d'autres faits. Par exemple, si vous avez découpé comme cela est

indiqué dans la donnée du manuel de 3P, vous avez peut-être considéré, plus ou moins consciemment, que vous avez deux gros morceaux et deux petits, et vous avez alors cherché à accoler les deux grosses pièces en premier lieu ; vous aurez peut-être trouvé qu'il y a deux manières différentes de réarranger les pièces pour former un carré ; ou encore vous aurez vérifié que pour ces deux solutions, il n'est besoin de retourner aucun des 4 morceaux ; etc. Tout cela évoque fort bien comment les faits sont liés. Notez bien deux choses. La première est que ces faits ne vous sont pas exclusivement livrés par une expérience directe et effective du puzzle, la mémoire est sollicitée, vous pouvez les trouver par la pensée, mais encore les découvrir par l'observation d'autrui. Dans ce cas, vous pourrez même repérer des faits dont les personnes observées n'auront pas forcément conscience.

J'ai évoqué l'image d'une figure crénelée qui se transformait en une figure à bords rectilignes, c'est une interprétation. Plutôt que de parler de traduction comme je le faisais tantôt, il faut dire que l'expérience nous livre ses faits au détour des interprétations et réinterprétations de ce que nous y observons. Il faut prendre le mot « interprétation » au sens large, par exemple comme on le comprend en musique où on interprète une partition sur un instrument (et selon l'instrument il faudra opérer à une transposition d'une partition pour piano afin de la jouer à la guitare). Ces interprétations sont immanquablement approximatives, mais enrichissantes aussi. Si vous transposez donc votre expérience de puzzle au dessin, vous accéderez à d'autres faits, d'autres mises en relations.

Par exemple, tentez de résoudre par dessin le puzzle de la croix géniale, tel qu'il est proposé dans le manuel. Là encore l'expérience peut prendre des tours divers.

Que gagnez-vous avec la modalité puzzle ? Le fait que vous pouvez déplacer les pièces, ce que vous ne pouvez pas faire en dessin et vous obligera, dans un tel registre, à trouver un moyen de reporter vos traits, de reconstituer les figures des pièces. Donc un premier obstacle à la résolution par dessin du puzzle sera cette question des moyens de reports dont vous disposerez. Il y en a de diverses sortes : la règle et le compas bien entendu, mais aussi des chablon (marques sur des bords rectilignes de morceaux de papier ou de règles, ou report de mesure), le quadrillage, etc.

Vous pouvez essayer de contourner l'obstacle et considérer que ce qui importe n'est pas tant de reproduire fidèlement la taille des pièces, mais seulement leur forme. Dans ce cas, vous pourrez aller jusqu'à vous suffire de trouver une esquisse de découpage de carré.

Tout cela dépend bien entendu de vos savoirs. Vous pouvez ne pas aller chercher aussi loin et tenter de contourner l'obstacle du report d'une autre manière. Par exemple en tentant de construire le carré cherché à partir des lignes de découpe de la croix, en les prolongeant et en complétant le carré. Ici en passant, un fait saillant, celui que le carré ainsi construit sera en position de biais par rapport à la croix (elle-même dessinée parallèle aux bords de la feuille). Cela rend plus difficile le contrôle perceptif.

Je fais remarquer ceci non pas en pensant aux enfants pour qui souvent un carré n'est plus carré si il est disposé sur la pointe, mais surtout pour rappeler qu'au cours de l'expérience, interviennent constamment des éléments iconiques, donc de premier niveau.

Est-ce que nous nous perdons pour autant dans les détails ? Non, et c'est là que nous sommes bel et bien dans des approximations, parce que ce que nous pouvons saisir de tout ce flux de signes ne peut se faire que dans un travail constant de schématisation. Par exemple, lorsque vous vous mettez à considérer certaines choses intéressantes comme celle-ci.

Vous êtes partis d'une figure de croix dessinée, les traits représentent les bords de la croix, vous avez ensuite dessiné des lignes internes à cette figure. Si, pour faire le puzzle, vous découpez la croix, vous suivez les traits bords de la croix mais aussi les lignes de découpes. Et vous avez maintenant des pièces exemptes de lignes internes, la découpe a transformé les lignes de découpes en bords. Si vous accolez deux pièces, des lignes internes réapparaissent dans l'assemblage.

De ce point de vue, la transformation de la croix en carré se fait par le truchement d'un échange : ce qui était bord deviendra ligne, ce qui était ligne deviendra bord.

Tant qu'on ne considère qu'une collection de quatre morceaux épars, on n'a que des bords et pas de lignes. Revenons au dessin et à cette recherche de construire le carré en prolongeant et complétant les lignes de découpes. Ici au lieu de travailler sur les bords, vous travaillez sur les lignes, le dessin a tout ramené à des jeux de lignes.

Cette représentation est schématique, approximative, mais très efficace.

Maintenant imaginez que vous avez complété votre carré à partir de la figure de la croix, à partir de ses lignes de découpes. Peut-être savez-vous déjà que vous avez trouvé le carré solution, peut-être n'est-ce encore qu'une hypothèse pour vous. Vous avez devant vous le dessin d'un carré qui empiète sur celui de la croix. L'intersection des deux est l'une des pièces du puzzle. Vous pouvez alors essayer d'imaginer déplacer les trois autres pièces de la croix dans la partie encore vide du carré.

Par exemple en imaginant des translations ou des rotations des pièces (j'y arrive mentalement, non sans hésitations).

Vous pouvez aussi essayer autrement, et, par dessin, chercher à reproduire les autres pièces en suivant la ligne d'empîement de la croix sur la partie vide du carré.

Vous pourriez aussi avoir un "coup de génie" : celui de vous dire que chacun des quatre morceaux est un morceau-de-croix et qu'il est peut-être plus facile de reporter des croix sur votre dessin que le dessin compliqué de chacune de vos pièces (la figure de la croix est stable par rotation, ce que ne sont pas les figures des pièces). Cela revient à transporter chacune des pièces en transportant la croix dans laquelle elle est inscrite. De telle sorte vous aurez arrangé 4 copies de croix, les lignes de découpes respectives feront apparaître un carré central : la solution est sortie du chapeau, il ne vous reste plus qu'à la reconnaître !

C'est une idée lumineuse, qui vient d'une relation tierce : "chaque morceau est un morceau de croix, ne les dissociez donc pas" (voilà ce dont la modalité puzzle vous éloigne et vous rendra quasiment impossible à penser) et se réalise sous l'action de l'apparition d'une icône-diagramme.

L'événement n'est pourtant pas anecdotique. Que se passe-t-il dans la recherche du puzzle ? On accole deux pièces et on essaye mentalement ou concrètement de prolonger les bords afin d'imaginer si on a une chance de former ainsi un carré.

C'est ce que j'ai pu régulièrement observer chez les sujets, et cela explique aussi certains tâtonnements et erreurs. Ce n'est pas autre chose que chercher à concevoir les pièces ou leurs arrangements comme des morceaux-de-carré ! La seule chose qui diffère est que vous devez imaginer ce carré. Dans l'autre cas, celui des morceaux-de-croix, vous ne faites que répliquer la figure de votre croix modèle, en la reportant de proche en proche par extension.

Nous voici dans une situation de pavage.

On trouve ici une relation assez profonde qui lie puzzle et pavages.

Dans ses recherches, J. M. Favre a trouvé l'origine de ce casse-tête dans un livre de vulgarisation : *Pythagore et Thales* (Deledicq A., 1998). On y expose comment H. Lindgren a trouvé en 1961 ce découpage. Et cette trouvaille est expliquée par un jeu de superposition de deux pavages du plan, l'un avec des croix de type cg, l'autre avec des carrés de taille et d'orientation bien choisies. La référence à Pythagore est claire pour tout mathématicien, c'est ce théorème qui permet de trouver la longueur du côté du carré par rapport à celle des côtés de la croix, et qui montre que les lignes de découpage internes sont de bonne dimension pour se convertir en côtés ou segments de côtés de carré.

Outre ces propriétés métriques bien connues, cette composition de deux pavages était pour moi très originale et m'a incité à imaginer de nouveaux liens et des prolongements de l'expérience dans d'autres directions. Par exemple, avec la technique de Lindgren on se rend compte qu'il y a plusieurs manières de découper la croix. En particulier l'une d'elle, dont les lignes de découpe passent par le centre de la croix, donne un puzzle dont les quatre pièces sont identiques. J'ai pu observer qu'il était plus difficile à résoudre.

Comment appelle-t-on un pavage dont la maille est carrée ? Un quadrillage. (Et me voilà à nouveau schématique, à nouveau approximatif). Cette remarque nous permet de nous intéresser maintenant à la première partie de l'exercice de la fiche, celle du dessin géométrique de la croix de type cg et du report des lignes de découpe selon le modèle donné par le manuel.

Il s'agit de dessin géométrique, pas de construction à la règle et au compas, mais de report sur un quadrillage avec règle (celle-ci est nécessaire au moins pour le tracé des lignes de découpe). Sur ces instruments vont intervenir différents savoirs, en particulier des comptages (qui feront office de mesure). Vous comptez sur le pourtour de la croix pour la rendre régulière, vous dénombrez en vous dirigeant sur les carrés du quadrillage qui bordent le pourtour de la croix, en général les sujets prennent la bordure interne à la croix.

Quelque chose d'aussi simple que de tels comptages n'est pas exempte de surprises. Il nous faut des précisions supplémentaires. Tout d'abord que dénombre-t-on ? Des carrés ou des segments ? Intuitivement des carrés, mais mathématiquement des côtés de carrés. En général cela ne fait pas de différence parce qu'on compte un carré pour un côté. Dans le cas des coins, cela pose problème, c'est comme s'il fallait compter

deux fois un même carré. Cette observation est bien connue. Le fait de travailler avec un polygone non convexe comme la croix nous oblige à préciser encore plus. Ce que je viens de dire est vrai pour des coins d'angles saillants. Par contre pour un coin d'angle rentrant, il ne faut pas compter le carré d'angle !

Si dans votre dénombrement, vous comptez les segments de grille et pas les carrés et si vous vous contentez de les cocher, vous ne rencontrerez pas les mêmes difficultés que si vous vous mettez à numéroter les cases de bordure, comme je l'ai vu faire par des élèves.

Pour numéroter les cases de bordure je devrais en effet inscrire deux numéros aux carrés d'angle saillants et pas de numéro aux carrés d'angle rentrants. La croix compte huit angles saillants et quatre angles rentrants. Si vous numérotez donc naïvement, sans penser plus loin, toutes les cases de la bordure, vous trouverez le périmètre de la croix diminué de quatre unités, vous aurez fait douze erreurs mais huit se seront compensées. Deux moyens de confronter cette expérience : faire numéroter la bordure externe de la croix, demander le périmètre de la croix qui occupe cinq cases, ici si on veut dénombrer les carrés, il faut par exemple compter trois fois chacune des branches, on peut faire encore plus compliqué. On devrait observer que le sujet abandonne alors la numérotation des cases.

J'ai développé cet exemple pour vous faire comprendre le rôle non banal du quadrillage dans la tâche de dessin. C'est pour des raisons du même ordre que la taille du quadrillage va jouer un rôle, comme l'indiquent, empiriquement, les manuels lorsqu'ils affirment que cette taille est une variable de l'exercice.

On observe en effet qu'il est très facile de dessiner une croix de type cg sur cinq carrés du quadrillage (un carré central et cinq branches carrées), et il est bien moins facile, même pour certains adultes que j'ai pu observer dans mes séminaires, de dessiner une croix de type cg de six, huit, douze carrés de côté.

Une hypothèse est que pour dessiner les premières, le trait change de direction à chaque point du quadrillage, alors que dans les autres cas, il faut savoir si en chaque point de la maille si on doit prolonger le trait ou lui faire changer de direction.

De plus, si vous décomposez une croix de type cg en cinq carrés (toujours le même schéma : carré central et carrés branches), que vous le fassiez effectivement ou seulement mentalement, il vous sera aisé de repérer les lignes de découpage et partant, de les reproduire.

En effet ces lignes, que la figure de l'énoncé présente comme des lignes de la croix, vont pouvoir être réinterprétées, ne serait-ce que figuralemment, comme des diagonales de rectangles de longueur 2 et de largeur 1 (que j'appellerai désormais rectangles bicarrés).

Le quadrillage est donc bien un instrument sémiotique où vient s'exercer le contrôle du savoir sur le dessin de la croix. Le lien entre la reproduction de la croix avec ses lignes de découpe et le puzzle à résoudre est réalisé expérimentalement sur le quadrillage.

Il se peut d'ailleurs que dans leur recherche du puzzle, les élèves saisissent des lignes de quadrillage, et là encore, si on a des mailles larges, voire le quadrillage de la croix en cinq carrés, leurs recherches seront facilitées d'autant.

Ces liens ne sont pas arbitraires. On ne réussira pas à produire un carré en coupant selon n'importe quelles lignes de la croix. Il faut que ces dernières se coupent à angles droits (ou permettent de reproduire quatre angles droits), et qu'elles aient des longueurs multiples de 5 fois le côté de la croix, etc.

À nouveau, l'exercice n'en demande pas tant, tout ceci reste dans l'ombre (à découvrir éventuellement plus tard dans la scolarité). Tous ces liens existent en projet, signalés dans l'expérience dont l'exercice présente le protocole idéal. Ils y sont enfermés dans un lien (signe) qui existe avant toutes ces déterminations, et qui subsistera après le temps de cette petite expérience. Quelqu'un pourra se souvenir de cet exercice rien qu'à l'évocation du puzzle, mais surtout une fois ce lien fait, on ne perçoit plus la croix et le carré tout à fait de la même manière. Et cela va influencer le prochain exercice de reproduction de croix ou de figures assimilables. Cela ne veut pas dire que ce lien ne sera pas oublié, ou ne sortira pas de l'esprit des sujets.

Je voudrais mentionner encore un phénomène important que j'appellerai « surprise iconique ». Comme je l'ai déjà évoqué, d'un côté, on vous donne une figure crénelée, la croix, découpée de manière rectiligne, et de l'autre vous découvrez une forme à bords rectilignes, le carré avec une découpe en créneaux. Cette dualité lignes / bords se prolonge en celle de dessin-d'objets / dessins-de-motifs, deux factualisations possibles et distinctes des figures géométriques. Cet aspect crénelé n'est qu'une icône parmi d'autres.

Par exemple, nous avons été fort surpris qu'un élève dessine cette croix au tableau noir, un tableau quadrillé, en croisant perpendiculairement deux rectangles tricarrés (de 3 de long et 1 de large).

Beaucoup d'enfants disent aussi « croix large » ou « croix doublée » pour des croix à figure polygonale comme les croix grecques en particulier. En effet pour eux (et pour nous aussi) deux droites sécantes forment déjà une croix.

Le jeu sémiotique entre rectiligne et dentelé se retrouve sur les polygones étoilés bien sûr. On peut donc obtenir des figures de croix en croisant des lignes plutôt qu'en suivant leur contour. Ce fait intervient fortement dans le dessin de pavages parce que suivre globalement des lignes est une procédure plus économique et efficace que constituer localement croix après croix, le pavage.

La distinction globale / locale est une question de repères. Localement on se repère à son voisinage et au fur et à mesure du dessin on se perd dans la multiplication de ces derniers ; globalement, on se fie à des repères « absolus », comme un cadre, une direction, toutes choses qui ont une certaine pertinence géométrique.

On a vu que le découpage de la croix de type cg résulte d'une superposition (croisement) de deux pavages, l'un avec les croix, l'autre avec des carrés de dimensions idoines, mais on peut aussi reporter et réaliser cela sur un quadrillage pour lequel la croix sera composée de cinq cases.

Comment donc le carré solution, de côté $\sqrt{5}$, sera-t-il lui-même quadrillé ? Il le sera de manière oblique (relativement à ses bords) par deux paires de diagonales de demi-carrés (les demi-carrés sont des bicarrés) de $\sqrt{5}$ de long et de $\sqrt{5}/2$ de large. Ces deux paires de droites formant une croix.

Voir apparaître une telle figure fut pour moi une surprise iconique qui a vite trouvé interprétations. Actuellement, j'y lis la solution de ce petit puzzle ainsi que d'autres jeux de motifs. Cela peut me servir de moyen mnémotechnique.

À l'enseigne de la croix géniale, une succession de tâches cloisonnées. Marginalisation du problème.

Le manuel de 3P a donc choisi la croix géniale comme enseigne. Examinons de plus près comment l'exercice est conçu. Je l'ai décrit comme une activité en deux volets. Un premier volet de dessin géométrique, un second volet de résolution d'une petite énigme. Il n'y a aucune nécessité à s'exercer au puzzle pour devenir un bon dessinateur, et vice et versa. Cela montre l'indépendance entre les deux moments de cette activité. Alors pourquoi les avoir associés ? Le puzzle est-il la fin de l'histoire ou seulement son prétexte ? S'agit-il seulement d'agrémenter d'une phase récréative un exercice qui pourrait être par trop fastidieux ? Il y a de tout cela, mais pas seulement.

Pour y voir plus clair dans la conception des auteurs de la fiche *croix géniale*, prenons un exemple, extrait des manuels de 3^{ème} et 4^{ème} primaire (Manuel 4P, Danalet C. et alii, 1999). Dans les commentaires pour les enseignants on trouve ceci, p. 238-239 :

« Si un élève demande à un camarade de reproduire exactement la figure suivante sans pouvoir l'observer, il doit lui envoyer un message qui utilise un vocabulaire précis.

(i suit la donnée de la figure que j'omets délibérément de reproduire ici - voir infra i)

Il peut désigner le carré extérieur de 4cm de côté, puis le carré dont les sommets sont les quatre milieux des côtés du premier carré, et finalement, les diagonales du deuxième carré.

Il peut aussi parler de quatre carrés juxtaposés, de 2cm chacun de côté, constituant un grand carré, et, pour chacun de ces quatre carrés, de la diagonale qui ne passe pas par le centre du grand carré.

L'important, dans ces deux descriptions, n'est pas l'ordre dans lequel la construction est perçue et transmise, c'est la rigueur permettant l'unicité de l'interprétation.

Les outils d'élaboration des figures géométriques.

A de nombreuses reprises, on demande à l'enfant de dessiner, de reproduire, de représenter des figures géométriques. Il dispose évidemment d'instruments comme la règle, l'équerre, voire le compas, le papier calque, des quadrillages, les ciseaux, etc. Mais ces instruments ne sont efficaces que si on sait à quoi ils servent. L'enfant a besoin d'autres outils, abstraits, comme la notion de droite, celle de parallélisme,

celles de perpendicularité, d'angle, d'équidistance, de symétrie, de translation, de rotation, etc., qui sont utilisés en coordination avec l'usage des instruments de dessin géométrique.

Les descriptions précédentes utilisent les mots « carré », « sommet », « milieu », « diagonale », mais avant que ces mots ne deviennent des outils, il y a un long travail d'élaboration, car la terminologie ne s'apprend pas indépendamment de la conception des notions qu'elle recouvre. En parlant de « carré de 2cm de côté » dans son message, l'enfant sait qu'il décrit un polygone à 4 angles droits et à 4 côtés mesurant chacun 2cm.

Mais si le concept « carré » a déjà acquis un statut d'outil dans cette situation de communication, il ne faudrait pas croire que cet outil possède toutes les propriétés du carré ou qu'il ne lui en attribue pas d'autres. (i)

Il faudra revenir à la figure « carré » dans d'autres contextes pour faire émerger d'autres propriétés ou pour renoncer à certaines caractéristiques provisoires. Par exemple lorsque le carré doit être construit sur une feuille blanche et avec ses côtés non parallèles au bord de la feuille ou de grande dimension, sur un terrain sans repères perpendiculaires. »

Ce qui m'étonne dans ce commentaire du manuel est que les auteurs ont la générosité de présenter à leurs lecteurs la figure de leur exemple. C'est faire peu de confiance en leur rigueur permettant l'univocité de l'interprétation ! En tous les cas, voilà les lecteurs dispensés de se retrouver à la place des élèves. Voilà pourquoi je m'amuse en omettant de reproduire à mon tour la figure à laquelle se réfèrent ces descriptions. Pour ceux qui hésiteraient encore dans leur interprétation, une autre manière d'obtenir cette figure :

Dessiner un carré de 4cm de côté, marquer les 4 milieux des côtés de ce carré et relier deux à deux chacun de ces points milieux avec les trois autres points milieux.

Vous remarquerez que je me suis fait plus économe que le manuel. Je ne mentionne qu'un seul carré et les milieux de ses côtés. Serait-ce une description plus élémentaire, moins conceptualisée ? Nous sommes ici en train d'évoquer des marches à suivre de dessin géométrique et leur degré de simplicité.

La question qui se pose ici et que le manuel ne semble pas comprendre, est qu'il y a un lien entre la lecture de l'émetteur, sa description dans son message et le décodage du récepteur. Il faut en effet encore identifier le dessin en lui-même, et la simple copie d'une figure, donnée, nécessite déjà une conceptualisation, qui elle est préalable aux nécessités d'une communication³.

³ Nous retrouvons ici ce que les piagétiens ont entre autre H. Sinclair - avaient mis en évidence avec l'usage des vocables *tous, quelques*, etc. par les jeunes enfants et plus généralement toutes les remarques sur les relations entre opératif et figuratif. Ainsi la copie d'un modèle ou la description pour communication sont plus à considérer comme des modalités distinctes faisant appel aux mêmes opérations que comme des activités inscrites dans une progression. Mais les manuels essaient par leurs commentaires d'évoquer les *situations d'action, situations de formulation* et *situations de validation* de la *théorie des situations*, et confondent situation de communication avec situation de formulation (originellement dans cette théorie : *dialectique* de la formulation).

Pour en revenir à la fiche croix géniale, on nous y présente une croix dont les élèves prendront connaissance à la faveur de la copie qui leur est demandée, puis qu'ils verront sous un autre angle dans celle du puzzle. Ce que j'ai décrit à propos du quadrillage montre un lien étroit entre les deux activités, en ce sens qu'elles ne sont pas seulement liées par le fait qu'elles mettent en jeu le même objet, une croix de type cg, mais encore que les mêmes instruments (le manuel dirait outils), **eux aussi**, y interviennent sous un jour nouveau.

En effet, il s'agit ici d'abord de produire un dessin géométrique à la règle sur quadrillage, tandis que le puzzle de la croix magique procède, lui aussi, d'un jeu de pavages et de quadrillages.

Il y a bien une unité de thème dans cet exercice, une solidarité conceptuelle entre objets et outils de la géométrie, entre dessins et figures. Cela n'est pourtant révélé nulle part dans le manuel qui est fidèle à une conception didactique classique, cloisonnée et faussement progressive. Voyons cela de plus près.

L'exercice est présenté comme un travail individuel pour lequel on donne une marche à suivre en quatre points, une recette pour se confectionner un petit puzzle à résoudre (le point 4 et ultime point de la marche à suivre). Les trois premiers points concernent la préparation du matériel. La succession des étapes est totalement déterminée, la réussite à chaque étape dépend de la réussite à celles qui la précèdent ; chacune se présente comme une nouvelle tâche, comme si ces tâches étaient fermées les unes aux autres.

Comme je l'ai montré le quadrillage « traverse » pourtant l'activité de part en part, même si cela reste occulté, comme s'il était à chaque fois instrumenté d'une autre manière.

J'espère vous avoir convaincu que cognitivement et sémiotiquement ce cloisonnement supposé des tâches n'est pas réalisé. Il ne le serait que si les élèves étaient des automates (c'est là le côté idéal de ce que propose la fiche). Le découpage même du manuel est trompeur puisqu'il met sur le même plan quatre étapes alors qu'il faudrait distinguer un découpage en deux moments : confectionner les pièces du casse-tête / le résoudre.

Et d'ailleurs, curieusement, lorsque le manuel décrit la tâche associée à cette fiche, il ne mentionne pas le puzzle : « *Tâche / Dessiner, découper et assembler précisément une figure selon un plan donné.* » ou encore dans une autre page de commentaires : « *Dans Croix géniale, les élèves sont amenés à reproduire précisément une figure afin de pouvoir la découper selon un plan.* » Dans les deux cas : exit le problème à résoudre.

Serait-ce que résoudre un puzzle ne serait pas digne de figurer comme une tâche sérieuse dans un manuel de maths ? Je ne le crois pas, vu que le dit manuel insiste par ailleurs très lourdement sur l'importance de la résolution de problème et de situations-problèmes.

Mon hypothèse est que le manuel ne sait pas décrire une réussite à un tel puzzle autrement que comme manifestation d'astuce et d'ingéniosité ; et cela ne peut être objet d'une tâche, et ne s'enseigne pas non plus.

Quoi qu'il en soit, l'exercice présente bien deux moments qui n'ont pas le même statut didactique, et qui sont considérés comme hétérogènes. Le premier volet (les points 1, 2, et 3 de la consigne) se présente effectivement comme une suite de tâches d'application suivant un mode d'emploi, une recette, un algorithme etc., considérées comme relativement transparentes, mettant en place une première « conceptualisation » de la croix grecque ; le second volet, le point 4 de la consigne, est une énigme pour laquelle restera toujours quelque chose de mystérieux, d'insaisissable : l'intuition de la solution (le : « il suffisait d'y penser », etc.), faisant de la croix grecque une croix géniale.

Cela ne veut pas dire pour autant qu'aucune rétroaction ne soit prévue dans le scénario de l'exercice.

Comme je l'ai déjà fait remarquer, celui-ci assigne une fonction de validation à la résolution du puzzle : « Validation / Les élèves contrôlent la précision de leur dessin et de leur découpage en assemblant le carré solution. » Ce n'est pas rien et j'y reviendrai.

Mais là encore, la rétroaction est conçue comme agissant de l'extérieur, elle permettrait d'apprécier la précision du résultat, tout au plus les difficultés que le sujet aura pu rencontrer avec son puzzle et ses pièces mal découpées.

Son matériel mal foutu, pour dire vulgairement les choses, convaincra l'élève qu'il aurait mieux valu qu'il s'applique un peu plus à produire sa croix et à la découper.

Alors que, comme je l'ai indiqué, bien interpréter les lignes de coupes comme bords du carré à reconstituer, c'est-à-dire penser aux relations internes des points 2 et 4 de la consigne, aide sérieusement à comprendre et donc à contrôler leur positionnement sur la croix, aide donc à réussir déjà le point 2 de la consigne.

Il ne serait donc pas inutile de revenir à la copie et au découpage une fois qu'on a réussi pour soi le puzzle ; n'oublions pas que c'est très exactement ce que les auteurs ont fait !

Dit autrement l'enrichissement de points de vue sur la croix de type cg occasionné par le travail sur la tâche puzzle est à même de rejaillir sur l'exécution de la tâche de confection des pièces. Le travail en boucle n'est pas inutile, il est sans doute même nécessaire. L'enseignant se trouve donc devant une décision à prendre. Va-t-il contrôler pas à pas la confection des pièces, ou se permettra-t-il de les laisser faire toutes leurs coupes, quitte à ce qu'ils se trompent, échouent au puzzle et se retrouvent à devoir tout reprendre au début ?

Dans le même ordre d'idées, examinons les difficultés des élèves évoquées par le manuel et la manière prévue pour leur venir en aide.

Elles se réduisent à fort peu : « Variable / Matériel / Aux élèves qui ne parviennent pas à respecter les proportions des côtés de la croix, l'enseignant donne du papier quadrillé de 1cm, 2cm ou 3cm. ».

De nouveau, exit la résolution du puzzle, car en ce qui concerne cette partie de l'exercice on trouve ou bien on ne trouve pas, tout au plus peut-on s'y reprendre à plusieurs reprises, mais il n'y aura rien à corriger. (Je caricature un petit peu).

Pour une tâche d'application on produit toujours quelque chose de correct (satisfaisant) ou d'incorrect. On dispose donc d'éléments que l'on peut tenter de corriger. Dans ce cas, la rétroaction a la forme d'un fait du milieu, un dessin, une production. Dans le cas d'une énigme comme le puzzle, cela reste le fait du sujet⁴.

Si on veut entrer dans l'activité, il faut trouver quelque chose de saisissable, un élément d'objectif à quoi rattacher le travail du sujet, ceci demande à s'intéresser à ce que le sujet produit et à chercher à l'interpréter comme un indice ou un symbole. Fréquemment faute de moyens d'analyse, l'enseignant restera indifférent à ce que fait le sujet lors de ses tentatives, ou au mieux leur reconnaîtra un statut de jolie icône, un fait anecdotique.

Dans cet exercice l'élève est interpellé successivement comme un tâcheron puis comme un ingénieur. J'ai l'impression que d'un côté le manuel est incapable de reconnaître les problèmes mathématiques que pose le dessin géométrique (à la règle sur un quadrillage), et que d'un autre côté, il est tout autant incapable de percevoir dans le puzzle autre chose qu'un problème à résoudre.

Tel est l'effet de cloisonnement des savoirs. C'est toujours l'expérience qui amène ces derniers à s'ouvrir, et surtout à s'ouvrir les uns aux autres. C'est ce que je me suis efforcé de faire en vous évoquant toute la richesse que renferme en puissance cette petite situation. Pour bien cerner l'enjeu que je vois à cet exercice, ce qui m'a amené à m'y intéresser plus particulièrement, je voudrais présenter les choses sous deux nouveaux points de vue encore, quitte à me répéter un peu (le travail en boucle disais-je).

À la fois imprécise et approximative, l'expérience se marque au fil de répliques.

Ainsi donc les deux volets de notre exercice sont occasionnellement liés par un objet mathématique prégnant⁵ - une croix - et une surprise - une croix *géniale*. On propose une expérience à faire avec la croix de type cg, expérience qui a pour but de vous démontrer cette propriété que les auteurs disent *géniale*.

Traduit en langage expérimental, celui d'une marche à suivre pour mener l'expérience, le schéma de présentation du manuel est le suivant : intrigue, préparation de l'expérience, expérience. Pour le plaisir de la découverte d'une propriété amusante de la nature, l'élève est mué en préparateur et expérimentateur de classe. Tout comme dans une expérience amusante de physique, on a dissocié ce qui a trait aux principes de préparation de l'expérience et ce qui a trait à l'expérience elle-même. Cette dernière vise à reproduire un phénomène, pas à l'expliquer ni même à l'étudier théoriquement. Le phénomène reste, dans le cadre strict de sa reproduction, une boîte noire. Dans le cas des sciences naturelles, le phénomène sera telle réaction chimique, tel mouvement d'objet etc. **Dans notre cas, c'est la résolution du problème elle-même qui est le phénomène que l'on vise à reproduire.** Elle reste boîte

⁴ Du moins tant que le sujet ne se sera pas arrêté pour considérer qu'il a obtenu « presque un carré », qu'il analyse en quoi sa figure n'est pas carrée et qu'il cherche à corriger son agencement des pièces.

⁵ Et par un filet de relations moins manifestes, que je signalerais par le fait de l'inscription de cet objet dans un quadrillage !

noire, on n'a rien à en dire (ici, dans le protocole expérimental que représente cette fiche). Comme je le disais très exactement dans Conne 1999 :

« (En mathématiques) C'est au sujet qu'il incombe d'entretenir ses objets d'expérience, il porte son laboratoire en lui et ne peut y faire entrer personne d'autre; en mathématiques chacun entretient lui-même ses cobayes. Si le naturaliste apprivoise des animaux de laboratoire c'est pour qu'ils jouent leur rôle de sujets dans ses expérimentations. Le mathématicien par contre ne peut se contenter de telles mises en scènes, il doit tout animer lui-même, de bout en bout l'expérience est son fait. »

Cet exercice est donc conçu comme un travail pratique de mathématiques, et dans ce genre didactique, on vous invite à la fois à apprendre les gestes du préparateur et à réaliser l'expérience⁶. Et comme il en va en sciences naturelles les deux versants de l'exercice sont cloisonnés : l'expérience professionnelle du préparateur n'est pas l'expérience scientifique qu'il réalise. Ce n'est jamais sans lien bien sûr, car la technologie des instruments utilisés repose souvent sur des phénomènes impliqués dans le montage expérimental. Toutefois en mathématiques, ce recouplement est bien plus fort, il y a là à ne pas douter une différence qualitative !

Le quadrillage, par exemple, est non seulement un appareil pour le montage expérimental, mais encore il sera un moyen d'expliquer le phénomène, en amenant les éléments métriques nécessaires (le ç5), et en montrant le jeu de pavages (Lindgren). La confusion sera donc d'autant plus forte dans le cas d'un enseignement expérimental en maths⁷.

Ainsi le cloisonnement de l'exercice fait que l'on ne s'attend à ne rencontrer aucune surprise au dessin géométrique, je disais que c'était considéré comme transparent, tandis que la résolution du puzzle était laissée à l'astuce et l'ingéniosité des élèves. En langage commun, on pourrait aller jusqu'à dire que le premier volet de l'exercice représenterait le volet didactique de la situation (ce qu'on exige d'un élève appliqué), tandis que le second représenterait son volet authentique (ce qu'on espère d'un élève intelligent) ! Bien entendu ce n'est pas mon langage. Comment penser plus correctement la relation entre ce qui a trait à l'expérience du puzzle et celle de sa préparation ?

Ce qui est facteur d'ambiguïté en mathématiques peut-il s'avérer atout ? Toutes mes analyses, en particulier sur les aspects conceptuels de dessins d'objets ou de motifs, de lignes et de bords, de pavages et quadrillages etc., nous donnent des pistes sérieuses et profondes. Le seul aspect que je veux examiner ici, parce qu'il est essentiel, a trait à la question de la précision et de la perfection des réalisations effectives.

Prenez l'activité croix géniale, on demande aux élèves de confectionner des pièces de puzzle dans une feuille de papier ! Gageons que très vite elles seront écornées, froissées, que leurs bords ne s'appliqueront plus sans jour etc. L'activité se contente donc, pour des raisons matérielles évidentes, d'une grande marge d'imperfection.

⁶ Toute activité didactique renferme un écho en ce sens qu'on réalise une expérience didactique dont le contenu est de faire faire une expérience mathématique et cognitive aux élèves. Il est important de voir ce double fond expérimental de l'exercice.

⁷ Comme l'indique la citation du manuel ci-dessus. (On pourra aussi invoquer la dialectique outil/objet, les jeux de cadres, et le jeu de registres sémiotiques, bien sûr.)

Cela veut dire que la réussite au puzzle devra l'emporter sur toutes les considérations matérielles.

Pourtant les imperfections dans la confection des pièces ne proviendront pas nécessairement de traits de crayons mal ajustés, éventuellement tirés à main levée, de coups de ciseaux mal assurés etc. Il se peut que l'élève se trompe dans sa conception de la figure et de son découpage. Par exemple il se peut que l'élève reproduise une croix grecque dont les branches ne soient pas carrées⁸, ou encore que les traits de découpe soient bien de biais par rapport aux bords de la croix, en quelque sorte en diagonale mais n'aient pas comme extrémités les mêmes sommets que sur le modèle, l'élève se contentant de reproduire un aspect de ces traits et pas leur exacte position (mais qui leur aura dit en quoi consiste cette exacte position ?).

L'essentiel réside ici que ces deux aspects ne sont pas indépendants. Si le sentiment d'avoir réussi le puzzle peut l'emporter sur l'examen des détails (des jours laissés entre les pièces, des coins qui se relèvent et ne s'encastrent donc pas vraiment, etc.) c'est que le schéma et les nécessités idéales qu'il révèle, l'emportent sur la réalisation matérielle. Cela marque qu'on est bien en mathématiques et pas aux travaux manuels !

Mais inversement aussi, si le sujet n'arrive pas à trouver la solution du puzzle, on pourra le rendre attentif à la forme de ses pièces, ou toute autre imperfection servant d'indice à suspecter une erreur conceptuelle. À chaque fois on peut le renvoyer à des modèles, lui montrer où sa croix n'est pas ressemblante, où son carré est un peu de travers, ou encore le rendre attentif aux jours qu'il a laissés entre les pièces etc.

Il faut donc distinguer ce qui a trait à une marge d'imprécision dans la réalisation et le positionnement des pièces, et ce, à chacune des quatre étapes de l'activité, et ce qui a trait à une marge d'approximation dans la schématisation figurale, et comprendre qu'ils ne sont pas indépendants l'un de l'autre^{9 & 10}.

Comme nous l'avons vu, cet aspect des choses est évoqué par le manuel lorsqu'il déclare : « *Les élèves contrôlent la précision de leur dessin et de leur découpage en assemblant le carré solution.* »

Mais comment interpréter cela ? Que veut dire ici « contrôler » ? L'expérience du puzzle est-il simplement l'occasion donnée aux élèves d'éprouver le soin qu'ils auront mis à la confection de leurs pièces, ou bien est-ce qu'on s'attend à plus, à ce que les élèves qui ne réussiraient pas à trouver la solution du puzzle se demandent si ils n'auraient pas commis une erreur dans la copie et la découpe de leur patron ?

⁸ La croix grecque à branches rectangulaires est la représentation la plus commune que les gens se font d'une croix régulière, rappelons que la croix du drapeau suisse n'a pas des branches carrées et que la langue française ne semble pas avoir de nom propre pour désigner la croix grecque à branches carrées.

⁹ La précision et l'efficacité du sujet à produire un dessin puis une découpe acceptables dépendra de son appréhension schématique, diagrammatique plutôt que simplement iconique, de son modèle. (C'est là-dessus qu'est basé le test psychologique de reproduction de figure complexe de Rey, pour donner un exemple.) Dans l'exemple de la croix cg, on peut approcher son modèle de diverses manières.

¹⁰ Cette distinction fine entre un modèle idéal et des schémas approximatifs et imparfaits qu'ils soient suscités à l'occasion d'une réalisation effective ou seulement à celle d'une évocation, se retrouve autant pour l'expérience proprement dite que les sujets font avec cet exercice que pour l'expérience didactique dont la fiche du manuel nous présente un modèle.

Une autre question se pose aussi : et qu'est-ce qui viendra valider le carré solution ? Eh bien sa découverte pardi ! Toutefois comme je viens de le signaler il faudra encore que l'élève ait conscience de sa trouvaille. La situation est de ce point de vue exactement la même que lors du dessin géométrique et de la découpe de la croix. Il pensera avoir reproduit sa croix de manière suffisamment précise, aura reporté les lignes comme il faut, du moins le croit-il, il aura découpé ses pièces et se mettra à chercher à les assembler en carré. Il aura peut-être trouvé un arrangement qui lui donne un carré, imparfait certes, mais qui pourrait le satisfaire.

Pour en revenir à ma dernière citation du manuel, je trouve donc plutôt étonnant que l'on fasse jouer à une activité de résolution de problème, qui peut s'épuiser sans aboutir à quoi que ce soit, la fonction de contrôler le résultat d'une activité d'application, qui, elle au contraire, produira toujours à quelque chose de tangible !

Supposons que vous cherchiez la solution du puzzle. Un premier essai n'aboutit pas. Que faites-vous ? Vous essayez autre chose. Etc. Au bout de plusieurs essais, vous allez vous demander si vous avez bien le bon jeu de pièces, et peut-être allez-vous chercher une erreur dans la partie préparatoire de l'activité et réexaminer vos pièces en les comparant au modèle. Mais il se pourra fort bien que vos pièces soient correctes, et là deux possibilités encore. Soit vous les modifiez quand même, et alors vous vous enfermerez encore plus, soit vous reprenez la recherche du puzzle. Cela peut durer longtemps.

En réalité des informations extérieures viendront vous tirer d'affaire, mais ce seront toujours des arguments d'autorité car on vous montrera que certains élèves ont réussi leur puzzle, obtenu des carrés plus convaincants que celui dont vous espériez vous suffire. Ou bien ce sera l'enseignant qui vous donnera la solution (histoire de monter qu'elle existe bel et bien).

Dans tous ces cas, vous prendrez pour modèle non plus les figures de la consigne, mais les pièces que ces élèves ou l'enseignant auront fabriquées. Et vous examinerez par cette comparaison si votre interprétation de la figure modèle correspond à la leur. Si oui, alors ils auraient résolu le puzzle même s'ils avaient eu vos pièces en main. Sinon, ce sont vos pièces qui sont défectueuses. Alors, vous essayerez peut-être de copier leurs pièces afin d'apprendre l'interprétation que vous auriez dû trouver par vous-mêmes.

De fait c'est bien ce qu'on observe et souvent les élèves révisent leur jugement lorsqu'ils se rendent compte qu'un de leur camarade a trouvé un *meilleur carré* !

La question est donc de savoir de quoi les défauts de réalisation sont des indices. Non seulement certains de ces défauts ne sont qu'indices de maladresse, alors que d'autres sont indices de représentations inadéquates, mais encore certains de ces indices sont fixés matériellement, on en a la trace, alors que d'autres, par exemple le simple fait de ne pas réussir à trouver la solution du puzzle, ne sont pas matériels bien que tout à fait réels : quelque chose qui devrait se passer n'advient pas, on n'arrive pas à reproduire quelque chose. Pour ces derniers, si on veut pouvoir travailler dessus, échanger à leur propos, il faudra leur trouver des signes, et plus précisément des répliques !

En résumé, dans la confection des pièces, on peut s'accommoder d'imperfections et passer outre, tandis que dans le problème de puzzle, se résigner à ne rien arriver à produire nous fait jeter l'éponge.

De plus, dans la manipulation des pièces, toute correction détruit la réponse antérieure, et il est de ce fait de manque de traces, fort difficile de raisonner sur l'écart entre la réponse trouvée et la solution, et on est sans cesse ramené à refaire la tâche en espérant que cette fois on va trouver, ou sinon en essayant de trouver quelque chose qui nous permette de nous convaincre, à tort ou à raison, qu'on a bel et bien trouvé la solution.

Bref, ce qui ressort de tous ces raisonnements, c'est l'importance dans cet exercice de disposer de plusieurs répliques de la même expérience. Cela parce que toute réponse à une tâche est relative à une interprétation de la donnée et que dans certains cas il faut pouvoir comparer différentes interprétations entre elles pour se diriger vers la solution.

Conclusion : un nouvel enjeu autour de la fiche *croix géniale*.

Bien entendu ce que j'évoque prendra du temps, beaucoup de temps, trop de temps même pour l'école. L'enseignant décidera donc d'intervenir s'il voit que l'élève s'égare. Le plus simple est d'agir à titre préventif en demandant aux élèves de faire contrôler leur résultat à l'issue de chacune des étapes de la marche à suivre, voire même la décomposer encore plus s'il le faut. Cela incite l'élève à comparer sa production, c'est-à-dire son interprétation de la figure, à celle du maître, donnée correcte et surtout la seule qui soit a priori adéquate. La performance attendue de l'élève est préinterprétée dans un cloisonnement de l'expérience présentée dans le format d'une succession de tâches. Alors, peu importe que l'élève arrive par la suite à résoudre le puzzle, ce ne sera plus qu'un exercice récréatif optionnel, pour ceux qui n'auront pas pris tout leur temps à dessiner et découper les pièces. La *croix géniale* est réduite à un prétexte, elle n'est plus un interprétant, on la décharge de tout enjeu, elle ne fait plus que signaler aux enseignants qu'il faut apprendre aux élèves à dessiner avec précision et aux élèves qu'ils doivent s'y appliquer. Ce devenir du signe (une telle dégénérescence) n'est pourtant pas inéluctable, on peut lui en chercher d'autres développements.

C'est ce que nous essayons de faire en reposant autrement la question de la précision. La reproduction fidèle est-elle la seule voie pour amener les élèves sur la solution de ce casse-tête, n'y en aurait-il pas de meilleure ? Que constatons-nous ? Que c'est une marque de grande maîtrise mathématicienne que de pouvoir se contenter d'esquisser la solution.

Si vous maîtrisez bien la figure d'une croix de type cg, et ici il suffit de la décomposer schématiquement en un carré central et 4 branches carrées de même dimension, et si vous savez définir les lignes de coupes comme des diagonales de rectangles bicarrés, vous arrivez fort bien à exprimer ces relations sur une simple esquisse faite à main levée. Et de même pour le carré et sa propre décomposition. Si vous en savez suffisamment, un diagramme suffira, pas besoin de reproduire tous les détails iconiques. Il n'y a aucune nécessité réelle à ce que l'on reproduise fidèlement les figures du manuel pour arriver à résoudre le puzzle, il suffit de respecter quelques relations simples.

Il faut en effet considérer ces choses sous un point de vue d'un contrôle dynamique de ses actes, d'une part, et des transformations qu'ils impriment aux objets d'autre part.

Reproduire exactement la figure, s'appliquer au découpage permettent de confier tout le contrôle au milieu, aux pièces ainsi confectionnées ; savoir suffisamment de géométrie vous permet de vous passer d'une grande part de ce contrôle puisque ce sont alors vos savoirs qui s'en chargent. Dit autrement la conviction viendra des relations de nécessités que vous y verrez (que l'on ne soit jamais à l'abri d'une erreur importe peu dans mon propos) plutôt que des constats.

On comprend aussi pourquoi ceux qui sont capables de saisir les relations pertinentes au travers d'une esquisse seront souvent aussi ceux qui seront capables de produire les dessins les plus précis : ils disposent des savoirs qui leur permettent de contrôler efficacement l'accomplissement de chacune des tâches prescrites.

Or c'est bien ce qu'il s'agit de viser, puisqu'il s'agit d'apprendre les mathématiques plutôt que le dessin ou la résolution de puzzle.

Contrairement aux manuels, je préconiserais donc une autre présentation de la situation que par la donnée d'une séquence univoque et linéaire de sous-tâches. Je chercherais au contraire à contraster les moments où j'encouragerais la précision et ceux où au contraire j'encouragerais la saisie des intuitions dans et par des esquisses schématiques. Deux idées me guident : la diversité des registres sémiotiques afin de stimuler le travail (ré)interprétatif, et l'éclatement en tâches multiples associées dans l'expérience afin de susciter surprises et recouvrements.

Une autre raison me pousse dans cette voie. Le défaut du manuel est qu'il est trop positiviste, il n'est capable de penser qu'en fonction d'une réussite aux exercices qu'il propose. Il tente naïvement de reproduire un modèle : un élève pour qui il suffira de bien s'appliquer dans son travail pour réussir à dessiner correctement sa croix et les lignes de découpe, et qui arrivera dans un temps raisonnable à recomposer un carré, pour qui, par conséquent, l'expérience le rendra plus expert encore en dessin géométrique (et partant en géométrie).

Imaginez que l'élève ait mal reproduit sa croix ou les lignes de découpe. Dans ce cas - mais qui le sait vraiment ? - il va se trouver devant un puzzle impossible. Il ne trouvera pas de solution, non pas parce qu'il n'a pas la bonne idée mais parce qu'il n'existe pas de solution¹¹.

Ces élèves existent certainement. Mais les autres, qu'est-ce donc que l'exercice pourrait leur procurer ? Faut-il leur simplifier la tâche ? Leur donner les pièces déjà découpées pour qu'ils aient au moins l'occasion de s'essayer au puzzle ou au contraire leur apprendre patiemment à reproduire la figure de la croix ? Et ces lignes intérieures qu'en faire ? Demander à les reproduire n'a aucun sens si ce n'est pour proposer un découpage, ... alors ? Que peut donc

¹¹ Qui lui montrera qu'il n'y en a pas, qu'il ne peut y en avoir ? Mathématiquement parlant, qui est capable d'en fournir la démonstration ? Qui donc est même assuré de l'inexistence de contre exemple ; ne pourrait-il pas exister une croix qui ne soit pas de type cg et des lignes de découpe ressemblantes à celles du dessin qui permettraient aussi un assemblage en carré ? Ne pourrait-il pas exister des lignes de découpe proches de celles dessinées sur le modèle qui permettent aussi un assemblage en carré ? Que se passe-t-il dans ces cas ? Et d'ailleurs qui donc s'en soucie ?

apprendre un élève à cet exercice s'il n'aboutit pas ? Et que peut apprendre une classe à cet exercice si les $\frac{3}{4}$ des élèves n'aboutissent pas ? Voilà les questions qui sont posées aux enseignants spécialisés.

La réponse est : rien de contrôlable !

Là-dessus les manuels sont totalement muets, et pour cause, en décrivant les choses dans les termes qu'ils se sont donnés, ils ne peuvent tout simplement pas concevoir une telle éventualité.

Il faut en effet changer les termes du problème, un seul mot suffit : non plus se demander que peut apprendre un élève, mais bien quel parti un enseignant peut-il tirer de cette activité pour des élèves qui manifestement ne correspondent pas au modèle que se font les manuels ? Comment faire bon usage de ce couplage entre l'exercice au dessin géométrique et la propriété de la croix de type cg autrement que le proposent les manuels ?

Pour moi, la croix géniale doit rester un enjeu, il faut comprendre quelle doit le rester pour tous les protagonistes, et pas seulement pour les élèves. De quel enjeu peut-il s'agir pour le maître ? Eh bien l'enjeu de sensibiliser ses élèves à la propriété mathématique qu'elle renferme, l'enjeu de ne pas faire oublier les mathématiques sous prétexte d'enseigner les savoirs-s'appliquer-à-la-reproduction-de-figures-géométriques (simples). J'espère vous avoir montré que se donner une telle exigence nous engage bien plus que cela n'en a l'air à prime abord.

Textes cités

Conne F. (1999) Faire des maths, faire faire des maths et regarder ce que ça donne. In Lemoyne G. & Conne F. (Sous la dir.) *Le cognitif en didactique des mathématiques*, pp. 31-69. Montréal : Presses Université de Montréal.

Danalet C., Dumas J.-P., Studer C. & Villars-Kneubühler F. (1998), *Livre du maître. Méthodologie. Livre de l'élève. Mathématiques 3P*. Commission romande des moyens d'enseignement.

Danalet C., Dumas J.-P., Studer C. & Villars-Kneubühler F. (1999) *Livre du maître. Méthodologie. Livre de l'élève. Mathématiques 4P*. Commission romande des moyens d'enseignement.

Deledicq A. (1998) *Pythagore et Thales*, ACL, Ed. du Kangourou.

15.10.03 - 12.04.2016

Annexe : Quelques remarques à propos des pavages requis pour l'activité cg.

Croix géniale

Tâche

- Dessiner, découper et assembler précisément une figure selon un plan donné.

Déroulement

Validation

- Les élèves contrôlent la précision de leur dessin et de leur découpage en assemblant le carré-solution.


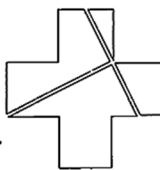
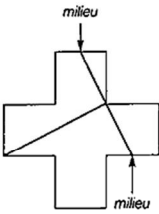
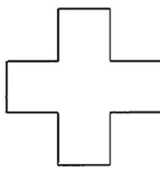
Variable

Matériel

- Aux élèves qui ne parviennent pas à respecter les proportions des côtés de la croix, l'enseignant donne du papier quadrillé de 1 cm, 2 cm ou 3 cm.

Croix géniale

Consigne pour 1 élève
Matériel: papier quadrillé, règle, crayon, ciseaux



1. Dessine une croix qui a exactement la même forme que celle-ci, mais plus grande.
2. Ajoute ces lignes.
3. Découpe ta croix en quatre morceaux.
4. Assemble tes quatre morceaux pour former un carré.

73

Nombre d'élèves

- 1

Matériel

- LE p. 73
- Papier quadrillé 4 ou 5 .nm

Remarque sur la position des lignes dans la croix dans les figures ci-dessus.

Lorsque je vois l'image des lignes dans la croix de la figure 2, mon regard est exercé à remarquer d'emblée qu'elles sont perpendiculaires l'une à l'autre et de même longueurs. Je sais aussi que je peux les désigner comme des diagonales de rectangles de largeur 1 et de longueur 2. J' imagine aussi facilement un quadrillage dans lequel s'inscrit la croix, et dont les branches sont des carrés de la maille. Toutes ces images renvoient aussi pour moi immédiatement à des propriétés de longueurs et d'angles.

La modification que le dessinateur introduit sur la figure 2 pour obtenir la figure 3 qui consiste à dédoubler les lignes de découpe est l'indice d'un changement de statut.

Au départ, on a une croix cg avec deux lignes internes à la figure. À l'arrivée on a le dessin de quatre pièces, leurs bords et leur forme respectifs. La modification du dessin dénote un découpage. Notez que la cg est donnée sans cadre, donc comme implicitement déjà découpée, les lignes externes de la figure signifient déjà des bords.

L'activité propose de passer d'un cas de découpage d'une figure, selon des lignes internes, à celui d'une recomposition des morceaux ainsi obtenus en une autre figure. On a donc affaire à une décomposition suivie d'une recomposition. Du moins pour autant que le sujet se constitue les quatre pièces de son puzzle, en suivant le mode d'emploi ou par toute autre voie, et qu'il les recombine afin de retrouver la figure du carré.

Il peut aussi résoudre son problème en cherchant au contraire à décomposer le carré, ce qui lui donnerait les indications d'une découpe du carré en quatre pièces identiques à chacune de pièces de la découpe de la croix.

Mais si la figure du carré est exactement à l'échelle de celle de la cg, on pourrait chercher à trouver la solution de ce puzzle en décomposant le carré, c'est-à-dire en déterminant des lignes internes de ce carré sur lesquelles on pourrait aligner les bords des morceaux de la croix découpée.

On a vu que la démonstration de J.-M. Favre aura consisté à montrer qu'en assemblant d'une certaine manière les quatre pièces, il obtenait une croix et qu'en les assemblant d'une autre manière, il obtenait un carré. Mais il n'a pas montré comment il s'était constitué son jeu de pièces. Pourtant, l'assemblage en forme de croix a du suffire à indiquer que ses pièces étaient équivalentes à celles que le manuel propose de découper.

J'insiste sur ce que certains prendront pour des détails, parce ce que ce n'en sont justement pas, et pour montrer toute la richesse sémiotique que recouvrent les quelques lignes de dessin et l'aspect bande dessinée qu'a choisi le manuel pour évoquer l'activité. Cette richesse est telle que bien entendu on ne pourra pas l'analyser exhaustivement. Il y a donc un champ sémiotique auquel nous n'aurons qu'un accès très partiel. Il en va exactement de même lorsque le psychologue cherche à identifier les schèmes. Cette impossibilité de l'analyse nous devons tenter d'y surseoir et ne pouvons le faire qu'en examinant leur structure, et en cherchant aussi délibérément des recouvrements, répétitions.

Un tel recouvrement se trouve pour les pavages.

Je dispose d'une feuille quadrillée et je veux la paver de croix. J'ai alors deux possibilités de faire. Soit composer un pavage en traçant les formes des pièces, à savoir les lignes des bords de chacune des pièces dans leurs positions respectives, soit en décomposant la surface à paver à partir des lignes de ses bords.

Si par exemple je veux obtenir un quadrillage, je puis soit le tracer : carré après carré, ce qui sera assez fastidieux et occasionnera pas mal d'erreurs, soit tracer le croisement d'un faisceau de lignes parallèles toutes ayant le même écart avec un autre faisceau perpendiculaire au premier et présentant le même écart entre les lignes. Ce procédé fait apparaître alors un agencement de carrés.

Le croisement des signes que sont ces faisceaux produit un autre signe, celui d'un pavage avec des carrés. Tout cela est élémentaire. Ce que je voulais simplement indiquer c'est cette dualité que l'on retrouve entre composition et décomposition.

Dans le cas de carrés, c'est très facile, mais dans celui de croix ? Beaucoup moins.

Par contre une chose qui est relativement facile est de dessiner un réseau de lignes qui donnerait un découpage de formes du genre de celles de jigsaw puzzle (ce qu'en français on a coutume d'appeler puzzle). Là les figures ne sont pas strictement imposées, nous nous contenterons de ressemblance, et surtout il est stipulé dans ce genre que les pièces soient aussi différentes les unes des autres que possible.

Tandis que pour un pavage avec des cg, on demande de produire la répétition d'une figure bien déterminée et une seule.

Ce faisant, j'ai comparé trois modalités de dessin de grilles. Deux sont relativement faciles à obtenir (ou qui donnent facilement des résultats dont nous nous satisfaisons), la troisième l'est moins.

Premièrement, un quadrillage qui demande à ce que l'on reproduise par deux fois à angle droit, régulièrement la même chose : une ligne droite parallèle et avec un écart toujours identique.

Secondement un découpage genre jigsaw puzzle qui lui aussi croise des lignes grosso modo perpendiculaires mais dont le tracé des lignes elles-mêmes sera fantaisiste et n'aura pas à se répéter à l'identique, et dont les écarts pourront varier.

Par contre la troisième grille posera bien plus de problèmes pour sa réalisation, combinant en fait les propriétés du quadrillage, linéaire avec celle des décrochements producteurs de formes de pièces de puzzle.

On peut alors examiner les relations qu'entretennent ces puzzles que seraient un puzzle dont toutes les pièces seraient des carrés de même taille, un puzzle dont toutes les pièces seraient des cg de la même taille, et un véritable jigsaw puzzle.

La difficulté du premier puzzle ne serait pas de choisir les pièces, mais de faire en sorte que l'assemblage tienne en place.

La difficulté du jigsaw puzzle est au contraire de trouver les pièces qui s'emboîtent les unes dans les autres et ces emboîtements font que le problème précédant ne se posera pas.

La difficulté du troisième puzzle sera non pas de choisir les pièces, mais de les « emboîter » de la bonne manière afin que n'apparaissent pas de trous (ne parlons pas des bords).

Nos tâches ont consisté à obtenir des reproductions de cg sur des feuilles quadrillées. Ce qui facilite le dessin des bords des pièces, du point de vue des alignements et des mesures des côtés et des angles. On a donc dès le départ demandé de réaliser un pavage de croix cg sur un pavage de maille carrée, de sorte que la dimension du côté de la croix soit un multiple de celle de maille.

La conséquence de ceci est que le dessin des bords s'obtient par sur-lignage de lignes. Là encore, la dualité composition / décomposition est présente et on peut considérer que les dessins des sujets se situeront dans un continuum entre la reproduction de la forme du pavé-croix et celle des lignes le long desquelles elles vont s'assembler, et que cet indicateur va évoluer au cours du dessin.

Or si vous cherchez à reproduire le dessin d'une pièce ou celui des lignes d'agencement de pièces, vous ne jouerez pas sur les mêmes relations, ni les mêmes signes. Vous jouerez dans le premier cas sur des relations (en particulier régularités) intra-figurales et dans le second cas sur des relations (en particulier régularités) inter-figurales.

C'est ce que j'ai évoqué ci-dessus, en comparant la production d'un quadrillage par le dessin de sa maille, ici, carré par carré, et la production du quadrillage par le dessin de lignes qui se croisent.

Est-il besoin de dire que tout cela est largement pratiqué en classe, sur le tas ?

Ainsi il m'arrive souvent de demander aux élèves de bien vouloir faire sur une feuille quadrillée un dessin de cent carrés sur une feuille quadrillée et je regarde qui dessine quoi, qui dénombre quoi, et si j'ai l'occasion de surprendre un élève en lui montrant la solution d'un carré de 10 de côté, je le fais.

Il y a d'autres modulations envisageables, en particulier celles qui consistent à jouer sur le papier blanc et dans ce cas quels seront les instruments de dessin que l'on fournira, ou quadrillé et dans ce cas sur la taille de la maille du quadrillage. Mais aussi celle qui consiste à utiliser des pièces comme chablon (gabarits). On peut encore jouer sur la forme des feuilles mises à disposition et / ou sur des jeux d'orientation des quadrillages sur ces feuilles, et / ou autres signes de repères.

Pour information, une recette (presque minimale) pour obtenir par quadrillage le pavage en croix cg : dessiner deux faisceaux de lignes parallèles en escalier.

Premier faisceau : escaliers qui montent (de gauche à droite) dont les marches montent de un carré et avancent de deux.

Second faisceau : escaliers qui descendent (de gauche à droite) dont les marches descendent de deux carrés et avancent de un.

Deux lignes appartenant à chacun de ces faisceaux se coupent au milieu de leur long segment (longueur pour les lignes de premier faisceau, hauteur pour les lignes de second faisceau).

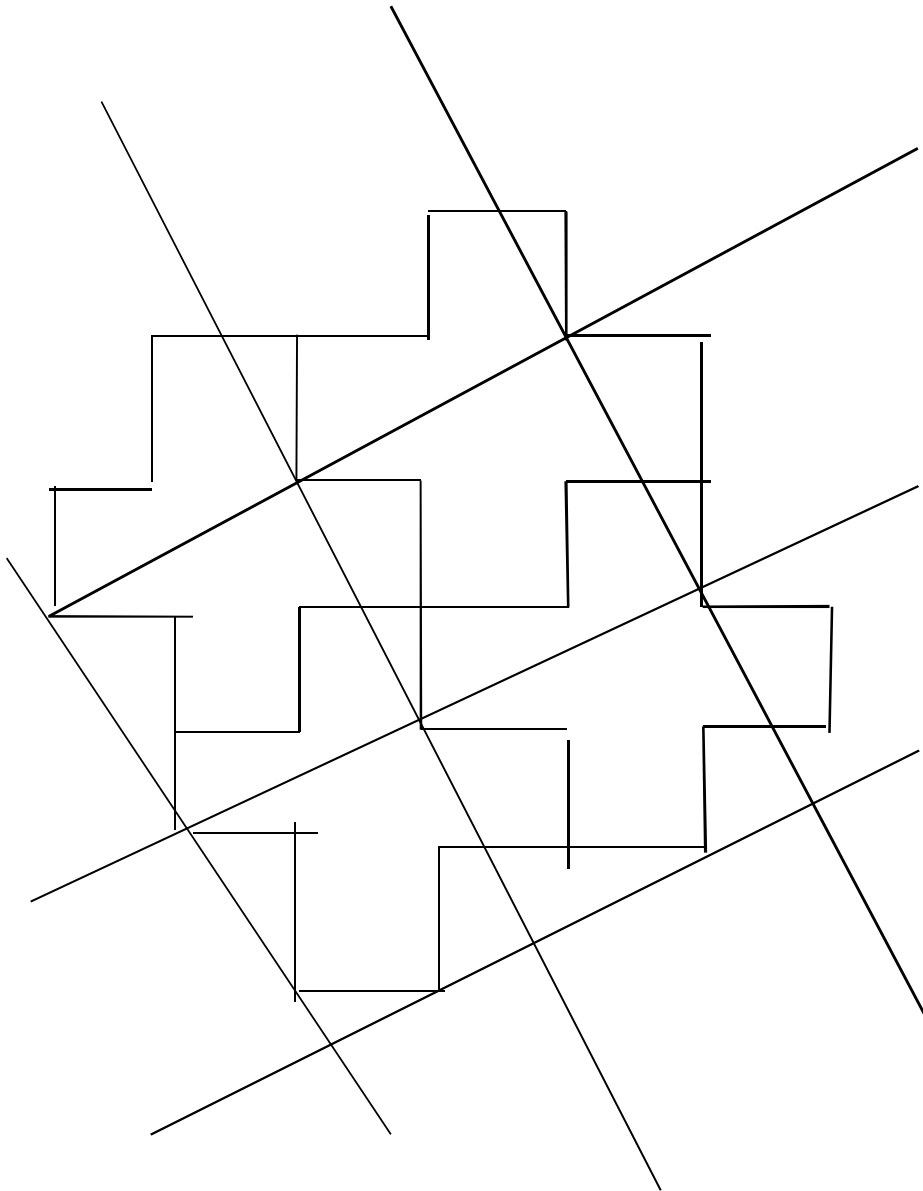
Une figure de contrôle parmi d'autres : on voit apparaître un motif de croix gammée (ou sa symétrique).

Ce que je vise est une autre icône, celle de la croix cg qui apparaît au bout du tracé de quelques lignes (il en faut quatre au moins). Je puis répliquer ces icônes en répliquant des lignes en escalier. Cette idée est assez intuitive pour que nous ayons pu observer plusieurs élèves s'y essayer et chercher dans cette direction, toujours sans succès hélas (cela ne saute pas aux yeux).

Episode 12

18.02.2004 - 12.04.2016

Narration et jeu de tâches.



Légende¹ : Par cette superposition de 2 pavages, on trouve qu'on peut découper une telle croix en quatre morceaux pour obtenir un carré. La croix et le carré ont même aire, par contre leurs périmètres (ou côtés) sont incommensurables. C'est ce fait qui est repris dans une fiche scolaire intitulée « croix géniale » (sigle cg désignant cette croix grecque dont tous les côtés sont égaux, ce n'est pas la croix du drapeau suisse, dont les branches sont légèrement plus longues que larges).

¹ Le dessin est volontairement imprécis, je m'en explique plus loin dans l'épisode.

Constat : Très majoritairement pour les sujets, la longueur des branches est une chose et leur largeur ou épaisseur - en est une autre. Ce ne sont pas des dimensions homogènes. La régularité de la croix ne se manifeste pas à eux par l'égalité de tous les côtés de la croix, mais bien plus par l'égalité des longueurs d'un côté et celle des largeurs de l'autre. Dit autrement, la régularité se manifeste par le fait que les branches seront des rectangles identiques, les quatre ou deux à deux, plus que des carrés.

Faits géométriques.

Croix géniale présente un fait géométrique, ou plutôt se rattache à une famille de faits géométriques.

Dans un article de *Math Ecole* (Conne F. 1988), j'avais introduit une nouvelle notion (pour moi, à l'époque en tous les cas), la notion de fait numérique (plus précisément encore, un fait de numération). J'en avais donné l'exemple suivant :

« La somme d'un nombre qui se termine par 2 et d'un nombre qui se termine par 7 est un nombre qui se termine par 9.

$2+7 = 9$; $12+7 = 19$; $2+17 = 19$; $12+17=29$; --- ; $4642+5837=????9$ ».

Ce fait se manifeste sur l'écriture des nombres en numération de position de base dix ; il s'explique par les propriétés structurelles de l'addition (associativité, commutativité, distributivité) ; et il repose sur un niveau inférieur ayant trait à la constitution des écritures de nombres comme des suites de chiffres et certaines régularités figurales. Il prend une certaine valeur, par exemple pour les gens qui calculent des soustractions en colonnes. Il leur est utile, sera objet d'un savoir.

De la même manière, un fait géométrique se manifeste à un certain niveau, s'explique à un niveau supérieur et repose sur un niveau inférieur.

Comme précisé dans l'épisode précédent, en note, passé un certain degré de généralité, le fait - ici l'équidécomposabilité - devient banal : deux polygones ont même aire si et seulement si ils sont équi-décomposables, c'est-à-dire si on peut découper chacun de manière à obtenir les mêmes jeux de morceaux.

Donc considérer qu'une croix puisse être découpée en morceaux qui réarrangés constituent un carré est banal, tellement banal qu'on n'y songerait pas si ce n'étaient deux conditions : l'une d'ordre factuelle, qui veut qu'il existe des découpes singulières de la croix et du carré, l'autre d'ordre axiomatique qui voudrait qu'on s'intéresse à définir en toute généralité l'aire de portions de surfaces.

Ensuite, ne mentionner l'égalité des aires de la croix et du carré qu'en termes d'équi-décomposabilité, ne dit rien sur le nombre de morceaux qu'il faudra découper. Et on peut même prévoir, au cas où les dimensions des côtés des polygones comparés seraient incommensurables entre elles, qu'il soit fort difficile de garantir un découpage en nombre fini de pièces.

Or c'est bien dans ce cas que nous sommes avec la croix et le carré puisque leurs côtés respectifs sont dans un rapport de 1 à $\sqrt{5}$! Pourtant la fiche nous présente une possibilité de découpe en quatre morceaux seulement ! Gageons qu'il n'existe pas de découpe plus simple, je veux dire en moins de quatre morceaux. Pourtant, la solution en quatre morceaux que la fiche nous présente n'est pas unique, et il en existe même une en quatre morceaux identiques !

Le fait prend un peu de sel lorsqu'on le particularise et lorsqu'on exige une solution effective et qu'on n'en reste pas à la seule garantie formelle d'une décomposition commune des deux polygones. C'est à ce niveau qu'intervient la conjugaison de deux théorèmes expliquant le fait géométrique *croix géniale* : le théorème Pythagore, en ce qui concerne les longueurs et les angles droits, et le fait qu'on peut paver un plan avec des croix de type cg.

Pour leur activité, les auteurs du manuel ont choisi de rapporter ce fait à l'univers des formes polygonales et des pièces de papier de formes polygonales. C'est dans cet univers que notre fait se manifeste.

Comme nous l'avons vu aussi, c'est à l'occasion d'une autre réalité, celle de la superposition de pavages que Lindgren (Deledicq A., 1998) a découvert ce découpage. Lindgren ne se place pas au même niveau de réalité symbolique que les manuels qui proposent de découper dans du papier des morceaux de formes polygonales. De plus, ce que mettent en évidence les jeux de pavages, ce sont non seulement un ensemble de découpes de la croix en peu de pièces (pas toujours quatre, et pas toujours les mêmes jeux de pièces,) mais encore des relations entre les diverses découpes² (selon la manière dont ces découpes se distribuent sur les pavages).

Nous sommes donc en présence de deux réalisations en secondité de propriétés géométriques générales, rapportées soit à un univers de figures polygonales soit à un univers de pavages. Ces deux modélisations sont dans un rapport hiérarchique³ puisque les pavages sont géométriquement plus généraux que les collections de polygones.

Dans mon article sur les faits numériques (Conne F., 1988), je disais déjà que suivant le niveau de généralité auquel on attribuait un fait, on le rendait de plus en plus banal et dans un certain sens insignifiant⁴. Le fait devient tautologique, vrai tout le temps, il signifie toujours quelque chose mais qui ne se distingue plus en tant que tel. À chaque échelon vers la généralité, le fait se distingue de moins en moins et devient en quelque sorte de plus en plus banal, tandis que les théorèmes ou axiomes qui l'expliquent deviennent de plus en plus profonds et nous-mêmes de plus en plus blasés.

$$\ll (n+2)+(m+7) = n+2+m+7 = n+m+2+7 = (n+m)+(2+7) = (n+m)+9 \gg.$$

² La situation de ces jeux de pavages est très riche, je ne fais qu'effleurer le sujet.

³ Un tel rapport hiérarchique en fait plus que de simples modalités, il s'agit bel et bien de modèles.

⁴ Il devient insignifiant au regard des immenses faits desquels il découle. En notre cas insignifiant au regard du théorème de Pythagore, et des théorèmes de pavages, et plus loin encore, au regard de considérations portant sur l'axiomatique des aires. Pas seulement au regard de ces théorèmes mais encore et surtout au regard des innombrables faits qui en découlent. Un fait n'est donc pas un donné absolu, mais demande à être situé, c'est un savoir. Au passage, je viens de donner une définition d'un savoir relativement au domaine mathématique et plus comme étant une connaissance utile.

Il en va de même avec notre fait géométrique : déjà en passant de la considération d'un univers de formes polygonales à celui de pavages du plan, les lignes de découpe perdent pas mal de leur mystère et de leur singularité (puisque on en produit du même coup plusieurs).

Il est toujours bien plus délicat d'illustrer les niveaux de réalité symboliques sous-jacents à un fait.

Dans le cas des nombres, cela m'avait été relativement facile, il avait suffi que je ne désigne plus les nombres par des écritures chiffrées mais seulement par des collections de bâtonnets pour que le fait relaté s'évanouisse totalement.

«

2+7	//	+	////////	=	////////
12+7	//////////	+	////////	=	//////////
2+17	//	+	//////////	=	//////////

 ».

Là encore on peut considérer une graduation dans l'affaiblissement du fait. Dans l'expression ci-dessus avec des bâtonnets, j'ai encore organisé mes signes en tableaux par des alignements en colonnes des diverses lignes de symboles. Si maintenant je rapportais le fait à des collections en vrac de jetons (ce que je ne vais pas dessiner, quel signe donner pour "en vrac"?), le fait perd encore plus de sa signification. Pourtant les faits de collections de jetons en vrac, ou de traits alignés, auxquels je me serais rapportés sont nécessaires à la signification du fait, puisqu'ils sont constitutifs de ma connaissance des nombres, mais ils ne suffisent pas à l'établissement de la relation.

Dans le cas de notre exemple géométrique, la description du niveau sous-jacent est plus touffue, les imbrications figurales qui le constituent sont bien plus complexes et cognitivement notre perception est autrement sollicitée que dans la lecture de simples alignements ou mise en tableau de symboles. De plus, avec l'expérience, des habitudes perceptives s'installent⁵.

Alors que la recherche d'explication procède par une élévation dans les niveaux de généralité, ici, pour analyser les niveaux sous-jacents, il conviendra de chercher à affaiblir notre fait. Nous avons plusieurs voies pour y arriver. Elles sont intéressantes, c'est pourquoi je les présenterai ici bien que cela ne soit pas essentiel pour la suite de mes propos.

On affaiblira le fait en levant des contraintes.

Par exemple, si on a une croix de type cg et un carré de même aire, disons qu'on dispose de deux morceaux de papier ou de carton ayant cette forme, on peut les superposer et découper la ou les parties qui dépassent, et on peut le faire « comme on voudra », « n'importe comment », à chaque fois on aura amorcé une équidécomposition que l'on pourra mener ainsi jusqu'à ce que matériellement on ne puisse plus rien faire (même si théoriquement ce serait ad infinitum, cf. *Sur le fil de nos*

⁵ Par exemple lorsqu'on me présente la figure de la croix et de ses lignes de découpe je vois aussitôt que les lignes sont perpendiculaires et de même longueur. Ce sont des éléments sous-jacents, bien que je les aie appris à partir de considérations générales concernant les angles droits que l'on peut dessiner sur un quadrillage, en relation avec le théorème de Pythagore, faits qui deviennent saillants lorsqu'on étudie les premiers rudiments de géométrie vectorielle.

expériences, Saison 1, épisode 4 (Conne 2003-2004)). Faire ainsi ne garantit pas une équi-décomposition formelle, vraie, mais seulement approchée.

Dans le cadre d'une expérience ainsi menée, on ne peut pas imaginer quelques conséquences fâcheuses cela pourrait entraîner de considérer que nous n'avons pas obtenu une équi-décomposition formelle. En principe on pourra recomposer les figures de départ, à quelques miettes près.

On dira qu'on a fait n'importe comment, "n'importe comment" au regard des principes de découpages imaginés par les mathématiciens, mais "n'importe comment" aussi au regard de la « simplicité » des deux seuls traits de découpe que propose la fiche *croix géniale*.

On pourrait objecter qu'un tel superposer n'est pas déjà pas faire *n'importe quoi* puisque le croisement de pavages est bien une sorte de superposition⁶. Attention, j'ai dit qu'on procédait par superposition *n'importe comment*, je n'ai pas dit qu'on faisait *n'importe quoi*.

En d'autres termes, superposer des pièces polygonales et superposer des pavages ne sont pas superposer les mêmes choses. Dans le cas des pavages d'ailleurs toute l'astuce joue sur le décalage des mailles⁷, on procède de sorte à ce que la maille du quadrillage superpose quatre mailles voisines du pavage en croix (j'ai évoqué cela lors de l'épisode précédent).

Tout comme dans les faits numériques où les schèmes élémentaires de comptage sont récupérés et recyclés aux niveaux supérieurs, ici ce sont les schèmes tout aussi élémentaires de superposition qui sont recyclés sur de nouveaux objets !

Une autre manière d'affaiblir le fait est d'examiner ce qui se passe pour des figures moins régulières.

Si au lieu de croix à branches carrées, de type cg donc, on prend des croix dont les branches sont des rectangles de longueur 2 et de largeur 1 (rectangles bi-carrés). La surface d'une telle croix est de 9 (contre 5 pour la croix de type cg). Le côté du carré équivalent mesurera 3, il sera commensurable aux côtés de notre nouvelle croix (ces côtés sont soit de longueur 1, soit de longueur 2). Un découpage trivial permet de transformer une telle croix en un carré : il suffit de couper deux des branches et de les placer au-dessus de la forme restante (en figure de L) pour obtenir avec ces trois morceaux, un carré de dimension 3 sur 3⁸.

⁶ On verra que c'est d'ailleurs par superposition de calque que A. Racheter va tenter de faire faire de tels croisements de pavages aux élèves de sa classe.

⁷ On peut superposer la croix et le carré (de biais l'un par rapport à l'autre, mais centrés entre eux) de sorte à obtenir une découpe en cinq pièces, une croix écornée et quatre petits triangles. Ce peut être pris comme un cas limite entre superposition de formes et décalage de grilles. Notons qu'on peut faire apparaître d'autres pavages au détour d'une découpe de croix en un seul coup de ciseaux dans un papier plié de manière idoine ! (Cf. Saison 1 - épisode 6).

⁸ Par pavage, on ne pourra pas obtenir une telle découpe. Par ailleurs, de telles croix ne pavent pas le plan. Par contre, on peut les arranger de sorte à laisser des trous carrés de dimension 1 selon un canevas régulier. Si on y superpose de manière idoine un quadrillage de maille 3x3, on peut certes obtenir çà et là des mailles carrées qui ne rencontrent que des croix (aucun trou), mais cette découpe comprendra nécessairement cinq morceaux.

Il est possible de faire un découpage un peu plus intéressant qui fait jouer le théorème de Pythagore. Il s'agit de découper la croix de telle sorte qu'on puisse composer un carré de côté $\sqrt{10}$, avec un trou carré d'aire 1. On peut facilement trouver la découpe si on considère qu'on peut paver le plan avec de telles croix en laissant à intervalles réguliers des trous carrés d'aire 1⁹. On voit que de cette manière on peut progressivement affaiblir notre fait.

Une troisième façon d'affaiblir notre fait consiste à considérer les faits que manifestent les productions des élèves (ou des étudiants).

Par exemple, devant copier le modèle de la croix géniale certains n'en reproduisent justement pas toutes les régularités, d'autres encore se contentent de lignes transverses pour les découpes sans respecter toutes les indications du modèle. Ce faisant ils ne reproduisent pas correctement le modèle, ne pourront pas réussir le puzzle, ce qui veut dire qu'ils ne rencontreront jamais le fait qu'on se proposait de leur faire découvrir. Mais ils en trouveront d'autres comme par exemple, lorsque faute d'avoir une croix dont la longueur de branches égale leur largeur, la ligne des milieux indiquée sur la figure du manuel sort de la croix¹⁰.

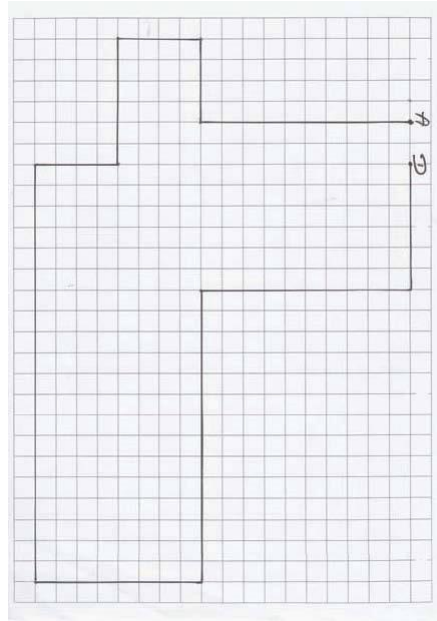
En observant les dessins et découpages produits aussi bien par des élèves (enfants) que des étudiants (adultes), j'ai remarqué que les représentations des croix (de toutes sortes) combinaient deux aspects. Le premier, que je nomme *squelette* ou *noyau* de la croix est l'image du croisement de deux lignes, une croix sans épaisseur. Le second, que j'appelle *corps de la croix*, est l'image en méandres de sa bordure, une croix d'une certaine épaisseur¹¹. Il est souvent arrivé que des élèves voulant découper dans une feuille de papier un trou en forme de croix, se contentent de deux traits de ciseaux, en croix, et soient tout étonnés de n'avoir pas obtenu de trou - ni de chute.

Dans le dessin ci-dessous (dont il sera question plus loin dans l'épisode), l'élève n'arrive pas à coordonner l'idée de croisement *squelette*, bien visible sur son dessin, et celle des bras de la croix. Cela peut s'observer sur nombre de dessins d'élèves. Dans tous ces cas d'autres éléments interfèrent dans l'accomplissement du dessin : les lignes du quadrillage, d'une part et le bord de la feuille.

⁹ Ce trou ne sera pas centré.

¹⁰ Alors certains tracent quand même cette ligne, tandis que d'autres préfèrent tracer les segments joignant chacun des points milieux au coin de la croix, comme c'est « indiqué » sur la figure modèle.

¹¹ Cf. ci-dessous, figure p.13 Ces deux aspects ne concernent pas seulement la croix mais sans doute tout polygone non convexe. C'est aussi le cas avec les formes de feuilles et leurs nervures ou de tout autre objet qui se développent en se dépliant (bourgeons par exemple). Et aussi, me semble-t-il, le fait que, lorsqu'on cherche à plier une feuille de papier sur lequel est dessiné un polygone de sorte à pouvoir le découper en un seul coup de ciseaux, une ligne interne *squelette* apparaît. Cf. annexe de l'épisode 10.



Une autre manière encore d'évoquer les niveaux sous-jacents est de bien voir que pour être convaincu du fait de découpage de la croix et du carré, il n'est pas besoin de se référer à une figure exacte, mais que des esquisses très imparfaites suffisent.

En première page de cet épisode, j'ai reproduit une figure assez approximative de la superposition de pavages et c'est à dessein (c'est le cas de le dire) que je m'en suis tenu. En gros, la position des lignes, le fait que les créneaux des morceaux semblent s'ajuster, la répétition des motifs, etc., à première vue, cela convient. Et très pragmatiquement, nous nous reportons à une reconstitution éventuelle pour les derniers ajustements¹².

Des esquisses suffisent à emporter notre conviction, quitte à s'être laissé illusionner. Décrire ce qui fait que cela nous suffise est extrêmement difficile. L'étude des illusions perceptives peut y contribuer. Mais aussi l'étude des tentatives infructueuses de dessinateurs et de ce qu'ils en corrigent.

Par exemple, devant les copies erronées des élèves, examiner ce qui de la figure modèle est respecté, quelles relations sont fidèles etc. J'ai été fort surpris que des élèves, mêmes des étudiants adultes, n'aient pas pris la peine de dessiner leur croix à la règle et que certains ont même pris soin d'éviter que leur tracé suive les lignes du quadrillage ! J'ai été tout aussi surpris de constater que d'autres élèves commençaient sur les lignes mêmes du quadrillage de la feuille, à surligner le quadrillage, comme si ils voulaient l'avoir réalisé par eux-mêmes.

Activités mathématiques scolaires, expériences et faits.

¹² Cela veut dire aussi que l'expérience qu'on se propose de faire avec l'activité *croix géniale* est essentiellement rhématique. On se suffira que les élèves fassent l'expérience de l'ajustement des pièces, on ne leur demande même pas si ils pourraient répéter leur réussite, ni même apprendre leur solution, on ne s'attend pas non plus à ce qu'ils s'étonnent du fait, se laissent surprendre, toutes choses qui qualifieraient un interprétant dicent. Et bien entendu on ne demande aucun argument pour le commenter ou l'expliquer.

Les fiches que nous livrent les manuels ne sont que des partitions, et si c'est bien la musique qui nous importe, ce n'est pourtant pas tant celle du compositeur, que celles que cette dernière suscitera en écho chez les élèves, qui sont ici tout à la fois interprètes et auditeurs.

Comment qualifier la position de l'enseignant ? La question est délicate. De longue date et à de plusieurs reprises, j'ai indiqué quelques pistes dans ce que j'ai appelé *interactions de connaissances et investissements de savoirs* (Conne 1992, 1999a, 1999b, 2003), mais aussi dans tout ce que j'ai écrit sur la dévolution et l'institutionnalisation (Conne 1993, 1994a). Ici, au cours de ces épisodes, je m'attache à l'examiner sous l'angle de l'expérience, celle que procurent aux élèves certaines activités et exercices scolaires, et/ou le potentiel d'expériences que ces derniers renferment.

L'expérience est très labile, dynamique, pas facilement saisissable. Il nous faut lui associer des marques, des signes tangibles, des repères afin de l'identifier, de l'évoquer, de la faire revenir à la mémoire. Les faits géométriques que j'ai décrits ci-dessus sont de telles marques, ils sont réels et objectifs. L'idée didactique d'une fiche comme *croix géniale* est bien de prendre prétexte d'un fait pour faire faire une expérience mathématique à l'élève. On pourrait dire que le fait est la musique que l'on donne à entendre, mais ce qui importe c'est ce qui se passe dans une telle écoute, c'est-à-dire le lien entre ce que l'élève expérimente et le fait.

Au paragraphe précédent, j'ai montré que la question de la signification du fait géométrique était relative au niveau de réalité manifeste. Ce point est très important puisque toute situation didactique se fixe un tel niveau de réalité manifeste (se donne un milieu) en fonction des destinataires de cet enseignement, les élèves bien sûr mais aussi les enseignants¹³. Car avant toute chose, il faut que les élèves puissent rencontrer le fait dans l'expérience qui leur est proposée. Reprenons notre exemple.

On a une propriété : l'équi-décomposition d'une croix de type cg et d'un carré. On a donc une relation ternaire : une croix de type cg, un carré de même aire (ce qui impose des relations de 1 à 5 entre côté de la croix et côté du carré) et (au moins) un ensemble de pièces que l'on peut arranger tout aussi bien en figure de croix qu'en figure de carré. La relation fait que la donnée de deux des éléments suffit à déterminer le troisième. La fiche s'est fixée pour données la croix et la collection des quatre pièces, et par conséquent, elle demande à l'élève de produire le carré. Ce faisant, la fiche peut laisser implicite (dans l'ombre) la question du rapport des dimensions de la croix et du carré. Ce choix sera sans doute justifié puisqu'on travaille en classe de 3P, et qu'il ne faut pas brusquer les choses. Ce faisant, on laisse implicite d'autres choses encore. Par exemple, le fait qu'il est possible *ó geometrico modo* - de contourner l'obstacle de la non commensurabilité des longueurs, et qu'on peut donc obtenir quand même un découpage avec un nombre fini de pièces, et que par-dessus le marché on arrive à produire un (des) découpage(s) simple(s) comportant seulement quatre pièces, etc.¹⁴.

La situation proposée est donc extrêmement restreinte. On n'a fait de tout cela qu'un exercice de copie d'un modèle et de puzzle. C'est le prix didactique payé pour s'assurer que les élèves rencontreront bien le fait qu'on peut transformer de cette manière la croix en un carré, au risque qu'ils n'aient plus aucune raison de s'en étonner. Si nous reposons maintenant la

¹³ Qu'il ne s'agit pas non plus de trop effrayer, on omettra donc, à propos de cette fiche, de parler des pavages de Lindgren ou de Pythagore pour des enseignants de niveau 3P.

¹⁴ La découpe de la croix est d'ailleurs plus évidente, perceptivement, que celle du carré !

question de l'expérience que procure une telle activité scolaire, il semble à première vue qu'elle sera aussi réduite que la situation elle-même, et donc qu'on ne peut ni ne doit surestimer la valeur de ce qui n'est en définitive qu'un exercice parmi beaucoup d'autres¹⁵.

Résumons ceci de manière un peu abrupte : on montre la lune du doigt (Conne 2008). Comment faire pour que l'élève regarde la lune, et qu'il voie la lune et pas seulement cette chose-que-montre-le-doigt ?

Dans notre exemple, le doigt c'est la partie de la fiche consacrée à la confection des pièces du puzzle, la lune est la relation ainsi établie entre la forme de croix (cg) et la forme carrée. Pas plus qu'on ne touche la lune du doigt, on n'obtient le fait à tous les coups, y arriver (faire que cela arrive) requiert un zeste d'astuce¹⁶.

Cela dit, il faut que le fait géométrique prenne le pas sur la tâche scolaire (ce n'est qu'un fait géométrique). Que ce qu'évoque la musique reproduite à partir de la partition soit ce qui importe et ce dont on se souviene.

Nous avons vu combien la fiche *croix géniale* était restrictive, dirigiste, fermée, cloisonnée¹⁷. Dans quelles limites une telle fiche est-elle exploitable pour faire apprendre la géométrie ? En d'autres termes, l'expérience que peut procurer aux élèves une telle activité sera-t-elle aussi restreinte et cloisonnée que cette dernière ? Pour moi la réponse est non.

À l'appui de cette thèse, j'apporterai le témoignage des productions des élèves que nous avons obtenues en nous donnant les moyens d'explorer avec eux le milieu de cette situation. Mais avant cela, considérez encore une fois mon analogie avec la musique. Ce que l'auditeur entend de la musique est bien plus que la musique elle-même, et s'il fallait une partition pour noter ce qu'il entend, ce serait non seulement une autre partition que celle du compositeur, mais encore, on y trouverait des liens avec tout un monde de musiques latentes, monde dans lequel le compositeur a, lui-aussi, puisé sa propre inspiration¹⁸.

Bref, non seulement l'expérience déborde la situation telle qu'elle a été conçue par les auteurs de manuels, mais encore c'est là, et là seulement, dans cette marge que le fait géométrique se manifeste comme fait adidactique à l'expérience actuelle de chacun des acteurs de la situation, élèves comme enseignants ! C'est donc bien sur cette cible là que l'enseignement doit concentrer son attention. Si je voulais évaluer directement¹⁹ l'impact de cette activité sur les élèves, je devrais dire en quoi elle aura été l'occasion de faire et d'étudier des mathématiques.

¹⁵ Si dans ce travail j'explore à fond une activité que j'ai isolée de tout un ensemble d'activités scolaires proposées, c'est dans un souci de simplification et de précision. Je postule que l'ensemble du réseau de relations que je dégage recouvre pour une bonne partie le réseau parcouru en travaillant de multiples activités. J'ai déjà discuté cette question dans mon article sur les manuels de Suisse romande au XX^e siècle (Conne 2002). Bien entendu il faut opter en classe pour la diversité des activités et la variété des faits. Par contre pour l'analyse il est bon de creuser un peu la surface des marques, se déprendre d'une diversité apparente.

¹⁶ Ici je commets un abus de langage, parce que l'astuce n'est pas quelque chose qui puisse s'évaluer de manière absolue.

¹⁷ Il en va de même avec l'immense majorité des activités proposées dans les manuels.

¹⁸ On peut même comparer ce moment de rencontre entre le compositeur, les musiciens et les auditeurs comme retrouvailles autour d'un puits. Notez aussi que les élèves sont dans la même position que les musiciens, ce sont des interprètes.

¹⁹ La plupart du temps on évalue un tel impact indirectement, et en différé.

Pour pouvoir faire cela, l'enseignant devra s'être beaucoup questionné sur les mathématiques et ce qu'il en sait.

Toute expérience se fait dans un monde de signes. Il faut des marques à nos expériences et pour dire que nous en avons fait une et pour nous permettre, ultérieurement, de savoir de quoi nous avons fait l'expérience. C'est donc dans les signes que laissent les élèves lors de l'activité que nous devons puiser ceux que nous lierons aux propos de l'exercice (en quelque sorte aux paroles dont l'exercice sera l'occasion). Ces signes sont les indices de l'expérience pour celui qui tente de la lire (que ce soit l'enseignant, un observateur, ou l'élève lui-même). Mais des indices de quoi ?

Nous avons l'embarras du choix. Retiendrons-nous ces signes comme indices du soin avec lequel les élèves se seront appliqués à la tâche ? Ou encore comme indices de la pauvreté du milieu culturel de tel élève qui, à la maison, n'a jamais fait une seule activité de bricolage, même pas des pliages ou des découpages, et qui donc n'a que ses faibles expériences scolaires en la matière ?

Qu'il soit entendu que je ne retiendrais pour ma part que des indices relevant du domaine des mathématiques et de l'univers sémiotique dans lequel il se manifeste car, au-delà de toute autre considération, il se joue ici quelque chose d'essentiel concernant la posture mathématicienne.

Rappelons la distinction entre le caractère imparfait et le caractère approximatif de nos productions. L'appréciation de l'expérience est à la mesure de la marge d'approximation que nous nous accordons autant qu'à celle de notre assurance de pouvoir y rapporter toutes les imperfections de notre produit. Nous nous accommodons de réalisations effectives, sans nous préoccuper outre mesure de perfection dans les détails. Sémiotiquement parlant, c'est faire la part entre les indices qui ont une certaine généralité (id est les légisignes indiciels), et ceux qui ne sont que singuliers, circonstanciels (les sinsignes indiciels). Dit autrement c'est viser l'esprit et pas la lettre. Toutefois la formule n'est pas encore assez forte. En mathématiques, on exige en effet de toujours viser l'esprit sans jamais ni se suffire, ni même s'arrêter à la lettre, d'où l'extrême sensibilité de toute pratique mathématicienne à la question de la compréhension.

Si on peut comparer la fiche à une partition, par contre on ne peut pas tenir la classe pour un orchestre, ni le maître pour son chef. Ceci, pour deux raisons.

La première est que les élèves n'interpréteront pas leur partie à l'unisson ; la seconde est que dans le temps, les répliques (reprises etc.) ne seront ni des répétitions, ni même des tentatives pour mieux approcher quelque idéal fixé d'avance.

La tâche de l'enseignant est délicate parce qu'il combine deux jugements : l'un mathématique, portant sur les productions et performances individuelles ; l'autre, didactique, en ce qui concerne l'accomplissement de son action d'enseignement. Il sait que son temps est limité, il sait aussi d'avance qu'avec quelques élèves, il ne pourra s'en tenir à la partition prévue par le manuel, il sait qu'au vu des imperfections de leurs productions, et selon les inférences (approximatives) qu'il pourra faire de ce qu'ils auront compris de l'exercice, il devra se décider à intervenir, et éventuellement demander de refaire tout ou partie de l'exercice. Il doit donc composer avec tout cela. Pour gagner ce temps précieux, il peut même

chercher à prévenir certaines difficultés ou obstacles²⁰. Dans tous les cas, lorsque l'élève recevra son quitus, cela voudra dire que l'enseignant assimile ce qui aura été effectivement réalisé à ce que la fiche se proposait de faire.

Bref toute réalisation d'une idée didactique charriée avec elle son lot de confusion, même mathématique. On se trouve alors devant une alternative : interpréter ou non cette confusion.

Dans le cas négatif, on se contentera d'administrer l'activité proposée par le manuel et d'estimer l'écart entre la performance de chacun des élèves à ce qui était attendu. Le cas échéant, et si on dispose de suffisamment de temps, on tentera de réduire cet écart, soit directement en gommant le plus possible les imperfections, soit indirectement en contraignant d'une manière ou d'une autre les élèves à recourir à des approximations plus efficaces.

Si je dis que dans ce cas là, on n'interprète pas les performances et productions des élèves, c'est pour dire que le processus dans lequel elles entrent éventuellement n'est pas un processus interprétatif, parce qu'en fait ces performances et productions sont déjà toutes interprétées et jugées à l'aune de leur éloignement du modèle attendu. Dans une telle optique, leur imperfection témoigne d'une confusion qui, en tant que telle, ne peut avoir aucune signification.

Dans ce cas, le professeur se contente de vérifier jusqu'à quel point il reconnaît la musique de la partition, c'est-à-dire le morceau qu'il produirait s'il exécutait lui-même cette partition. Ensuite, l'enseignement passera à d'autres activités dans le même champ d'étude. Ce qui aura pour effet de reconduire, prolonger, relancer, porter les élèves vers de nouvelles expériences, et de nouveaux faits, selon ce que les manuels proposeront, selon ce qui aura été prévu d'avance.

C'est en ce sens que l'on peut parler de didactique cloisonnée, non pas tant pour la qualifier péjorativement, mais pour indiquer que selon cette conception de la didactique, en classe on ne saurait que reproduire des significations déjà établies clairement. Dans ce cas peu importe de se demander quelle expérience des mathématiques, ou plus généralement du monde, aura été occasionnée par l'activité, ce sera et ne sera que l'expérience requise pour apprendre ces mathématiques là ; et cela, l'analyse du savoir suffit à nous le dire. Et si certains élèves persistent à de trop piètres performances, c'est encore en interrogeant le savoir qu'on identifiera les bases qui leur font défaut, les prérequis qu'ils devront acquérir, les paliers qui leur auront manqué, bref tout ce dont l'expérience leur manque.

Pour dire plus correctement les choses, on se suffit d'une interprétation de conformité à des normes préétablies.

La seconde alternative est de prendre au contraire les performances et productions des élèves comme produits d'un processus interprétatif qu'il s'agit de porter (relancer, prolonger, guider, etc.) pour en faire une expérience valable, marquée sur un fait mathématique significatif.

Dans ce cas, non seulement les césures d'activités, les nouvelles tâches, les relances, etc. sont incluses dans la situation, mais encore elles sont produites ad hoc,

²⁰ Pour une discussion de cette question cf. J-M Favre, 2003.

pragmatiquement, dans le mouvement même d'une recherche de convergence d'interprétation entre les élèves et l'enseignant ; on est dans une visée.

Certes, il ne s'agit nullement de pousser ce travail au-delà de toute limite, l'échange devra bien connaître une issue, un critère pour clore les festivités. Ce dernier se mesurera à la moisson de faits que l'on aura pu récolter lors de cette expérience, ce qui nous aura été donné d'apprendre, sachant alors que les faits importants, riches, seront ceux qui auront été revisités plusieurs fois, et plusieurs fois autrement.

Par exemple, trouvant que l'on peut découper une croix de manière à réarranger ses morceaux en carré, trouver qu'avec la même collection de pièces on peut obtenir ce carré de deux manières différentes, trouver d'autres découpages possibles, repérer que l'on trouve le dessin de ce puzzle si on superpose un pavage de croix à un pavage de carrés de taille idoine, découvrir en s'essayant à découper une croix dans un papier adéquatement plié que l'on retrouve des propriétés manifestes sur de tels pavages etc.

La signification des faits mathématiques et, partant, des expériences qu'on peut en avoir se mesure à la richesse des relations qui viennent s'y nouer.

Les deux alternatives présentées ci-dessus sont deux manières de voir, deux façons d'interpréter et ont chacune leur efficacité et leurs défauts. Elles sont tout aussi hypothétiques l'une que l'autre. Il nous est encore difficile de concilier ces deux regards et surtout d'avoir la souplesse d'esprit de ne pas oublier l'une pour s'enfermer uniquement dans l'autre.

La première de ces alternatives représente la pratique courante dans l'enseignement des mathématiques²¹. Parce que nous estimons que de telles pratiques sont intenable dans les conditions de l'enseignement spécialisé, faute de pouvoir compter sur des performances et productions suffisamment conformes aux normes scolaires, et pour voir ce qui pourrait donc être exploitable des expériences que les élèves font inmanquablement quel que soit leur niveau de performances, nos recherches se sont résolument engagées dans la seconde.

Les deux options diffèrent grandement dans la manière d'attester les mathématiques faites en classe. La première rapporte tout à un itinéraire préétabli, même avec des variantes. L'image d'un rallye conviendrait aussi. Les mathématiques sont dans les étapes elles-mêmes et l'expérience est réduite à en être le liant, ce qu'il aura fallu consentir pour les relier. On n'apprend pas par expérience, celle-ci ne fait qu'accompagner le périple d'apprentissages. Pour la seconde au contraire, le faire des mathématiques (Conne 1999b) est au cœur même du développement des activités en situations. On cherche à caractériser ce qu'on apprend par expérience.

Une investigation faite autour de l'activité croix géniale.

Dans notre groupe de recherche de l'Université de Lausanne, nous distinguons deux niveaux de travail et de communication, les recherches proprement dites et les investigations. Le message suivant relate justement une investigation faite par J.-M. Favre en décembre 2002 :

« Voici une activité assez super que j'ai proposée à déjà trois reprises à des élèves du CTJ²².

²¹ Si nous avons ici affaire à un fait didactique qu'il s'agit d'analyser et de comprendre, cette question n'est néanmoins pas dans la problématique des recherches que je relate ici.

²² Centre Thérapeutique de Jour, à Nyon où J.-M. Favre travaille à temps partiel.

Cela part d'une activité du manuel de troisième année intitulée "croix géniale" qui propose une sorte de marche à suivre laquelle demande aux élèves de :

1° construire une croix régulière, style croix du drapeau suisse (que l'on peut réaliser en fait simplement avec cinq carrés de même dimension : un au centre, un au-dessus, un au-dessous, un à droite et un à gauche); sur le manuel seul le contour de la croix est dessiné et la consigne est : "Dessine une croix qui a exactement la même forme que celle-ci, mais plus grande ;

2° ajouter deux "lignes" sur la croix (cf. doc. joint, car je renonce à t'expliquer par écrit comment construire ces deux lignes) ;

3° découper la croix en quatre morceaux selon les deux lignes ;

4° assembler les quatre morceaux pour former un carré.

En fait, pour lancer l'activité, avec les élèves du centre thérapeutique de jour (CTJ), j'ai réalisé une croix assez grande, c'est-à-dire en tous les cas plus grande qu'une croix qui est réalisable sur une feuille A4 et je l'ai déjà découpée en quatre morceaux (pour pas qu'ils puissent ensuite la prendre pour modèle).

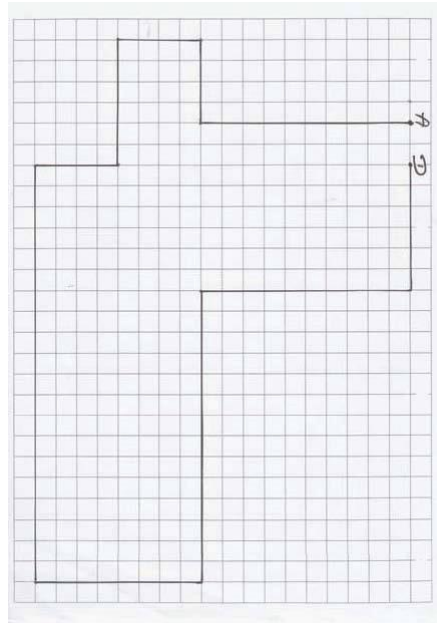
Je montre alors aux élèves comment à partir de ces quatre morceaux, il est possible de faire une croix, puis comment à partir de cette croix, il est possible de faire un carré. En général, je me trompe un peu, non pas exprès, car je n'y arrive pas toujours d'un seul coup, que ce soit pour refaire la croix ou pour refaire le carré. Enfin bref, je demande ensuite à un élève d'essayer de refaire la croix (à partir du carré), puis ensuite de refaire le carré à partir d'une croix. Tout cela doit aller assez vite, pour ne pas laisser les élèves (ni le prof d'ailleurs) et je les aide si nécessaire.

Ensuite je donne aux élèves une feuille A4, quadrillé 1cm/1cm, c'est-à-dire comprenant 20/28 carrés de 1 cm de côté et je leur demande, en vue de se faire eux-mêmes le jeu, de dessiner une croix comme la mienne (c'est-à-dire qui a tous les côtés de même longueur, je précise), la plus grande possible (c'est important et ça réfère, tu l'auras compris au plus grand carré possible dans une feuille A4 de François), en suivant les lignes du quadrillage.

Et là, c'est vraiment rigolo de voir ce qui se passe, comment les élèves vont s'y prendre pour réaliser leur croix.

Ce matin, par exemple, j'ai une élève qui a mis la feuille dans le sens de la longueur, est partie à 1 carré du bord (à 7 carrés du bord gauche), puis est partie horizontalement de six carrés (sans compter du tout) en direction de la droite, puis, elle a tourné de 90 degrés pour descendre de 10 carrés vers le bas, retourné vers la droite de 90 degrés pour repartir de 14 carrés vers la droite (elle parvient donc à 1 carré du bord droite de la feuille), puis à nouveau quart de tour et 8 carrés en direction du bas (elle parvient à un carré du bas de la feuille), puis quart de tour et 20 carrés en direction de la gauche (elle se trouve pile en face du point de départ), Nouveau quart de tour et 4 carrés contre en haut, nouveau quart de tour six carrés contre la gauche (elle parvient à 1 carré du bord gauche de la feuille), quart de tour, elle repart de quatre contre en haut (elle est pile en face cette fois de la ligne

supérieure de la barre opposée de sa croix, nouveau quart de tour et déplacement de 4 carrés vers la droite, puis quart de tour, elle monte de 10 carrés contre en haut (elle se retrouve à deux cases de son point de départ), dernier quart de tour pour effectuer les deux derniers carrés vers la droite.



Eclat de rires en voyant sa croix biscornue et pourtant croix quand même.

C'était vraiment joli de voir tout au long de sa construction la conjonction de : faire une croix en ajustant perceptivement ces traits et occuper un maximum d'espace, piloter son travail.

Bon alors, je lui ai naturellement proposé de faire une nouvelle croix.

Elle est repartie à deux du bord supérieur de la feuille (et sept de la gauche) six vers la droite (sans compter les carrés à nouveau), puis six contre en bas, huit à droite, six en bas, (huit) neuf à gauche, cinq en bas, six à gauche, cinq en haut, cinq à gauche, six en haut, six à droite, six en haut.

Et là, elle était plutôt satisfaite de sa croix. Quand je lui ai demandé si elle voyait quelque chose à corriger, elle m'a proposé de rajouter une ligne sur le haut de sa croix, une ligne en bas, une colonne à gauche, et de raboter (effacer) deux colonnes à droite). En fait, j'ai pu constater qu'elle tentait d'évaluer perceptivement la grandeur des quatre carrés qui forment les quatre branches de la croix.

Je lui ai alors montré qu'il était aussi possible de compter les carrés de chaque côté : ce que j'ai fait pour lui montrer qu'il y avait tantôt six, tantôt sept.

Elle m'a alors redemandé une nouvelle feuille et a construit direct, une croix parfaitement correcte, en comptant six et tournant à chaque fois d'un quart de tour.

Au terme de son travail, je lui ai encore demandé s'il elle connaissait la longueur du tour de la croix : elle a répondu direct 4 fois 6, euh attends, 3 fois, ça fait 18, euh 24. Je lui ai alors proposé de vérifier en comptant, mais dès qu'elle a eu passé 30, elle s'est découragée et je lui ai alors proposé de découper sa croix et de finir la réalisation du jeu comme cela était indiqué dans le manuel.

Un autre truc qu'il est aussi intéressant de faire (pour des plus grands, je l'ai aussi fait au CTJ), c'est de demander aux élèves combien il y a de carrés à l'intérieur de la croix (180 pour une croix de neuf fois 6 de côté). Ce qui est alors marrant, c'est de leur dire ensuite de transformer la croix en carré, puis à nouveau de mesurer le pourtour et de dire maintenant combien il y a de petits carrés à l'intérieur.

Un des élèves du CTJ, qui n'arrivait pas à compter le pourtour du carré (parce que le quadrillage était découpé) a pris sa règle, mesuré le côté du carré et trouvé 13 cm. Avec la calculette (j'étais assez ébahi, je dois dire), il a ensuite calculé l'aire en faisant 13 fois 13 et trouvé 169. Bon, cela ne l'a pas vraiment gêné de ne pas retrouver les 180 carrés qu'il avait découvert, ce qui bien entendu ne m'a pas empêché de lui poser la question.

En fait il n'était pas vraiment loin du compte : 180 n'est pas très loin de 13 fois 13.

Bon, j'ai essayé de te raconter (j'ai fait vite évidemment et je ne sais pas si c'est très parlant) deux trucs assez marrants, mais j'en ai vu d'autres encore. Je pense vraiment que l'activité est super, alors, à l'occasion, ¡ »

Analyse des modifications introduites.

La narration de J-M Favre illustre bien cette seconde option que nous avons empruntée. Le manuel présente un treillis d'activités construites chacune autour d'une idée et d'un fait particulier, vues comme autant de tâches bonnes à faire apprendre la géométrie, ponctuelles, distinctes. Notre collègue prend le prétexte de la *croix géniale* pour soumettre à son propos une gerbe de tâches variées.

Prenons une analogie théâtrale et ses clauses d'unité de temps, de lieux et d'action. C'est comme si les manuels classiques étaient rédigés selon des clauses analogues, en particulier d'unité du domaine de référence et de problème, et que J-M Favre rompait avec celles-ci. N'hésitant pas à dévier ses élèves vers d'autres problèmes que celui posé, à la faveur de ce que leurs propres tentatives lui suggèrent. De guide qu'est l'enseignant dans le manuel, le voilà tantôt provocateur, tantôt suiveur. La situation et sa dynamique s'en trouvent fortement altérée au point où nous devons nous demander si son action est vraiment adéquate et pertinente.

Examinons tour à tour ces deux questions : *gerbe de tâches* incluses dans la situation et *dérive*.

Gerbe de tâches

Le canevas du manuel est classique : il propose aux élèves de confectionner un matériel pour les inviter à un petit casse-tête. J-M. Favre inverse la logique de cette construction idéale en

faisant lui-même la démonstration du casse-tête. L'enseignant use du fait géométrique comme un appel. La fiche met l'élève au défi de réussir le puzzle (et par là de réaliser le fait), notre collègue déplace l'accent sur le fait géométrique lui-même. Il attend des élèves qu'ils arrivent à retrouver la propriété entrevue, ce qui motive en retour la confection des pièces.

Dans le cas d'activités de type casse-tête, lorsqu'un élève n'aboutit pas, que dire d'autre sinon qu'il n'a pas trouvé la solution ? C'est une difficulté propre à l'analyse de toute activité qui compte une part de recherche.

Ici, le professeur montre clairement qu'on peut aboutir, qu'il a la réponse, et il en dévoile quelques indices, ceux que les élèves pourront capter dans ce premier contact. Ce faisant il donne aussi un indice de reconnaissance lorsque les élèves s'approcheront de la solution. L'inversion opérée n'est pas particulièrement originale²³. Je dirai plus loin comment nous l'avons reprise à notre compte A. Racheter et moi, pour notre recherche autour de *croix géniale*, et j'essayerai de la présenter sous son aspect sémiotique.

Selon sa description, J-M Favre prend prétexte de *croix géniale* pour proposer une gerbe de tâches diverses²⁴. En voici une liste non exhaustive (comme il nous l'annonce lui-même) :

1° L'enseignant demande de bien regarder sa démonstration ;

2° il propose de dessiner la plus grande croix possible sur une feuille de dimension A4 avec un quadrillage (et cadre ?) de 1cm de côté ;

3° suit une tâche (implicite) de discussion / correction avec lui (jugement du résultat, indication de ce qui pourrait être corrigé, autre moyen de contrôle par dénombrement de cases) ;

4° suit une tâche d'attribuer une dimension à la croix ; il n'est pas évident de caractériser cette croix par la mesure de son côté, car cela suppose qu'on la considère bel et bien comme un polygone à 12 côtés égaux ; prolongement spontané en la tâche de déterminer le périmètre de la croix ;

5° l'enseignant propose de découper la croix ainsi dessinée ;

6° il rejoint les points 2 et 3 de la fiche *croix géniale*. Qui a reporté les lignes de découpe internes ? J-M Favre a omis de nous le dire.

D'autres tâches encore ont été associées au passage :

²³ Pour ma part je l'ai utilisée dans une perspective de défi à fonction institutionnalisante dans deux études, l'une à propos d'une didactique du jeu de Carambole en classe spéciale (Conne 1994b), l'autre dans le travail avec une élève mutique, à qui nous avons pu enseigner un jeu de langage, le *Qui est-ce ?* (Conne 1999a, p.21). Dans ces deux cas, cette annonce de la fin de l'activité avait eu pour rôle de relancer l'activité dans le réseau institutionnel (pour cette notion de réseau institutionnel, cf. Conne 2003).

²⁴ La dynamique de la situation qu'il instaure ressemble à celle d'une résolution de problèmes qui au cours de son déroulement passe du problème initial à des problèmes associés, soit suite à une analyse et décomposition en sous problèmes, soit au détour de reformulations (cf. Conne 2004).

8° Déterminer le nombre de cases (surface) de la croix (on remarque une erreur puisque J-M Favre dit que la croix a 9 fois 6 de côté), ce qui s'accompagne de tâches associées selon que les élèves procéderont à de simples dénombrements ou à des dénombrements organisés, etc., voire même à des calculs.

9° Jeu périmètres / aires dans la transformation de la croix en carré. Aire invariante, périmètre non (mais plus que cela, périmètre difficilement mesurable avec la maille du quadrillage sur laquelle est construite la croix), ce qui s'accompagne de mesures et/ou de calculs.

Ce jeu de tâches a une certaine structure, elle n'est de loin pas aussi univoque que celui que prévoit la fiche. Certaines tâches ne sont que le prolongement de ce que les élèves ont voulu faire, plus ou moins spontanément. Enfin certaines tâches apparues dans un enchaînement donné se présentent à nouveau à l'occasion d'un autre enchaînement, ces répliques se faisant manifestement écho. Bien sûr, il n'y a pas que des enchaînements, et certains élèves ont sauté d'une tâche à une autre sans raison apparente. On voit aussi l'enseignant demander à une élève de répéter par deux fois ses essais, et ce, afin de garantir la réussite au point 1° de la marche à suivre du manuel. í

Détours et dérives.

En exprimant les choses comme je l'ai fait précédemment en termes d'une relation ternaire entre deux figures et une collection de morceaux, contrairement à la fiche qui se fixe comme données de deux des termes de la relation et demande d'en produire le troisième, J.-M. Favre a choisi d'en fournir tous les trois constituants. Ce faisant, n'a-t-il pas vendu la mèche et trahi l'idée didactique de *croix géniale* ? Ne pouvait-il donc vraiment pas faire plus confiance à ses élèves et au moins essayer avant de prendre ainsi les devants ?

Les craintes de notre collègue et ce qu'il a cherché à éviter étaient certainement fondées.

En effet, lors de la première leçon, dans la classe de A. Racheter où nous avons mené notre propre recherche, nous avons constaté au vu de leurs productions qu'aucun élève n'aurait pu faire la fiche du manuel, par lui-même sans aide. Aucun n'a su reproduire du premier coup une croix correcte et ce sur papier quadrillé 1cm ! Seuls trois élèves sur douze ont pu la mener à bien au bout d'une bonne heure, non sans aide, et après avoir vu l'enseignante faire les puzzles et des camarades s'essayer à leur tour. Parmi ces trois élèves là, au moins un a rechigné et mis les pieds au mur, n'y voyant pas vraiment quelque chose d'intéressant. Dans ces conditions que peut-il bien rester de *génial* à cette croix ? L'espoir qu'ils arriveront eux aussi à faire comme le prof. ?

Pourtant, dans sa narration notre collègue nous fait part de son enthousiasme, le bonheur devant cette élève éclatant de rire à la vue de son premier essai de croix. « *N'est-ce pas génial ?* » nous dit-il. Sa narration nous convainc sans peine que l'élève a effectivement eu sa surprise et que cela lui aura plu, au moins en ce moment.

Mais lui, le prof., que peut-il bien en tirer ? Il dit sa satisfaction de les avoir introduits à des mesures et calculs de périmètre et d'aires, de les voir prendre des initiatives, etc. Et c'est de voir ainsi fonctionner le savoir comme contrôle qui lui plaît. Il semble donc que notre collègue ait réussi à transposer un petit peu de l'effet suggéré dans le livre d'exercice par le

qualificatif *génial* à d'autres effets. La question est alors de se demander si ces autres effets ont encore quelque chose à voir avec les propriétés mathématiques de la croix.

J'ai fait remarquer le risque didactique pris par les manuels afin de donner une chance aux élèves de rencontrer le fait de la croix géniale, risque de réduire ce fait non banal à un simple exercice de bricolage pour almanach ! Risque assumé et couvert d'avance par l'expertise des auteurs. J.-M. Favre n'a fait que de prendre sur lui d'autres risques ; peut-on dire qu'ils sont plus grands ? Il le fait parce qu'il estime que malgré toutes les précautions prises pour cette fiche, il n'y a que très peu de chances que cet enseignement soit jouable pour ses élèves.

Notre recherche sur le thème *croix géniale*.

Ces considérations ne sont que liminaires et ne résolvent pas encore le problème posé qui est celui de juger de la pertinence et de l'adéquation de l'activité, qu'elle soit enseignée comme prescrite dans les manuels, ou profondément remodelée comme l'a fait J.-M. Favre. Nous savons en outre que cette question ne trouvera pas de réponse absolue que cette dernière dépend au moins de deux facteurs : les élèves d'une part, et, d'autre part, le treillis d'activités et de tâches auquel elle est associée ainsi qu'aux places qu'elle peut prendre dans les progressions et parcours envisageables.

En ce qui concerne l'option classique, j'ai déjà indiqué que nous la considérons comme inadéquate au regard des piètres performances des élèves de l'enseignement spécialisé, ce qui nous a amené à chercher une autre voie qui repose sur l'idée d'examiner la question de l'expérience que peuvent procurer de telles activités. J'ai indiqué aussi trois volets importants de cette question :

- l'expérience est faite de reprises et de répliques ;
- elle est marquée de faits mathématiques (ici géométriques),
- dont la signification est d'autant plus grande qu'ils seront revisités par l'expérience, parce qu'ils sont au nœud de relations mathématiquement riches.

Voilà comment, à titre de recherche, j'ai proposé à A. Racheter de travailler autour de la fiche *croix géniale* dans sa classe de niveau 3P d'enseignement spécialisé, avec l'idée de revisiter plusieurs fois cette propriété originale.

J'ai transmis à A. Racheter la narration que nous avait faite J.-M. Favre en lui demandant de s'en inspirer. Pour ma part, pour mes interactions avec A. Racheter et sa classe, je me suis focalisé sur l'idée suivante :

- *maintenir une intrigue cognitive et didactique pour chaque partie, ici les élèves, l'enseignante pilotant ses leçons et l'observateur présent sur les lieux.*

Comment peuvent se nouer de telles intrigues ? En ouvrant l'idée mathématique qui préside à *croix géniale* et, partant de niveaux de réalité manifeste, en les déployant les uns sur les autres, tant sur des niveaux supérieurs (pavages, niveaux explicatifs, nœuds de relations) que sous-jacents (vers l'expérience).

Le propos de ces trois épisodes (10, 11 et 12) d'analyses a priori aura été de nouer pour vous cette intrigue. Je n'y reviendrai pas. Pour comparaison, voyez en annexe une description de celles que nous avons menées dans la classe.

Textes cités

Conne F. (1988) Numérisation de la suite des nombres et faits numériques (3^{ème} épisode). *Math- Ecole*, 132, 26-31. http://www.ssr dm.ch/mathecole/crbst_93.html
<https://hal.archives-ouvertes.fr/halshs-01048692>

Conne F. (1988) Numérisation de la suite des nombres et faits numériques (3^{ème} épisode, suite). *Math- Ecole*, 133, 20-23. http://www.ssr dm.ch/mathecole/crbst_92.html
<https://hal.archives-ouvertes.fr/halshs-01048712>

Conne F. (1992) Savoir et connaissance dans la perspective de la transposition didactique. *Recherches en didactique des mathématiques*, 12 (2.3), 221-270.

Ce texte a été publié en 1996 comme 5^{ème} chapitre du livre: *Didactique des mathématiques* de la collection Textes de base en Pédagogie, pp 275-338, sous la direction de J. Brun, Delachaux et Niestlé, Lausanne, Paris, 1996.

Conne F. (1993) Du sens comme enjeu à la formalisation comme stratégie : une démarche caractéristique en didactique des mathématiques, In *Sens des didactiques, didactiques du sens*, Ph. Jonnaert & Y. Lenoir (Eds.), (Actes des Troisièmes rencontres internationales du REF - réseau international de recherche en éducation et formation). Editions du CRP Faculté d'éducation, Université de Sherbrooke, pp. 205-261.

Conne F. (1994a) Quelques enjeux épistémologiques rencontrés lors de l'étude de l'enseignement des mathématiques, in Actes du XXI^{ème} congrès colloque INTER-IREM de la COPIRELEM, Chantilly 1994, IREM Picardie INSSET St Quentin, p. 3 à 35.

Conne F. (1994b) Démarche proposée pour un travail de mémoire au SCES. 8p.

Conne F. (1999a) L'activité dans le couple enseignant/enseigné, Actes IX^{ème} Ecole d'été de didactique des mathématiques août 1997. ARDM.

Conne F. (1999b) Faire des maths, faire faire des maths et regarder ce que ça donne. In Lemoyne G. & Conne F. (Sous la dir.) *Le cognitif en didactique des mathématiques*, pp. 31-69. Montréal : Presses Université de Montréal.

Conne F. (2002) Evolution de la référence à la réalité dans les manuels suisses romands au cours du 20^{ème} siècle., in cd-rom des *Actes de la 11^{ème} école d'été de didactique des mathématiques*, Corps, aout 2001, JLDorier et al eds, la pensée sauvage.

Conne F. (2003) Interactions de connaissances et investissement de savoir dans l'enseignement des mathématiques en institutions et classes spécialisées. In Schmidt S. & Maury C. (éds) *La spécificité de l'enseignement des mathématiques en adaptation scolaire, Education et Francophonie, XXXI (2)*, automne 2003. Revue en ligne.
<http://www.acef.ca/c/revue/sommaire.php?id=3#.VvW sTHo0gu>

Conne F. (2003-2004) Sur le fil de nos expériences. Saison 1, 10 épisodes, 85p. (Édition 2016) <https://halshs.archives-ouvertes.fr/halshs-01296507/>

Conne F. (2004) Problème de transposition didactique, *Petit x 64*, 62-81.
<http://www-irem.ujf-grenoble.fr/spip/spip.php?rubrique26>

Conne F. (2008) L'expérience comme signe didactique indiciel, *Recherches en didactique des mathématiques 28 (2)*, 219-264. Grenoble : La pensée sauvage.

Deledicq A. (1998) *Pythagore et Thales*, ACL, Ed. du Kangourou.

Favre J.-M. (2003) Un programme de mathématiques "adapté" pour l'enseignement spécialisé : un jeu délicat entre liberté ostensible et contraintes intestines. *Math Ecole 206*, 41-50.

Favre J.-M. (2008) Jeu de tâches : un mode d'interaction pour favoriser les explorations et les expériences mathématiques dans l'enseignement spécialisé, *Grand N 82*, 9-30.

Annexe : Dans une classe de 3P, ES.

J'ai proposé à l'enseignante, A. Racheter, de préparer et de piloter une suite de situations où nous pourrions expérimenter et explorer les possibilités offertes par cette activité autour de la croix géniale et auxquelles j'assisterai comme observateur. Elle avait justement une classe de douze élèves de l'enseignement spécialisé de niveau 3P (à qui est destinée cette activité). Je lui ai fait part de mes analyses et lui ai suggéré de s'inspirer de la description de J.-M. Favre. Parallèlement à mes observations dans sa classe, j'ai mené quelques observations au centre thérapeutique de Chamoyron afin d'écarter mes données et explorer encore d'autres pistes.

Cette recherche s'est nettement étoffée par l'apport de la dimension sémiotique dans nos analyses et notre pilotage des situations. Par contre nous n'avons pas su gagner le pari de leur faire construire des puzzles personnalisés.

Je vais décrire à la fois le jeu de tâches tel que A. Racheter l'a développé et le cours qu'a pris cette activité. Par rapport à ce que nous a relaté J.-M. Favre, intervient une autre dimension du jeu de pilotage : l'alternance entre tâches individuelles et en collectif. Il resterait à étayer ces descriptions par des analyses des dessins et découpages que les élèves ont produits comme cela a été fait lors de diverses présentations orales de cette recherche ainsi que, très partiellement dans un article de RDM (Conne 2008).

Liste des tâches établie par A. Racheter.

Voici les tâches que A. Racheter a prévues pour sa série de leçons. Cette liste a été établie au fur et à mesure de la progression et de nos observations. Certaines tâches sont reprises parce qu'elles n'ont pas pu être proposées à tous les élèves dans la séance prévue parce que nous avons décidé de relancer l'activité. Les tâches effectivement proposées et réalisés ont été un peu différentes.

4.03.03

Sur une feuille A4 quadrillée 1cm.

- Dessiner une croix identique à celle du modèle du livre 3P, p. 73, la plus grande possible
- Sur une feuille de même quadrillage, dessiner une croix suisse de 6 carrés de côtés.
Chercher le périmètre de la croix ainsi dessinée.
- Trouver le nombre de carrés dans la croix ainsi dessinée (surface).
- Tracer les lignes internes de la croix selon le modèle du livre 3P, p. 73, découper la croix et ses morceaux, faire le carré.

18.03.03

Sur une demi-feuille A4 (A5) quadrillée 4mm (usuelle)

- Dessiner la plus petite croix possible en suivant les lignes du quadrillage.
- Dessiner une croix large.
- Dessiner une croix large partout la même chose.
- Dessiner une croix mince.
- Dessiner le plus de croix possibles sur sa feuille en laissant le moins de trous possibles.

Sur le dessin (distribué) d'une croix de dimension 14-10-14 (c'est-à-dire longueur des branches 14, largeur des branches 10, centre de la croix, carré de 10, feuille A4 quadrillée 4mm) :

- Tracer les lignes selon le modèle du livre 3P, p. 73, découper la croix et les pièces et tenter de faire un carré.

01.04.03

Sur le dessin (distribué) d'une croix de dimension 14-10-14 (c'est-à-dire longueur des branches 14, largeur des branches 10, centre de la croix, carré de 10, feuille A4 quadrillée 4mm) :

- Tracer les lignes selon le modèle du livre 3P, p. 73, découper la croix et les pièces et tenter de faire un carré.
- Transformer la croix pour qu'elle permette de réaliser le puzzle.

À partir des quatre morceaux de la croix de St André obtenus selon le découpage du manuel,
- dessiner la solution du puzzle de carré sur une feuille blanche.

Sur une feuille A4 quadrillée 1cm,

- dessiner le plus de croix possibles sur sa feuille en laissant le moins de trous possibles.

8.04.03

Sur une feuille A4 quadrillée 1cm,

- dessiner le plus de croix possibles sur sa feuille en laissant le moins de trous possibles.

29.04.03

1 feuille de papier calque quadrillée 2,2cm.

1 photocopie (1/2 feuille A4) d'un pavage de croix cg sur un quadrillage 1cm.

Au centre de ce pavage, dessin de 4 droites inclinées, déterminant par leur intersection un carré. Les lignes du pavage partagent ce carré selon une des solutions du puzzle (qui a deux solutions). Ces lignes serviront de repères pour orienter le report du calque sur le pavage de croix.

- Superposer le calque sur la feuille pavée de croix, afin de faire coïncider le carré de la feuille avec un carré du calque.
- Dessiner à l'intérieur d'un carré du calque les pièces de la croix (en sur-lignant les bords de la croix).
- Colorier chacune des quatre pièces d'une couleur différente.

Quatre morceaux identiques dessinés séparément sur une feuille.

- Découper ces morceaux et les combiner afin d'obtenir un carré.
- Les combiner afin d'obtenir une croix cg.

Notes (incomplètes) prises lors de ces leçons.

Chacune des séances durait de ¾ heure à 1h ¼ (une fois).

J'étais présent à toutes ces séances mais observateur limitant mes interventions, à quelques moments très particuliers. Je passais auprès des élèves pour examiner leur travail, les encourageais parfois (rarement), échangeais quelques propos.

La première leçon s'est en gros déroulée selon le canevas décrit par J.-M. Favre, mis à part 1° l'introduction en collectif au tableau noir et 2° le fait que tout se déroule avec l'entier du groupe classe avec une alternance de discussions collectives et de travail individuel chacun à sa place.

Lors de l'introduction, les élèves sont venus dessiner sur un tableau noir quadrillé et en général, ils ont suivi les lignes du quadrillage.

Nous avons obtenu des croix comme je les ai obtenues auprès d'autres élèves, mais même auprès d'adultes en formation initiale d'instituteurs, 2^{ème} année. Principalement des croix de lignes et des croix doublées ou larges comme disent les élèves, c'est-à-dire polygones.

Un élève a dessiné une croix approximativement suisse en croisant deux rectangles.

Puis nous nous sommes mis d'accord sur les croix régulières qualifiées pour l'occasion de suisses. Nous avons ancré ce dessin dans le contexte des drapeaux nationaux (les élèves de cette classe sont en majorité étrangers).

En ce qui concerne le puzzle, A. Racheter a commencé par procéder comme J.-M. Favre puis elle a demandé à quelques élèves de présenter aux autres leurs tentatives de combiner les pièces soit pour reconstituer une croix, soit pour reconstituer un carré.

Le troisième élève qui essaye réussit à obtenir la croix. Seul un élève, aidé par l'enseignante, retrouve le carré.

À ce moment A. Racheter renvoie les élèves à leur place, leur fait ouvrir leur livre à la page de *Croix Géniale* et leur demande de reproduire le modèle de croix, mais en dessinant la plus grande croix possible sur leur feuille quadrillée de 1cm.

Grande diversité de productions, beaucoup d'élèves ne suivent pas les lignes du quadrillage et font des traits à main levée, croix dissymétriques, et même certaines n'ont que trois branches etc. Seuls trois élèves ont réussi à reproduire des croix satisfaisantes, les neuf autres ont échoué. Retour en collectif pour discuter des trois productions abouties : deux croix de 6 de côté et une croix de 7 de long et de 5 de large. Tous estiment que ces croix sont régulières et personne ne relève que l'une d'entre elle l'est moins que les autres.

Nouvelle tâche : dessiner une croix de 6 carrés de côtés.

Après plusieurs essais pour certains, 8 élèves finiront par produire une telle croix et 4 autres n'aboutissent pas, même après plusieurs tentatives.

L'un d'entre eux abandonne le dessin de la croix pour marquer de numéros les carrés comptés. Il numérote de 1 à 6 et dans ce cas leur décompte ne se fait pas dans un sens de circuit constant, ce qui occasionne des erreurs, il s'y prend trois fois en améliorant son dessin mais sans aboutir pour autant.

Seuls trois élèves sur les sept qui ont essayé de le faire réussiront à tracer les lignes de découpe correctement, et ont découpé leur puzzle.

Dans tous les cas, c'est l'enseignante qui a contrôlé chacune des étapes.

Ouverture

Le 25.11.03

En direction de la formation

*

A partir de la fiche de 3P Plier Couper

Consigne pour deux élèves

Matériel : plusieurs feuilles de même dimension, ciseaux

Procédure

Plier sa feuille en 4.

La figure que propose le manuel indique une feuille rectangulaire ó on pense à format A4 - plier dans largeur (pli parallèle à la longueur), puis sans déplier plier le feuillet dans la longueur (marque du pli parallèle à la largeur).

Sans le montrer, inventer un découpage-modèle en donnant deux coups de ciseaux en ligne droite, sans toucher les bords sans plis.

Déplier, aplatir et échanger son découpage-modèle.

Refaire le découpage-modèle de l'autre avec une nouvelle feuille. Il est interdit de replier le découpage-modèle.

Déroulement

Dispositif

L'enseignant précise qu'il peut être nécessaire de faire plusieurs essais.

Validation

Les élèves comparent leur production avec le découpage-modèle et jugent s'il est nécessaire ou non de tenter un nouvel essai.

Variable

Consigne

Aux élèves qui éprouvent des difficultés à retrouver les coups de ciseaux, l'enseignant propose de plier la feuille en deux et non en quatre, afin de passer de deux axes de symétrie à un seul. Ce nouveau problème amènera l'élève à se représenter plus facilement le lien entre feuille pliée et feuille dépliée.

Prolongement

Des petits trous LE p. 74.

*

J'ai proposé l'animation du jeu suivant.

J'ai travaillé avec des feuilles A5.

J'ai introduit pour un groupe des feuilles quadrillées 1cm.

J'ai modifié l'activité en proposant deux découpes à 2 coups de ciseaux rectilignes (deux fois deux coups de ciseaux), entailles dans les bords avec plis (pas forcément une entaille dans chacun des bords, et pas forcément entailles qui ne se chevauchent pas).

Avec 4 coups de ciseaux, la figure que font les trous est plus apparente.

On peut se contenter de deux coups de ciseaux (une encoche, ou entaille). Je préfère venir à cette simplification dans un second temps, lorsqu'on examinera les catégories de figures que l'on peut obtenir. Dans ce cas, on ne trouvera plus que deux niveaux de symétrie : symétrie des formes du ou des deux trous (dans le cas d'un trou deux symétries, dans le cas de deux trous une symétrie), symétrie entre les deux trous (dans le cas de deux trous).

L'activité demande de reproduire la disposition de découpes dans une feuille de papier, dont les repères sont les bords de la feuille ainsi que la position des plis. La feuille est rectangulaire ce qui fait que les axes des plis ne sont pas interchangeables (comme ils le seraient pour une feuille carrée).

De plus l'activité joue sur la transformation des figures des découpes lors des dépliages de la feuille.

La transformation directe est une transformation composée de deux dépliages.

La transformation inverse s'opère lorsqu'on replie la feuille (figure) sur elle-même afin de ne laisser apparaître de la figure plus que deux encoches.

Niveau 1. Figure globale.

La figure globale des trous disposés sur la feuille cadre. Deux encoches sont faites sur un ou deux des bords du feuillet, la transformation fera que les trous pourront se retrouver au centre de la feuille alors que leur encoche était au bord de la feuille, cela joue aussi sur l'orientation de l'encoche par rapport aux bords, par exemple si une encoche est faite de sorte que cela donne un trou triangulaire, le sommet du triangle sera orienté vers le bord du cadre (vers l'extérieur de la feuille) ou au contraire vers le centre du cadre (vers le centre de la feuille), etc.

Niveau 2 disposition des entailles l'une par rapport à l'autre et des trous les uns par rapport aux autres.

Si les deux encoches sont faites sur le même pli, se chevauchant ou pas, la figure après dépliage sera en « brochette » soit en longueur soit en largeur de la feuille cadre. Si les deux entailles sont faites sur chacun des bords, elles seront globalement disposées « en losange ». Dans ce cas la transformation due au dépliage va faire apparaître une distribution des trous en quatre points « cardinaux ». Elles pourraient aussi se chevaucher. Etc.

Niveau 3. Forme des découpes prises pour elles-mêmes.

Sur ce dernier niveau, la transformation peut être de deux types :

a) complétion d'une figure par sa symétrique : comme on a fait deux découpes (je nommerai cela deux encoches) on obtient un quadrilatère, à moins qu'une des découpes soit perpendiculaire au pli, dans ce cas on obtient un triangle.

b) dédoublement des encoches ou des trous. Si les deux encoches ne se chevauchent pas on aboutira à 4 trous, sinon on aboutira à 2 voire 1 seul trou final qui peut avoir jusqu'à 16 côtés (4 fois 4 coupes).

On obtient donc des formes de trous en triangles ou en quadrilatères ou des figures plus complexes, des hexagones, des étoiles etc. La transformation a donc un effet sur la forme des trous, leur taille, leur disposition et enfin leur nombre.

Matériellement, l'ordre des pliages et dépliages est guidé par la marque des plis dans la feuille de papier, il est donc en grande partie contrôlé par le dispositif. Le sujet ne peut pas changer l'ordre du dépliage, mais il peut changer l'ordre de replier, cela lui demandera un petit effort. Si jamais ceci est fait alors la feuille de papier ne dirigera plus l'ordre de replier.

Pour autant que l'on considère l'entier de la figure que forment les trous ce qui veut dire une figure complexe formée de 1 à 4 polygones disposés entre eux d'une certaine manière. La figure des deux encoches est donc un quart de la figure finale. Si on pense séparément les encoches alors elles seront des demi trous si les encoches sont faites sur le pli, des quarts de trous si elles sont faites en mordant sur l'intersection des plis. Des encoches ou des trous qui ne mordent pas sur des plis se dédoublent ou se quadruplent.

Par report de son feuillet sur la feuille dépliée, par superposition d'un quadrant, on peut déterminer la forme des encoches par « décalque », et le vérifier perceptivement en examinant que les autres quadrants sont bien « en miroir » du quadrant considéré.

On peut essayer mentalement de plier et déplier sa feuille afin de chercher à prévoir ces transformations de figure. Il y a trois niveaux.

Mentalement ou de manière mixte (mentalement et matériellement), on peut considérer le feuillet comme un quadrant de la feuille une fois dépliée et les deux encoches comme deux quarts de la figure des trous.

*

Principe d'animation.

Toute cette complexité est facilement réduite à de simples effets. L'animation consistera donc à ralentir le processus afin de bien amener les élèves à penser les transformations en jeu assimilables à des jeux de dédoublements symétriques. Afin aussi de contrôler ce qu'ils mettent en œuvre pour proposer leur réponse.

Il s'agit de ralentir les élèves dans l'exécution de la procédure prévue par la fiche et de bien contrôler aussi qu'ils respectent la règle de ne pas replier le découpage modèle (on pourra faire usage de papier adhésif pour obliger le maintien de la feuille ouverte sur la table, ou en y en maintenant qu'une partie collée à la table pour mettre en évidence l'ordre des pliages-dépliage).

Ce que le jeu de découpe et de dépliage prend en charge ne le sera pas sur dessin, pour le dessin ce sera au sujet de compléter sa figure par symétrie.

Plier couper est donc un bon moyen de vérifier la justesse d'une anticipation signifiée sur un dessin. Par contre, sur le dessin on retrouve les trois niveaux figuraux de l'analyse de l'activité. On peut se centrer sur le dessin de la forme des trous. Situer les trous les uns par rapport aux autres, situer la figure des trous dans la feuille et par rapport aux axes des plis. Il y a donc une assez grande similitude entre le dessin avec crayon et la figure des trous. De plus par chablon (« gabarit » en français) on peut aussi trouver à dessiner le motif déplié en reportant le feuillet successivement sur chacun des quadrants. On a donc trois possibilités : symétries par dépliage, symétries par dessin et symétrie par reports d'un chablon.

En définitive l'activité se passe en divers moments, deux dépliage, des retournements de la feuille et on peut reproduire les mêmes effets sur deux nouveaux registres : registre dessin, registre chablon (mixte). Sur ces registres on a aussi des transformations composées. Pour ralentir les processus, je joue donc sur l'interruption des transformations, une décomposition des étapes et sur les changements de registres.

En proposant du papier quadrillé, j'ai introduit un nouvel élément, donc niveau de figure, puisque certains vont tenter de reproduire les figures situées exactement dans le quadrillage ou encore vont vouloir découper leurs encoches sur le quadrillage, ce qui amène de nouvelles formes d'encoches à trois coups de ciseaux. Cette suggestion-leurre influencera certains mais pas d'autres.

*

Plan d'animation

Première phase :

J'ai introduit le jeu par un premier moment où j'ai présenté les feuillets et la manière de les confectionner (pliage en 4).

J'ai donné la règle du jeu qui consiste à faire deux encoches, nous avons fait les encoches. J'ai interdit de déplier.

J'ai demandé d'anticiper la forme de la figure une fois le feuillet déplié en demandant de dessiner ce que ça donne.

J'ai examiné ce que les élèves dessinaient, afin de voir à quel niveau ils appréhendaient la chose : déformation ou démultiplication des encoches, transformation de la figure des encoches en figures de trous, disposition globale dans la feuille cadre, report ou non des plis.

Ceci a amené à discuter et à introduire le principe du jeu. Je n'ai pas trop insisté sur la recherche et la vérification de sa devinette, juste aménager une surprise afin d'intéresser les élèves au jeu qui suivra.

Là encore dans le jeu tel que prévu dans la fiche scolaire, ce moment est inclus dans la première partie entre les élèves, moi j'ai voulu leur faire découvrir le jeu avant de les faire jouer.

Seconde phase :

J'ai fait jouer les élèves à tour de rôle et pas par échange de feuilles comme le stipule la consigne de la fiche scolaire.

Ici, l'activité se passe dans l'échange entre un proposant et un répondant, et moi comme animateur arbitre. Mon jeu consiste donc aussi à distendre le jeu en amenant à des échanges de places et de rôle dans le cours de la discussion.

Par exemple : Jeu entre A et B, et moi comme arbitre.

A a fait ses découpes et B ne l'a pas vu faire. A a déplié son feuillet, et il le montre à B, on voit une feuille comportant une figure de trous.

B propose une découpe du feuillet sensée reproduire une figure analogue à celle de A.

Je suspends le jeu qui consisterait à déplier le feuillet de B pour examiner si les deux figures correspondent, et demande à A ce qu'il pense de la réponse de B.

Si il y a désaccord, je puis examiner comment B réagit au verdict de A. Voudra-t-il se corriger ? Je lui demande alors de dessiner comment il découperait ses encoches afin de se corriger et ensuite, sur la base de ce dessin, je puis demander à nouveau son avis à A.

Parallèlement ou ensuite de ça, je puis demander à A de dessiner la figure qu'il pense que B obtiendra en dépliant son premier feuillet (celui avec les découpes) et/ou ses tentatives de se corriger.

Je puis ensuite procéder au dépliage mais ne permettre que le dépliage d'un pli et recommencer la concertation sur la base de la figure partielle obtenue.

Je puis attendre de voir si la procédure par chablon apparaît et sinon la suggérer progressivement en les laissant « mettre au point » la procédure à partir de ce que je leur aurais laissé entrevoir (en particulier dans le maniement du chablon/quadrant qui ne peut être reporté n'importe comment). On peut aussi prendre des chablon/moitié.

J'ai joué sur le fait que pour déplier la feuille on procède en deux temps : premier pli déplié, second pli déplié. On peut donc demander aux élèves un premier jugement de leur pari après un premier dépliage, de leur laisser corriger leur prévision si il le faut puis de procéder au second dépliage.

De plus on peut jouer sur les côtés recto et verso. En effet si sur une feuille pliée on dessine le découpage qu'on prévoit de faire et qu'on déplie, le dessin se retrouvera en verso, donc invisible. Je puis demander alors de dessiner (en laissant ou en ne laissant pas retourner la feuille) le dessin de la découpe. Lors du second dépliage, le dessin va encore disparaître, etc.

On joue sur la découpe et le dessin. Le dessin lui-même comporte différentes choses : dessiner les traits selon lesquels on va découper, dessiner les formes des trous qui apparaissent à diverses étapes du processus. Dessiner la feuille et y placer le dessin des plis et le dessin des trous. En fait, on a une idée de la forme finale que cela va avoir (un triangle, un losange etc.) et on doit le faire par « extrapolation » à partir des traits que l'on a déjà.

Il y a là un certain jeu, un problème qui consiste à obtenir quelque chose à partir de quelque chose sans que l'on sache très bien ce qui les lie.

A examiner plus en détails. Pour le moment :

Troisième phase facultative, selon la procédure décrite par le manuel. Ici peu importe de contrôler ce qui se passe réellement, les élèves y joueront selon le plaisir qu'ils peuvent prendre à ce jeu.

Quatrième phase collective envisageable, par exemple pour examiner tout ce qui pourrait se passer (donc comment devenir imbattable à ce jeu). Ou alors le prof propose des figures et les élèves cherchent à les reproduire.

*

Ce que je n'arrive pas à comprendre suffisamment.

C'est la difficulté que je rencontre chaque fois que je propose cette tâche aux étudiants. Ils ont toute la peine du monde à produire un relevé des figures qu'ils peuvent obtenir, et à s'assurer que ce relevé est complet, et à donner une organisation à ce relevé. Ce pourquoi ils ont le plus de difficultés est de dégager les propriétés des coups de ciseaux qui feront critères pour les formes. Ils savent assez vite comment obtenir telle ou telle forme et telle ou telle configuration de formes, mais ce qui est difficile pour eux réside dans la correspondance entre types de coups de ciseaux et types de figures obtenues. Il leur est difficile de démêler ceci :

- a) intervient pour chaque coup de ciseaux dans quel bord il est fait ;
- b) intervient pour chaque coup de ciseaux, l'angle qu'il fait avec ce bord, il est droit ou de biais, mais de biais il sera orienté de deux manières, orienté vers un bord de pli ou orienté vers un bord de bord (si je puis dire) ;
- c) intervient l'angle que font les deux coups de ciseaux ;
- d) (dans le cas de 4 coups de ciseaux), intervient la disposition des deux entailles l'une par rapport à l'autre.

Pour cela, le problème : plier une feuille selon deux plis, successifs (donc plier ne pas déplier et plier encore, mais pas forcément en 4) ; en un seul coup de ciseaux, cherche à obtenir un trou triangulaire, (variante, en un nombre minimum de coups de ciseaux cherche à obtenir un trou triangulaire) rend souvent les étudiants moins empruntés, plus agissants. Ils plient réfléchissent, s'y reprennent à plusieurs reprises éventuellement. Par contre ils ne considèrent pas les figures de trous obtenues pour elles-mêmes mais seulement selon leur conformité au triangle demandé. Ils ne se demandent pas : "quelles formes est-ce que je puis obtenir selon un tel procédé?" Le procédé est donc assujéti au résultat cherché et éprouvé comme plus ou moins problématique à obtenir.

C'est ce même assujettissement qui fait que les étudiants avec plier couper s'intéressent mille fois plus à faire des napperons que de répondre à ma consigne exploratoire. Pourtant ces napperons sont des jeux d'enfants !

Mais il y a plus amusant :

une étudiante observée mercredi s'intéressait à faire des napperons très complexes, en quelque sorte comme substituts à une exploration qu'elle ne voyait pas comment mener. Pourtant ses napperons n'étaient pas opportunistes ou anodins, au contraire, ils présentaient des découpes en dentelles assez fragiles, parce que l'étudiante cherchait à faire des motifs en gigogne, s'incluant les uns les autres, ce qui supposait de très fines attaches, donc une sorte d'illusion de suspension de ses motifs cela avait été suggéré par une des démonstrations que j'avais faites et où je tentais d'obtenir un motif symétrique fait de deux chevrons en losange ou cerf volant. Si on ne fait pas attention, on aura un trou en forme de losange ou de cerf volant et on perdra le chevron. Il s'agit en quelque sorte d'obtenir un trou avec un noyau à l'intérieur. L'étudiante a exploré ceci, en se compliquant encore la tâche. Elle a donc rencontré et résolu un certain nombre de problèmes, mais elle n'en a jamais fait état, se contentant de faire ses expériences pour elle et de montrer le résultat sans livrer de quoi c'était le résultat. Ses productions n'étaient pas surprenantes, en ce sens qu'on peut les assimiler aux productions classiques de napperons, mais en regard de ce que je demandais, c'était certainement atypique et je pense que ce cas tombe assez près de ce que J. Giroux

raconte dans son article *Conduites atypiques d'élèves du primaire en difficulté d'apprentissage*. (RDM, 28-1) aux pages 33-38.

Je me suis trouvé devant le problème didactique de savoir si il y avait eu exploration de la part de l'étudiante et si en définitive cela n'était pas équivalent à ce que je tentais d'obtenir de leur part.

Il reste que je suis très emprunté avec ces conduites qui se répètent chaque année dans mon séminaire et que je n'arrive pas à trouver comment faire la dévolution d'une exploration organisée. Il me semble qu'intervient ici quelque chose de l'imagination. Je me demande quelle imagination serait requise pour que puisse s'engager une démarche d'exploration. Le problème n'est pas le manque ou la pauvreté d'imagination, mais imagination de quoi, donc d'objet de l'imagination.

Cela dit, le pilotage d'une exploration est bien délicat, ce qui plaide pour les jeux de tâches, encore ceci à propos de découper un seul trou triangulaire dans une feuille pliée une fois, deux fois ou plus que vous pouvez ajouter au document envoyé précédemment.

Il me semble que la version suivante induit plus l'exploration :

Etape 1° : Plie une feuille et coupe dans le pli afin d'obtenir un seul trou triangulaire dans la feuille dépliée.

Etape 2° : Quand tu as réussi ceci, tente de faire la même chose avec deux plis.

Etape 3° : (Facultatif: Une fois que tu as réussi,) tente d'obtenir cela en le moins de coups de ciseaux possible.

Etape 4° : (Facultatif: Et avec plus que deux plis ?)

C'est en tous les cas ce que j'ai pu observer.

Hypothèse : demander en un seul pli est une indication de la réponse, en quelque sorte agit comme une contrainte facilitatrice, parce qu'en fait elle simplifie l'anticipation du résultat de la découpe. Il serait difficile de penser ensemble des plis et des découpes, alors que des découpes et un pli (ou des plis et une découpe) seraient plus simples à anticiper. On retombe alors sur la question de l'imagination.

Du point de vue sémiotique, de l'anticipation, de la surprise et/ou de la réussite:

on aurait que l'anticipation se ferait dans un signe dynamique à partir d'un signe immédiat. L'effet est d'abord immédiat, suite à une transformation (action etc.), en particulier la surprise serait un signe immédiat.

Pour ce qui en est de mes expériences à considérer :

- le dispositif consiste en une feuille de papier d'une certaine forme et d'un ou plusieurs plis que l'on fait dedans soit composé soit non composés, pour désigner ces plis du dispositif, je parlerai de charnières ;

- le dispositif se plie et se déplie ce qui transforme la forme de la feuille de papier ;

- ensuite on marque ce dispositif et pour ce faire, j'utilise trois modalités :

a) par un pli (le pli se marque droit). Ici il s'agit d'un pli qui a un autre statut que ceux du dispositif, il s'agit d'un pli de marque. La particularité du (ou des) pli(s) de marque(s) est que le marquage se fait dans toute l'épaisseur du feuillet et que lorsque ce dernier est déplié on obtient la trace de la (les) marque(s). On obtient alors une figure complète, donnant la position de la (les) marque(s) par rapport au dispositif : tant la feuille de papier que les marques des charnières du dispositif, notez qu'on retrouve ici l'ambivalence de l'instrument et du marqueur que j'ai relevée pour les découpes dans la pâte à modeler ;

b) par une marque au crayon (droit éventuellement avec la règle) sur le dispositif, mais alors d'une part ses replis sont inaccessibles et de l'autre, le report au verso n'est pas toujours évident puisque en retournant le dispositif, la marque à reporter disparaît de la vision, donc, contrairement au marquage par pli, ce dernier sera incomplet, et cela pourra occasionner le problème de le compléter, soit au verso du dispositif, soit sur le dispositif tout ou partiellement déplié ;

c) par la découpe (coupe droite et franche) aux ciseaux, qui comme le pli coupe dans l'entier du dispositif. Cependant cette découpe donne une chute et un trou, et de ce point de vue, on a sur chacun des produits des informations incomplètes, comme on l'avait avec le dessin au crayon ;

- enfin on fait faire un dessin, en général une esquisse, donc quelque chose de schématique de la feuille dépliée avec les traits des charnières et la figure marquée (par pli, par découpe, par marquage au crayon). On peut demander d'anticiper la figure avant de déplier le dispositif etc. Une chose intéressante est de faire compléter le dispositif découpé dont on aurait gardé qu'une partie : la chute ou le trou.

On joue sur les trois modalités de marquage, ainsi que sur la demande d'esquisses, occasionnant diverses transcriptions des uns aux autres, ce qui entraîne qu'on s'appuie sur du savoir, ici les propriétés de la symétrie, essentiellement, le fait que le symétrique d'un segment est un segment et le fait que l'axe de symétrie est la bissectrice de l'angle fait entre le segment et son image (ou alors leur est parallèle).

Les choses ne se présentent pas tout à fait de la même manière selon les modalités de marque que l'on prend, c'est ce que j'ai noté à propos du pliage de Boule dans l'article de RDM, 28-2 en montrant que le pliage proposé par Boule en repliant un sommet d'angle aigu d'un triangle obtusangle est plus facile à imaginer sur un dessin que sur pièce, parce qu'on peut prolonger la base du triangle ce qui est impossible matériellement, p. 237 :

« Tandis que dans le cas d'un triangle obtusangle, et selon les sommets choisis, le pliage ne permettait pas de reporter le premier angle sur le segment de base mais qu'il allait se placer à l'extérieur du triangle, certes dans le prolongement de la base, mais cela n'était pas si évident. Cela se « voit » mieux si on dessine le pliage, donc si on le traduit dans un autre registre sémiotique et si on le sait déjà, la perception ne remet pas non plus en doute une telle interprétation. »

Note : Si on a une forme polygonale quelconque, on peut trouver par pliage à la découper avec un seul coup de ciseaux. Si on peut analyser les pliages à effectuer à partir de la donnée d'une forme, l'inverse qui consiste à imaginer ou construire des formes que des découpes dans du papier plié d'une certaine manière permettent d'obtenir en une ou plusieurs coupes me semble beaucoup plus difficile.

Ouverture

3.11.06

En direction de la recherche

Ce que je veux surtout souligner c'est qu'il n'y a pas d'isomorphisme entre expérience et intuition et que c'est bien à cause de cela qu'il faut un troisième, un médiateur théorique.

Il se peut que cela rejoigne la nécessité de la tiercité, c'est-à-dire du rapport symbolique (et par conséquent de l'expérience comme réplique de règles).

L'exemple qui suit est me semble-t-il assez parlant.

A) Vous connaissez tous ce qu'on appelle en classe de primaire des "tapis". On prend une feuille de papier rectangulaire que l'on plie en deux un certain nombre de fois. Puis on découpe dans le feuillet ainsi obtenu des encoches de formes diverses tout au long du pourtour.

Ceci suppose implicitement que les plis auront été faits de telle sorte que les bords de la feuille repliée viennent s'appliquer les uns sur les autres.

On déplie et on trouve notre feuille trouée selon de jolis motifs qui présentent trois particularités :

1° Certains motifs sont répliqués un certain nombre de fois, et les répliques sont symétriques les unes des autres (soit par symétrie axiale, soit par symétrie centrale).

2° Certains motifs sont eux-mêmes symétriques.

3° Les dispositions des différentes répliques des motifs sont elles-mêmes symétriques.

L'intuition que nous avons de cela est un sentiment esthétique, qui confond toutes ces symétries - cela ne donne pas du tout une perception analytique de ce qui se passe.

B) Maintenant faites de même mais en partant d'un disque de papier.

On peut confondre les deux premiers plis aux deux plis de la feuille rectangulaire, mais dès le troisième pli, les choses commencent à bifurquer. On privilégiera ici le pliage bord sur bord, ce qui veut dire que les plis seront tous concourants au centre du disque, et seront en rayons et plus en quadrants comme ci-dessus.

On découpe des encoches différentes en suivant le bord. On déplie. On obtient un napperon avec des motifs, qui donnent un sentiment esthétique analogue.

Pourtant ce n'est pas la même chose qui ressort. Dans ce cas, on ne produit que des motifs simplement symétriques mais qui se retrouvent en rotation si ce n'est le motif qu'on aura découpé si on a découpé dans la pointe qui, lui, aura autant de symétries que de plis.

C) Il n'y a donc pas isomorphisme intuitif entre les deux.

Ainsi reprenez les trois particularités données ci-dessus et voyez si on peut toujours le dire des motifs obtenus !

Ceci est une manifestation du divers empirique.

Pour appréhender ce divers on procédera à des catégorisations. Celles-ci reposeront sur ce qui est commun et ce qui diffère. Ici sont communs le principe de faire plusieurs plis en deux, bord sur bord et de découper des encoches sur le pourtour du feuillet. Sur cette base, on a alors deux cas selon la forme de la feuille de départ.

On pourra éventuellement généraliser si on catégorise autrement les pliages et qu'on distingue ce qui était non distingué sous le principe de plier en deux, bords à bords. On plie en deux soit de manière quadrante soit de manière radiale, ce qui selon la forme qu'aura la feuille de départ va exiger quelques accommodations sur lesquelles je passe (ce qui montre les ajustements qu'il faut faire pour expérimenter en se guidant sur une catégorisation du divers empirique).

Ce faisant on est en train de produire des images par variations et de les mettre en correspondance (on constitue des diagrammes).

La théorie peut s'arrêter là. On a catégorisé les choses en cas distincts pour une action analogue.

La théorie peut aussi aller plus loin.

Toutefois on peut disposer déjà d'une théorie qui va plus loin, ce qui est vrai pour chacun d'entre nous.

Quoi qu'il en soit la théorie va modifier la catégorisation en trouvant des relations plus riches et plus profondes entre les cas examinés. Une théorie qui ne se contente plus seulement de catégoriser et décrire les cas qui peuvent se présenter mais qui les explique, et qui par conséquent soit d'emblée disponible pour rendre compte de tout un ensemble de cas qui pourraient se présenter. En particulier cette théorie procédera par l'élimination des bords en les repoussant à l'infini, et en considérant que les feuilles de papier quelles que soient leur forme ne sont que des fragments de plans. De telle sorte que les catégories précédentes reposant sur l'idée de pli bord à bord - mais même de plis en deux - sont abandonnées, et les deux catégories fondées sur radial, "quadrant" (c'est à dire finalement rotations / translations) ne donnent plus lieu à de quelconques accommodations dues aux bords repliés. On peut les considérer en soi. Il y a donc bel et bien un filtre théorique de l'intuition.

Cette théorie permet de se dispenser de faire l'expérience de tout, car on n'en finirait plus. Elle permet aussi de choisir quelle manière de réaliser au mieux les expériences qu'elle aimerait faire, quand un pliage est indiqué, quand il vaut mieux utiliser un calque, quand l'usage de tampons pourrait mieux faire l'affaire etc. C'est-à-dire, la théorie permet de chercher sous quelle forme les choses se manifestent le mieux dans l'expérience.

Ce qui veut dire aussi qu'on peut se permettre d'ignorer tel ou tel pan de ce qui pourrait se passer, comme vous tous qui avez une expérience de ces petits napperons ignorez les

différences frappantes de ces découpes. Et ici les quatre cas valent vraiment la peine d'être vus.

*

Notes

3.11.06 a

Ce qui est essentiel à souligner est que la plupart du temps l'expérience ne donne rien d'intuitif!

Il y a donc antagonisme entre chacun des trois termes (théorie, expérience, intuition).

Et mes petites expériences, sont toujours des choses qui viennent contrecarrer les évidences.

C'est en fait très facile, mais souvent tiré par les cheveux, ce qui veut dire que souvent ce n'est pas pertinent (on dit aussi que cela soulève ou procède de faux problèmes).

On pourrait dire que l'intuitif donne son verdict à l'expérience, non pas que le donné de l'expérience soit nécessairement dénié d'existence, mais le devenir de ce que donne l'expérience tient à une interprétation, et si son signe n'est pas saisi par l'intuition, alors pour qu'il soit pris en compte, il doit être saisi par autre chose, et je ne vois pas comment appeler cela autrement qu'une forme et donc dire que la saisie formelle de l'expérience vient contrebalancer la saisie intuitive. Mais bien sûr ces formes renvoient, elles aussi, à quelque chose d'intuitif : soit des figures soit des organisations de nos actions (tantôt des "gestalts" tantôt des "schèmes" d'actions.)

Pour bien me faire comprendre, je tiens pour une chose éminemment formelle toute procédure d'action qui organise l'expérience. Ainsi le formel n'a pas pour unique fonction d'organiser le théorique. L'exemple des surfaces métalliques de Gonseth (cf. ci-dessous) repose sur une procédure qui est logiquement construite (qui a une structure). Et ici on voit bien pointer la notion de schème.

3.11.06 b

1° Pour moi, il est essentiel de souligner que la plupart du temps l'expérience ne donne rien d'intuitif ! C'est ici que je parlerai d'empirie.

2° Je tiens pour une chose éminemment formelle toute procédure d'action qui organise l'expérience. Et ici on voit bien pointer la notion de schème.

L'exemple des plans métalliques (Gonseth F. 1946, *La géométrie et le problème de l'espace, fascicule II : Les trois aspects de la géométrie*, § 38 : Réalisation technique des êtres géométriques fondamentaux, p. 38 - 40 Ed. Du Griffon, Neuchâtel).

L'exemple des plans métalliques procède de la prise en compte d'une procédure qui est logiquement construite (qui a une structure). Cette structure a quelque chose d'intuitif : par frottement, on rend les plans jointifs, les creux de l'un s'imbriquent dans les bosses de l'autre -

tout comme il en est de faces résultant d'une coupe dans une masse. Et plus on frotte, plus les choses s'ajustent.

Maintenant il y a aussi ceci, qu'y a-t-il d'intuitif là-dedans? Les surfaces métalliques s'usent également par frottement. Frotter deux bosses ensemble jusqu'à ajustement revient à rendre creuse la bosse la moins proéminente et moins bosse la bosse la plus proéminente. Frotter deux creux ensemble jusqu'à ajustement revient à rendre bosse le creux le moins creux et moins creux le creux le plus creux. A force de rendre les bosses moins bosses et les creux moins creux on se rapproche du degré zéro de bosse et de creux

Ce qui compte est bien la suite de toutes ces relations, qui n'a pas besoin d'être pensée, elle peut être prise en charge par l'expérience à l'insu de l'expérimentateur. Dans ce cas, au bout du compte, il y a un constat empirique : les marbres sont plans. Ce constat fait lui-même appel collatéralement à l'intuition.

3° Le lien entre cette procédure et le constat empirique n'a rien d'intuitif.

On peut rétablir l'intuition (trouver des relations entre empirie et intuition) en assimilant le plan à un cas limite de jointure de deux parties où ces jointures seraient non seulement ajustées parfaitement l'une à l'autre, mais indistinctes. Une telle assimilation est théorique.

Le théorique permettrait alors de faire le lien entre faits empiriques et faits intuitifs. Les faits empiriques ne devraient leur existence qu'à ce qu'ils tiennent à une procédure.

Ce qui veut dire que l'intuitif n'est pas figé, n'est pas une référence arrêtée une fois pour toute. Quelque chose n'est pas en soi intuitive ou non intuitive. C'est quelque chose qui se lie et qui se délie.

Conclusions générales des douze épisodes

18 avril 2016

Au fil de textes où j'ai cherché à transposer celui de nos expériences :
surprises, jeux de tâches et narrations.

Je regrette de ne pas avoir eu l'occasion, en 2003, de rédiger sur la base de mes notes de cours et de mes multiples observations d'élèves, un ou deux épisodes consacré aux expériences que nous ménagent les jeux de *plier - couper*, séduisantes métaphores de nos surprises didactiques. (En guise de rebondissement, je joins à cette conclusion deux notes de synthèse, l'une adressée à mes étudiants, l'autre à ddmes.)

Voilà un terrain d'expérience fertile en rebondissements. Il nous y arrive en effet que très souvent nous obtenons des découpages de formes bien différentes de celle du modèle que nous cherchions à reproduire, mais que, d'un autre côté, celles que nous obtenons ne nous sont jamais indifférentes et surtout qu'elles ont des formes que nous n'aurions pas imaginé créer. Bref, **il nous arrive toute autre chose que ce à quoi nous pensions**. Et c'est donc par surprise que ce milieu dévoile toutes ses potentialités, et, ce, progressivement, sans cesser de le faire encore et encore.

C'est en réintégrant ces considérations dans le cadre de ce que j'ai appelé *interactions cognitives et interactions de connaissances* (Conne 2003) que j'ai compris tout le parti à tirer de ces possibilités du milieu à nous rendre manifestes les potentialités cognitives des élèves, et nous indiquer par là des pistes pour leur enseigner de la géométrie et des mathématiques.

La question de l'expérience dans l'enseignement n'est pas tant : faire expérience de ceci ou cela (ce qui est de l'ordre de la connaissance, de l'activité), mais : que faire de l'expérience de ceci ou cela ? *Faire faire l'expérience de ceci ou de cela*, ou du moins *faire faire expérience de ceci ou de cela*, est une des réponses possibles à cette question. Cela passe par se demander ce que sont ces *ceci ou cela* dont on ferait ou referait l'expérience. Ddmes a dégagé trois axes à ses questionnements :

1° Que faire de son expérience, de ce dont on a l'expérience, de ce dont on a pu faire l'expérience etc. - et ici une réponse est de tenter de la faire faire à autrui ? (Mais cela se complique vu que faire faire une expérience est une expérience en soi, cf. 3°.)

2° Que faire de l'expérience des autres, par exemple que peut-on faire de l'expérience, acquise par ailleurs, de tel ou tel élève ? (Et là encore en faire quelque chose est une expérience.)

3° Que faire de cette expérience d'enseignement qui consiste, elle-même, à mettre en résonances des expériences diverses ? (Et c'est la narration comme relation.)

De là les thématiques de *la surprise*, des *jeux de tâches* ainsi que de *la narration* sont devenues centrales dans mes études et ont été largement investies par le groupe ddmes au point d'en faire des bannières de ce groupe (cf. les textes de références ci-dessous).

*

Arrivé au terme de ce projet de rendre accessible ces écrits de 2003, il me reste un commentaire **sur le fil de ces narrations**. Dans ces douze "épisodes", les surprises que j'ai tentées de ménager au lecteur proviennent de ce qui se trouve soudain évoqué au détour des analyses, comme des fenêtres offrant quelques perspectives inattendues sur les paysages environnants. C'est, à y repenser aujourd'hui, la manière que j'ai trouvée pour "transposer" au lecteur les surprises ménagées par ces expériences elles-mêmes et, ce, surtout à l'occasion de leurs partages avec beaucoup d'interlocuteurs : élèves, étudiants, enseignants ou chercheurs ... ou amis.

F. Conne

Texte cité

Conne F. (2003) Interactions de connaissances et investissement de savoir dans l'enseignement des mathématiques en institutions et classes spécialisées. In Schmidt S. & Maury C. (éds) La spécificité de l'enseignement des mathématiques en adaptation scolaire, *Education et Francophonie*, XXXI (2), automne 2003. Revue en ligne. <http://www.acelf.ca/c/revue/sommaire.php?id=3#.VvvWsTHo0gu>

Bibliographie générale ó Saison 2

Conne F. (1988) Numérisation de la suite des nombres et faits numériques (3^{ème} épisode). *Math- Ecole*, 132, 26-31. http://www.ssr dm.ch/mathecole/crbst_93.html <https://hal.archives-ouvertes.fr/halshs-01048692>

Conne F. (1988) Numérisation de la suite des nombres et faits numériques (3^{ème} épisode, suite). *Math- Ecole*, 133, 20-23. http://www.ssr dm.ch/mathecole/crbst_92.html <https://hal.archives-ouvertes.fr/halshs-01048712>

Conne F. (1992) Savoir et connaissance dans la perspective de la transposition didactique. *Recherches en didactique des mathématiques*, 12 (2.3), 221-270.

Conne F. (1993) Du sens comme enjeu à la formalisation comme stratégie : une démarche caractéristique en didactique des mathématiques, In *Sens des didactiques, didactiques du sens*, Ph. Jonnaert & Y. Lenoir (Eds.), (Actes des Troisièmes rencontres internationales du REF - réseau international de recherche en éducation et formation). Editions du CRP Faculté d'éducation, Université de Sherbrooke, pp. 205-261.

Conne F. (1994) Quelques enjeux épistémologiques rencontrés lors de l'étude de l'enseignement des mathématiques, in Actes du XXI^{ème} congrès colloque INTER-IREM de la COPIRELEM, Chantilly 1994, IREM Picardie INSSET St Quentin, p. 3 à 35.

Conne F. (1994) Démarche proposée pour un travail de mémoire au SCES. 8p.

Conne F. (1996) Savoir et connaissance dans la perspective de la transposition didactique. In J. Brun (Sous la dir.), *Didactique des mathématiques ó cinq textes fondamentaux*, pp. 275-338. Lausanne : Delachaux et Niestlé, collection Textes de base en Pédagogie.

Conne F. (1999) L'activité dans le couple enseignant/enseigné, Actes IX^{ème} Ecole d'été de didactique des mathématiques août 1997. ARDM.

Conne F. (1999) Faire des maths, faire faire des maths et regarder ce que ça donne. In Lemoyne G. & Conne F. (Sous la dir.) *Le cognitif en didactique des mathématiques*, pp. 31-69. Montréal : Presses Université de Montréal.

Conne F. (2002) Evolution de la référence à la réalité dans les manuels suisses romands au cours du 20^{ème} siècle., in cd-rom des Actes de la 11^{ème} école d'été de didactique des mathématiques, Corps, aout 2001, JLDorier et al eds, la pensée sauvage.

Conne F. (2003) Interactions de connaissances et investissement de savoir dans l'enseignement des mathématiques en institutions et classes spécialisées. In Schmidt S. & Maury C. (éds) *La spécificité de l'enseignement des mathématiques en adaptation scolaire, Education et Francophonie*, XXXI (2), automne 2003. Revue en ligne. <http://www.acef.ca/c/revue/sommaire.php?id=3#.VvvWsTHo0gu>

Conne F. (2003-2004) Sur le fil de nos expériences. Saison 1, 10 épisodes, 85p. (Édition 2016) <https://halshs.archives-ouvertes.fr/halshs-01296507/>

Conne F. (2004) Jouer la surprise, *Educateur* 7, 18 juin 2004, 35-37.

- Conne F. (2004) Problème de transposition didactique, *Petit x* 64, 62-81. <http://www-irem.ujf-grenoble.fr/spip/spip.php?rubrique26>
- Conne F. (2006) La didactique des mathématiques comme didactique d'une science étonnante. *Educateur n° spécial du 31 mars 2006 « La recherche en éducation »*, 21-26.
- Conne F. (2008) L'expérience comme signe didactique indiciel, *Recherches en didactique des mathématiques* 28 (2), 219-264. Grenoble : La pensée sauvage.
- Conne F. (2010) Le groupe didactique des mathématiques de l'enseignement spécialisé (ddmes) : descriptif et perspectives actuelles, Rapport de recherche, CSPS (Centre Suisse de Pédagogie Spécialisée). <https://halshs.archives-ouvertes.fr/halshs-01430801>
- Conne F., Favre J.-M. (Dir.) (2003) L'enseignement spécialisé, un autre terrain de confrontation des théories didactiques à la contingence. In V. Durand Guerrier & Cl. Tisseron (éds) *Actes du séminaire national de didactique des mathématiques*, mars, année 2003, pp. 77-171. http://www.irem.univ-paris-diderot.fr/articles/mise_en_ligne_des_actes_du_seminaire_national_de_didactique/
- Danalet C., Dumas J.-P., Studer C. & Villars-Kneubühler F. (1998), *Livre du maître. Méthodologie. Livre de l'élève. Mathématiques 3P*. Commission romande des moyens d'enseignement.
- Danalet C., Dumas J.-P., Studer C. & Villars-Kneubühler F. (1999) *Livre du maître. Méthodologie. Livre de l'élève. Mathématiques 4P*. Commission romande des moyens d'enseignement.
- Deledicq A. (1998) *Pythagore et Thales*, ACL, Ed. du Kangourou.
- Favre J.-M. (2003) Un programme de mathématiques "adapté" pour l'enseignement spécialisé : un jeu délicat entre liberté ostensible et contraintes intestines. *Math Ecole* 206, 41-50.
- Favre J.-M. (2008) Jeu de tâches : un mode d'interaction pour favoriser les explorations et les expériences mathématiques dans l'enseignement spécialisé, *Grand N* 82, 9-30.
- Gonseth F. (1946) *La géométrie et le problème de l'espace. Fascicule II : Les trois aspects de la géométrie*. Neuchâtel : Ed. Du Griffon.
- Gonseth F. (1949) *La géométrie et le problème de l'espace. Fascicule IV : la synthèse dialectique*. Neuchâtel : Ed. Du Griffon.
- Maniglier P. (2006) *La vie énigmatique des signes. Saussure et la naissance du structuralisme*. Paris : Léo Scheer.

