



**HAL**  
open science

## Calculs numériques et calculs relationnels dans la résolution de problèmes d'arithmétique

François Conne

► **To cite this version:**

François Conne. Calculs numériques et calculs relationnels dans la résolution de problèmes d'arithmétique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 1985, 5 (3), pp.269- 341. halshs-01523859

**HAL Id: halshs-01523859**

**<https://shs.hal.science/halshs-01523859>**

Submitted on 17 May 2017

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

RECHERCHES EN DIDACTIQUE  
DES MATHÉMATIQUES

COMITE SCIENTIFIQUE — SCIENTIFIC BOARD

Goéry DELACOTE — Paris, France  
John DERRICK — Leeds, Grande Bretagne  
Jean GIRAUD — Orsay, France  
Georges GLAESER — Strasbourg, France  
Paolo GUIDONI — Rome, Italie  
Francis HALBWACHS — Marseille, France  
Paul-Louis HENNEQUIN — Clermont-Ferrand, France  
Bärbel INHELDER — Genève, Suisse  
Zofia KRYGOWSKA — Cracovie, Pologne  
Kenneth LOWELL — Leeds, Grande-Bretagne  
Bernard MALGRANGE — Grenoble, France  
Gérald NOELTING — Québec, Canada  
Michaël OTTE — Bielefeld, R.F.A.  
Jean-François RICHARD — Paris, France

Directrice de publication: Régine DOUADY.

© 1985 — La Pensée Sauvage, éditions.  
B.P. 141 38002 Grenoble Cedex France  
Tous droits réservés pour tous pays.  
ISSN 0246 - 9367

CALCULS NUMÉRIQUES ET  
CALCULS RELATIONNELS  
DANS LA RÉOLUTION DE  
PROBLÈMES D'ARITHMÉTIQUE

François Conne  
FPSE, Université de Genève

*En souvenir de G. Leresche, Janv. 1985*

ABSTRACT

The purpose of this research is some arithmetical problems studied by Vergnaud and Durand in their famous paper on additive structures. The origin of my work is the author's observations : I have tested their main hypothesis with a detailed analysis of relational calculus, I have examined the reasonings which can be inferred from the pupils answers and tried to build a synthetical model of these reasonings in order to reanalyze and compare the word problems themselves. The angular stone of this analysis consists to distinguish between number and operator which intervene on different levels : the level of numerical operations and the children's representations associated with them, the level of relational calculus and the representations of state-transformations or transformations and their composition. This point is essential for the arithmetization in the word problem resolution.

From the mathematical point of view, my analysis shows some aspects of the passage from  $\mathbb{N}$  to  $\mathbb{Z}$ . It allows also to understand the use of algebraic notations in the children's answers. Then I show some observations related to number and word answers, I show also many changes of meaning and their effect on problem solving : how in some cases they make the solving easier and in other cases they are obstacles for the correct resolution. Hence it is possible for each word problem to define where the problem lies.

RESUMEN

En esta investigación mi punto de partida ha sido las observaciones de Vergnaud-Durand sobre los problemas de adición. He puesto a prueba sus hipótesis por el análisis detallado de los cálculos relacionales, he examinado los razonamientos que se podían inferir de las respuestas de los alumnos ; luego he intentado construir un modelo sintético de

*Recherches en Didactique des Mathématiques, Vol. 5, n° 3, pp. 269-332, 1985.*

aquellos sobre la base del cual he comparado los enunciados. La piedra clave de esta construcción reside en la distinción número-operador que hago funcionar en diversos planos : el del cálculo numérico y de las representaciones que de él se hace el sujeto, y el del cálculo relacional sobre los enunciados para gestionar las relaciones estado-transformación, o también transformación-balance. Es aquí donde se efectúa la aritmetización en la resolución de estos problemas.

Este análisis me permite explicar en líneas generales ciertos aspectos del paso de  $N$  a  $Z$  así como al empleo de notaciones algebraicas en la presentación de la resolución o de los cálculos numéricos.

A esto se unen cierto número de observaciones sobre el contenido de las respuestas : número-texto. Ciertas transformaciones de sentido han podido ser identificadas y el efecto producido de facilitación o de estancamiento aclarado en los diferentes tipos de enunciados estudiados. Por lo tanto se puede definir, para un nivel de tratamiento dado, en cada caso, lo que se vuelve « problema ».

## RESUME

Dans cette recherche, je suis parti des observations de Vergnaud et Durand, à propos des problèmes additifs. J'ai éprouvé leurs hypothèses à l'analyse détaillée des calculs relationnels, examiné les raisonnements que l'on pouvait inférer des réponses des élèves, puis ai cherché à construire un modèle synthétique de ceux-ci de manière à opérer un retour sur la comparaison des énoncés. La clé de voûte de cette construction réside dans la distinction nombre/opérateur que je fais fonctionner à divers plans : celui du calcul numérique et des représentations que s'en fait le sujet, celui du calcul relationnel sur les énoncés pour gérer les rapports état/transformation ou encore transformation/bilan. C'est ici que s'effectue l'arithmétisation dans la résolution de ces problèmes.

Mathématiquement, l'analyse dessine quelques traits sur le passage de  $N$  à  $Z$ , ainsi que sur l'usage de notations algébriques dans la présentation de la résolution ou des calculs numériques. A ceci se rattachent un certain nombre d'observations sur le contenu des réponses : nombre/libellé. Des glissements de sens ont pu être repérés et leur fonction de facilitation ou d'impasse élucidée dans les divers types d'énoncés étudiés. On peut dès lors définir en chaque cas, pour un niveau de traitement donné, ce qui fait problème.

## I. Introduction

« ... Cet astéroïde n'a été aperçu qu'une fois au télescope en 1909, par un astronome turc.

Il avait fait alors une grande démonstration de sa découverte à un Congrès International d'Astronomie. Mais personne ne l'avait cru à cause de son costume. Les grandes personnes sont comme ça.

Heureusement pour la réputation de l'astéroïde B612 un dictateur turc imposa à son peuple, sous peine de mort, de s'habiller à l'Européenne. L'astronome refit sa démonstration en 1920, dans un habit très élégant. Et cette fois-ci, tout le monde fut de son avis ».

St. Exupéry

### 1.1. Point de départ

La présente étude continue une recherche faite par MM. Durand et Vergnaud et publiée dans la Revue Française de Pédagogie (N° 36 juillet-septembre) sous le titre : *Structures additives et Complexité Psychogénétique*. J'ai fait cette étude en 1977-78, un premier texte avait été publié dans Les Cahiers de la Section de Pédagogie de l'Université de Genève (cahier N° 12). Je présente ici une refonte complète et plus précise de ce premier texte.

La recherche célèbre de MM. Durand et Vergnaud comportait l'étude de la résolution d'un ensemble de 12 problèmes additifs. Avant de les citer, je voudrais expliquer le code que j'utilise pour désigner les énoncés. Chacun d'eux se réfère à une situation qui d'un point de vue numérique consiste en la donnée d'un triplet ordonné de nombres, le triplet associé à chaque problème servira donc à le désigner.  $X$  indique l'inconnue dont la position varie selon le problème. Un nombre seul désignera la mesure d'un avoir de bille, ou, selon la terminologie maintenant consacrée, un état. Pour représenter une transformation, j'ai opté pour la notation d'une majuscule  $G/P$  pour gain/perte comportant en indice l'intensité (amplitude) de la transformation. Ainsi,  $G_4$  vaudra dire gain de 4 billes,  $P_6$  perte de 6 billes. Et le problème *Pierre* ci-dessous sera désigné par  $6P_4 X$  : il a 6 billes, il perd 4 billes. Combien de billes a-t-il après la partie ?

Voici donc les problèmes qui, dans les citations, seront désignés par leur prénom en italique (ou l'abréviation des prénoms) ainsi que le triplet associé :

1. *Pierre*  $6 P_4 X$ 

Pierre a 6 billes. Il joue une partie et perd 4 billes. Combien de billes a-t-il après la partie ?

2. *Bertrand*  $X P_7 3$ 

Bertrand joue une partie de billes, il perd 7 billes. Après la partie, il a 3 billes. Combien de billes avait-il avant la partie ?

3. *Claude*  $5 X 9$ 

Claude a 5 billes. Il joue une partie de billes. Après la partie, il a 9 billes. Que s'est-il passé au cours de la partie ?

4. *Paul*  $G_6 P_4 X$ 

Paul joue deux parties de billes. A la première partie, il gagne 6 billes. A la seconde partie, il perd 4 billes. Que s'est-il passé en tout ?

5. *Laurent*  $P_2 P_5 X$ 

Laurent joue deux parties de billes. A la première partie, il perd 2 billes. A la seconde, il perd 5 billes. Que s'est-il passé en tout ?

6. *Michel*  $G_4 P_6 X$ 

Michel joue deux parties de billes. A la première partie, il gagne 4 billes. A la seconde partie, il perd 6 billes. Que s'est-il passé en tout ?

7. *Christian*  $G_5 X G_9$ 

Christian joue deux parties de billes. A la première partie, il gagne 5 billes. Il joue une deuxième partie. Après ces deux parties, il a gagné en tout 9 billes. Que s'est-il passé à la deuxième partie ?

8. *Jacques*  $P_5 X P_8$ 

Jacques joue deux parties de billes. A la première partie, il perd 5 billes. Il joue une deuxième partie. Après ces deux parties, il a perdu en tout 8 billes. Que s'est-il passé à la deuxième partie ?

9. *Didier*  $P_7 X P_4$ 

Didier joue deux parties de billes. A la première partie, il perd 7 billes. Il joue une deuxième partie. Après ces deux parties, il a perdu en tout 4 billes. Que s'est-il passé à la deuxième partie ?

10. *Olivier*  $G_2 X P_7$ 

Olivier joue deux parties de billes. A la première partie, il gagne 2 billes. Il joue une deuxième partie. Après ces deux parties, il a perdu en tout 7 billes. Que s'est-il passé à la deuxième partie ?

11. *Vincent*  $G_8 X P_2$ 

Vincent joue deux parties de billes. A la première partie, il gagne 8 billes. Il joue une deuxième partie. Après ces deux parties, il a perdu en tout 2 billes. Que s'est-il passé à la deuxième partie ?

12. *Bruno*  $X P_7 G_3$ 

Bruno joue deux parties de billes. Il joue une première partie puis une deuxième. A la deuxième partie, il perd 7 billes. Après ces deux parties, il a gagné en tout 3 billes. Que s'est-il passé à la première partie ?

*Remarques :*

1. A chacun de ces problèmes, on peut associer la même relation numérique :  $a + b = c$  ou  $a - b = c$ .

2. Pour bien comprendre ce qui différencie ces problèmes, il faut reprendre la terminologie de Vergnaud. Les différentes données numériques ont différents statuts ; ainsi dans « Pierre perd 4 billes », 4 billes mesure une *transformation*, tandis que dans « Pierre a 6 billes », 6 billes mesure un avoir, un *état*. Les 12 problèmes se distribuent alors en deux catégories :

E-T-E (état initial - transformation - état final).

Le sujet a des billes, il joue une partie et son avoir s'en trouve transformé. Cette catégorie regroupe les problèmes *Pierre, Bertrand et Claude* ;

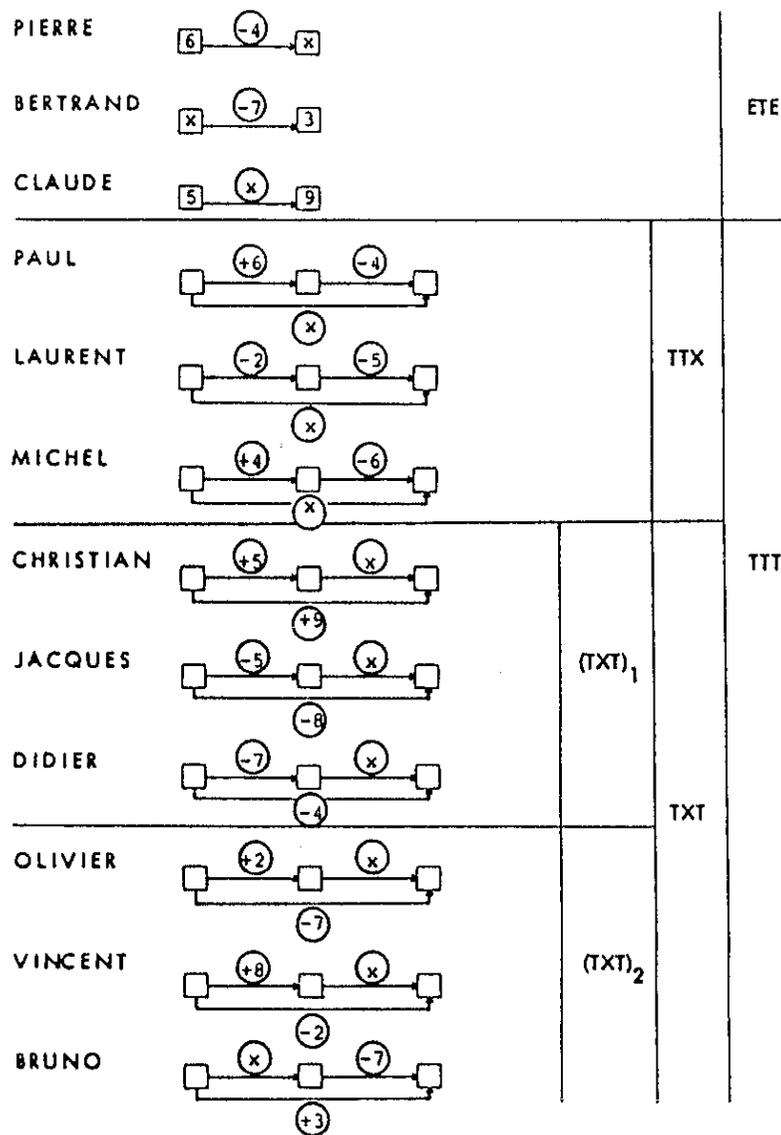
T-T-T (transformation - transformation - transformation composée).

Le sujet joue deux parties de billes qui se composent entre elles. On ne s'occupe pas des états (ex. avoir initial).

On remarquera alors trois couples de problèmes identiques du point de vue numérique mais distribués dans les deux catégories.

3. Gérard Vergnaud proposait les diagrammes suivants pour représenter les structures des différents énoncés :

## SCHEMAS DES PROBLEMES



## I.2. Deux regards sur un même objet

Jean Brun avait présenté, dans son cours, la recherche de Durand et Vergnaud. 4 instituteurs ont voulu passer ces problèmes à leur propre classe. Ce qu'ils ont fait sous forme d'interrogation écrite. Ils ont corrigé les copies puis ont comparé les taux de réussite. Ils constatèrent qu'à peu de choses près les résultats étaient concordants. En examinant à mon tour les réponses des élèves, j'y ai trouvé grand intérêt. J'ai alors voulu mener une analyse aussi complète que possible et montrer par là tout le parti qu'on pouvait en tirer.

Durand et Vergnaud avaient mis dans leur article l'accent sur les taux de réussite de population d'élèves. Ceci devait illustrer et démontrer la pertinence de certaines hypothèses quant aux calculs relationnels et la différence de statut des nombres pris comme mesure d'état ou de transformation. Ils ont examiné entre autre à partir de quelle classe scolaire tel problème était réussi par plus de la moitié des élèves, ou encore par la quasi totalité des élèves. Dans le cas présent, les instituteurs n'ont pas manqué de vouloir évaluer leurs élèves. Il ne pouvait plus s'agir de la réussite d'une population d'élèves mais de celle d'individus précis. Pour ma part, ne connaissant pas les élèves, ne les ayant pas vus, je me situais à l'opposé. Frappé par tout ce que me « disaient » ces réponses. Le problème d'arithmétique se trouve donc englobé dans des pratiques bien distinctes, leur usage pour une investigation psychologique se trouve en porte-à-faux sur la pratique de l'enseignant. Cette dernière reste d'ailleurs en grande partie implicite — en particulier pour les enseignants eux-mêmes.

Pour leur usage dans un enseignement classique, les problèmes d'arithmétique doivent répondre à certains critères. La réponse doit effectivement y être cachée de telle sorte que l'élève ait bel et bien un travail à fournir dans la résolution. D'un autre côté, les chances pour qu'un élève trouve la réponse par « devinette » doivent être minimales. Dès lors l'enseignant pourra comparer, sur simple coup d'œil, la réponse de l'élève à celle qu'il attend. Il jugera ainsi, sur simple attribution du juste et du faux, toute la démarche de résolution, depuis la lecture de l'énoncé jusqu'à l'effectuation du calcul. Notons alors les choses suivantes.

1. Il serait bon d'essayer de définir ce qu'on entend au juste par « trouver par devinette ». Mais ceci est une préoccupation de psychologue et ne se fait pas car nécessiterait une réelle décentration par rapport à la pratique enseignante.

2. Tout ce que je viens d'examiner est en partie implicite, va de soi ou encore est masqué par des adaptations de ce schéma idéal. Il importe de remarquer que tout ceci repose sur un préjugé quant à la tâche de l'élève qui, si on s'exprime dans les termes de la psychologie du travail, consiste en l'identification par l'enseignant de la tâche effectivement traitée par le sujet à la tâche prescrite.

3. Dans l'examen des réponses, le maître procède alors par la détermination d'*indices*. Ceci l'amène inmanquablement à privilégier l'aspect numérique des réponses, le libellé de la réponse étant sous-estimé. Pourtant, sur ce libellé se joue une grande part de la complicité (ou absence de complicité) entre maître et élève.

4. Ces implicites se révèlent avec netteté dès le moment où on s'intéresse aux erreurs. La finalité de cet examen ne peut plus être une seule appréciation des compétences, mais porte sur le projet de correction et de remédiation. Alors bien des explications ad hoc ne résistent pas à une telle finalité.

L'algorithme de l'enseignement est une réponse adaptative à ceci. En inscrivant la tâche dans un cadre déterminé et rigide, on aboutit à une codification des étapes de la résolution donc à une codification des erreurs. Tout ne se plie pas à ce cadre et certains faits particulièrement « réfractaires » sont marginalisés, rapportés à une épistémologie naïve (de la difficulté de telle ou telle notion) voire à une psychologie naïve qui s'étend d'aptitudes différentielles jusqu'aux « blocages affectifs ».

Pour ma part, il me paraissait possible de comprendre au travers des réponses des élèves les représentations à l'œuvre dans les résolutions. C'est à cette étude que je me suis attelé profitant du cadre théorique et du plan d'expérience échafaudé par Durand et Vergnaud.

### 1.3. Discussion

Revenons à la situation des instituteurs qui avaient passé les problèmes dans leur classe. Les résultats coïncident avec ceux de la recherche. Tant mieux. Cela signifie d'une part que leurs élèves ne sont pas en retard et que l'enseignement prodigué est conforme. Mais d'un autre côté cela confère une certaine réification des analyses psychologiques. Il est bien difficile de ne pas banaliser les résultats, et de ne pas se dire « Mais c'est bien sûr. On aurait pu s'y attendre. Ce n'est pas la même chose de parler d'état et de transformation ! » ou encore : « C'est bien abstrait de raisonner sur des parties si on ne connaît pas le nombre de billes que l'on a au départ ». Etc. Et hop ! Voilà l'inattendu (l'imprévu parce que pas conçu) banalisé et devenu vrai en même temps.

Pour moi, ces faits sont plutôt problématiques. Voici quelques questions que je me suis posées.

Si on me donne à résoudre les problèmes *Pierre et Paul*, je les trouve identiques. A prime abord, Vergnaud est allé chercher la petite bête. Et même des élèves ont trouvé ces problèmes « tous les mêmes ». Comment cela se fait-il ? Prénance du nombre, prénance des modes de résolution ? Comment se fait-il qu'il y ait plus de décalages dans certains cas que dans d'autres ?

Mais on peut aller plus loin et pousser l'analyse théorique. On découvre alors avec stupeur que le même couple d'opérations traduit à la fois : l'action d'une transformation sur un état (*Pierre*), la recherche d'un état initial (*Bertrand*), la composition des transformations ou bilan (*Paul, Laurent, Michel*), la recherche d'une transformation intermédiaire (tous les autres).

Pour l'analyse, il faut différencier deux plans. Celui de la représentation des parties de billes et de leur déroulement (schéma ETE, ETETE, TTT) et celui des opérations numériques. Mais, dans la mesure où, pour le sujet qui résout le problème, tout se résume à interpréter l'énoncé dans un schéma calculable, cette différence va s'estompant au cours de la résolution. Les opérations numériques se substituent et prolongent, au niveau des relations, les actions évoquées dans l'énoncé. Dès lors les transformations des avoirs de

billes se comportent comme les transformations de nombres. *En retour* les nombres et les résultats obtenus sont considérés dans le cadre des relations propres à l'énoncé, en terme de billes et de bilans de parties de billes. Quand on évoque une *représentation calculable* pour expliquer la résolution, il faut bien s'assurer à ne pas négliger un des termes pour l'autre. Le sujet se ramène certes à une opération numérique mais ce calcul se déroule dans un cadre interprétatif qui est sa raison d'être. Au cours de ce processus, il se peut qu'il y ait *glissement de sens* dans la mesure où la même organisation d'un calcul peut être rapportée à des cadres représentatifs différents. Comme par exemple ici d'un schéma TTT à un schéma ETE. Ces glissements de sens sont la marque d'un certain niveau d'analyse engagé dans la résolution d'un problème. Lors de l'évaluation des réponses, le maître s'il comprend les glissements de sens en fera crédit à l'élève. Ainsi, il acceptera généralement la réponse : *Paul G<sub>6</sub> P<sub>4</sub> X* : « Il lui reste 2 billes ». Alors que la réponse est libellée en termes d'état, et que la réponse correcte est en fait : « En tout, Paul a gagné 2 billes ».

La question que je me pose alors, c'est comment rendre compte de ce qui se passe pour le sujet. J'en arrive alors à un deuxième point de la discussion. La recherche de Vergnaud suppose au départ l'analyse de quelques situations soustractives. Cette analyse théorique amène l'auteur à définir les notions d'état et de transformation et les schémas ETE et TTT. La recherche met en évidence que cette analyse est pertinente et que l'élève ne traite pas les nombres-états comme les nombres-transformations. Mais il ne faut pas oublier que ce sont là des notions d'adultes. Ce que Vergnaud montre, c'est que l'élève fait la différence : reste à savoir comment il conçoit et construit ces notions. C'est ce que j'ai tenté de reconstituer à travers les réponses des élèves.

*Note* : du point de vue de l'enseignement, il s'agit avant tout d'en retrouver la trace dans les réponses des élèves, de voir comment il les utilise et par là de susciter de nouveaux problèmes en le plaçant dans de nouvelles situations.

#### 1.4. Données

Les élèves interrogés ont entre 8 et 10 ans (de 8 ans 2 mois à 10 ans 11 mois). Leurs classes étaient des 3<sup>e</sup> et 4<sup>e</sup> année primaire Genevoise (23 et 23 élèves) et des 2<sup>e</sup>, 3<sup>e</sup>, 4<sup>e</sup> primaires Valaisannes (respectivement 11, 13 et 14 élèves). Dans ces classes valaisannes, un enseignement pilote était donné pour les mathématiques et comportait l'usage de notations équationnelles. Il conviendra d'analyser les deux groupes de réponses séparément.

Les problèmes avaient été posés par écrit, donc dans un ordre fixe (Valais comme celui donné auparavant - Genève les problèmes *Paul, Laurent, Michel* puis *Pierre, Bertrand, Claude*, puis les autres comme pour le Valais).

Je disposais donc des réponses écrites des élèves. De ce point de vue, je disposais de moins d'informations que Durant et Vergnaud, qui se basaient sur des interviews d'élèves. De plus le temps de résolution était plus limité. D'emblée l'analyse d'un tel ensemble de réponses doit être interprétative. A première vue, il y a des ambiguïtés dans les termes utilisés pour les réponses. On ne peut cependant pas laisser de côté le libellé des réponses et ne s'occuper que du nombre calculé. A Genève, il y a par exemple 157 réponses correctes sans ambiguïté mais 51 autres réponses peuvent être considérées correctes moyennant une interprétation particulière des termes utilisés. Au Valais cette proportion est de 71 réponses ambiguës pour 270 réponses correctes sans ambiguïté. Donc déjà pour établir le taux de réussite, il faut recourir à certaines interprétations. En cas d'entretien individuel, la situation est différente dans la mesure où l'expérimentateur peut toujours demander à l'élève de s'expliquer et de lever, de lui-même, l'ambiguïté. Bien sûr cela peut induire l'élève à d'autres relations. En conclusion, l'analyse doit traiter aussi les termes des réponses des élèves même si, pour leur interprétation, il y a ambiguïté. On se trouve de cette façon devant une autre tâche que celle de l'évaluation qui doit réduire l'ambiguïté et le fait par appréciation d'indices critiques.

Voici pour exemple quelques réponses ambiguës :

Paul  $G_6 P_4 X$  :

il lui reste 2 billes  
Est-ce une réponse d'état,  
état final = 2 billes ?  
Ou bien une réponse juste ?

Michel  $_4 P_6 X$  :

il lui reste 5 billes  
 $x+4-6=y$   $x=7$   $y=5$   
Peut-on considérer qu'il  
répond à la question :  
que s'est-il passé en tout ?

Christian  $G_5 X G_9$  :

il a gagné 4 billes de plus  
Est-ce à dire que l'élève  
considère 2 parties indépen-  
dantes, ou bien veut-il dire :  
« il a gagné encore 4 billes ? »

Didier  $P_7 X P_4$  :

il a perdu 3 billes de  
moins à la 2<sup>e</sup> partie  
Ceci est vraiment une réponse  
presque juste.

Olivier  $G_2 X P_7$  :

il avait 9 billes avant  
la partie.  
Quelle partie ?

Il a perdu 7 billes  
 $9-2=x$   $x=7$   
Réponse bizarre, l'élève répète  
la donnée, mais il a  
calculé le 9 qui est  
la réponse.

Voici comment je me propose de traiter de l'ambiguïté :

1. Il est clair que le type de question plus ou moins précise a favorisé les réponses ambiguës. Cependant, on ne peut pas isoler l'effet du problème avec celui de sa formulation, la question étant fortement déterminée par le type de problème. Ainsi, il y a plus de réponses ambiguës pour le problème Paul  $G_6 P_4 X$  que pour Christian  $G_5 X G_9$  (questions formulées autrement), mais il y a aussi plus de réponses ambiguës pour Paul que pour Laurent  $P_2 P_5 X$  (questions formulées de la même façon).

2. Le lecteur peut faire l'expérience suivante avec des sujets (élèves ou adultes). Poser le problème Jacques  $P_5 X P_8$ . Dans la plupart des cas, les interlocuteurs auront peu de peine à résoudre ce problème. Vos interlocuteurs ne pose-

ront en général pas de question complémentaire quant à l'énoncé. Poser ensuite le problème Olivier  $G_2 X P_7$ , qui a exactement la même structure d'énoncé, à ceci près que la première partie est un gain et qu'il n'y a plus deux transformations de même signe. Les questions concernant l'énoncé (donné de préférence par oral) seront alors bien plus nombreuses. Certains interlocuteurs s'insurgent même contre l'ambiguïté de la donnée : « En tout il a perdu 2 billes, qu'est-ce que ça veut dire : en tout ? » Les difficultés rencontrées par le sujet dans son traitement l'amènent à reconsidérer les termes de la donnée dans l'espoir d'y trouver des indications permettant la discrimination d'interprétation concurrentes (ici la question porte sur les deux billes gagnées qui manifestement ont été reperdues, faut-il considérer cette perte incluse dans la perte totale ou non ?).

3. L'ambiguïté n'est en fait gênante que dans une analyse trop restreinte du rapport Problème-Procédure. Il faut tout d'abord bien être au clair sur le fait qu'on n'observe qu'une toute petite part du travail de l'élève (même en entretien clinique). Secondement, il s'agit de se demander comment les modalités de résolution engagées par le sujet ont transformé son problème.

4. Ceci engage l'analyse à prendre les réponses au mot (autant que possible, car le système de référence de celui qui analyse les réponses s'en voit remis en cause. Il n'est pas toujours aisé de dissocier objet-sujet) et à considérer leur formulation comme significatives du raisonnement qui les sous-tend. Ainsi la réponse déjà citée Paul  $G_6 P_4 X$  « Il lui reste 2 billes » formulée en terme d'états signifie que le sujet se ramène implicitement à un schéma ÉTÉTÉ :  $(0 G_6)$   $6 P_4$  2 et donne comme réponse le bilan final de ce déroulement (la question demande elle aussi un bilan). Autre exemple frappant.

Paul  $G_6 P_4 X$  : il a perdu 4 billes et gagné 6 billes,  
il lui reste 6 billes.

Ce qui m'a surpris le plus dans cette réponse, c'est que l'élève ne restitue pas l'ordre des données, mais parle de la perte avant le gain (contraire de la donnée). J'interprète la réponse en tenant compte de cette inversion : elle permet à

l'élève de ne pas composer les données grâce au raisonnement suivant : « il perd 4 billes, n'a plus de billes puis en gagne 6. En tout il lui reste 6 billes ».

Ce n'est pas tout de proposer une interprétation, il faut essayer de la confirmer. C'est ce que j'ai chaque fois essayé de faire. Dans l'exemple précédent, l'interprétation est confirmée non seulement par le fait que le même élève recourt à la même inversion au problème *Michel*, mais encore parce que j'ai retrouvé des réponses analogues chez d'autres élèves. Exemple :

*Michel G<sub>4</sub> P<sub>6</sub> X* : il reste 4 billes,  $6 - 6 + 4 = 4$ .

5. Cette façon de faire nécessite des contrôles. Il s'agit avant tout de renvoyer les productions les unes aux autres, donc de les situer sur deux axes. D'une part l'ensemble des réponses recueillies et d'autre part la série des réponses d'un même sujet. Pour ceci il est très utile de disposer d'un ensemble d'items aussi structuré que ces 12 problèmes de billes.

6. Il s'agit de décrire les réponses des élèves. Pour les comparaisons, j'ai alors établi pour chaque problème un éventail des réponses (cf. un exemple en appendice I) les comparaisons se feront sur divers aspects à la faveur de ce que révèle chacun des énoncés.

## II. Modèles

Avant d'analyser les réponses des élèves, je vais présenter ici un certain nombre de considérations théoriques.

### II.1. Mathématiquement

A. Ici, on considère 2 objets mathématiques pour les nombres :

$$(\mathbb{N}, +, \times, \geq) \text{ et } (\mathbb{Z}, +, \geq)$$

1. Soit  $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$  l'ensemble des nombres entiers naturels. Sur cet ensemble on considère la relation d'ordre  $\geq$ , et 2 opérations : addition et soustraction.

Les nombres sont des entités ordonnées, et c'est cet ordre qui définit les opérations d'addition et de soustraction (vision Peaniste). Cet ordre est le plus contraignant qui

soit, puisque tout élément est comparable à tout autre (ordre total) et qu'il y a toujours un plus petit élément (bien ordonné).

L'addition est une opération toujours effectuable (partout définie) qui, en outre, jouit de propriétés importantes telles que l'associativité, la commutativité...

La soustraction n'est pas une opération toujours effectuable, elle est conditionnée par l'ordre des nombres à soustraire :  $a - b$  n'est défini que si  $a \geq b$ . Cette opération n'est ni associative, ni commutative.

Addition et soustraction sont des opérations inverses l'une de l'autre.

2.  $\mathbb{Z}$  est l'ensemble des nombres entiers naturels auxquels on a associé un opposé :  $-a$  est associé à  $a$ ,  $-0=0$ .

Le fait de se donner un opposé permet de considérer que addition et soustraction sont les deux volets d'une seule opération, notée abusivement  $+$  parce qu'elle jouit toujours de bonnes propriétés d'associativité et de commutativité :

L'addition garde sa définition.

La soustraction s'exprime en termes d'addition par le passage à l'opposé :  $a - b = a + (-b)$ . Elle devient alors toujours possible  $a - b = -(b - a)$ .

On considère alors sur  $\mathbb{Z}$  un ordre qui « prolonge » celui de  $\mathbb{N}$ . Deux points importants à noter à ce propos :

- l'ordre est redéfini de la façon suivante. Si  $a \geq b$  (dans  $\mathbb{N}$ ) alors  $b \leq a$  (dans  $\mathbb{Z}$ ).  $-b \geq -a$
- l'ordre de  $\mathbb{Z}$  diffère de l'ordre de  $\mathbb{N}$  par le fait que  $\mathbb{Z}$  n'a pas de premier élément ( $\mathbb{Z}$  n'est pas bien ordonné).

### B. Calcul

1. Dans  $\mathbb{N}$ , le calcul de l'addition et de la soustraction se fait sur l'ordre des nombres. Ainsi le  $(a + b)^{\text{e}}$  nombre c'est le  $b^{\text{e}}$  nombre après  $a$ . Il en est de même pour la soustraction. Notons cependant que la soustraction renvoie à une situation de tout à partie (Volet cardinal).

2. Dans  $\mathbb{Z}$  il faut distinguer calcul numérique et calcul sur les signes (ou algébrique). Pour ce qui est du calcul numérique, aucun changement. Le calcul algébrique permet en outre de ramener tout calcul de  $\mathbb{Z}$  à une opération numérique de  $\mathbb{N}$ . Le calcul algébrique est un calcul d'oppo-

sitions (amis des amis = ami, etc.). La distorsion de l'ordre provoque des difficultés bien connues.

### C. Modèles de représentation

#### Quantités, transformation, modèles intermédiaires

1.  $(\mathbb{N}, \geq, +, -)$  est bien évidemment le modèle des quantités (états). Les deux opérations renvoient aux actions d'ajouter ou enlever des éléments. Ajouter et enlever sont des opérations inverses, etc., etc.

2.  $(\mathbb{Z}, \geq, +)$  est un bon modèle pour les transformations. Dès qu'on raisonne uniquement sur les actions ou les transformations (ajouter, enlever, gagner, perdre, ...) il devient clair qu'il n'y a plus qu'une opération : la composition des actions. (Une suite d'actions se combine en une résultante et ceci d'une seule façon). Il n'y a pas de transformation de transformations.

Donc une seule opération.

A chaque action ou transformation correspond une action ou transformation inverse.

Le modèle  $(\mathbb{Z}, \geq, +)$  s'applique donc parfaitement. L'opération  $+$  n'a plus comme support les transformations elles-mêmes, mais bien l'effectuation d'un bilan. Ainsi par exemple : le bilan des deux transformations : perdre 7 billes puis perdre 5 billes se fait par une addition bien qu'on ait affaire à des pertes !

Pour ce qui est de l'ordre, on peut ordonner les transformations en fonction des quantités auxquelles elles se rapportent. Cependant, la distorsion se fait lorsque perdre 7 billes c'est perdre *plus* (de billes) que perdre 5 billes (pertes ordonnées selon les quantités), alors que le modèle  $\mathbb{Z}$  voudrait que perdre 7 billes soit *moins* (bien) que perdre 5 billes.

#### 3. Modèles intermédiaires

Il se peut cependant que, dans certaines conditions, le modèle  $(\mathbb{N}, \geq, +, -)$  s'applique aux transformations. C'est ce que j'appelle des procédures de registre. Dans le registre des pertes, par exemple, les pertes sont considérées comme des quantités à part entières, ordonnées de la façon naturelle. Faire une perte puis une perte devient alors ajouter à la perte ; faire une perte puis un gain devient enlever à la perte (ou diminuer la perte).

Une telle procédure repose sur  $(\mathbb{N}, \geq, +, -)$  et sur un système d'opposition (perte/gain) ainsi que des règles qui permettent de choisir le registre approprié voire même de changer de registre en cours de route (en remettant le compteur à zéro). Les règles de choix d'un registre sont dictées par des considérations sur les ordres de grandeur des transformations ainsi que l'ordre temporel des transformations.

### D. Indices du calcul

Trouver une réponse à un problème, c'est le rendre calculable (qu'importe le juste ou le faux). Or on l'a vu, le calcul repose avant tout sur des considérations relatives aux ordres de grandeurs. Il s'agit donc, pour le sujet qui résout le problème, de repérer des indices au calcul.

Les recherches sur la résolution de problèmes et en particulier celles de Durand Vergnaud ou la présente, montrent que toute relation numérique entre les données ne prend pas forcément de signification dans l'énoncé, et ne sera pas considérée. Ce couplage prend des formes très subtiles.

#### Exemple de la soustraction

Remarquons que la soustraction/calcul peut renvoyer à trois situations distinctes :

a) elle renvoie à une transformation négative : enlever, perdre, gagner puis perdre...

b) elle renvoie à l'inverse d'une transformation positive : on veut savoir ce qu'il y avait avant que la transformation ait eu lieu (opposition des transformations).

c) elle renvoie à une situation de tout à partie : A est une partie de B et on veut savoir ce qu'il y a entre deux. Exemple : il y a 12 enfants dont 5 garçons... combien de filles ? ou, il y avait 5 billes après la partie, il y en a 8, que s'est-il passé ?

Or, tant qu'on raisonne dans  $\mathbb{N}$ , cette dernière signification est exclusive à la soustraction. La soustraction est l'opération appropriée à une situation de tout à partie.

Mais quand on travaille avec des transformations (ou plutôt avec des nombres relatifs), cette situation peut amener une addition ! Exemple : le problème *Olivier*. Olivier joue 2 parties de billes. A la première, il a gagné 2 billes ;

en tout il a perdu 7 billes. Que s'est-il passé à la seconde partie ?

Il y a là un sérieux obstacle que tout le monde connaît bien et qui très certainement force le passage des modèles  $N$  à  $Z$ .

Autre exemple : soit le problème *Michel*. Michel joue 2 parties de billes. A la première il gagne 4 billes, à la seconde, il perd 6 billes. Que s'est-il passé en tout ?

Eh bien *Michel* et *Olivier* sont certainement des problèmes de difficulté comparable. Cependant *Michel* est plus facile à expliquer que *Olivier*, car le calcul dans *Michel* est « naturel ».

### II.2. Image intuitive

Avant de poursuivre, une image qui m'a accompagné tout au long de l'écriture de ces pages. Il s'agit de l'image d'une structure d'arbre (graphe) que l'on parcourerait des feuilles jusqu'au tronc. Ici, le tronc est le calcul numérique dans  $N$  qui fournit le résultat du problème.

Celui-ci se double, dès le moment où la notation de  $Z$  est assimilée, d'un calcul sur les signes.

Ce mouvement ne se renverse pas dans la résolution du problème. L'exemple le plus évident est la résolution de problèmes arithmétiques par la méthode algébrique. Les relations de l'énoncé sont traitées et exprimées par une première équation (ou système d'équations). Ensuite des traitements algébriques spécifiques sont opérés en vue de la résolution sans qu'il soit nécessaire de considérer chaque nouvelle équation comme exprimant des relations du problème. Il en sera de même ici car ce fait est général et ne dépend pas d'un système de notations seulement mais doit être rapporté au traitement lui-même. De toute la chaîne de résolutions qui peut être fort complexe et que je ne saurais en fait décrire, je me référerai à trois sommets : l'énoncé, les relations de l'histoire évoquée et les relations numériques.

### II.3. Transformations

La donnée d'une transformation correspond à celle d'un opérateur numérique et infère à un schéma

$E_1 \xrightarrow{T} E_2$ . Une transformation augmente ou diminue une quantité initiale. Une transformation comporte donc deux indications : une quantité (ici des billes) et

un mode opératoire. Et ce, de façon univoque : gain  $\longleftrightarrow$  addition ; perte  $\longleftrightarrow$  soustraction.

### II.4. Trois types d'énoncés ETE

Les énoncés ETE fournissent exactement ce schéma. Le déroulement de la partie (ordre chronologique : avant-pendant-après) est bien exprimé et les nombres sont des quantités bien différenciées. Selon la place de la donnée manquante (inconnue) on aboutit à trois types de problèmes. Pour chacun d'eux la question s'exprime différemment :

- ETX Combien de billes a-t-il après la partie ?
- EXE Que s'est-il passé durant la partie ?
- XTE Combien de billes avait-il avant de jouer ?

*ETX* : Ce schéma est le plus simple puisque la question porte sur le résultat d'une opération connue avec des facteurs connus. Ceci une fois compris, il suffit d'effectuer et on obtient la réponse. Les relations numériques entre les données n'entrent pas en jeu dans le raisonnement sauf, bien sûr, dans le cas d'une perte supérieure à l'avoir initial.

*EXE* : Ce schéma est plus complexe car il est déjà un schéma inverse à *ETX*. Il suppose en effet que l'on remonte de la considération de la transformation comme achevée vers sa détermination. Ceci se fait par l'intermédiaire de la mise en relation des données numériques prises dans l'ordre chronologique. Ainsi  $E_1 < E_2 \Rightarrow T = (G, E_2 - E_1)$  et  $E_1 > E_2 \Rightarrow T = (P, E_1 - E_2)$ . (Bien sûr, on soustrait toujours et toujours la plus petite donnée de la plus grande).

*XTE* : Les énoncés *XTE* supposent eux aussi la considération de la transformation comme achevée. Ceci permet de situer ordinalement l'inconnue par rapport à l'état donné : en deça (gain) ou au-delà (perte). Ceci est encore une fois univoquement déterminé par la nature (le signe) de la transformation.

Aussi machinale que puisse paraître cette inversion (perte  $\longleftrightarrow$  addition, gain  $\longleftrightarrow$  soustraction) elle n'est pas immédiate. C'est ce que montre le net écart de réussite entre problèmes *ETX* et *XTE* observé maintes fois (cf. Durand Vergnaud par ex.). Une fois encore on tombe sur la présence des relations de l'énoncé sur les opérations effectuées.

L'inversion se passe au niveau des relations et non pas au niveau de l'énoncé lui-même. Lorsqu'on résoud *Bertrand*  $X P_7 3$  en effectuant l'addition  $3 + 7 = 10$ , on n'a pas idée qu'on est en train de résoudre un énoncé du type  $3 G_7 X$ . L'inversion ne se situe pas entre gain et perte. Elle est dérivée de l'énoncé. Ainsi on retrouve l'idée de graphe en arbre et le calcul  $3 + 7 = 10$  est situé ainsi :

$$\begin{array}{l} 3G_7X \\ XP_73 \end{array} \rightarrow 3 + 7 = 10.$$

Mettre en relation des énoncés est tout autre chose, cette compétence est équivalente à celle de construire des énoncés. A ceci je rattache en outre le phénomène maintes fois observé : la réticence des élèves à vérifier leur résultat.

### II.5. Composition des transformations et registre

Comme dit (au point mathématique) il n'y a qu'une composition des transformations, c'est l'enchaînement des parties ou des opérateurs. Cette composition peut être représentée de manières diverses selon le contexte et selon les outils dont dispose le sujet.

Par exemple une représentation très concrète dans le cas où deux gains (deux pertes) se succèdent. Gagner  $n$  billes et encore  $m$  billes (le français ne répète même pas « gagner ») revient à une adjonction de billes.

Un peu plus élaboré et adapté à un éventail de situation nettement plus large, la représentation de la composition comme le fait d'un opérateur. Augmentation ou diminution de l'intensité de la transformation initiale sous l'action d'une transformation qui lui succède. Je gagne  $m$  billes (j'ai bien joué) je perds  $n$  billes (dommage), finalement, j'ai quand même gagné  $m-n$  billes (si  $m > n$ ). Mon gain initial s'est réduit.

Plus élaborées encore sont les représentations d'annulation d'une première transformation ou d'inversion du bilan. Ex. : Il gagne  $m$  billes, puis en perd  $n$ . Il reperd les  $m$  billes et encore  $n - m$  (si  $m < n$ ).

Ces représentations s'élaborent dans la mesure où est prise en compte l'altération de la transformation et de son signe et non pas seulement de son intensité. Ici, l'idée de

registre est très importante. Se placer dans un registre de gain ou de perte permet de ramener ses calculs et les relations numériques dans le cadre de  $N$ . Dès lors les choses se passent de la même façon dans le registre des gains et des pertes.

La détermination du registre peut être faite de trois manières qui dénotent du travail d'adéquation (homomorphisme) entre les relations de l'histoire évoquée et des relations numériques. La manière la plus naturelle est de se situer dans la chronologie énoncée et de se fixer le registre de la première partie. On se trouve de cette façon très proche du schéma ETE (cf. suite). Mais cela est inapproprié dans les cas où le bilan et la première partie ne sont pas liés dans un même registre. (c. à d.  $P_n G_m X G_n P_m X$   $n < m$ ,  $XP_n P_m$  et  $XG_n G_m$   $n > m$  et  $PXG$  ou  $GXP$ ).

Dans les cas  $XTT$  on considère la relation réciproque).

On peut alors adapter la détermination du registre : soit prendre celui exprimé par le bilan (le signe du bilan) quand il est donné, soit prendre celui de la transformation d'amplitude maximum (mais ceci ne devrait pas concerner le cas où le bilan est donné).

Toutes ces considérations deviennent formellement superflues si on utilise les nombres négatifs et les équations pour résoudre ces problèmes.

### II.6. Groupe

L'ensemble des transformations et leur composition a une structure de groupe commutatif. Que la composition soit une loi interne dérive de l'associativité de l'addition dans  $N$ . Avec une petite nuance à propos de la soustraction (registre). Prenons une notation de type opérateur :

$$G_n (E_i) = E_i + n = E_f$$

$$P_n (E_i) = E_i - n = E_f$$

$$G_n (G_m (E_i)) = (E_i + n) + m = E_i + (n + m) = G_{n+m} (E_i)$$

$$P_n (P_m (E_i)) = (E_i - n) - m = E_i - (n + m) = P_{n+m} (E_i)$$

Le signe  $-$  indique l'action de la transformation sur l'état, non la composition des transformations (perdu deux fois augmente la perte).

$$m \leq n \quad P_m (G_n (E_i)) = (E_i + n) - m = E_i + (n - m) = G_{n-m} (E_i)$$

$$m \geq n \quad P_m (G_n (E_i)) = (E_i + n) - m = E_i - (m - n) = P_{m-n} (E_i)$$

On retrouve le registre mais défini comme celui de la transformation d'intensité maximum.

L'associativité de la composition des transformations est équivalente à celle de la composition des opérateurs. De même la commutativité de la composition. Notons cependant que cette commutativité n'est pas celle des états. En effet pour  $P_n(G_m(E_i))$   $n \leq m$ ,  $E_i$  peut être quelconque dans  $\mathbb{N}$ , tandis que pour  $G_m(P_n(E_i))$ ,  $E_i$  doit être plus grand que  $n$  ( $\forall n$  et  $m$ ).

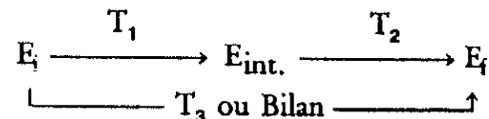
Un groupe est défini par la propriété qui veut que l'équation  $T \circ X = T'$  ait toujours une solution (je me situe dans le cadre commutatif). Ceci montre le rapport qu'il y a entre les énoncés TTX et TXT (auxquels sont associés les énoncés XTT). Ceci est important à noter et à ne pas confondre avec la relation gain/perte. Ne pas confondre donc mode d'action d'un opérateur et le calcul numérique qui en découle.

### II.7. Schémas TTT et ETE

Il y a une certaine dissociation entre les deux aspects d'une transformation : signe/intensité. Dans les réponses les moins élaborées, la transformation représente une sorte de constat : perdu/gagné. Dans les énoncés TTT, le bilan s'exprime comme une transformation (comme si c'était une partie de billes et non pas la composée de deux parties). Ceci ne semble pas poser de problème et je me l'explique par cette conotation de constat.

La mesure de l'intensité (amplitude) de la transformation est donnée en termes de billes. Elles peuvent être considérées comme des billes « concrètes », celles que l'on échange ou encore celles qui « circulent » au cours du jeu. Ainsi pour  $G, P, X$  il est assez naturel de penser que 4 des 6 billes gagnées ont été reperdues et donc restituées à l'adversaire. Dès lors la quantité de billes qui exprime l'amplitude de la transformation est modifiée, tout comme l'est un état, par l'action d'une transformation ultérieure. Les transformations deviennent leur propre opérateur (quant à l'amplitude).

Une autre manière de se rapporter au schéma ETE est de considérer un état initial (on se le donne) et d'y enchaîner les opérations de manière à reconstituer les parties :



Pour obtenir la réponse au problème TTT, il ne suffit pas de calculer les états, une comparaison est encore nécessaire pour avoir la transformation.

Si la résolution des problèmes se situait au niveau des énoncés, on verrait alors que la résolution d'un problème TTT correspond à l'enchaînement de trois problèmes ETE :

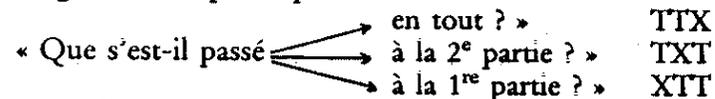
$$\begin{array}{l}
 T_1 T_2 X : E_1 T_1 E_2 \longrightarrow E_2 T_2 E_3 \longrightarrow E_1 X E_3 \\
 T_1 X T_3 : \left. \begin{array}{l} E_1 T_1 E_2 \\ E_1 T_3 E_3 \end{array} \right\} \longrightarrow E_2 X E_3 \\
 X T_2 T_3 : E_1 T_2 T_3 \longrightarrow E_2 T_2 E_3 \longrightarrow E_1 X E_2
 \end{array}$$

Cas où  $E_1$  est donné,  $E_2, E_3$  puis  $X$  sont calculés (gras).

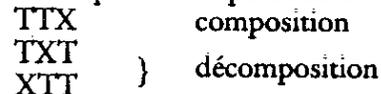
De beaux problèmes à tiroir ! Mais la remarque sur les intensités des transformations indique comment on peut obtenir des calculs plus directs.

### II.8. Problèmes TTX et TXT

1. Dans les énoncés TTT, le bilan est exprimé comme une transformation. Elle est annoncée par l'expression « en tout » dans : « En tout, il a gagné  $n$  billes » ou « Que s'est-il passé en tout ? ». En outre l'ordre de déroulement du jeu y est scrupuleusement indiqué. Les questions se distinguent alors par la place de l'inconnue.



Formellement il n'y a que deux structures de problèmes TTT. Vu que la composition est commutative il y a :



Dans les énoncés TTX, les transformations sont données sur un même plan, seul l'ordre les différencie. « En tout » veut dire « tout compté » et exprime réellement un bilan.

La signification de ce terme bien sûr peut couvrir une gamme de représentations. Très souvent les réponses à ces problèmes sont formulées en termes d'état : « Il a, il reste, il manque, etc. ». J'appelle cela un « glissement de sens ». Ceci est un indicateur des relations mises en jeu dans la résolution mais ne signifie pas une *traduction* de l'énoncé en termes d'état. Le sujet (car bien des adultes répondent de même) aura pu raisonner sur l'intensité d'une des transformations comme décrit au paragraphe précédent. Il s'avère que ce type de traitement n'est pas sans poser des difficultés dans le cas de  $G_n P_m X$  avec  $m < n$ . C'est l'articulation des transformations qui constitue le *problème* dans ces énoncés.

2. Pour les énoncés TXT le traitement des intensités comme on le ferait d'états permet aussi un glissement de sens et de se ramener à un schéma EXE. Par exemple : Jacques  $P_5 X P_8$  « Il a perdu ses 5 billes et encore 3 ». Cependant un tel « glissement de sens » ne s'identifie pas aussi aisément que dans le cas TTX.

Revenons aux problèmes ETX, et EXE. Dans le problème ETX, le sujet se voit donner les deux facteurs et l'opération selon laquelle les combiner, il n'a qu'à effectuer. Dans le schéma EXE, le sujet doit partir de la considération selon laquelle la transformation est achevée. C'est plus complexe. Mais ceci libère le sujet de la réalisation de cette transformation.

Dans le cas TTX, le sujet dispose bien sûr des facteurs mais il est à sa charge de trouver les relations qui indiqueront comment les combiner. Il doit subvenir au manque de donnée sur les états.

Le cas TXT est plus proche de EXE — via glissement de sens. Une fois le registre déterminé, la considération de la transformation comme achevée dispense le sujet de se faire une idée de la combinaison des transformations. De grandes difficultés se révèlent alors dans le cas PXG ou GXP.

### 11.9. Soustraction et signes

En regard des états, gains et pertes indiquent un mode d'action. Un gain augmente un avoir comme une addition augmente un nombre. Une perte diminue un avoir comme une soustraction diminue un nombre.

Par rapport à un bilan de parties, le mode d'action d'un gain ou d'une perte se situe dans un registre. Un gain augmente un gain antérieur mais diminue (compense) une perte antérieure. Et analogiquement pour les pertes. C'est donc dans le cadre d'un registre que l'opération à effectuer doit être déterminée. Le registre a trois connotations : l'adaptation à l'ordre chronologique (1<sup>re</sup> partie = registre qui se modifie au cours de la partie successive), l'adaptation à la relation composante/composée (Bilan = registre), l'adaptation à la relation numérique des amplitudes. La détermination de l'opération numérique adéquate est soumise au registre. Dans le schéma TTX, la soustraction dénote l'opposition des deux transformations. Et non pas l'action absolue de la perte puisqu'un gain diminue une perte ! Elle ne prend donc de sens que relativement au registre. Pour qu'elle soit effectuable dans N il se peut que par rapport à la chronologie un « changement » de registre intervienne comme dans Michel  $G_4 P_6 X$ . Ce jeu entre chronologie et intensité des transformations correspond en notation formelle à :  $(b-a) \rightleftharpoons (a-b)$ . Je dirais alors que dans  $-(a-b)$  le premier signe « moins » recouvre le registre, tandis que le second recouvre la compensation des transformations.

Mais la soustraction ne s'applique pas seulement à la composition de deux transformations de signes opposés. Elle renvoie aussi à la décomposition d'un bilan dans un registre donné.

J'avais noté pour les problèmes  $E_i X E_f$  :

$$E_i < E_f \rightarrow X = (G_n, n = E_f - E_i)$$

$$E_i > E_f \rightarrow X = (P_n, n = E_i - E_f)$$

On retrouve ici (dans le registre des pertes) l'expression :

$$(E_f - E_i) = P(E_i - E_f) \text{ c'est-à-dire } (b-a) = -(a-b)$$

chronologie      ordre numérique

où le premier signe « moins » est le signe de la transformation (P) tandis que le second exprime la diminution des états et non pas, comme auparavant (TTX) l'opposition entre les transformations.

Il en est de même pour les problèmes (TXT)<sub>1</sub>, (GXG et PXP) avec une nuance qui montre bien ce que permet la donnée d'un registre.

Prenons la comparaison de Jacques  $P_5XP_8$  et Didier  $P_7XP_4$  :

$$5 < 8 \rightarrow X = (P, 8-5)$$

$$7 > 4 \rightarrow X = (G, 7-4).$$

On trouve donc dans le 2<sup>e</sup> cas une inversion entre ordre numérique des intensités et chronologie et donc une inversion du résultat par rapport au registre. On est dans le registre des pertes et la perte de 7 billes s'est réduite parce que 3 billes ont été récupérées. Ceci revient à  $(b-a) = -(a-b)$ . Ici le premier signe « moins » indique l'opposition par rapport au registre, tandis que le second est celui de l'ordre des amplitudes des pertes (diminution des intensités). Ceci suppose déjà un type élaboré de représentations.

Le cas  $(TXT)_2$  ( $GXP$  et  $PXG$ ) est le plus complexe. Dans ce cas, la relation induite par l'ordre des intensités est trompeuse. Celle-ci n'a en effet aucune signification si les transformations ne sont pas de même signe. Formellement on tombe sur :

$$\begin{array}{l} P_m X G_n \quad X = (G, m + n) \\ G_m X P_n \quad X = (P, m + n). \end{array}$$

Ce qui revient à :  $(b - - a) = (b + a)$ . Où le premier signe « moins » exprime la décomposition du bilan et le second l'opposition des deux transformations données. Encore faut-il comprendre que cela se combine ! Le modèle du registre et des augmentations/diminutions s'avère insuffisant. Il faut passer par l'annulation (c. à d. considérer gains et pertes comme opposées).

J'ai appelé ceci la surcompensation. Revenons au schéma direct  $TTX$  :  $P_n G_m X (G_n P_m X)$   $n < m$ . Un raisonnement sur les intensités est encore possible. Il consiste à dire : « les  $n$  billes sont regagnées (récupérées) et encore  $m - n$  ». (« les  $n$  billes sont reperdues et encore  $m - n$  »). Il y a donc mise à zéro de la première transformation et de ce fait elle disparaît du bilan. Un sujet qui maîtriserait bien cette dernière relation (*mais qui relativement au problème  $TTX$  est ultérieure à la solution*) pourrait s'y appuyer pour résoudre  $PXG$  ( $GXP$ ). Ainsi la mise en relation des énoncés suppose un point de vue supérieur à ceux-ci de la structure des événements évoqués. Tout comme l'est la vérification.

Un second raisonnement possible pour surmonter la difficulté serait de se fixer dans le registre du bilan et de considérer la donnée de l'autre transformation comme un opérateur sur les quantités. Ex. :  $XP_7G_3$ . Registre des Gains. La perte de 7 billes a réduit un gain initial à n'être plus qu'un gain de 3 billes, donc le gain initial est de 10 billes. En quelque sorte le report du problème XTE sur les intensités des parties via la considération d'un registre.

Un troisième raisonnement consisterait à se ramener au schéma ETETE. Avec deux variantes.

a) Se donner un état initial arbitraire (suffisamment grand) puis calculer les autres états.

$$\begin{array}{l} \text{Ex. : } G_2XP_7 \quad \begin{array}{c} \overbrace{10 \quad 12}^{P_7} \quad \overbrace{3} \\ \underbrace{\quad G_2 \quad} \end{array} \\ XP_7G_3 \quad \begin{array}{c} \overbrace{10 \quad 20}^{G_3} \quad \overbrace{13} \\ \underbrace{\quad P_7 \quad} \end{array} \end{array}$$

Ici, cela demande une bonne maîtrise de la structure chronologique, et la compétence de « remonter » une transformation (inversion). Pour le reste les transformations s'appliquent aux états données.

b) Coordonner les intensités des relations en les dédoublant. Ceci revient à peu près au même que ci-dessus, si ce n'est que cet effort de coordination n'est pas faible. Par contre la réponse prend un caractère de nécessité plus marqué.

$$\begin{array}{l} \text{Ex. : } G_2XP_7 \quad \begin{array}{c} \overbrace{7 \quad 9}^{P_7} \quad \overbrace{0} \\ \underbrace{\quad G_2 \quad} \end{array} \\ XP_7G_3 \quad \begin{array}{c} \overbrace{0 \quad 10}^{G_3} \quad \overbrace{13} \\ \underbrace{\quad P_7 \quad} \end{array} \end{array}$$

### III. Analyse des réponses

Une réponse à un des problèmes donnés doit comporter nécessairement deux types d'informations.

1<sup>e</sup> Un élément numérique. Le résultat du calcul relatif au problème.

2<sup>e</sup> Un libellé qui indique ce que ce nombre représente : état-transformation et dans ce cas gain ou perte. En outre le libellé indique en quoi le sujet a répondu à la question posée.

Les élèves valaisans avaient en outre comme consigne de mettre leur résolution en équation. L'élément numérique se trouve alors soit dans la réponse en texte, soit dans l'équation, soit dans les deux. De plus une même réponse peut comporter différents nombres dont, en particulier, les données. Je vais commencer par examiner globalement les réponses produites en distinguant leur élément numérique et leur libellé.

### III.1. Nombres

Pour ce qui est de l'élément numérique, j'ai examiné avant tout l'usage que l'élève a fait des données de l'énoncé et ce que cela lui a amené à produire. Les cas vont donc du non-usage des données, ce qui recouvre les catégories suivantes :

1. non-réponse
2. réponses qualitatives pures
3. les réponses se basant sur une conotation des pertes selon laquelle on n'a plus de billes après avoir perdu. Ainsi : « Il a 0 bille », « Il a tout perdu ». « Il n'a pas assez de billes »... Ces réponses comportent toutes un minimum de numérisation, je les rassemblerai sous l'appellation 0.
4. un usage des données sans les combiner réside dans la répétition de celle-ci en tant que réponse. Peuvent être répétées la première donnée ( $R_1$ ) la seconde ( $R_2$ ) ou les deux à la fois ( $R_{12}$ ).

La question des répétitions de données est plus subtile qu'il n'y paraît. Je montrerai ceci plus loin. La répétition de donnée n'entre pas dans le cadre du « contrat-didactique » propre aux problèmes d'arithmétique. Celui-ci veut en effet qu'une seule réponse soit donnée et qu'elle soit le produit d'une combinaison des données. Si un sujet répète une ou les deux données c'est que son interprétation de la tâche est plus forte que ces clauses implicites.

5. 6. et 7. Dans le calcul sur les données, je distinguerai les additions (5) les soustractions (6) ainsi que les combinaisons autres des données (7) avec éventuellement des nombres auxiliaires que se donne le sujet. Notons qu'il n'est pas rare de voir un élève fournir dans sa réponse une addition et une soustraction des données, leur faisant jouer des rôles divers.

8. Enfin une catégorie marginale de réponses numériques autres qui résultent soit d'erreurs de calcul soit de combinaisons difficilement accessibles à l'analyse.

Ceci donne les tableaux I et II des réponses numériques recueillies à Genève et au Valais.

Tableaux I et II. Description des réponses numériques à Genève et au Valais.

N/R	Q	o	R	+	-	C.a	A			N/R	Q	o	R	+	-	C.a	A
1			1		42		2	PIERRE	$6 P_1 X$							38	
		1	14	38				BERTRAND	$X P_1 3$						38		
			4	7	26		3	CLAUDE	$5 X 9$				2	4	34		
3			5		35	2		PAUL	$6 P_2 X$	1			1	2	33	2	
	5	15	3	22	4			LAURENT	$P_2 P_2 X$	5	1	4	3	25	5	1	
	3	13	7	3	18	3	1	MICHEL	$6 P_2 X$	8		2	5	5	12	9	
4	2		8	6	25			CHRISTIAN	$6_2 X 6_2$			1	3	4	34		1
3	1	8	10	3	19		2	JACQUES	$P_3 X P_2$				3	3	34	2	
								DIDIER	$P_3 X P_2$			1	2	2	36	1	
7	2	6	15		14		1	OLIVIER	$6_2 X P_2$	1			6	12	20	2	1
8	2	2	13	1	19		1	VINCENT	$6_2 X P_2$	1			5	8	24	1	1
11	4	4	12	8	7			BRUNO	$X P_2 6_2$	7			5	16	12	1	2

Tableau I - Genève 46 E

Tableau II Valais 38 E

#### Distribution des réponses : élément numérique

Les résultats de Genève sont un peu moins bons « scolairement parlant » que ceux du Valais. Ceci tient aux conditions d'enseignement. La consigne d'utilisation des équations aura amené les élèves valaisans à calculer avec les données numériques. Ces comparaisons permettent de situer les réponses. On notera donc que :

1° A Genève, il y a un taux de réponses qualitatives et nulles plus grand.

2° De même il y a plus de répétitions de données à Genève.

3° A Genève, un taux de réponses assez grand aux trois derniers problèmes (Olivier, Vincent, Bruno), tandis qu'au Valais ce sont les problèmes Laurent et Michel qui ont obtenu un taux de non-réponses. Les problèmes étaient respectivement les 5° et 6° de la donnée. Dans ce cas les non réponses traduisent certainement un certain « désarroi ».

4° Au Valais, il y a eu des tentatives de combinaisons particulières (C.A.) des données numériques. Surtout pour le problème Michel. Cela tient aussi à l'usage des équations.

5° Les éventails de réponses montrent très clairement qu'au Valais les catégories de problèmes ETE, TTX, TXT sont différentes. De plus on observe des distributions de réponses distinctes aux problèmes (TXT) (Christian, Jacques, Didier) et (TXT) (Olivier, Vincent, Bruno).

A Genève, ceci est moins apparent. Tous les problèmes TTT ont produit un large éventail de réponses. Mais les distributions des réponses ne sont pas les mêmes.

Avec cette dernière remarque on en arrive à comparer les énoncés entre eux. Je ferai ceci plus loin. Pour l'instant je veux examiner la façon dont les élèves se sont trompés, numériquement parlé. On remarque qu'il y a peu de fautes de calcul (cela tient aux données et c'est voulu par le plan d'expérience).

1° Hésitation entre + et -

Ceci n'apparaît que dans un cas Bruno XP<sub>7</sub>G<sub>3</sub> (auquel on associera Olivier G<sub>2</sub>XP<sub>7</sub> au Valais mais pas à Genève). Donc dans la quasi totalité des cas les élèves ont peu d'hésitation au moment du calcul numérique et les difficultés se situent en amont dans la résolution. Amenant à d'autres traitements numériques : non-réponse, réponse qualitative, réponse nulle, répétition de la donnée et combinaisons autres (originales).

2° Dans les trois cas (TXT) Olivier G<sub>2</sub>XP<sub>7</sub>, Vincent G<sub>3</sub>XP<sub>2</sub> et Bruno XP<sub>7</sub>G<sub>3</sub> il y a erreur sur l'opération engagée. Ceci se note par le recours à la soustraction.

3° Les taux de « réponses calculées » sont différents et du fait des remarques précédentes, sont significatifs. On remarquera au Valais le très fort taux de réponses calculées (et calculées correctement) aux problèmes (TXT) (Christian, Jacques, Didier).

	NR	Q	O	R	+	-	C.a	Event
GE →					o	ff		é
VS →					o	ff		é
PI					ff	o		é
DE				f	ff	o		é
CL					ff	ff		é
PA					o	ff		
LA	f				ff	ff		é
MI	f		f	m		f	f	é
CH						ff		é
JA			m	m		ff		é
DI						ff		é
OL	f		m	f	o	ff		é
VI	f			f		ff		é
BR	f			f	m	m		é
	f				m	m		m

faible distribution équilibrée sur les problèmes

CODE :  
 O = nul  
 m = moyen  
 f = fort  
 ff = très fort  
 l = large  
 é = étroit

Résumé des tableaux I et II

III.2. Libellés

La recherche de Durand/Vergnaud a mis en évidence la pertinence de la distinction état-transformation. Ce que nous venons de voir concernant les opérations numériques vient confirmer l'importance des calculs relationnels dans la résolution de problèmes arithmétiques. J'ai donc été particulièrement sensible aux libellés des réponses. A quel titre se réfèrent-elles aux états, et état final, initial ? ou au contraire aux transformations ? Donc une distinction double sera faite. D'une part si le libellé est exprimé en termes d'état ou de transformation, d'autre part dans quel « registre » ce libellé situe la réponse : gain ou perte. A ce registre des gains j'ai associé les réponses  $E_f$  (état final) car cela dénote des billes qui restent (restent en possession, restent gagnées) au joueur et les réponses  $E_i$  (état initial) au registre des pertes car cela dénote des billes qu'il fallait avoir (pour pouvoir les perdre).

Si les réponses du registre des gains sont en gros de trois types :

- gain quantifié,  $G_n$  . Ex. : Paul a gagné 2 billes.
- gain,  $G$  . Ex. : Paul a gagné.
- état final,  $E_f$  . Ex. : Paul : il lui reste 2 billes *le total initial*  
(il a 2 billes, etc.)

le registre des pertes est un peu plus riche. Les expressions de la perte sont plus variées, et si pour le gain initial tombe dans l'implicite, la perte s'exprime beaucoup par son résultat « il n'a plus de billes », ou en comparaison d'un état initial et d'un état final. « Il a moins de billes » « Il avait 7 billes, il n'en a plus ». D'autres réponses ont été classés et expriment la perte, ce sont presque des réponses de transformation : « Il manque des billes » « Il lui manque 2 billes » « Il a trouvé 2 billes » « Il doit donner 2 billes » « Il me manque des billes, je te les donnerai demain ». Je désigne en vrac toutes ces réponses par le terme *manque* (abréviation M).

Code des tableaux IV et V.

- Réponse transformation quantifiée :  $G_n, P_n$  (gain/perte)
- Réponse transformation non quantifiées:  $G, P$
- Réponse : Il a, il reste :  $E_f$  (état final)
- Réponse : Il avait :  $E_i$  (état initial)
- Réponse : Il a 0 bille. Il a tout perdu : 0.
- Il n'a plus de bille : 0.
- Réponse manque : M.

Voici donc les tableaux III et IV de distribution des réponses selon les deux registres, ceci pour les deux cantons.

	$G_n$	$G$	$E_f$	$P_n$	M	P	$E_i$	0	A	NR
PIERRE $6P_4X$			42	2						2
BEATRAND $X P_3$	2	1		8			24	4		7
CLAUDE $5X9$	34	2	2						1	7
PAUL $6_2P_4X$	8	2	21	4		2			3	6
LAURENT $P_1P_3X$			1	15	5	8	5	10	1	1
MICHEL $6_4P_8X$	2		5	6	12	4	0	12	3	2
CHRISTIAN $6_5X6_3$	38	2								6
JACQUES $P_3X P_8$	1			30	2	3		5	2	3
DIDIER $P_9X P_4$										
OLIVIER $6_2X P_3$		1		24	2			6	2	8
VINCENT $6_8X P_2$	4	3	14	12		1	1	2		9
DAUND $X P_3G_3$	8	4		10	2		2	3	2	15

Tableau III : Distribution des réponses : libellés, Genève 46 E

	$G_n$	$G$	$E_f$	$P_n$	M	P	$E_i$	0	A	NR
PIERRE $6P_4X$			38							
BEATRAND $X P_3$							38			
CLAUDE $5X9$	33		5							
PAUL $6_2P_4X$	7		17			2			9	3
LAURENT $P_1P_3X$			1	20			2	4	4	7
MICHEL $6_4P_8X$			1	9			2	2	14	10
CHRISTIAN $6_5X6_3$	29		1				1	1	5	1
JACQUES $P_3X P_8$	3		2	27			2		3	1
DIDIER $P_9X P_4$	21		5	5			1	1	3	2
OLIVIER $6_2X P_3$	2		4	21			3		3	5
VINCENT $6_8X P_2$	7		10	18						3
DAUND $X P_3G_3$	17		1	8			3			9

Tableau IV : Distribution des réponses : libellés, Valais 38 E

		REGISTRE		
		T	A	E
GE →	DI			ff
VS →	BE			ff
	CL	ff		
	PA	f		ff
	LA	ff	f	f
	MI	f	f	f
	CH	ff		
	JA	ff		
	DI	ff		
	OL	ff		
	VI	ff		ff
	BR	ff		f

		G	P
	DI	ff	
	BE		ff
	CL	ff	
	PA	ff	
	LA		ff
	MI		ff
	CH	ff	
	JA		ff
	DI		ff
	OL		ff
	VI	ff	ff
	BR	ff	ff

Code :  
f = tort  
ff = très fort

E ↔ G    T ↔ P  
E ↔ G    T ↔ P (ff) et G (f)

Résumé Tableaux III et IV

1° A priori, la détermination de la nature de la réponse (état ou transformation) ne semblait pas devoir poser de problème. Pourtant, il y a bien « confusion » entre état et transformation. Les problèmes *Paul*  $G_6P_4X$  et *Vincent*  $G_8XP_2$  s'y prêtent particulièrement. Dans une moindre mesure, *Laurent*  $P_2P_5X$  et *Michel*  $G_4P_6X$ , le bilan de perte amenant les élèves à infléchir le raisonnement. Et comme dans le cas des réponses numériques, on remarque les adaptations différentes selon les cantons.

Mais pour les problèmes de structure TXT et XTT, il n'y a que très peu de confusions. Excepté *Vincent*  $G_8XP_2$ . Il semble donc que dans ces cas, les élèves cherchent autre chose que dans le cas TTX. La difficulté du problème des signes ne produit pas le même type d'adaptation non plus. C'est ainsi surtout au problème *Michel*  $G_4P_6X$  qu'on observe des réponses Manque.

2° A priori, pour celui qui est habitué au calcul dans Z, il n'aurait pas été étonnant d'observer des confusions dans la détermination du signe des transformations. Un simple coup d'œil sur la colonne des registres montre que cela n'est pas le cas ! Il n'y a pas confusion sur la nature de la transformation. Et les réponses état semblent cohérentes à cette vection.

Deux cas d'hésitation. *Vincent*  $G_8XP_2$  et *Bruno*  $XP_7G_3$ . Pour *Vincent*  $G_8XP_2$ , les réponses états sont toutes  $E_t$  tandis que les réponses transformation sont toutes des pertes. Il semble donc que ces réponses proviennent d'interprétations divergentes qui aboutissent cependant au même calcul : une soustraction. Pour *Bruno*  $XP_7G_3$  nous avons déjà noté l'hésitation entre deux opérations. Cette hésitation paraît être générale puisque ce problème (cf. suite) se distingue de tous les autres problèmes TXT dans la mesure où il y a presque autant de répétition de la première donnée que de la seconde (aux problèmes TXT c'est majoritairement — et nettement — la seconde donnée qui est répétée).

	$G_{10}$	$G_3$	$G_4$	$G_5$	$P_2$	$M_7$	$P_7$	$P_6$	$P_5$	$P_2$	$E_{10}$
GE	5	3			5	2	5		1		2
VS	11	4	2	1	5		1	1		1	4
	+	$R_2$	-		-	-	$R_4$				+

On note donc que la somme correspond à la réponse dans le registre de gain et dans 6 cas à une réponse E; comme pour Bertrand XP<sub>7</sub>3.

Que la différence correspond à la réponse dans le registre des pertes (Perdu 4 ou Manque 4).

Et que les répétitions de données sont conformes à l'énoncé (pour le libellé) : G<sub>3</sub> et P<sub>7</sub>.

Là aussi il semble qu'il y ait 2 interprétations distinctes.

3<sup>e</sup> Enfin une remarque concernant l'éventail des réponses : A Genève, on trouve, dans le registre des pertes des éventails de réponses larges pour les problèmes Laurent P<sub>2</sub>P<sub>5</sub>X et Michel G<sub>4</sub>P<sub>6</sub>X (éventail large et distribution non négligeable dans chaque catégorie).

Au Valais ceci se marque, pour le problème Michel G<sub>4</sub>P<sub>6</sub>X, dans la catégorie de libellés autres (qui consiste essentiellement en réponses de restitution du déroulement du jeu et qui correspond à des combinaisons numériques ou autres). Elles retiendront notre attention.

De ce point de vue il y a convergence des analyses des réponses selon les deux aspects retenus numériques et libellé.

### III.3. Conclusions

1. S'il peut paraître artificiel de faire cette coupure dans les aspects des réponses, il me semble que cela est néanmoins une bonne précaution méthodologique. Surtout à cause de l'interprétation inéluctable des réponses.

2. Cette abstraction de la réponse de l'énoncé qui l'a suscité a fait apparaître des faits qu'on a généralement tendance à négliger :

a) une opération numérique privilégiée. En général correcte sauf pour les problèmes (TXT) — seuls problèmes où apparaissent les hésitations.

b) pas de confusion de registre.

Remarquons que ce second fait est plus général. En effet, il y a des réponses qui ne reviennent pas à additionner les données ni à les soustraire, et pour ces réponses aussi, le registre est correct (même dans les formulations autres du problème Michel au Valais). Ainsi donc, c'est dans ce cadre perte/gain, état final/état initial, réponses 0 (zéro) ou

manque que s'inscrivent les combinaisons numériques des données. Dans la mesure où la détermination du registre ne saurait être identifié au calcul proprement dit, il y a donc un système double, convergent. Les calculs numériques sont donc sous contrôle des calculs relationnels. On retrouve l'analyse de Durand Vergnaud.

Ceci est confirmé par les réponses des élèves valaisans. Rappelons que ceux-ci ont accompagné leur réponse d'une équation exprimant pour la plupart le calcul opéré mais pour un nombre non négligeable restituant le déroulement des parties évoquées dans l'énoncé (cf. suite). Il apparaît alors que à de très rares exceptions près, ces équations sont exprimées dans  $\mathbb{N}$ , en particulier les soustractions sont de type  $a-b$  avec  $a > b$ . (quelques exceptions d'individus). Ceci n'a créé aucune ambiguïté quant au libellé de la réponse.

Ainsi les réponses suivantes sont très fréquentes, et on les trouve conjointes (toutes ou en partie seulement) chez les sujets.

Pierre	Il lui reste 2 billes	$6-4=x$ $x=2$
Bertrand	Il avait 10 billes	$7+3=x$ $x=10$
Claude	Il a gagné 4 billes	$9-5=x$ $x=4$
Paul	Il a gagné 2 billes	$6-4=x$ $x=2$
Laurent	Il a perdu 7 billes	$2+5=x$ $x=7$
Michel	Il a perdu 2 billes	$6-4=x$ $x=2$
Christian	Il a gagné 4 billes	$9-5=x$ $x=4$
Jacques	Il a perdu 3 billes	$8-5=x$ $x=3$
Didier	Il a gagné 3 billes	$4+x=7$ $x=3$
Olivier	Il a perdu 9 billes	$2+7=x$ $x=9$
Vincent	Il a perdu 10 billes	$8+2=x$ $x=10$
Bruno	Il a gagné 10 billes	$7+3=x$ $x=10$

De même pour des réponses moins correctes.

### IV. Résolution des problèmes : arithmétisation et calculs relationnels

Trouver une réponse à un problème d'arithmétique, c'est l'avoir rendu calculable, c'est-à-dire avoir trouvé un enchaînement de relations partant de l'énoncé et aboutissant à une opération numérique. Le sujet va s'appuyer sur des indices

au calcul mais, comme nous l'avons vu avec les registres, ces indices doivent avoir un sens relativement à l'énoncé. (Ils s'inscrivent dans le cadre général d'interprétation sur lequel le sujet se branche dans sa saisie de l'énoncé). Ainsi certaines structures d'énoncés, les éléments mis en jeu et le type de questions qui en résulte favorisent chez le sujet la mobilisation d'un schéma représentatif. Mais, en retour, ces schémas ne sont pas toujours aussi efficaces. Par exemple s'il est aisé de se représenter en termes d'états et de transformations le problème *Paul*  $G_6P_4X$ , cela est moins facile pour *Didier*  $P_7XP_4$  et encore moins pour *Olivier*  $G_2XP_7$ , car dans ces cas il faut soit coordonner les états initiaux hypothétiques par combinaison des deux données numériques, ce qui revient quasiment à calculer la réponse (ce qui donne par exemple  $7 \rightarrow 0 \rightarrow 3$  pour *Didier* et  $7 \rightarrow 9 \rightarrow 0$  pour *Olivier*) soit se donner au départ un nombre de billes suffisant pour opérer (mais ceci est une opération hétérogène à l'énoncé).

Mais revenons aux réponses observées, et commençons par réexaminer plus en détail la différence des structures d'énoncés.

Retour donc aux tableaux I à IV, examinons-les plus en détail.

#### IV.1. Problèmes ETE et TTT

1° Tous les élèves interrogés disposent des représentations qui leur permettent de concevoir et d'opérer une transformation sur un état, additivement et soustractivement. Ils sont pour la majeure partie d'entre eux capables de remonter la relation d'un énoncé EXG et XPE. Si on examine les réponses de type : non-réponse, réponse qualitative et réponse nulle, on constate que les énoncés ETE n'en ont pas suscitées. Pour *Bertrand*  $XP_7G_3$ , à Genève, il y a eu 14 répétitions de données (8 réponses « perdu 7 billes », 2 réponses « gagné 3 billes » et 4 réponses « a 3 billes »).

Ceci tient au fait qu'un énoncé ETE est structuré comme le serait un calcul numérique, et que les deux données y sont bien différenciées comme nombre et opérateur ou comme départ et arrivée d'une transformation.

2° Certaines réponses aux problèmes TTT (en particulier *Paul*  $G_6P_3X$ , *Laurent*  $P_2P_5X$ , *Michel*  $G_4P_6X$ , *Vincent*  $G_8XP_2$ ) sont libellées en termes d'état et témoignent de la mobilisation d'un même schéma de représentations.

3° Ce ne sont donc que les problèmes TTT qui ont suscité des réponses sans combinaison numérique des données. Ceci témoigne soit d'une interprétation de la donnée (plus généralement un traitement des données) qui « évite » cette combinaison. Comme dans l'exemple de la réponse *Paul*  $G_7P_4X$  : il a perdu 4 billes, il n'en a plus, il gagne 6 billes, il lui reste 6 billes ». Soit l'impossibilité à déboucher sur une combinaison numérique.

4° Si, dans le cas de problèmes ETE, les pertes ne semblent pas avoir soulevé de difficultés, on note que ce n'est plus le cas avec les problèmes TTT. Je laisse le lecteur comparer : *Paul*  $G_6P_4X$ , et *Laurent*  $P_2P_5X$ , *Christian*  $G_5XG_9$ , et aussi peut-être *Vincent*  $G_8XP_2$  et *Bruno*  $XP_7G_3$ .

Pour certains cas comme *Michel*  $G_4P_6X$  ou *Laurent*  $P_2P_5X$  le souci de quelques élèves aura été de « rechercher la provenance » des billes perdues ou de savoir combien de billes vont finalement rester au joueur. Ce qui perturbe le plus les sujets est la présence dans la donnée d'un gain et d'une perte surtout si cette dernière est supérieure (ceci différencie *Olivier*  $G_2XP_7$  et *Vincent*  $G_8XP_2$ ). Plusieurs chercheurs ont déjà fait cette remarque.

#### IV.2. Problèmes TTX (TXT)<sub>1</sub> et (TXT)<sub>2</sub>

1. Tout d'abord une explication. Les énoncés (TXT)<sub>1</sub> sont ceux pour lesquels les deux transformations données sont de même « signe ». Les énoncés (TXT)<sub>2</sub> sont ceux pour lesquels les deux transformations données sont de « signe » contraire. Exemples : *Didier*  $P_7XP_4$  est un énoncé (TXT)<sub>1</sub> (Même si la réponse  $G_3$  est de signe contraire aux données) tandis que *Bruno*  $XP_7G_3$  sera considéré (via la commutativité de la composition des transformations) comme énoncé (TXT)<sub>2</sub> en compagnie de *Olivier*  $G_2XP_7$  et *Vincent*  $G_8XP_2$ .

2. Je me réfère aux tableaux I-II, IV et V ainsi qu'au tableau VII suivant qui analyse le type de répétition des données.

		R <sub>1</sub>	R <sub>2</sub>	R <sub>12</sub>	R <sub>rest.</sub>	E <sub>g.</sub>
PAUL	GE	1	4		7	
	VS			6	3	2
LAURENT	GE		2	1	2	
	VS			1	3	5
MICHEL		3	2	1	2	
				4	1	11
CHRISTIAN			8			
			2	1	2	
JACQUES			11		(1)	(1)
			3		2	(1)
DIDIER						
	VS		2		2	(1)
OLIVIER		2	13	1	(1)	
			5	1	3	1(1)
VINCENT		1	12			
			7		2	1
BRUNO		6	6		(1)	
		1	4		1	1(1)

Tableau V : Répétition de données et restitution des parties

Explication des en-tête :  
 R<sub>1</sub> veut dire que la 1<sup>re</sup> donnée numérique (quel que soit son libellé) a été répétée comme réponse.

R<sub>2</sub> veut dire que la 2<sup>e</sup> donnée a été reprise.

R<sub>12</sub> veut dire que les 2 données sont répétées.

Restitution : Dans la réponse, l'élève donne une réponse calculée ainsi que l'une ou les deux données. Il exprime le déroulement de la partie.

Restitution éq. : Ceci concerne les équations donc les élèves Valaisans. L'équation restitue un schéma ETETE et on ne se contente pas de noter un calcul avec 2 données numériques. Ex. Laurent P<sub>2</sub>P<sub>5</sub>X : x-2-5=x x=7.

3. Problèmes TTX. L'examen de ces tableaux montre que les problèmes TTX ont suscité :

En Valais :

Toutes les non-réponses  
 La plupart des réponses 0 (Laurent)  
 Les combinaisons autres (Michel)  
 La majorité des réponses état

Les libellés des réponses autres que simplement état/transformation

Quant à la répétition des données :

Les répétitions des 2 données  
 Les restitutions de l'énoncé  
 Les équations de restitution

4. Problèmes (TXT)<sub>1</sub>

Valais

Des réponses soustraction en grande majorité

Des réponses en terme de transformation seulement.

A Genève :

Les réponses 0  
 Les calculs autres  
 La majorité des réponses état  
 Les réponses manque  
 Les réponses pertes non quantifiées

Les restitutions de l'énoncé

Genève

Des réponses soustractives ou de répétition des données. Et dans ce cas la répétition de la 2<sup>e</sup> donnée.

Des réponses en terme de transformation.

Ainsi, dans les 2 cas les éventails de réponses sont tout-à-fait comparables pour les 2 ou 3 problèmes (TXT)<sub>1</sub>.

Notons que dans le cas de la répétition de la 2<sup>e</sup> donnée, la réponse est libellée en termes de transformation.

Nous verrons en outre que ce sont les problèmes Laurent P<sub>2</sub>P<sub>5</sub>X et Michel G<sub>4</sub>P<sub>6</sub>X qui seuls ont suscité des réponses avec état initial hypothétique.

5. Problèmes (TXT)<sub>2</sub>

Pour ce qui concerne les problèmes (TXT)<sub>2</sub> on a noté que ceux-ci ont suscité des réponses qualitativement différentes selon l'énoncé. Ce qui permet de les compter ensemble, c'est la production de réponses soustractives énoncées. Mais la proportion des soustractions et additions est différente dans chaque cas.

a) Vincent  $G_8XP_2$  a suscité en grande majorité des réponses soustractives.

b) à Genève, Olivier  $G_2XP_7$  a lui aussi suscité des réponses soustractives et pas de réponses additives.

$G_2XP_7$  Au Valais, Olivier  $G_2XP_7$  a suscité un nombre appréciable de réponses additives.

c) Bruno  $XP_7G_3$ . Il y a un nombre comparable de réponses additives et soustractives dans chacune des deux régions.

Pour ce qui est de la répétition des données :

Olivier  $G_2XP_7$  } des réponses  $R_2$  uniquement.  
Vincent  $G_8XP_2$  }

Remarquons qu'il y a un nombre un peu plus grand de réponses répétition à ces problèmes.

Bruno  $XP_7G_3$  une proportion équilibrée de réponses  $R_1$  et  $R_2$ .

6. Ceci montre que les différences d'énoncés ont suscité des traitements divers. Comme si, dans chacun des cas, les élèves cherchaient autre chose. Les réponses état,  $E_1$ ,  $E_4$ , 0, manque et les restitutions du déroulement des parties évoquées sont le fait des problèmes TTX (Laurent  $P_2P_5X$  et Michel  $G_4P_6X$  surtout).

Pour les réponses aux énoncés TXT elles sont libellées en termes de transformation, elles sont constituées de soustraction et de répétition de la seconde donnée. Il n'y a pas de restitution des parties dans le libellé des réponses et les combinaisons numériques s'y limitent à des additions et des soustractions.

Ceci est très net pour les énoncés (TXT)<sub>1</sub>, où le parallélisme entre les énoncés est frappant. Pour les énoncés (TXT)<sub>2</sub>, il y a des variations notables entre les problèmes, et ceci apparaît un peu moins nettement (sauf en ce qui concerne la répétition d'une seule donnée — et non pas deux et l'absence de restitution des parties).

Notes 1. Les seules réponses  $R_{12}$  trouvées aux problèmes TXT sont :

Christian : Il a gagné 5 billes puis 9 billes.

Olivier : Il gagne 2 billes puis en perd 7.

Il a perdu 7 billes (dont les 2).

Dans chacun des cas, l'élève interprète l'énoncé comme étant de structure TTX.

2. Ce qui différencie les réponses qualitativement n'a pas toujours une répercussion sur les taux de réussite. Ainsi dans l'article Durand/Vergnaud les courbes de réussite aux problèmes Claude  $5 \times 9$  Christian  $G_5XG_9$  Laurent  $P_2P_5X$  Jacques  $P_5XP_8$  sont comparables.

IV.3. *Arithmétisation des transformations*

1<sup>e</sup> Je considère le schéma nombre/opérateur comme un analyseur, pour le sujet, des relations évoquées dans les énoncés. Il concerne à un premier plan les calculs numériques et les représentations que s'en fait le sujet. A un second plan, il peut être appliqué aux relations état/transformation mais ensuite aussi aux relations entre transformations sans qu'il soit nécessaire de passer par une reconstitution réaliste du jeu de billes (ETETE). Ainsi on peut penser que, dans la situation  $G_5 + G_4 = G_9$ ,  $G_4$  transforme le gain initial  $G_5$  en l'augmentant tout comme un gain augmente un avoir. Le schéma nombre/opérateur est pris à un second niveau et, via les amplitudes, mesurées « en billes », les transformations deviennent le modèle de leurs propres variations. Il n'y a pas de transformation de transformations !

Il semble que dans les énoncés TTX, une part des élèves sont amenés à appliquer le modèle nombre/opérateur au déroulement des parties. Cherchant alors un résultat final ou cherchant à déduire un point de départ (Etat initial) du jeu, ils en arrivent à une formulation de leur réponse en terme d'états. Ceci les porte à articuler et coordiner les parties entre elles. Le traitement porte sur les billes que l'on gagne ou perd ou encore sur la « circulation » des billes entre les joueurs.

Par contre, dans les énoncés TXT, en cherchant ce qui fait passer d'une première donnée à la seconde, les élèves

viennent à appliquer le modèle au second niveau et à exprimer forcément leur réponse en terme de transformation. Ils cherchent en effet un opérateur. Les billes sont traitées comme mesure de l'intensité des transformations.

2<sup>e</sup> Voyons plus en détails comment cette arithmétisation est diversement envisagée.

a) Lorsqu'on pense un nombre il s'agit en fait déjà d'une opération. Ceci se manifeste bien lorsqu'on interroge des enfants de 6 à 8 ans. Une étape clé de la résolution de problèmes numériques est de pouvoir associer aux éléments évoqués dans l'énoncé ces opérations mentales et de les coordonner entre elles. Ainsi est-il très connu que dans l'écriture  $6 - 4 = 6$  l'élève ait annulé tautologiquement le nombre 4, la pose du 4 étant identifiée à se donner 4. Le signe « moins » est alors référé à cette opération d'écriture.

Remarquons que : « Il perd 7 billes, donc il avait 7 billes » n'est pas très différent. Si ce n'est que *relationnellement le mouvement de la perte est inversé*.

b) Dans certaines réponses le sujet ne garde des transformations que l'aspect de constat. Ces réponses sont qualitatives. Et la dissociation des deux aspects des transformations, analysée au paragraphe II.7. page 290 procède d'une même représentation.

Quelquefois un libellé qualitatif est accompagné d'une équation-calcul. Par ex. *Laurent*  $P_2P_6X$  « Laurent a perdu toutes les billes.  $5 - 2 = x$   $x = 3$  ».

c) Les transformations peuvent être considérées comme le signal d'une opération à effectuer. Concrètement, les billes qu'on va recevoir ou encore les billes qu'il faudra céder ou qui auraient été perdues. Ici l'idée de transformation se réfère à une partie de billes et en particulier à ce que le joueur doit faire ou encore ce qui lui arrive.

Dérivent de ces représentations les réponses Manque.

Ex. : *Claude*  $5 \times 9$  « Il a reçu 4 billes »

*Jacques*  $P_6XP_6$  « Il doit lui donner 3 billes ».

Ces représentations ont été suscitées surtout par les problèmes ETE et les problèmes TTX.

d) La donnée des problèmes TTT n'indique pas combien de billes le joueur possédait au départ, ni ce qui arrivera aux différents autres moments. Le sujet peut alors combler ceci

sur une sorte de « dédoublement » des transformations en état. Etat final pour gain, état initial pour perte. On peut schématiser ceci par :

gagner 6 billes,  $G_6 \Rightarrow$  a 6 billes  $\xrightarrow{+6}$   $\boxed{6}$   
perdre 7 billes,  $P_7 \Rightarrow$  n'a plus de billes  $\xrightarrow{-7}$   $\boxed{0}$   
ou avait 7 billes  $\boxed{7} \xrightarrow{-7}$

Exemples :

*Laurent*  $P_2P_6X$  « Il n'a plus de billes »  
*Michel*  $G_4P_6X$  « Il n'a pas assez de billes »  
*Olivier*  $G_2XP$  « Il n'a que 2 billes »  
(après la 1<sup>ère</sup> partie sans doute)  
*Bertrand*  $XP_3$  « Il a 3 billes ».

Ces relations sont produites par les élèves dans certains raisonnements servant en quelque sorte d'amorce. Très souvent elles sont faites pour une transformation isolée. Certains problèmes de coordination et notamment d'ordre sont le fait des pertes.

e) Pertes et gains deviennent une notion en soi dès le moment où ils sont considérés comme modifiant un système susceptible de passer par des états distincts. Ce système peut être un capital de billes ou dans une acceptation plus élaborée encore, le bilan d'une succession de parties. La transformation exprime alors la relation entre états successifs du système. C'est à ce titre qu'elles pourront être considérées comme des nombres à part entière.

Aucune de ces représentations n'a été observée isolée, pour elle-même, mais toutes sont apparues en cours de résolution. Donc,

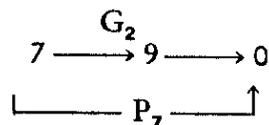
a) Les représentations ont une fonction de résolution.

b) J'ai inféré certaines d'entre elles des équations écrites et non pas seulement des libellés de réponses. Les équations fournissent un support réel à la résolution et engagent le sujet à des combinaisons qu'il n'aurait peut-être pas faites en un raisonnement de tête.

c) Elles apparaissent selon le problème. Par exemple *Paul*  $G_6P_4X$  : il peut subsister pour ce problème, même chez des sujets relativement savants, des traitements en terme d'état, alors que ces représentations devront forcément être affinées pour résoudre *Michel*  $G_4P_6X$  (par exemple).

d) En conséquence de quoi ce n'est pas sur la seule résolution de ces problèmes que l'on pourra hiérarchiser les représentations produites. La maturation se marque plus par les capacités de coordonner et d'intégrer ces points de vue et de les contrôler mutuellement.

e) Si on allonge le temps passé sur un énoncé (pour autant que notre interlocuteur s'y prête), on va accroître le nombre de relations entrevues et celui des points de vue adoptés. Ceci va diminuer l'impact de l'énoncé et de sa structure pour privilégier les représentations mobilisées. Mais alors le sujet pourra être confronté à la coordination de ces points de vue, au rejet de certaines relations. En un mot le sujet pourra s'embrouiller. Par exemple, il n'est pas si simple de se représenter clairement certains énoncés (*Olivier G<sub>2</sub>XP<sub>7</sub>*) en termes d'états :



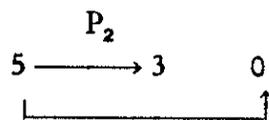
#### IV.4. *Calculs relationnels dans la résolution des 9 problèmes TTT*

Nous sommes maintenant prêts pour la revue !

##### IV.4.1. Laurent *P<sub>2</sub>P<sub>5</sub>X* (cf. annexe)

Bon nombre de réponses « zéro » ou de réponses impliquant le zéro, comme par exemple la réponse : « Il a perdu 7 billes *reste 0 bille* », ou encore plus implicitement : « Il a perdu 7 billes  $x-2-5=x$   $x=7$  ». Ceci dénote le registre perte. On peut aussi dire que c'est ce qui « autorise » l'addition des données numériques (centration aussi sur l'état final).

Par contre on n'observe que peu de réponses 3. Ces réponses semblent provenir du prélèvement des 2 billes perdues sur 5 billes hypothétiques relatives à *P<sub>5</sub>* :



Rappelons que les réponses comportant le nombre 7 peuvent être libellées en termes d'état ou de transformation. Le calcul se rapporte à un comptage sur les billes perdues : 2 billes et encore 5 billes, soit par l'intermédiaire des états initiaux, soit au travers du registre perte. L'articulation des parties n'a pas à être forcément restituée. Elle n'est en outre pas tout à fait évidente dans la mesure où il faut « remonter » la chronologie.

Au Valais, 4 réponses intéressantes (effet de la consigne d'utiliser les équations).

$x-2-5=x$   $x=7$  et  $x-2-5=x$   $x=0$  avec comme libellés : « Il a perdu 7 billes », « Il avait 7 billes », sans libellé, et « Il a 0 bille ». (Donc 2 équations et 4 libellés.)

On note :

1° La lettre  $x$  est une indéterminée qui recouvre les états : tant initial que final. Bien sûr algébriquement c'est une maladresse. Mais de peu de conséquence car implicitement ou explicitement le résultat final est nul.

2° L'équation *restituée* à sa manière le déroulement du jeu.

##### IV.4. Paul *G<sub>6</sub>P<sub>4</sub>X* et Michel *G<sub>4</sub>P<sub>6</sub>X*.

a) *Paul*. Comme noté précédemment, ce qui frappe sont les réponses libellées en terme d'état (*E<sub>f</sub>*) : « Il reste 2 billes ». Ces réponses sont quelquefois accompagnées de toute une restitution du jeu : « Il gagne 6 billes et perd 4, il lui reste 2 » ou encore « Il perd 4 billes restent 2 ». Dans tous ces cas, ce qui frappe est que les billes perdues semblent être prélevées sur les billes gagnées et qu'en conséquence le gain devient implicite et se réduit à un état initial à la perte (« Il gagne 6 billes » réduit à « Il a eu 6 billes »). Aucun élève n'a alors restitué l'entier du déroulement *ETETE* mais la première partie reste implicite : (ET) *ETE*.

Quelques rares réponses distinctes qui restituent l'articulation de deux parties ont été données. Je les étudierai avec celles du problème *Michel*.

b) *Michel* (articulation des parties).

Le problème *Michel* est l'un des plus intéressants à examiner. D'une part c'est au problème qui résulte en une perte mais le registre des pertes n'est pas simplement applicable comme pour *Laurent P<sub>2</sub>P<sub>5</sub>X* ou *Jacques P<sub>5</sub>XP<sub>8</sub>*.

Dans ce problème *Michel*  $G_4P_6X$ , les billes perdues ne peuvent pas être toutes prélevées sur les billes gagnées. De là un certain nombre de réponses nulles (GE) et de non-réponses (VS). Tout comme pour *Laurent*. On note une conotation en plus dans : « Il n'a pas assez de billes » (GE) et ceci débouche sur les réponses Manque (12 réponses de ce type à GE). Le sujet va chercher les billes ailleurs.

Ce type d'adaptation est le fait des élèves genevois seulement. Aucun élève du Valais n'a procédé de la sorte, les équations y sont sans doute pour quelque chose. Les résolutions en termes d'états montrent une graduation fine dans l'articulation des deux parties.

1° Les parties sont simplement répétées dans l'ordre chronologique. Exemple : « Il a gagné 4 billes et perdu 6 ».

2° Un élève de Genève a fourni les réponses déjà mentionnées d'inversion des transformations :

*Paul* : Il perd 4 et a gagné 6 billes, restent 6 billes.

*Michel* : Il perd 6 b. et gagne 4 billes, restent 4 billes.

On trouve aussi au Valais :

*Michel* : Il a 4 billes en tout.  $6-6+4=x$   $x=4$ .

Implicitement, l'articulation est constituée par un état intermédiaire nul  $6 \rightarrow 0 \rightarrow 4$ . Ainsi bien qu'articulées, les parties sont encore indépendantes numériquement. Les billes perdues proviennent d'ailleurs que les billes gagnées. Ce type de réponse a été plusieurs fois trouvé dans d'autres interviews sur la donnée P G X.

3° Proche de cette façon de faire, il est une façon d'inverser localement — c.à.d. au moment où elle intervient — la perte en la *dédoublant* par un état initial. On aboutit de la sorte à une tautologie numérique, perte et gains s'ils se combinent ne le font qu'apparemment :

*Michel* : Il a 4 billes en tout  $6-6+4=x$   $x=4$  (déjà citée)

$$4+6-6=x \quad x=4$$

*Michel* : Il a perdu 6 billes  $10-6=x$   $x=4$

*Michel* : Il reste 4 billes  $(10=4+6)$

Le même élève répond :

*Paul* : Il n'a rien perdu et rien gagné  $6+4=x$   $x=10$   
 $10-4=x$   $x=6$

*Michel* : il perd 4 billes en tout  $4+6=x$   $x=10$   
 $10-6=x$   $x=4$

On notera dans ce dernier cas le fait que l'ordre de calcul est :

$$6+4-4 \text{ et } 4+6-6.$$

On notera les libellés des réponses : comparaison  $E_i$ ,  $E_f$  dans *Paul*, la tautologie ressort. Interprétation dans le registre des pertes pour *Michel* (la restitution correcte des états devait donner :

*Paul*  $4+6-4=x$   $x=6$  et comparaison

ou *Michel*  $6+4-6=x$   $x=4$  et comparaison.

4° Une dernière manière de réaliser l'articulation est alors de se donner un état initial au jeu (et plus localement à une partie seulement). Dans ce cas c'est tout le déroulement ETETE qui est restitué. Dans tous les cas observés — Valais seulement ! — l'hypothèse initiale est faite à partir des données numériques, soit telles quelles, soit autour de ces valeurs (avec 1 bille de marge. Pour pouvoir continuer à miser ?).

*Michel* : « Il reste 5 billes

$$x+4-6=w \quad x=7w=5 \quad (7=6+1)$$

$$* \quad \text{« } 3+4-6=x \quad x=1 \text{ »} \quad (3=2+1)$$

« Il lui reste 8 billes

$$10+4-6=x \quad x=8 \quad (10=4+6)$$

\* « Il avait 4 billes avant de commencer

$$x+4-6=x \quad x=8 \quad *$$

\* « Il a perdu 10 billes  $11-4-6=x$   $x=1$  »

et à Genève :

*Michel* : « Il a 6 billes en gagne 4, il a 10 billes, il en perd 6, il a 4 billes ».

Notes :

— Une astérisque (\*) signifie que les mêmes élèves avaient répondu par l'équation :  $x-2-5=x$   $x=7$  à *Laurent*  $P_2P_6X$ .

— On méditera sur la réponse : « Il avait 4 billes avant de commencer  $x+4-6=x$   $x=8$  ». Les billes perdues s'annulent d'elles-mêmes.

— Ces réponses ont été produites au Valais et en réponse au seul problème *Michel*. Un seul cas d'une élève qui reproduit systématiquement le procédé sur les autres problèmes :

Michel $G_4P_6X$	Il a 4 billes en tout	$6-6+4=x$	$x=4$
Jacques $P_5XP_8$	A la 2 <sup>e</sup> partie il perd 8 b.	$8-8-5=x$	$x=3$
Didier $P_7XP_4$	Il a 0 bille	$8-8-4=x$	$x=0$
Olivier $G_2XP_7$		$8-8-2=x$	$x=2$
Bruno $XP_7G_3$		$7-7+3=x$	$x=3$
mais pas			
Vincent $G_8XP_2$		$8-2=x$	$x=6$

ni pour Paul, Laurent, qui précèdent Michel, ni pour Christian qui est dans le registre des gains.

Dans tous ces cas, les relations passent par les états qui en quelque sorte viennent *doubler* les transformations. Une fois l'état final déterminé, il n'y a pas de comparaison avec le point de départ.

Il y a aussi bien sûr des réponses dénotant d'un calcul direct sur les transformations. Avec, tant à Genève qu'au Valais, quelques réponses -2. Dont une équation : Michel : « Il a perdu 2 billes  $4-6=x$   $x=-2$  ».

#### IV.4.3. Christian $G_5XG_9$ , Jacques $P_5XP_8$ et Didier $P_7XP_4$ .

a) Pour ces trois problèmes comme pour les suivants (Olivier, Vincent, Bruno), les équations produites sont standard de type :  $n+x=m$  ou  $n-m=x$  ou encore  $n+m=x$ . De ce point de vue, les réponses sont beaucoup moins intéressantes. En ce qui concerne la détermination de l'opération numérique cela nous indique que pour tous ces problèmes (TXT), les sujets repèrent mieux un calcul à appliquer que pour les problèmes précédents (TTX).

J'ai déjà mentionné le fait que ces problèmes recevaient une distribution identique des réponses selon les catégories retenues. Ceci est très frappant. La similitude entre les problèmes gain (Christian) et perte (Jacques, Didier) montre bien que le raisonnement se situe dans un registre. Tandis que la similitude entre (Christian, Jacques) et (Didier) montre que les élèves (VS puisque Didier n'a pas été posé à GE) raisonnent au sein du registre en terme de augmentation-diminution. Ceci indique que ces représentations sont bien effectuées et que les élèves interrogés se situaient à un tel niveau d'élaboration.

#### b) Jacques $P_5XP_8$ .

Beaucoup de réponses nulles à GE. Ainsi les élèves sont centrés sur l'aspect perte. Beaucoup de répétitions de la 2<sup>e</sup> donnée à Genève tout comme pour Christian (cf. tableau II) montre une incompréhension de l'énoncé. Comme déjà noté, quasiment pas de sommes.

Dans certaines réponses correctes, des raisonnements faisant implicitement intervenir des états. Ainsi GE : « Il a perdu ses 5 billes et encore 3 ». Ce qui est intéressant c'est que la réponse ne nécessite pas la restitution de l'articulation des parties sur des états :  $8 \longrightarrow 3 \longrightarrow 0$

Il suffit de décomposer l'intensité des bilans : 8 billes, la quantité 8 billes, en 5 et encore 3.

#### c) Didier $P_7XP_4$ .

(Suite à une erreur, ce problème n'a été posé qu'aux élèves du Valais). Ce qui frappe avec ce problème, c'est la très bonne réussite qu'il a eu, comparable exactement à Jacques. On pouvait s'attendre à plus de difficultés vu que l'ordre composante ( $P_7$ )/Bilan ( $P_4$ ) ne correspond plus à l'ordre numérique des intensités. La résolution passe par la prise en compte de la comparaison des parties, finalement la perte a diminué. Ainsi aboutit-on à l'idée que la perte a été partiellement compensée par un gain. Ce qui nécessite de penser plus que pour Jacques l'articulation des parties. Un raisonnement sur les intensités décomposant 7 billes en les 4 perdues et encore 3 qui sont récupérées est bien plus subtil que celui décrit à Jacques. D'une part, de ce point de vue c'est l'intensité de la première partie qui fait le tout, et de l'autre,  $P_7$  se décompose en  $P_4$  et  $P_3$  qui n'est pas pris pour lui-même puisque annulé par la récupération  $G_3$ .

$$P_7XP_4 \rightarrow \underbrace{(P_4 + P_3)}_{P_7} + G_3 = P_4.$$

Les libellés des réponses sont des types suivants :

21 réponses

Il a gagné 3 billes à la 2<sup>e</sup> partie

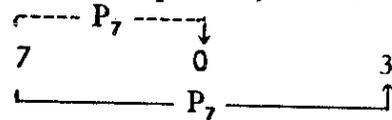
Il a perdu 7 billes et gagné 3

réponses particulières

Il a gagné 3 et il y en a plus que 4 de perdues

D. a perdu 3 de moins à la 2<sup>e</sup> partie. A la 2<sup>e</sup> partie, il lui restait plus que 3 billes.

Cette dernière réponse pourrait être la conclusion d'un raisonnement sur les états : il avait 7 billes avant de jouer, en tout il en a perdu 4, donc il en reste 3.



#### IV.4.4. Olivier $G_2XP_7$ , Vincent $G_8XP_2$ et Bruno $XP_7G_3$ .

a) Ces problèmes sont difficiles. J'ai déjà montré que bon nombre d'élèves y répondait par soustraction assimilant ainsi ces cas au schéma TXT. J'ai aussi montré l'hésitation provoquée par *Bruno* et l'existence de réponses formulées en termes d'état à *Vincent*. Avant de réexaminer en détail ces problèmes, comparons les trois réponses d'un élève valaisan qui, par ailleurs, a répondu correctement aux neuf autres problèmes :

*Olivier*  $G_2XP_7$  Il a perdu 7 b. à la 2<sup>e</sup> part.  $9-2=x$   $x=7$

*Vincent*  $G_8XP_2$  Il a perdu 2 b. à la 2<sup>e</sup> part.  $10-8=x$   $x=2$

*Bruno*  $XP_7G_3$  Il a gagné 3 b. à la 2<sup>e</sup> part.  $10-7=x$   $x=3$

Ces réponses sont identiques : une répétition de la 2<sup>e</sup> données. Mais dans l'équation apparaît la réponse numérique attendue : 9, 10, 10. Ceci ne peut pas être fortuit car la difficulté de ces problèmes tient justement à ce qu'il s'agit de faire une addition pour trouver la réponse ! D'autre part pour les 9 autres problèmes cet élève a raisonné juste. Enfin, l'opération numérique reproduite dans l'équation est toujours une soustraction. On a  $9-2$  et  $10-8$  mais ces nombres 2 et 8 sont des gains ! Tandis que dans  $10-7$ , 7 correspond effectivement à une perte. La seule interprétation plausible me semble donc être celle qui inclut l'idée que « les billes gagnées et perdues ne comptent pas ».

*Remarque* : Il semble que par assimilation, ce soit cette même idée qui soit à l'œuvre pour *Bruno*  $XP_7G_3$ . Cette assimilation consistant à négliger  $P_7$ . Mais au fait se pose une question d'ordre. Car à précisément parler, les 7 billes perdues n'ont pas été regagnées. *Bruno* a gagné 10 billes et ce gain a été réduit à 3 par une perte de 7 billes. Il y a donc un petit problème d'ordre. Celui-ci se manifesterait dans un

entretien individuel si on faisait remarquer à l'élève que la question est : « Que s'est-il passé à la première partie ? » et que sa réponse parle de la 2<sup>e</sup> partie « Il a gagné 3 billes à la 2<sup>e</sup> partie ». Cette question sonderait de manière efficace le raisonnement de l'élève. Car celui-ci ne pourra pas répondre : « Ah non, à la première partie, il a gagné 3 billes ». Ceci amènerait alors à des contradictions. La seule adaptation possible serait : « Il a perdu 7 billes à la première partie » ce qui consommerait l'assimilation au schéma PXG. Mais tout ceci peut aussi amener l'élève à trouver la réponse correcte.

#### b) Olivier $G_2XP_7$

On note à Genève un certain nombre de réponses nulles ainsi que deux réponses manquées. Tous ces élèves ont répondu de la même façon à *Michel*  $G_4P_8X$ . Il y a donc eu pour eux analogie entre les deux énoncés.

Mais le gros des réponses est :

perdu 5 billes (à la 2<sup>e</sup> partie)

perdu 7 billes (à la 2<sup>e</sup> partie ou en tout)

perdu 9 billes dont certaines réponses exprimées en termes d'états :

#### 1) Examinons les réponses suivantes :

*Olivier*  $G_2XP_7$  :  perd les 2 billes plus encore 5. (GE)

perd 2 billes et encore 5.

perd ses 2 billes et ses 5 billes.

perd 7 billes (dont les 2). (GE)

perd 7 billes en tout.

a perdu 7 billes  $7-5=x$   $x=2$  ] \*

a perdu 7 billes  $7-2=x$   $x=5$  ]

\* dans ces deux cas, 5 est calculé !

Toutes ces réponses sont intéressantes car elles englobent la perte des 2 billes gagnées précédemment dans la perte totale : en tout perd 7. Il y a là derrière un raisonnement très prenant qui rend la réponse 5 très résistante. Celui-ci se cristalliserait sur l'idée suivante : « En tout il a reperdu les 2 billes gagnées ». S'ensuit « En tout il a perdu 7 billes, les 2 billes gagnées et encore 5 ». Dès lors le problème  $G_2XP_7$  a été transformé implicitement (et subrepticement) en  $P_2XP_7$  (ou  $(G_2)P_2XP_7$ ). Notons que l'idée de départ est correcte.



gain/perte et même dans les répétitions comme ci-dessus.

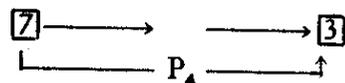
3) Mais nous avons vu aussi que la somme correspond en majeure partie au registre des gains. 16 réponses  $G_{10}$  et 6 réponses de type  $E_1$  dénotant un traitement analogue à *Bertrand*  $XP_7$ . Ce taux de réponses correctes ou quasi correctes est surprenant comparé à *Olivier*  $G_2XP_7$  et *Vincent*  $G_8XP_2$ . Il s'agit de trouver une explication qui entre dans le cadre des hypothèses.

4) Cette explication fait jouer un rôle prépondérant à la place de l'inconnue. La seconde partie (1ère donnée :  $P_7$ ) est considérée comme un opérateur dont l'action résulte en  $G_3$  le bilan. On se trouve alors dans le registre des gains, qui unit  $X$  à ce bilan. En effet : « En tout il a gagné 3 billes » exclut que ces 3 billes aient été perdues — le jeu est terminé. De plus  $P_7$  sa position et son intensité ( $7 > 3$ ) exclut aussi que ces billes aient été regagnées. Plutôt  $P_7$  est l'indication d'un gain antérieur. Ceci aboutit à la réponse et correspond, dans le registre des gains, au schéma de *Bertrand*  $XP_7$ . Mais cela est aussi proche de la résolution de *Didier*  $P_7XP_4$  qui est (dans le registre des pertes) la situation inverse de *Bruno* ( $XP_7G_3$  aura 2 inversions :  $G_{10}XG_3$  ou  $G_{10}P_7X$ ).

Des recherches ultérieure devront être menées pour confirmer ce type d'analyse.

Rem. : la représentation par opérateurs n'est pas commutative car les 2 nombres ont des statuts différents.

5) La différence des données correspond au registre des pertes. L'interprétation serait alors une confusion avec le schéma  $P_7XG_3$  ou encore un raisonnement sur la chronologie et les états associés :



#### IV.4.5. Comparaison des 3 énoncés (TXT)<sub>2</sub>.

Rappelons que le noyau de toute mon analyse repose sur la distinction : nombre/opérateur. Cette distinction se rapporte bien sûr à celle d'état/transformation et j'ai montré comment via la considération des registres cette distinction pouvait être adaptée à la composition des transformations et permettre de raisonner dans  $N$  (modèle intermédiaire). Mais cette distinction se rapporte aussi au calcul lui-même !

J'insiste beaucoup là-dessus car c'est la clé de l'arithmétisation de ces énoncés et de leur traitement numérique. Un calcul d'addition ou de soustraction est essentiellement une opération ordinale. Des 3 nombres impliqués, un seul est vraiment une quantité : c'est le nombre d'itérations (de pas dans la comptine, c'est l'intervalle) qui nous mène d'une borne à l'autre du calcul. C'est le seul qu'on est amené à compter avec ses doigts (à partir d'un minimum de maîtrise).

Retenons cette image borne/intervalle qui recouvre entièrement celle de nombre/opérateur. J'ai dit que dans les problèmes TXT le sujet est amené à chercher un opérateur. C'est-à-dire prendre les données numériques comme les bornes de l'intervalle cherché. Ceci suppose que  $T_1$  et  $T_3$  puissent être liées par un même registre, et est en échec pour GXP ou PXG. Dans ce cas il faut aussi tenir compte de la borne 0.

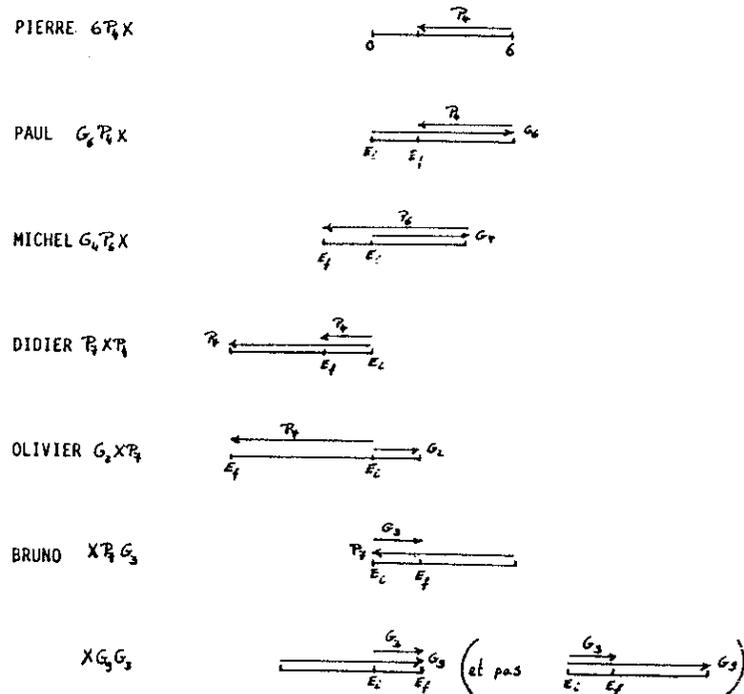
Nous avons vu que dans *Olivier*  $G_2XP_7$  et *Vincent*  $G_8XP_2$  l'addition était difficilement pensable pour les élèves. Mais qu'elle l'était déjà bien plus à *Bruno*  $XP_7G_3$ . Cela s'explique par l'hypothèse qu'un certain nombre d'élèves considèrent  $P_7$  comme un opérateur se ramenant alors, dans le registre des gains à un schéma analogue à *Bertrand*  $XP_7$ . Cela tient à ce que  $X$  et  $G$  peuvent être liés par un registre commun. Gageons que  $XP_7P_4$  ou  $XG_9G_3$ , bien que présentant deux transformations de même signe, susciteront des difficultés. Combien de sujets vont-ils « opérer » une commutation (consciemment ou non) et se ramener à  $G_9XG_3$  ou  $P_7XP_4$  ?

#### V. Conclusion

Il est intéressant d'examiner comparativement des systèmes symboliques permettant de traiter les mêmes problèmes. Ceci permet de bien résumer, en les retrouvant, tous les éléments de notre analyse.

##### V.1. Droite graduée (borne et intervalles orientés)

A la distinction nombre/opérateur correspond celle de borne et intervalle orientés. Comment ces énoncés se représentent-ils lorsqu'on les traite dans ce symbolisme ? Quelques exemples, le lecteur complètera.



On voit combien il s'agit de contrôler la chronologie des parties, le sens de parcours pour l'ajuster sur l'ordre linéaire de la graduation. On voit se dessiner deux classes de problèmes, ceux qui restent dans le même registre à droite ou gauche de la borne initiale et ceux qui chevauchent. C'est ceux-là qui sont les plus complexes et appellent le plus la notation  $Z$  et équationnelle. Notons aussi comment les nombres se doublent en intervalles (intensités) et bornes, ce que nous avons notés pour le problème Michel  $G_4P_6X$  dans les équations de certains élèves.

V.2. Equations

Les calculs relationnels viennent à ce que j'appellerai un calcul de *compatibilité* entre les différents ordres de relations suscitées par un énoncé donné. Le traitement n'est engagé que sur des relations significatives, c'est-à-dire qui permettent de concorder avec des relations d'un autre ordre ou de les rendre prévisibles. Dans ce qu'on appelle classiquement le raisonnement ou dans le traitement intuitif, le

jeu de ces relations est très complexe aussi subtil que non linéaire, les relations étant traitées dans tous les sens, partiellement ou complètement, en une ou plusieurs fois. On peut dégager, pour ces problèmes relativement simples, au moins 4 ordres de relations en jeu dans les raisonnements.

- 1<sup>e</sup> L'ordre chronologique des événements.
- 2<sup>e</sup> La relation entre composantes et composée.
- 3<sup>e</sup> La relation entre gains et pertes relativement aux registres.
- 4<sup>e</sup> Les relations numériques engagées dans le calcul.

Toute automatique qu'elle soit, une résolution formelle algébrique pourvoit au traitement de ces relations. A sa manière. Comment ? Prenons deux exemples de résolution :

Didier  $P_7XP_4$  et faisons une équation dans  $Z$  :

la pose de l'équation écrit la chronologie :  $(-7)+x=(-4)$   
 Le bilan est décomposé :  $x=(-4)-(-7)$   
 Le jeu des signes détermine la relation gain/perte dans un registre donné  $x=-(-4-7)$   
 (ou  $+(7-4)$ )

Le calcul numérique peut suivre (et engager les relations numériques)  $x=+(7-4)$ .

Il est alors intéressant de noter : les relations sont engagées une à une et « inscrites dans le traitement ». *Il n'y a pas d'anticipation à faire d'un ordre relationnel à l'autre.* (C'est fondamental pour saisir le contraste). Et d'ailleurs dans la conscience de l'algébriste (ou dans le commentaire de l'enseignant) les traitements équationnels sont *auto-référés* (poser eq, isoler le x, régler les signes, calculer) et c'est ce qui rend ma correspondance si surprenante. Et quel dégagement par rapport aux raisonnements arithmétiques ! On voit donc comment l'algèbre se construit contre l'arithmétique. Dans l'exemple ci-dessus, la notation relative n'est pourtant pas nécessaire (les données sont des pertes, on peut rester dans N via le registre même pour les équations). Cela s'impose déjà plus pour Olivier  $G_2XP_7$  :

$$\begin{aligned} (+2) + x &= (-7) \\ x &= (-7) - (+2) \\ x &= -(7+2) \\ x &= -9 \end{aligned}$$

Examinons encore le raisonnement « en tout, il a perdu, donc il a du reperdre les 2 billes gagnées ». J'ai montré

qu'en arithmétique, on a beau avoir tenu ce raisonnement parfaitement correct, le problème n'en est pas pour autant réglé, car comment situer cette perte postulée  $P_2$  avec la perte du bilan  $P_7$  ? Du point de vue du calcul relationnel, cette postulation revient à une annulation : les billes gagnées sont perdues, et ceci devient alors occulte dans le bilan. Algébriquement, le correspondant sera bien sûr le suivant :

$$\begin{aligned} (+2)+x &= (-7) \\ (-2)+(+2)+x &= (-2)+(-7) \end{aligned}$$

dont il reste la règle du « passage de (+2) de l'autre côté de l'équation en l'inversant ». L'inversion de  $G_2$  à  $P_2$  a un statut algébrique bien précis, c'est une « opération algébrique » sur l'équation dans son entier. L'annulation d'un côté du égal a sa correspondante notée dans l'autre. *Il ne s'agit plus simplement de relation mais d'opération.*

*Rem.* : Le raisonnement  $P_7 \rightarrow (G_2 \Rightarrow P_2)$  est tenu dans un registre donné. Ceci nécessiterait, pour être tout à fait cohérent par rapport à la chronologie, que l'on différencie dans l'inconnue le signe, dont le calcul est réglé par le registre, et l'intensité. Ce qui donne :

$$\begin{aligned} (+2)+(-x) &= (-7) \\ (+2)+(-2)+[-(x-2)] &= (-7) && -x \text{ est décomposé en} \\ & && [(-2) + (-[x-2])] \end{aligned}$$

### V.3. Benoît, un élève sans problèmes

Pour conclure, examinons justement les équations produites par un sujet particulièrement brillant : Benoît, 9 ans.

Pierre	Il reste 2 billes	$6-4=x$	$x=2$	
Bertrand	B. avait 10 billes	$7+3=x$	$x=10$	
Claude	C. a gagné 4 billes	$5+x=9$	$x=4$	
Paul	P. a gagné 2 billes	$6-4=x$	$x=2$	
Laurent	L. a perdu 7 billes	$2+5=x$	$x=7$	
Michel	M. a perdu 2 billes	$4-6=x$	$x=-2$	
Christian	Ch. a gagné 4 billes	$5+x=9$	$9-5=x$	$x=4$
Jacques	J. a perdu 3 billes	$5+x=8$	$x=3$	
Didier	D. a gagné 3 billes à la 2 <sup>e</sup> partie	$4=7-x$	$x=3$	
Olivier	Il a perdu 9 billes	$+2-x=-7$	$2+7=x$	$x=9$
Vincent	Il a perdu 10 billes	$8-x=-2$	$8+2=x$	$x=10$
Bruno	Il a gagné 10 billes	$x-7=3$	$7+3=x$	$x=10$

Un sujet n'est pas une machine formelle et Benoît ne fait pas exception à la règle. On notera la réponse à *Didier*. Mais aussi une bizarrerie, algébriquement éronée, dans le traitement de *Olivier*. Avez-vous remarqué ?  $+2-x=-7$   $2+7=x$  ? Mais sans conséquence sur le libellé de la réponse. Comme tout sujet, Benoît a des systèmes parallèles de contrôle. (Dit en passant ces systèmes sont bien plus importants, dans l'apprentissage, que l'acquisition de mécanismes. C'est leur fiabilité qui différencie les experts des novices, pas le mécanisme des règles formelles). Mais examinons à la lumière de ce qui a été dit ci-dessus les réponses de Benoît.

a) *Chronologie* : Pour tous les problèmes TTT, l'équation initiale *restitue* le déroulement des parties. Une seule inversion pour *Didier* où le résultat est annoncé en premier :  $4=7-x$  (dans le libellé Benoît insiste sur « à la 2<sup>e</sup> partie »).

b) *Registre* : les problèmes de perte : *Laurent, Jacques et Didier* sont exprimés dans le registre des pertes. Numériquement, le *résultat* du calcul de Benoît est exprimé dans N, sauf pour *Michel* (-2). Mais la nature de la transformation est déjà déterminée. De même (cf. plus loin) c'est le registre qui fournit le contrôle pour l'équation *Olivier*.

c) *Calcul numérique* : Toutes les équations aboutissent à l'écriture d'une équation-calcul dans N.

d) *Usage des relatifs* : pour *Michel, Olivier et Vincent*, Benoît utilise les nombres relatifs. Cela note le résultat :  $\dots=-2$ ,  $\dots=-7$ ,  $\dots=-2$ . Mais aussi dans *Olivier* +2.

Cependant  $x$  n'a pas de signe en lui. C'est un nombre. Son signe est marqué dans la manière dont il se combine aux données (il réagit dans le milieu plongé). Donc en terme d'opposition G/P dans le cadre d'un registre donné.

e) *Equation Olivier*  $G_2XP_7$ .  $+2-x=-7$   $2+7=x$   $x=9$ . Dans sa résolution, Benoît commence par se situer dans Z mais il finit dans le registre des pertes (de même pour toutes les équations sauf *Michel*). J'interprète le double signe « moins » comme une surnotation, un pléonasme. Un signe « moins » se rapporte à la combinaison de +2 et  $x$  l'autre indique que  $x$  est une perte. (Ceci est cohérent avec l'écriture

*Dans la pose de l'équation, les signes sont scrupuleusement notés pour les transformations : (+2), (-x), (-7) mais plus du tout dans la réponse :  $x=9$  (pour perdu 9 billes). Pourtant l'éq de départ est traitée comme  $+2-x=-7$*

surprenante de +2 pour  $G_2$ . La seule fois). Cependant, le signe de la combinaison des données est un opérateur numérique pas un opérateur de signes. (formellement  $*2-x=-7 \Rightarrow 2+x=-7 \Rightarrow x=-9$ .) Ce qui peut paraître aussi correct. Si ce n'est que la pose de : «--» n'a alors aucun sens si  $x$  est considéré comme un nombre relatif avec signe. Au vu des traitements des autres énoncés, du rôle de  $x$  et du rôle des signes d'opérations ceci resterait mystérieux. Mon explication est plus cohérente. On ne saura bien sûr jamais la vérité de ce cas. Retenons que l'on a une explication globale de toutes les productions et que l'adaptation que je propose pour la singularité «--» ne sort pas de ce cadre).

#### V.4. Perspectives de recherches.

1<sup>e</sup>) Je conclurai sur cette ouverture. Mais auparavant, je dois expliciter une chose. Perspectives de recherches, le mot perspective est à rapporter au présent texte, perspective par rapport au cadre général fixé ici. Mais les chercheurs n'ont pas attendu ceci. Et bien des travaux ont été engagés dans l'une ou l'autre des directions que j'envisage. Il faudrait consacrer un article entier aux nombreuses recherches que Durand/Vergnaud ont suscité dans le domaine des structures additives et leurs développements — on attend à ce propos la publication des résultats des recherches sur les échelles de G. Vergnaud et son équipe. De plus, ce courant de recherche a rencontré celui mené aux U.S.A. depuis de longues années déjà. J'ai opté pour une synthèse des résultats d'une première recherche. Que tous les chercheurs non cités ici me pardonnent cet égoïsme. Je suggérerai à la Revue qu'elle mandate un chercheur (Vergnaud par exemple) ou une équipe de faire un article de synthèse là-dessus.

2<sup>e</sup>) Dans cette recherche, je suis parti des observations de Durand/Vergnaud et j'ai éprouvé leurs hypothèses à l'analyse détaillée des calculs relationnels. J'ai examiné les raisonnements que l'on pouvait inférer des réponses des élèves, puis ai cherché à construire un modèle synthétique de ceux-ci de manière à opérer un retour sur la comparaison des énoncés. La clé de voute de cette construction réside dans la distinction nombre/opérateur que je fais fonction-

ner à divers plans : celui du calcul numérique et des représentations que s'en fait le sujet, celui du calcul relationnel sur les énoncés pour gérer les rapports état/transformation ou encore transformation/bilan. C'est ici que s'effectue l'arithmétisation dans la résolution de ces problèmes.

A ceci se rattachent un certain nombre d'observations sur le contenu des réponses : nombre/libellé. Des glissements de sens ont pu être repérés et leur fonction de facilitation ou d'impasse élucidée dans les divers types d'énoncés étudiés. On peut dès lors définir, relativement à un niveau de traitement donné, en chaque cas *ce qui fait problème*.

Il est dès lors possible de faire un certain nombre de prévisions sur les structures d'énoncés et de procéder aux recherches de vérification. Je me suis engagé dans cette voie.

De plus, dans ce texte, je me suis centré sur un niveau de représentation correspondant au degré de réussite des élèves interrogés. Le champ était assez large pour voir ce qui se passait en amont et en aval de ce niveau — correspondant en gros à la résolution du problème *Didier P<sub>7</sub>XP<sub>4</sub>*. Mais une recherche plus fine sur l'évolution des représentations au cours des âges s'avèrerait utile. Pour ma part, j'ai déjà mené quelques sondages dans les deux directions. Des interviews oraux d'élèves de 2<sup>e</sup> primaire (CE<sub>1</sub>) ne démentent pas les analyses faites ici. En particulier pour les raisonnements par inversion locale des pertes. J'ai particulièrement centré les interrogatoires sur *Michel G<sub>4</sub>P<sub>6</sub>X* et *Didier P<sub>7</sub>XP<sub>4</sub>*. Une autre chose apparaît nettement avec les élèves de cet âge, ce sont les tentatives de nouer les deux bouts de la chaîne de résolution : raisonnement — et réponse, calcul écrit correspondant. De là ressortent des éléments très intéressants à propos de l'usage des signes algébriques. Pour ce qui est des élèves plus âgés et des adultes, j'ai pu constater combien certains énoncés sont difficiles à traiter, en particulier si on ne dispose pas de l'outil équationnel (sur  $\mathbb{Z}$ ). Ce qui frappe très nettement c'est de retrouver tel quel, mais combien plus explicites et mieux maîtrisés, les raisonnements à l'œuvre chez les plus petits — et en général, que partiellement explicites. Comme si la maturation se marquait par une plus grande prise de conscience, une thémati-

sation possible. Pour vérifier cette observation, il semble que le moyen expérimental adéquat serait de faire produire aux sujets intéressés des énoncés variés sur le thème des billes. Ce type de recherche est mené actuellement par M.C. Escarabajal au Laboratoire de Psychologie à l'Université Paris VIII.

De toutes manières, une étude longitudinale et plus détaillée des diverses représentations à l'œuvre et de leurs rapports s'avère nécessaire. Car si un raisonnement par état interposé (inversion locale des pertes par exemple) est intégrable, dans un système de représentation élaboré, à un raisonnement par opérateurs, ceci ne se passe sans doute pas tout seul, et on peut imaginer quelques conflits entre ces types de traitements. Il convient aussi d'examiner les décalages entre pertes et gains. Cette question doit être étudiée en rapport direct avec les modes de représentation utilisés. Il conviendrait en outre de mieux étudier cette hypothèse centrale sur les opérateurs.

Tout ce qui a été évoqué ici souligne l'importance des moyens symboliques servant de support aux résolutions et permettant de confronter différents calculs relationnels et les intégrer. A ce propos le lecteur trouvera des compléments dans une recherche que j'ai menée à propos des calculs lacunaires en 1ère primaire (CP.). Il devient envisageable de construire une séquence didactique pour l'enseignement de Z sur l'outil équationnel en utilisant une technique proche de celle des sauts informationnels, mais au préalable, il faut mieux expliciter les idées sur la dualité opération/relation, avoir examiné les rapports entre divers systèmes de représentation et, avoir analysé les recherches déjà engagées sur ce thème par mes collègues.

Rolle, Janvier 1985.

## APPENDICE I

A) EVENTAIL DES REPONSES AU PROBLEME LAURENT (GENEVE)

		3e	4e
T	LAURENT a perdu 7 billes	6	6
T	perdu 7	1	
D	7 billes, il a perdu		1
T	- 7		1
E	il avait 7 billes	1	1
E	il avait 7 billes, à la fin il n'en a plus, il a perdu	1	
M	il me manque 7 billes, je te les donnerai demain		1
T	il a tout perdu, 8 billes	1	
T	il a perdu 6 billes reste plus de billes	1	
T	il a perdu 9 billes reste 0 bille		1
E	il a 0 bille	1	3
E	0 bille	2	1
D	0, perdu	3	
E	il n'a plus de billes		1
E	il perd toutes les billes		1
Q	il ne les a pas		1
Q	perdu	3	
Q	un autre les a gagnés		1
M	il lui manque 3 billes		3
M	il doit lui donner 3 billes		1
R	il a perdu 5 billes	1	
R	il reste 5 billes	1	
R	il perd 2 billes, et encore 5 billes	1	
		23	23

T - réponses en termes de transformation. E - réponses en termes d'états. M - réponses "manque", intermédiaires entre T et E. Q - réponses qualitatives. D - doubles réponse qualitatives et quantitatives. R - répétition d'une ou des deux données.

B) EVENTAIL DES REPONSES AU PROBLEME LAURENT (VALAIS)

			2e	3e	4e
T	LAURENT a perdu 7 billes	$2 + 5 = x \quad x = 7$		5	7
T	LAURENT a perdu 7 billes	$2 - x = 7 \quad x - 5 = 7$ $2 - 5 = 7$		1	
T	LAURENT a perdu 7 billes	$2 - 5 = x \quad x = 7$		1	
T	LAURENT a perdu 7 billes, à la fin il reste 3	$2 - 5 = x \quad x = 3$	1		
T	LAURENT a perdu 7 billes	$10 - 7 = x \quad x = 3$		1	
T	LAURENT a perdu 7 billes			3	1
T	LAURENT a perdu 7 billes	$x - 2 - 5 = x \quad x = 7$	1		
E	LAURENT avait 7 billes	$x - 2 - 5 = x \quad x = 7$			1
Eq		$x - 2 - 5 = x \quad x = 7$	1		
E	LAURENT a 0 bille	$x - 2 - 5 = x \quad x = 0$	1		
E	LAURENT a 0 bille	$2 - 5 = x \quad x = 0$	1		
E	LAURENT a perdu toutes les billes	$5 - 2 = x \quad x = 3$		1	
E	LAURENT n'a plus de billes				1
E	LAURENT a 3 billes	$5 - 2 = x \quad x = 3$	1		
Eq		$5 - 2 = x \quad x = 3$		1	
R <sub>2</sub>	LAURENT a perdu 2 billes puis 5 billes	$5 + 2 = x \quad x = 7$			2
R <sub>2</sub>	LAURENT a perdu 2 billes puis 5 billes				1
A	LAURENT a perdu dans les deux parties				1
A	----- non répondu -----		5		
			11	13	14

T - réponses en termes de transformations. E - réponses en termes d'états.  
Eq - équation toute seule. R<sub>2</sub> - répétition des deux données. A - autres réponses.

## APPENDICE II

DEGRE DE REUSSITE

Note : les chiffres sont approximatifs vu le nombre de réponses ambiguës.

A) Genève

- 3e année : 83 réponses justes sur un total de 253 réponses, soit à peu près 32%.

- 4e année : 97 réponses justes sur un total de 253 réponses, soit à peu près 38%.

On peut s'étonner du faible écart de réussite dans les deux classes, et je n'en ai aucune explication. Cependant il ressort de l'analyse (Appendice III) que les élèves de 4e disposent d'une meilleure représentation que ceux de 3e.

B) Valais

- 2e année : 49 réponses justes sur un total de 132 réponses, soit à peu près 37%.

- 3e année : 92 réponses justes sur un total de 156 réponses, soit à peu près 59%.

- 4e année : 105 réponses justes sur un total de 168 réponses, soit à peu près 63%.

Ici, grand écart entre 2e et 3e, faible écart entre 3e et 4e.

C) Remarques

1. Vu les différents systèmes en vigueur, l'âge d'un élève de 3e à GENEVE correspond à l'âge d'un élève de 2e au VALAIS.

2. On ne peut pas comparer les deux groupes car il n'y a pas eu les mêmes conditions de passation. Les élèves valaisans devaient écrire une équation pour accompagner leur, pas les élèves genevois.

3. Les non-réponses ont été comptées comme réponses fausses.

4. Le problème DIDIER n'a pas été posé aux Genevois.

## APPENDICE III

## QUELQUES PROTOCOLES

## NOTE :

- entre parenthèses : une première réponse biffée ;
- les problèmes ont été posés dans cet ordre.

Genève 3e	XAVIER	FABIENNE	LORELLA
PAUL	il a perdu 4 billes	il a perdu 4 billes et gagné 6 billes, il reste 6 billes	il a perdu (deux billes)
LAURENT	il a perdu 5 billes	il a perdu 6 billes, il ne lui reste plus de billes	il a perdu (il n'a plus de billes)
MICHEL	il lui en reste 4 billes	perdu 6 billes et gagné 4 billes, alors il lui reste 4 billes	il a perdu (n'a plus de billes)
PIERRE	1 bille	2 billes	il a 2 billes
BERTRAND	7 billes	10 billes	il a gagné (7 billes)
CLAUDE	il a gagné 9 billes	10 billes	il a gagné 4 billes
CHRISTIAN	il a gagné 9 billes	il a gagné 9 billes	il a gagné 4 billes
JACQUES	il a perdu 8 billes	il a perdu 8 billes	il a perdu ses 5 billes et plus 3 billes
OLIVIER	il a perdu en tout 7 billes		il a perdu les 2 billes et plus 5 billes
VINCENT	il a perdu en tout 2 billes		il lui reste 6 billes
BRUNO	il ne s'est rien passé		à la première partie, il avait 10 billes, à la deuxième partie, il a perdu 7 billes

Genève 4e	SERGE	LAURENCE	RENE
PAUL	2 billes	il lui reste 2 billes	il en a perdu 4 et il en reste 2
LAURENT	il ne les a pas	il a perdu 7 billes	il me manque 7 billes, je te donnerai demain la bille qui manque
MICHEL	0	il n'en manque 2	il me manque 2 billes, je n'ai pas assez de billes, je te les donne
PIERRE	2 billes	2	il lui reste 2
BERTRAND	3 billes	10	il avait 10 billes
CLAUDE	il garde les billes	il a gagné 4 billes	il en a gagné 4
CHRISTIAN	il gagne 4 billes	il a gagné 2 billes à la deuxième partie	il en a gagné 4
JACQUES	il n'en a plus	perdu 3 billes	il en a encore perdu 3
OLIVIER		il a perdu 7 billes	il en reste rien
VINCENT	0	à la deuxième partie, il perd 2 billes	il lui reste 6
BRUNO	3	il a perdu 4 billes	il gagne 10 billes (il a perdu 4 billes)

Valais 2e	BRIGITTE	VERONIQUE	PATRICK
PIERRE	il a 2 billes $6 - 4 = x \quad x = 2$	il a 2 billes à la partie $6 - 4 = x \quad x = 2$	Pierre a 2 billes $6 - 4 = x \quad x = 2$
BERTRAND	il avait 10 billes $x - 7 = 3 \quad x = 10$	il avait 10 billes $7 + 3 = x \quad x = 10$	B. avait 10 billes $7 + 3 = x \quad x = 10$
CLAUDE	il a 4 billes de plus $5 + x = 9 \quad x = 4$	il a gagné 4 billes $5 + x = 9 \quad x = 4$	C. a gagné 4 billes $9 - 5 = x \quad x = 4$
PAUL	il reste 2 billes $6 - 4 = x \quad x = 2$	il a gagné 2 billes $6 - 4 = x \quad x = 2$	Paul a 2 billes $6 - 4 = x \quad x = 2$
LAURENT	il a 0 billes $2 - 5 = x \quad x = 0$	il a 3 billes à la fin $5 - 2 = x \quad x = 3$	L. perd 7 billes et il lui en reste 3 $2 - 5 = x \quad x = 3$

MICHEL	il a 0 billes $x - 4 - 6 = x \quad x = 0$	il a 4 billes en tout $6 - 6 + 4 = x \quad x = 4$	
CHRISTIAN	il a 4 billes de plus $5 + x = 9 \quad x = 4$	il a 9 billes $5 + x = 9 \quad x = 4$	Ch. a gagné 4 billes à la deuxième partie $9 - 5 = x \quad x = 4$
JACQUES	il y a 3 billes de plus $5 + x = 8 \quad x = 3$	à la deuxième partie il perd 8 billes $8 - 8 - 5 = 0 \quad x = 3$	il a perdu 3 billes à la deuxième partie $10 - 5 = x \quad x = 3$
DIDIER	3 sont restées $7 - 4 = x \quad x = 3$	il a 0 billes $8 - 8 - 4 = x \quad x = 0$	il a gagné 3 billes à la deuxième partie $7 - 4 = x \quad x = 3$
OLIVIER	3 reste $x - 2 = 7 \quad x = 10$	$8 - 8 + 2 = x \quad x = 2$	O. a perdu 7 billes à la deuxième partie $9 - 2 = x \quad x = 7$
VINCENT	6 resté $8 - 2 = x \quad x = 6$	$8 - 2 = x \quad x = 6$	il a perdu 7 billes à la deuxième partie $10 - 8 = x \quad x = 2$
BRUNO		$7 - 7 + 3 = x \quad x = 3$	B. a gagné 3 billes à la deuxième partie $10 - 7 = x \quad x = 3$

CHRISTIAN	il gagne 4 billes $5 + 4 = x \quad x = 9$	il a gagné 4 billes $5 + x = 9 \quad x = 4$	Ch. a gagné 4 billes $5 + x = 9 \quad x = 4$
JACQUES	J. a perdu 13 billes en tout $5 - 8 = x \quad x = 13$	il a perdu 3 billes à la deuxième partie $5 + x = 8 \quad x = 3$	il a perdu 3 billes $5 + x = 8 \quad x = 3$
DIDIER	D. a perdu 4 billes en tout $7 - 4 = x \quad x = 3$	à la deuxième partie, D. a gagné 3 billes $7 - 4 = x \quad x = 3$	il a gagné 3 billes à la deuxième partie $4 = 7 - x \quad 4 + x = 7 \quad x = 3$
OLIVIER	O. a perdu 5 billes en tout $2 - 7 = x \quad x = 9$	à la deuxième partie, O. a perdu 7 billes	il a perdu 9 billes $+2 - -x = -7$ $2 + 7 = x \quad x = 9$
VINCENT	V. a gagné 6 billes en tout $8 - 2 = x \quad x = 6$	à la deuxième partie, il a perdu 2 billes	il a perdu 10 billes $8 - x = -2 \quad 8 + 2 = x \quad x = 10$
BRUNO	B. a perdu 4 billes en tout $7 - 3 = x \quad x = 4$	à la première partie, il a gagné 3 billes $7 - 4 = x \quad x = 3$	il a gagné 10 billes $x - 7 = 3 \quad x = 10$

## Valais 3e

	CHRISTOPHE	CHRISTIAN	BENOÎT
PIERRE	il reste 2 billes $6 - 4 = x \quad x = 2$	Pierre a encore 2 billes $6 - 4 = x \quad x = 2$	il reste 2 billes $6 - 4 = x \quad x = 2$
BERTRAND	B. avait 10 billes $3 + 7 = x \quad x = 10$	B. avait 10 billes $3 + 7 = x \quad x = 10$	B. avait 10 billes $3 + 7 = x \quad x = 10$
CLAUDE	C. a 9 billes après la partie $5 + 4 = x \quad x = 9$	C. a gagné 4 billes $5 + x = 9 \quad x = 4$	C. a gagné 4 billes $5 + x = 9 \quad 9 - 5 = x \quad x = 4$
PAUL	il lui reste 2 billes $6 - 4 = x \quad x = 2$	il a plus que 2 billes gagnées dans les deux parties $6 - 4 = x \quad x = 2$	P. a gagné 2 billes $6 - 4 = x \quad x = 2$
LAURENT	L. a perdu 7 billes $2 - 5 = x \quad x = 7$	L. a perdu 7 billes	L. a perdu 7 billes $2 + 5 = x \quad x = 7$
MICHEL	M. a perdu 2 billes $4 - 6 = x \quad x = 10$	avant la partie, il devait avoir 2 ou plus de billes	M. a perdu 2 billes $4 - 6 = x \quad x = -2$

## Valais 4e

	TONY	MONIQUE	CAROLE
PIERRE	il a 2 billes après cette partie $6 - 4 = x \quad x = 6 - 4 \quad x = 2$	il avait 2 billes $6 - 4 = 2$	il a 2 billes après cette partie $6 - 4 = x \quad x = 2$
BERTRAND	B. avait 10 billes $7 + 3 = x \quad x = 7 + 3 \quad x = 10$	il avait 10 billes en tout $7 + 3 = 10$	il avait 10 billes avant la partie $7 + 3 = x \quad x = 10$
CLAUDE	à la première il a gagné 5 billes, à la deuxième il a gagné 9 billes, ce qui fait 14 billes $x = 9 + 5 \quad x = 14$	il avait 5 billes puis en a gagné 4 $9 - 5 = 4$	il a gagné 4 billes au cours de la partie $9 - 5 = x \quad x = 4$
PAUL	il s'est passé que P. a gagné 6 billes et en a perdu 4 $6 - 4 = x \quad x = 6 - 4 \quad x = 2$	il a gagné 6 billes, puis perdu 4 $6 - 4 = 2$	P. gagne la première partie, il reçoit 6 billes mais perd la deuxième partie. On lui enlève 4 billes. Maintenant il lui reste 2 billes $6 - 4 = x \quad x = 2$

LAURENT	il s'est passé que L. a perdu 2 billes et 5 billes	il a perdu 2 billes puis 5 billes $2 + 5 = 7$	il n'a jamais gagné mais a toujours perdu, il a perdu 7 billes $2 + 5 = x \quad x = 7$
MICHEL	il s'est passé que M. a gagné 4 billes et perdu 6 billes	M. gagne 4 billes puis perd 6 billes	il a perdu 6 billes et gagné 4 billes $4 + x = 6 \quad x = 2$
CHRISTIAN	il s'est passé que Ch. a gagné 5 billes et a regagné 9 billes $5 + 9 = x \quad x = 5 + 9$ $x = 14$	il a gagné 4 billes puis 5 billes $9 - 5 = 4$	à la deuxième partie il a gagné 4 billes $5 + x = 9 \quad x = 4$
JACQUES	il s'est passé que à la première il a perdu 5 billes et après ces deux parties il a perdu 8; donc à la deuxième il a perdu 3 billes $x + 5 = 8 \quad 8 = 5 + x$ $x = 3$	il a perdu 5 billes puis 3 billes $8 - 5 = 3$	il a perdu 5 billes et à la deuxième 3 pour faire 8 en tout $5 + x = 8 \quad x = 3$
DIDIER	il a perdu 7 billes à la première et après ces deux parties a perdu 4 billes en tout; donc à la deuxième il a perdu 3 billes $7 - x = 4 \quad 4 = 7 - x$ $x = 3$	il a perdu 7 billes puis en a gagné 3 $7 - 4 = 3$	à la deuxième partie il a gagné 3 billes et il reste 4 de perdues $7 - 4 = x \quad x = 3$
OLIVIER	au début il avait 9 billes, il en a perdu 2 ce qui fait 7 $2 + 7 = x \quad x = 9$	il gagne 2 billes puis en perd 7	à la deuxième partie il a perdu ses 2 billes et encore 5 $7 = 2 + x \quad x = 5$
VINCENT	à la deuxième partie, il a gagné 6 billes $8 - x = 2 \quad x = 8 - 2$ $x = 6$	il a gagné 6 billes $8 - 2 = 4$	à la deuxième partie il a gagné 10 billes $8 + 2 = x \quad x = 10$
BRUNO	à la première partie il a perdu 4 billes $7 - x = 3 \quad 3 = 7 - x$ $x = 4$	à la première partie il a gagné 10 billes $7 + 3 = 10$	à la première partie il a gagné 10 billes $7 + 3 = x \quad x = 10$

## REFERENCES

Note : Ceci ne constitue pas une bibliographie sur le sujet. Il ne s'agit que des articles sur lesquels je m'appuie *directement* dans mon texte.

G. Vergnaud et C. Durand

Structures additives et complexité psychogénétique. *Revue Française de Pédagogie*, 1976, n° 36, pp. 28-43.

F. Conne

Pierre, Bertrand, Claude, Paul, Laurent, Michel et leurs billes. *Cahiers de la Section des Sciences de l'Education*, Université de Genève, 1979, n° 12, pp. 25-84.

F. Conne

Une épreuve de calcul en première primaire. Analyses détaillées de productions d'élèves. *Interactions didactiques*, cahier interne F.P.S.E. Genève. Didactique des Mathématiques et Séminaire de Psychologie Neuchâtel, n° 6, 1984.

A citer une recherche se plaçant dans une perspective voisine à celle que je présente :

M.C. Escarabajal

Compréhension : Quel problème l'enfant résout-il ? Université Paris VIII, doc. ERA, n° 213, 1984.

