



HAL
open science

Du traitement des formes à celui des contenus d'écritures littérales: une perspective d'enseignement introductif à l'algèbre

Gisèle Lemoyne, François Conne, Jean Brun

► **To cite this version:**

Gisèle Lemoyne, François Conne, Jean Brun. Du traitement des formes à celui des contenus d'écritures littérales: une perspective d'enseignement introductif à l'algèbre. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 1993, 13 (3), pp.333-384. halshs-01523884

HAL Id: halshs-01523884

<https://shs.hal.science/halshs-01523884>

Submitted on 17 May 2017

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

DU TRAITEMENT DES FORMES
A CELUI DES CONTENUS D'ECRITURES LITTERALES:
UNE PERSPECTIVE D'ENSEIGNEMENT
INTRODUCTIF DE L'ALGEBRE ^{1,2}

Gisèle Lemoyne³, François Conne⁴, Jean Brun⁵

ABSTRACT

In this paper, we analyze some of the studies on student's errors in algebraic equations. Their theoretical views of errors are discussed, as well as their implications on remediation and algebra teaching. An alternative view of those errors and a new perspective to introduce algebra are suggested. Mainly, we make the hypothesis that student's errors reveal an habitus developed all along the scholar cursus, are related to the processing of symbolic writings. They result in a «formal» reading and processing of those writings and in an apparent loss of the «designative and ostensive» informations they convey. Nevertheless, we do not mean that students do not use mathematical knowledge; but, we think that those knowledge are under control of memorized forms, as if those forms were the mathematical reality. Finally, the new approach put forward and experimented is to plan situations in which symbolic writings are tools and levers in the construction of algebraic notions.

RESUMEN

En este artículo examinamos los resultados de ciertos estudios sobre los errores de los alumnos en el tratamiento de escrituras literales. La discusión de las problemáticas y de los marcos conceptuales de éstos estudios suscitan numerosas interrogantes, no solo sobre la naturaleza y el origen de estos errores sino, más fundamentalmente sobre la enseñanza y el aprendizaje de la aritmética y del álgebra. Formulamos la hipótesis de que los errores están inscritos en los hábitos escolares desarrollados a lo largo de los estudios primarios, que

1. Lemoyne G., Recherche subventionnée par le Ministère de l'éducation du Québec: Formation de chercheurs et action concertée; Titre du projet: Emergence des raisonnements et représentations algébriques (responsable: Nadine Bednarz, CIRADE).
2. Brun J., Conne F., Recherche subventionnée par le Swiss National Fund for Scientific Research, n°11-25448-88; Titre du projet: L'étude des algorithmes de calculs dans la transmission et la constitution des connaissances numériques. (équipe de recherche: J. Brun, F. Conne et R. Schubauer de l'Université de Genève, et J. Retschitzki de l'Université de Fribourg).
3. Professeur titulaire, Département de didactique, Université de Montréal, C.P. 6128, Succ «A», Montréal H3C 3J7, Canada.
4. Chercheur, SCES, Université de Lausanne, Lausanne, Suisse.
5. Maître d'enseignement et de recherche, Faculté de psychologie et des sciences de l'éducation, Université de Genève, 24 rue du général Dufour, CH-1211 Genève 4, Suisse.

concernent al tratamiento de escrituras simbólicas y que se cristalizan en una tendencia a tratar de construir escrituras en detrimento del sentido de éstas. Diversos conocimientos matemáticos intervienen en el tratamiento de esas escrituras aunque esos conocimientos nos parezcan bajo el control de formas memorizadas, como si esas formas constituyeran las matemáticas. A fin de mejorar la forma y el sentido de esas escrituras literales, proponemos y experimentamos una nueva perspectiva de enseñanza introductoria del álgebra, según la cual el tratamiento de escrituras literales, en situaciones apropiadas, podría constituir una herramienta, o mejor aún, un apoyo para la construcción de nociones algebraicas.

RÉSUMÉ

Dans cet article, nous examinons les résultats de certaines études sur les erreurs des élèves dans le traitement d'écritures littérales. La discussion des problématiques et des cadres conceptuels de ces études suscite de nombreuses interrogations, non seulement sur la nature et l'origine de ces erreurs mais, plus fondamentalement sur l'enseignement et l'apprentissage de l'arithmétique et de l'algèbre. Nous formulons l'hypothèse que les erreurs sont inscrites dans les habitus scolaires développés tout au long des études primaires, habitus qui concernent le traitement des écritures symboliques et qui se cristallisent dans une tendance à traiter de formes d'écritures au détriment du sens de ces écritures. De nombreuses connaissances mathématiques interviennent dans le traitement de ces écritures mais ces connaissances nous semblent sous le contrôle de formes mémorisées, comme si ces formes constituaient les mathématiques. Afin de mieux lier forme et sens des écritures littérales, nous proposons et expérimentons une nouvelle perspective d'enseignement introductif de l'algèbre selon laquelle, le traitement des écritures littérales, dans des situations appropriées, pourrait constituer un outil ou mieux encore un levier pour la construction de notions algébriques.

INTRODUCTION

Les erreurs dans le traitement d'écritures littérales ne sont pas l'apanage exclusif des élèves débutant en algèbre; si cela était, on s'expliquerait mal l'attention que leur portent depuis plusieurs années les chercheurs en didactique. Comprendre l'histoire et la signification de ces erreurs, construire et évaluer de nouvelles situations d'enseignement de l'algèbre ou encore, des situations plus spécifiques de remédiation de ces erreurs, nous apparaissent des objectifs naturels et pertinents des recherches conduites jusqu'à présent.

Nous effectuons dans un premier temps un examen des résultats mais aussi, des problématiques et des cadres conceptuels des recherches sur les erreurs des élèves dans le traitement d'écritures littérales. Dans un second temps, nous proposons une approche alternative à ce problème d'enseignement et d'apprentissage.

LES ERREURS DES ELEVES DANS LE TRAITEMENT D'ECRITURES NUMERIQUES ET LITTERALES: EXAMEN DES REPRESENTATIONS PSYCHOLOGIQUES ET DIDACTIQUES DE CES ERREURS

1. Le diagnostic des erreurs

1.1. Les erreurs dans les exercices scolaires

Dans le domaine de la résolution d'équations algébriques, les études réalisées par Sleeman (Sleeman et Brown, 1982; Sleeman, 1986, 1987) sont bien connues. Inscrites dans la perspective d'élaboration de systèmes tuteurs intelligents, elles procèdent d'abord à une modélisation de réponses justes; des règles adéquates sont alors créées. La transformation de ces règles en règles déviantes (mal-rules) permet ensuite la modélisation des erreurs des élèves (ex: M2SUBNEG résout la tâche 6-8 en ajoutant +6 et +8; M2 est une transformation de la règle juste (SUBNEG) de soustraction des nombres négatifs). Dans les versions récentes des systèmes diagnostics, d'autres règles sont également définies pour rendre compte de conduites qui montrent un *traitement syntaxique erroné* (mal-parsing rules); ces dernières règles ne sont en général appliquées qu'une fois dans une tâche de traitement d'équations algébriques (ex: $3x + 5x = 19 \rightarrow x + x = 19 - 3 - 5 \rightarrow 2x = 11 \rightarrow x = 11 - 2$).

Le principal apport de ces études réside dans une définition formelle des procédés adéquats et erronés et une référence à un ensemble de tâches conçues pour mettre en évidence les modèles erronés des élèves. Il faut également convenir de l'ingéniosité et de l'éco-

nomie de ces systèmes: représentation de modèles idéaux et transformation en modèles de performance par modification de règles justes. Selon cette conception, les erreurs des élèves montrent bien une tentative d'intégration de connaissances présentées dans l'enseignement (Sleeman utilise la formulation suivante pour décrire cette intégration: «*students... consider using a correct form of a rule*»); ces erreurs ont donc une histoire scolaire. Mais, cette conception dévoile ses limites par le recours à des règles (mal-parsing rules) qui n'ont pas d'équivalents dans les modèles idéaux. L'adjonction de ces dernières n'est pas un événement mineur; il révèle l'individualité des connaissances et son corollaire didactique, soit l'impossibilité de référer aux seuls modèles adultes pour décrire les modèles des élèves. Qui plus est, le fait que ces règles ne soient déclenchées qu'à certains moments du processus de traitement d'équations laisse entendre qu'elles sont subordonnées à d'autres règles, à moins que dans le modèle précédent de telles règles ne soient pas suffisamment sensibles aux écritures successives du traitement. Nous discuterons ultérieurement de cette hypothèse. Poursuivons l'examen des travaux sur les erreurs, en présentant d'autres modèles de production et d'interprétation.

Matz (1980) propose une typologie des erreurs qui couvre des exercices variés des programmes d'enseignement de l'algèbre (factorisation, simplification, résolution d'équations, résolution de problèmes d'algèbre); cette typologie annonce d'emblée ses ancrages psychologiques et didactiques. Les erreurs témoignent ainsi de tentatives raisonnables mais infructueuses d'adaptation des connaissances antérieures à de nouvelles situations. Deux types principaux d'erreurs sont alors définis: les erreurs correspondant à l'absence de changements conceptuels et les erreurs liées à des techniques d'extrapolation.

La compréhension des premières erreurs renvoie à un examen des rapports entre savoirs arithmétiques et algébriques, rapports étudiés sous l'angle du passage arithmétique-algèbre. Selon Matz, ce passage s'effectue par la construction de la notion de valeur symbolique et par l'extension de la relation d'égalité. Cet énoncé constitue toujours aujourd'hui un énoncé essentiel dans les recherches sur l'algèbre (Booth, 1984; Kuchemann, 1981; Kieran, 1981, 1989), énoncé souvent validé par une référence historique au développement du symbolisme algébrique.

La seconde catégorie d'erreurs définie par Matz (1980) procède essentiellement d'une théorisation psychologique sur les processus d'élaboration de connaissances. Ainsi, confronté à une situation nouvelle, l'élève dispose de deux façons de traiter cette situation: s'il connaît la règle à appliquer, il peut se contenter d'exécuter cette règle; s'il ignore cette règle, il peut alors avoir recours à des techniques d'extrapolation. Ces techniques sont des utilisations *accommodées* et *inappropriées* de règles justes d'abord *rencontrées* dans des contextes partiellement comparables.

A l'appui de cette classification, Matz présente et commente plusieurs erreurs. Nous rappelons quelques erreurs et tentons de cerner, au-delà du discours, leurs représentations dans le modèle de Matz et dans celui de Sleeman. Matz range dans la première catégorie les erreurs de concaténation qui, selon son cadre conceptuel, relève de connaissances naïves, fausses ou incomplètes du symbolisme et des opérations en algèbre (ex: $3 + x \longrightarrow 3x$). Ces erreurs sont dites syntaxiques; si cette appellation rejoint celle proposée par Sleeman pour ce type d'erreurs, elle reçoit en plus dans le modèle de Matz l'explication scolaire suivante. En arithmétique l'écriture des nombres est la concaténation des chiffres; on fait appel à la notion de valeur de position pour distinguer deux nombres formés de mêmes chiffres. De plus, dans la représentation des nombres rationnels, la juxtaposition d'un nombre et d'une fraction implique une addition. Passer de l'arithmétique à l'algèbre ne peut se faire sans heurts, étant donné ces différents sens de la concaténation. Ainsi, les réponses fréquentes des élèves à la question «*si $x = 6$, évaluez $4x$* » sont: 46 et 10; selon Matz, la première réponse fait référence à des connaissances sur la valeur de position et la seconde, à des connaissances sur l'addition. Ces hypothèses nous apparaissent assez convaincantes. Cette conviction nous amène à nous interroger sur la pertinence du *discours arithmétique-algèbre* qui enrobe ces hypothèses. Ne peut-on pas en effet montrer que les rapports aux symbolismes et aux opérations marquent l'apprentissage des différents contenus des mathématiques et ne sont pas plus déterminants pour l'apprentissage de l'algèbre qu'ils ne le sont pour l'arithmétique? Si tel est le cas et si on convient que le symbolisme en algèbre comporte des propriétés, des attributs que n'a pas celui de l'arithmétique, il importe de poursuivre davantage l'examen de ce symbolisme. La notion de valeur symbolique nous apparaît alors insuffisante pour rendre compte de ces propriétés. Nous reconnaissons toutefois n'avoir pas de réponse alternative à proposer pour le moment.

Les erreurs de la seconde catégorie dans les modèles de Matz et de Sleeman relèvent de procédés comparables; elles nous semblent également dépendre de conceptions similaires sur le développement de ces erreurs. Matz nous apparaît toutefois faire appel à une interprétation plus psychologique de la construction de ces erreurs. Ainsi, les techniques d'extrapolation proposées et leur fonctionnement font écho aux processus d'assimilation et d'accommodation du modèle piagétien de développement de connaissances (Piaget, 1936, 1947). De plus, ces processus de construction sont présentés comme un atout du système apprenant.

1.2. Les erreurs dans les exercices conçus par les chercheurs

Nous disposons d'une quantité non négligeable d'études sur les erreurs des élèves dans le traitement d'écritures littérales. Ces écritures

sont apprêtées de manière à vérifier certaines hypothèses sur la production des erreurs ou encore, à mieux documenter les procédures connues. Nous choisissons d'examiner d'abord plus longuement la recherche conduite par Cauzinille, Mathieu et Resnick (1987) et de rapporter ensuite brièvement les résultats de celle réalisée par Booth (1989).

Dans l'étude conduite par Cauzinille, Mathieu et Resnick, des élèves du secondaire (6e à 3e année du système français) «doivent juger de l'équivalence d'expressions numériques ou littérales. Les expressions comprennent trois termes reliés par deux opérateurs, addition et soustraction exclusivement ... Chaque type d'expression est présenté sous forme littérale, puis numérique...» (p. 42). Voici quelques-uns des exercices proposés:

a) associativité:

1. $a - (b + c)$ vs $(a - b) + c$;
 $15 - (6 + 4)$ vs $(15 - 6) + 4$;

b) pertinence des parenthèses:

7. $a - (b + c)$ vs $a - b + c$;
 $15 - (6 + 2)$ vs $15 - 6 + 2$;

c) commutativité:

9. $a + (b - c)$ vs $a + (c - b)$;
 $12 + (7 - 3)$ vs $12 + (3 - 7)$;

L'examen des conduites des élèves est encadré par les conceptions de l'arithmétique et de l'algèbre développées dans la problématique; les énoncés suivants rendent globalement compte de ces conceptions: les premiers concepts de l'algèbre élémentaire s'appuient sur ceux de l'arithmétique mais s'en différencient; l'algèbre est un domaine conceptuel nouveau qui prolonge le domaine de l'arithmétique que l'élève maîtrise déjà partiellement; en algèbre, les règles formelles de ré-écriture opèrent sur des expressions à la fois numériques et littérales; certaines règles découlent des propriétés des opérations et «peuvent trouver un fondement dans le domaine arithmétique, même si elles s'en dégagent nécessairement pour constituer un domaine propre, celui de l'algèbre»; l'application des règles n'a pas nécessairement pour but d'effectuer un calcul.

Les erreurs dans la comparaison d'expressions numériques sont peu nombreuses; il en est tout autrement pour les expressions littérales. Pour mieux comprendre ces erreurs, les chercheurs identifient quatre types de stratégies de comparaison (pp 48-52): 1) comparaison formelle: «comparaison directe des deux expressions qui fait appel à une règle formelle»; 2) ré-écriture: «ré-écriture des deux expressions à comparer, A et B, puis comparaison des deux nouvelles expressions

obtenues»; 3) calcul: «calcul numérique de chaque expression, puis comparaison des résultats» (pour les expressions littérales, des nombres remplacent les lettres); 4) évaluation: «évaluation non quantifiée des deux expressions à comparer» (chaque signe est considéré comme une transformation (ex: enlever, augmenter)).

Le recours à chacune de ces stratégies dépend du contexte et du degré scolaire des élèves. Dans le traitement des expressions littérales, les stratégies de comparaison formelle sont les plus fréquemment utilisées; viennent ensuite dans l'ordre les stratégies de ré-écriture et d'évaluation, la stratégie de calcul étant peu utilisée. Les stratégies de ré-écriture sont davantage liées à de bonnes réponses que ne le sont les autres. Dans le traitement des expressions numériques, la stratégie de calcul est dominante et son application produit généralement une réponse correcte.

Les différences selon le degré scolaire des élèves sont particulièrement évidentes dans le traitement des expressions littérales. Les élèves de 4e et de 3e (élèves plus scolarisés) procèdent plus souvent que ceux de 6e et de 5e (élèves moins scolarisés) à des ré-écritures des expressions littérales. Ces derniers élèves privilégient par ailleurs, plus que leurs aînés, les stratégies d'évaluation et de calcul.

Dans l'interprétation générale des résultats de leur recherche, les auteurs relient les erreurs des élèves à «des lacunes... dans les connaissances» (ex: calcul des relatifs), à «des restrictions dans l'application des connaissances» (ex: procédure de ré-écriture d'une expression avec parenthèses appliquée correctement seulement s'il s'agit d'une expression numérique) et à «des généralisations des conditions d'application des connaissances» (ex: commutativité de la soustraction). Ils concluent ainsi: «Le problème nous semble résider essentiellement dans la coordination des connaissances susceptibles d'être évoquées ... L'analyse présentée nous semble ainsi déboucher directement sur des perspectives didactiques qui mettraient l'accent sur les relations entre connaissances, autant que sur les connaissances elles-mêmes» (p. 55).

Cette interprétation et cette conclusion nous apparaissent conséquentes avec les diverses représentations des erreurs que les auteurs nous livrent au moment de l'analyse des résultats. Ainsi, l'interprétation des erreurs de comparaison formelle renvoie aux propriétés de l'addition, à la généralisation de règles liées à ces propriétés. En cela, elle rejoint celle de Matz (1980) dont nous avons antérieurement discutée. L'interprétation des erreurs de calcul met en cause le sens des règles de ré-écriture (règles de suppression de parenthèses) et le statut des parenthèses. Nous souhaitons prolonger la réflexion sur ces interprétations en évoquant très brièvement quelques questions que suscitent ces interprétations, qui, rappelons-le, rejoignent plusieurs des interprétations généralement proposées pour expliquer les erreurs en algèbre.

Est-il opportun d'invoquer les propriétés des opérations pour rendre compte des erreurs des élèves dans la comparaison formelle des expressions et en particulier, lorsque les conduites de ces élèves sont justifiées par des déclarations du type «l'ordre des lettres ne compte pas...»? et même lorsque les élèves invoquent les noms de ces propriétés (ex: «parce que c'est associatif») dans leurs justifications? Il est certes vrai que les conduites de ces élèves ne sont pas celles attendues, si on se réfère aux savoirs sur les propriétés des opérations. Mais, justement, si de telles conduites ne sont pas réglées par des savoirs sur les propriétés des opérations, peut-on penser qu'elles dépendent de connaissances ou de règles fausses liées à ces propriétés? Ne pourraient-elles pas dépendre plus simplement de règles liées à des pratiques sur les écritures numériques et littérales? Les pratiques liées aux expressions numériques et littérales que les chercheurs identifient dans l'analyse des erreurs de calcul nous apparaissent fonder davantage cette hypothèse.

Enfin, le fait que les élèves les plus âgés aient recours à des stratégies de ré-écriture plus souvent que les autres et que ces stratégies soient plus que les autres associées à la réussite de la comparaison d'expressions littérales mérite d'être examiné. On ne peut nier que les pratiques numériques de traitement d'écritures s'acquièrent à travers des actions sur des écritures apprêtées par l'enseignant sur la base de savoirs sur les propriétés des opérations. Il faut convenir cependant que l'élève ne peut construire ou abstraire ces propriétés uniquement de ses expériences pratiques numérisées. Les opérations réalisées à travers ses expériences doivent justement constituer les contenus d'abstraction des propriétés des opérations. Les études en épistémologie génétique montrent bien les différences entre ces mécanismes d'abstraction (Piaget, 1974). Les jugements d'équivalence appuyés sur des règles de ré-écriture appropriées nous apparaissent alors refléter davantage la compréhension des propriétés des opérations. Il n'est donc pas étonnant que de tels jugements soient plus accessibles aux élèves qui ont bénéficié d'une pratique plus soutenue et plus longue en algèbre.

Nous complétons l'examen des études sur le diagnostic des erreurs en traitement d'écritures numériques et littérales en décrivant très succinctement la recherche réalisée par Booth (1989). Booth rappelle d'abord que l'essence de l'algèbre est la compréhension de la nature structurale des relations mathématiques et des procédures; elle soutient également que les difficultés des étudiants peuvent dépendre davantage d'une incompréhension de lois de l'arithmétique que d'une incompréhension de la signification des lettres.

Dans sa recherche, Booth propose à des élèves de 13 ans deux types de tâches: 1) première tâche: «J'ai pensé à un nombre et ensuite j'ai fait quelque chose avec ce nombre, comme vous le voyez. Que doit-il être écrit dans l'espace si je veux revenir au même nombre que

celui auquel j'ai pensé.»; 2) seconde tâche: «Reliez l'expression de la colonne 1 à chacune des expressions de la colonne 2 que vous jugez équivalentes. Il peut y avoir plus d'une expression équivalente. Si vous pensez qu'aucune expression n'est équivalente, encerclez aucune». Voici quelques items présentés:

1) première tâche: item 4: $(\Omega - 2) \times 3 \dots = \Omega$;

2) seconde tâche: item C: colonne 1: $19,7 - (3,8 + 7,4)$; colonne 2: a) $19,7 - (7,4 + 3,8)$; b) $(19,7 - 3,8) + 7,4$; c) $(3,8 + 7,4) - 19,7$; d) aucune;

Booth note un nombre important de réponses erronées chez les élèves de cet âge. Ainsi, plusieurs élèves jugent équivalentes les expressions b et c de l'item C. Selon elle, une compréhension incomplète des transformations permises des expressions numériques ne place pas les élèves en bonne position pour l'apprentissage des manipulations algébriques.

2. La prévention ou la remédiation des erreurs: proposition découlant des diagnostics précédents

Les diagnostics précédents des erreurs des élèves dans le traitement d'écritures numériques et littérales sont généralement suivis par des propositions ou des recommandations visant soit une prévention soit une remédiation de ces erreurs.

En associant les erreurs dans la résolution d'équations algébriques à des règles déviant des règles justes ou à des règles fausses de traitement syntaxique, Sleeman nous entraîne dans une démarche de remédiation des erreurs. Il indique comment le système tuteur PIXIE (Sleeman, 1987: p. 259; traduction des auteurs) opère dans la remédiation des erreurs: 1) il «démontre que l'étudiant a incorrectement résolu la tâche; 2) il présente l'erreur particulière (ou les erreurs) qu'il croit que l'étudiant a commise; 3) il donne une explication de la transformation incorrecte; 4) il montre le travail de la règle juste; 5) il montre la trace complète du traitement de la tâche par la règle juste.»

Les propositions didactiques découlant des études de Matz sont en revanche plus difficiles à cerner: s'agit-il de mieux aiguillonner les techniques naturelles d'extrapolation des élèves par une présentation d'exercices ou de situations judicieuses? ne convient-il pas également de repenser l'enseignement de l'algèbre en trouvant des situations qui permettent à l'élève d'opérer les changements conceptuels nécessaires?

Dans les études réalisées par Cauzinille, Mathieu et Resnick et par Booth, les propositions sont clairement énoncées. Cauzinille, Mathieu et Resnick proposent d'intervenir sur la maîtrise de la sémantique des opérations et de leurs propriétés, par une extension des connaissances (propriétés des opérations, entiers relatifs...) et du tissu relationnel.

Booth déplore le retrait dans les programmes d'enseignement des items visant une compréhension structurale des mathématiques (lois des nombres, opérations inverses, associativité et commutativité, distributivité).

Nous sommes mis en présence de propositions variées qui, dans la plupart des cas, émanent d'une interprétation du cadre d'analyse des erreurs, mais qui nous apparaissent, de prime abord, négliger l'histoire scolaire de ces erreurs. Tel est le cas, il nous semble, des propositions concernant l'extension des connaissances sur les propriétés des opérations, sur les lois des nombres. Les propositions de remédiation ou de correction des règles fausses nous apparaissent également de même type.

Dans plusieurs cas, le raisonnement apparaît le suivant: puisque les erreurs des élèves révèlent une incompréhension des propriétés des opérations, il convient de mieux enseigner ces propriétés. Les conduites des élèves, il est évident, transgressent les lois des opérations. Ces transgressions relèvent par ailleurs de représentations des tâches d'écritures numériques et littérales, de connaissances sur ces écritures et d'habitus de traitement de ces écritures. Ces différents éléments composent la trame scolaire des savoirs des élèves. Il importe d'en tenir compte.

Il est tout aussi essentiel de s'interroger davantage sur la signification de l'expression *compréhension des propriétés des opérations et des nombres*: Quelle compréhension l'élève peut-il construire au cours des situations qui sont celles de l'enseignement de l'arithmétique au primaire et de l'algèbre au secondaire? Quelles situations en arithmétique et en algèbre pourraient engager l'élève dans un tel processus de construction?

En ce qui concerne les propositions de remédiation ou de correction des règles fausses, nos interrogations sont multiples. On ne voit pas bien comment cette entreprise de correction pourrait réussir. Comme le font remarquer Brun, Conne et Retchitzki (1988a), le traitement didactique des erreurs évitant «autant les aspects notionnels sous-jacents que les aspects conceptuels sous-jacents, ne fait que recentrer le sujet sur le fonctionnement de son calcul. On connaît mieux les erreurs mais cette connaissance ne donne pas les moyens d'agir sinon en représentant la séquence de règles.» (p. 4). Ce que nous révèle les règles fausses sont en fait des représentations spécifiques de tâches, représentations qui sont produits de connaissances élaborées à travers une kyrielle de tâches; ces tâches font partie des micro-mondes (Lawler et Yazadani, 1987) dans lesquelles opèrent les connaissances. Agir sur les erreurs en faisant abstraction de ces conditions de réalisation des connaissances nous apparaît ainsi amputer ces erreurs de leurs liaisons, de leurs significations essentielles.

On peut aussi s'interroger sur l'exhaustivité des règles à laquelle, dans leur fonctionnement, les systèmes de remédiation doivent pré-

tendre. Les études réalisées par Brun et Conne (1991) sur les erreurs en calcul arithmétique font ressortir, sans équivoque, l'utopie d'une telle prétention.

L'intérêt principal de ces études sur les erreurs est toutefois non négligeable; elles nous conviennent à une réflexion sur les différences entre arithmétique et algèbre, entre calculs numériques et littéraux, entre conduites des élèves en arithmétique et en algèbre. Enumérons à cet effet, certaines des différences relevées dans notre lecture des publications précédentes et dans l'étude synthèse réalisée par Kieran (1989):

1) l'essence de l'algèbre est la compréhension de la nature structurale des relations mathématiques et des procédures;

2) l'arithmétique est procédurale; en algèbre, les procédures font partie des objets (ex: $x^2 + 2x + 1$);

3) accepter en algèbre de suspendre l'évaluation des opérations constitue une rupture fondamentale avec l'arithmétique;

4) pour résoudre des problèmes arithmétiques, les élèves ont recours à des méthodes différentes de celles qui sont attendues dans la résolution de problèmes d'algèbre. En arithmétique, l'élève effectue des comptages, des ajouts, des combinaisons de quantités, des traitements de nombres naturels, ..., dans le but de produire une quantité, un nombre et ce produit obtenu ne porte pas de «mémoire de la manière dont il a été obtenu et est ainsi jugé indépendamment de sa production». En algèbre, au contraire, produit et production doivent être liés et examinés: «Ainsi, si les élèves ne reconnaissent pas que le nombre total d'objets dans deux collections contenant 5 et 8 objets respectivement peut être écrit $5 + 8$ (plutôt que 13), il est fortement improbable qu'ils sauront reconnaître que $a + b$ représente le nombre total d'objets dans des collections contenant a et b objets.» (Kieran et al., 1990, p. 99; traduction des auteurs);

5) le signe = est interprété ainsi en arithmétique: «do something signal»; ce qui entraîne le rejet d'identités et d'équations de types: a) $4 + 3 = 6 + 1$; b) $2x + 3 = x + 4$;

Nous pourrions bien sûr commenter chacune de ces déclarations; nous nous contenterons de quelques remarques à propos de certaines d'entre elles.

La seconde déclaration associe aux différences entre les écritures numériques et littérales des différences dans les pratiques de traitement de ces écritures. Dire que les procédures font partie des objets des expressions littérales c'est en effet indiquer que ces objets portent une information sur leurs constructions, ce qui n'est pas le cas pour les objets de l'écriture numérique.

La quatrième déclaration commande plusieurs remarques. Il est vrai qu'en résolution de problèmes arithmétiques, la production d'une quantité constitue souvent le seul objectif identifiable. Il est aussi pertinent d'ajouter que cette quantité produite ne porte pas de mémoire

de la manière dont elle a été obtenue et que cela constitue une différence entre les traitements arithmétique et algébrique. On pourrait pousser plus loin cet examen et ajouter qu'en arithmétique, la production d'un nombre annonce la fin d'un traitement tandis qu'en algèbre, la fin d'un traitement est une relation, donc un objet composé.

Enfin, la conclusion qui découle des remarques précédentes sur l'arithmétique et l'algébrique (Ainsi, si les élèves...) est cruciale et mérite d'être explicitée. En effet, dans le cadre d'une pratique arithmétique, on ne voit pas pourquoi le nombre total d'objets dans deux collections pourrait être désigné par une addition des nombres, puisque ces nombres sont des mesures connues de ces collections. En revanche, dans le contexte algébrique, reconnaître que « $a + b$ » représente le nombre total d'objets dans des collections contenant a et b objets, c'est il nous semble reconnaître que l'expression « $a + b$ » montre bien la relation entre le nombre total d'objets et les collections; c'est de plus admettre l'impossibilité de réaliser la somme. Rappelons à ce sujet les propos de Condillac (1798: voir Auroux et Chouillet, 1981, p. 302):

«Ne serait-ce pas une absurdité de prendre en arithmétique $2 + 4 + 8$ pour la somme de $2 + 4 + 8$? On serait donc absurde en algèbre, si l'on croyait avoir trouvé la somme d'une addition lorsqu'on aurait écrit.

$$\begin{array}{r} a + b + c \\ d - f - g \\ \hline a + b + c + d - f - g \end{array}$$

L'expression plus abrégée qu'on nomme *somme*, suppose donc que plusieurs termes semblables se réunissent en un seul, comme $a + a = 2a$, ou que des termes se détruisent par l'opposition des signes, comme $+ b - b = 0$.

L'ENSEIGNEMENT DES PROPRIETES DES OPERATIONS ARITHMETIQUES DANS UN CONTEXTE D'INTRODUCTION A L'ALGEBRE

Les réserves que nous avons exprimées au sujet du diagnostic, de l'interprétation, de la prévention ou de la remédiation des erreurs des élèves dans le traitement d'écritures numériques et littérales, n'ont pas pour objectif de contester l'importance de ces erreurs. Ces erreurs transgressent les lois des opérations et témoignent d'un rapport particulier aux écritures numériques et littérales et aux savoirs mathématiques. Dans un contexte d'introduction à l'algèbre, ce rapport aux écritures doit être analysé.

1. Les rapports des élèves aux écritures numériques et littérales et aux savoirs mathématiques

Dans son mémoire sur «Le problème du zéro», Pascal (1980) propose une analyse des écritures formelles (numériques et littérales) qui éclaire notre compréhension des erreurs des élèves dans le traitement de ces écritures. Elle rappelle que:

«Toute écriture formelle apporte de l'information (ou, plus exactement, porte de l'information) sous au moins deux formes ... Soit, l'écriture $16 - 4$; elle a un référent (dont elle est un nom) qui est le nombre entier douze, et qu'elle désigne; telle est l'information désignative... Par ailleurs, cette expression porte une information ostensive, qui peut varier sans que varie l'information désignative associée: l'expression formelle 2×6 apporte la même information désignative, mais elle ne montre pas la même chose. De ce que montre l'expression $16 - 4$, je déduirai immédiatement que le nombre qu'elle désigne est inférieur à 16; tandis que de l'expression 2×6 je tirerai que le nombre qu'elle désigne est divisible par 6.» (p. 88).

Cette analyse de l'écriture n'est pas sans évoquer celle de Condillac (1798: voir Auroux et Chouillet, 1981, p. XX1):

«Une expression peut prononcer une différence (*huit*) ou l'indiquer (*neuf moins un*). L'indication est la manifestation dans le sens de l'expression de la procédure opératoire engendrant la quantité à laquelle elle réfère; la prononciation n'est qu'une nomination.»

Plusieurs des erreurs des élèves dans le traitement des écritures littérales témoigneraient, selon Pascal, d'une tendance à conserver les différences ostensives entre les écritures. L'origine de cette attitude de l'élève est à chercher dans son rapport aux situations de calcul (habitus scolaire). Ainsi, l'apprentissage des calculs numériques et algébriques est généralement sous la contrainte de règles prescrites par l'enseignant: procédures algorithmiques (ex: calcul numérique, résolution d'équations du second degré,...) ou «surcodées» (ex: factorisation). Ces règles, le maître les présente sous la forme d'actions de traitement d'écritures thématiques et contrôlées par des connaissances variées, multiples, mais, qui ne sont qu'une partie de celles que l'élève devra utiliser ou acquérir pour pouvoir reproduire les actions du maître. Les interactions maître-élève se font à propos de ces actions de traitement d'écritures; le maître décode les traitements de l'élève et en infère les règles; l'élève de son côté agit sur les écritures et accorde au besoin ses actions, tenant compte du regard du maître sur son traitement d'écritures.

L'élève ne peut difficilement se fier aux règles qu'il pourrait construire (qu'il construit) et qui pourraient être mathématiquement valides; son *acculturation scolaire réussie* (selon Pascal) en dépend.

«Cette quasi-nécessité d'un contrôle ostensif enchaîne le regard de l'élève à l'expression formelle des écritures sur lesquelles il doit calculer» (p. 102). La conservation des différences ostensives dans les transformations d'écritures (ex: $0 \times a = a$) semble alors le moyen privilégié par l'élève pour contrôler la *non-réversibilité* (du point de vue de l'élève) des transformations du calcul.

Cette lecture des conduites des élèves, en des termes différents et à propos d'un domaine autre des mathématiques, est également effectuée par Kieren (1988, p. 177; traduction des auteurs):

«En ce qui concerne les propositions précédentes sur la connaissance des mathématiques, il est suggéré ici qu'une focalisation prématurée sur la syntaxe des décimaux et des opérations sur les fractions rend le symbolisme technique inadéquatement concret. Ainsi, les élèves pensent que leurs raisonnements sur les opérations sur les fractions et les décimaux proviennent de la nature des symboles sur papier. Cela conduit les élèves à rechercher des régularités concrètes dans les symboles, plutôt que de penser que les opérations sur les nombres rationnels sont le produit de leur activité mentale en tant qu'une abstraction symbolisée d'action/objets et que cette activité est représentée par le symbolisme des algorithmes. Ce formalisme prématuré explique quelques-uns des résultats des recherches sur l'addition de fractions et sur les algorithmes inappropriés développés sur les fractions décimales.»

Ces explications des conduites des élèves dans le traitement d'écritures permettent, il nous semble, une seconde lecture des erreurs de jugement d'expressions numériques et littérales relevées par Cauzinille, Mathieu et Resnick (1987) et Booth (1989). Ainsi, les élèves qui déclarent que l'ordre des lettres ne compte pas dans les expressions littérales, semblent se satisfaire d'une lecture ostensive des expressions. L'équivalence reconnue par les élèves entre les expressions $(19, 7 - 3, 8) + 7, 4$ et $(3, 8 + 7, 4) - 19, 7$ pourrait également témoigner de cette tendance à conserver les différences ostensives. Ainsi, à défaut de se saisir des écritures comme des éléments d'un dispositif pour l'évocation et le déroulement de pratiques donnant un sens à l'activité mathématique, les élèves se satisfont d'une analyse «syntaxique». Pour clarifier cette dernière interprétation, rappelons les propos de Chevallard (1991):

«Une pratique ne peut exister et se dérouler que parce que les acteurs peuvent constamment la «lire», «voir» ce qu'ils font et identifier les gestes qui permettent de la continuer. Ce décodage n'est possible qu'à travers le rapport des acteurs aux objets de l'activité, et plus précisément grâce à un certain sémiotisme des praxèmes, sémiotisme qui permet notamment que certains de ces praxèmes puissent fonctionner comme des emblèmes de l'objet». (p. 114)

Invoyer, dans les cas précédents, l'incompréhension des propriétés des opérations nous apparaît alors masquer les rapports aux écritures et aux tâches qui recouvrent les représentations mathématiques des élèves. Contrairement à l'adulte, ces élèves semblent alors peu préoccupés par les opérations en cause ou encore, par les informations portées par ces expressions.

Mais, si une telle interprétation est défendable, une question surgit spontanément: Comment amener les élèves à traiter les informations et non pas uniquement, les écritures? Avant de discuter de notre réponse à cette question, il nous semble intéressant de prolonger davantage notre examen des conduites des élèves en arithmétique et en algèbre.

2. Les rapports des élèves à l'arithmétique et à l'algèbre

Plusieurs des conduites des élèves en arithmétique et en algèbre semblent marquées par ces rapports aux écritures numériques et littérales. Dans leur recherche sur les erreurs des élèves devant réaliser par écrit des divisions, Brun, Conne, Schubaueur et Retchitzki (1988a, 1988b) montrent comment et, souvent d'une manière très peu économique, les élèves font appel à leurs connaissances numériques et numérales pour effectuer des divisions à la manière du maître. De cette manière, ils ne semblent toutefois n'avoir bien souvent retenu que des formes et des lois d'écritures intermédiaires ou finales en regard des entrées successives aux dividendes, diviseurs et quotients. Ainsi, effectuer une division est du point de vue de l'élève un jeu d'activation de transformations qui lui permettent à chaque étape du processus d'approprier les écritures, de reconnaître une écriture ostensive qu'il a retenue de l'algorithme enseigné en classe, organisant ainsi les informations afin de pouvoir opérer (ex: partition du dividende). Dans le déploiement de ces écritures, il fait appel à de nombreuses connaissances numériques et numérales qu'il doit sans cesse accommoder, puisque ces connaissances sont liées à des micro-mondes différents (ex: le micro-monde de la numération; le micro-monde des additions et des soustractions; le micro-monde des problèmes de multiplication et de division). Il ne lui viendra pas spontanément à l'idée de vérifier sa réponse, puisque son statut ne dépend que du processus de transformations des écritures qui avec cette réponse a pris fin. Voudrait-il le faire, il en serait probablement incapable sans refaire à nouveau le calcul, ne disposant pas de règles explicites mais de règles implicites soudées à l'action.

On a toutes les raisons de penser que cet habitus développé en arithmétique se transportera en algèbre. Plus encore, il sera cristallisé, en raison de la perte, du point de vue de l'élève, de l'information que portaient les nombres en arithmétique. Cette information permettait, à

certaines occasions, de lier information ostensive et information désignative, en un mot de construire du sens. L'algèbre se présentera alors uniquement comme une écriture ostensive dont le sens échappe en raison de l'incapacité de référer aux informations véhiculées par cette écriture. En algèbre encore plus qu'en arithmétique, «la lecture ostensive (la lexis) devient dominante lorsqu'elle constitue la seule pratique des élèves à propos des transformations d'écritures.» (Pascal, 1980, p. 107).

ETUDE DES PROPRIÉTÉS DES OPÉRATIONS ARITHMÉTIQUES DANS UN CONTEXTE D'ENSEIGNEMENT INTRODUCTIF À L'ALGÈBRE

Les développements théoriques précédents sur les rapports des élèves à l'arithmétique et à l'algèbre permettent, selon nous, de mieux comprendre leurs erreurs. L'enseignement peut-il tirer profit de la connaissance de ces rapports et de leurs effets? Comment transformer au besoin ces rapports? Quelles situations didactiques faut-il imaginer pour contraindre les élèves à un examen des informations ostensives et désignatives que véhiculent les écritures numériques et littérales?

Notre recherche s'attaque à ce problème et propose un enseignement visant une construction formelle des propriétés des opérations arithmétiques et faisant intervenir l'algèbre à titre d'outil privilégié de cette construction. Notre choix est grandement influencé par les études théoriques et pratiques suivantes: 1) les études de Chevallard sur l'enseignement de l'algèbre (Chevallard, 1984; Chevallard et Conne, 1984; Chevallard, 1989); 2) les études de Brousseau sur les situations didactiques (1986); 3) les études de Douady sur la dialectique outil-objet et les jeux de cadres (Douady, 1986); 4) les études de Vergnaud (1991) sur la théorie des champs conceptuels; 5) les théories piagétienne (Inhelder et al., 1977; Piaget, 1974, 1981) et néopiagétienne (Case, 1985; Siegler, 1983) sur le développement de la pensée et l'épistémologie génétique; 6) les études sur la mémoire, l'acquisition de connaissances, la résolution de problèmes et le raisonnement scientifique (Agnoli et Krantz, 1989; Klahr et Dunbar, 1988; Larkin et Simon, 1987; Sweller, 1988).

1. Une construction formelle des propriétés des opérations arithmétiques

L'expression *formelle* qui caractérise la construction des propriétés des opérations arithmétiques n'est pas accessoire: 1) elle renvoie à l'algèbre en tant qu'outil de formalisation des propriétés (construction formelle); 2) elle se réclame de l'épistémologie génétique, en référant

à l'activité du sujet qui recourt à des outils formels de raisonnement (logique des propositions, hypothèses, déductions) et en dissociant l'abstraction empirique, qui ne peut conduire à une construction opératoire, de l'abstraction réfléchissante qui rend possible une telle construction (dans le texte qui suit, pour éviter toute confusion entre les références au domaine de la didactique des mathématiques et à celui de la psychologie génétique, nous utiliserons le terme «algébrique» dans le premier cas et le terme formel, dans le second cas).

Par ailleurs, envisager une telle construction implique: 1) qu'il soit possible de construire des situations d'enseignement pensées pour des élèves débutant en algèbre et qui mettent en scène des connaissances algébriques sur les propriétés des opérations; 2) que les élèves disposent de processus formels de raisonnement.

Les théories et les méthodologies développées en didactique des mathématiques et en psychologie génétique nous permettent de répondre positivement à la première condition. En revanche, la seconde condition pose problème. Si les études de la psychologie génétique sur la pensée formelle nous permettent de supposer que les processus formels de raisonnement sont constitués chez un bon nombre des élèves concernés par notre recherche, plusieurs recherches (Politzer, 1990) en psychologie cognitive montrent que dans des contextes différents de ceux des épreuves piagétienne, plusieurs élèves de cet âge commettent des erreurs de raisonnement inférentiel. La mise en forme et le contrôle de processus de raisonnement formel semblent alors dépendre des contextes.

Nous pensons toutefois que le contexte qui est le nôtre peut contraindre à un raisonnement formel, ce raisonnement étant alors associé à la réussite des tâches. Nous croyons cependant essentiel d'insister sur la perspective à long terme qui est la nôtre dans cette recherche; notre optique n'est pas de produire des résultats qui s'ajoutent aux résultats déjà disponibles mais bien davantage de susciter des réflexions critiques sur la perspective d'enseignement envisagée.

2. L'algèbre: un outil privilégié dans la construction des propriétés des opérations arithmétiques

Dans la construction des propriétés des opérations arithmétiques, l'algèbre constitue un outil privilégié. Cette déclaration mérite d'être commentée.

Douady (1986) distingue le caractère outil et objet d'un concept. Parler du caractère outil d'un concept c'est indiquer qu'il intervient dans la résolution de problèmes variés. Cette intervention prend un sens en fonction de la nature des problèmes ou encore, en fonction des relations de ce concept avec d'autres concepts impliqués dans les problèmes. Pour cette raison, comme le souligne Douady, «du point

de vue outil, on ne peut parler d'un concept mais d'un réseau de concepts gravitant éventuellement autour d'un concept principal» (p. 10). La notion de champ conceptuel définie par Vergnaud (1991) montre bien ces liaisons.

Le caractère outil lie un concept aux problèmes dans lesquels ce concept est utilisé ainsi qu'aux autres concepts impliqués dans ces problèmes. Pour devenir objet, un concept doit être libéré de son contexte d'élaboration et d'application; il doit être «décontextualisé» pour devenir objet de savoir.

Dans la perspective d'enseignement qui est la nôtre, affirmer le caractère «outil» de l'algèbre comporte certains risques. En effet, comme le rappelle à juste titre Sierpinska (1992), si l'algèbre est vue comme un outil de généralisation des connaissances mathématiques, cela suppose que ces connaissances existent. Dans notre recherche, selon les résultats des études décrites antérieurement, il est plus probable que certaines de ces connaissances fassent défaut aux élèves concernés. Il est encore plus évident que les concepts définissant un premier savoir en algèbre ne soient pas encore construits chez ces mêmes élèves. Pourquoi maintenir alors notre déclaration sur le rôle de l'algèbre?

Faire intervenir l'algèbre à titre d'outil privilégié ne signifie pas que d'autres concepts (outils et objets) appartenant à d'autres cadres (ex: arithmétique...) ne puissent intervenir. Les élèves concernés par notre recherche possèdent un bagage de concepts numériques qu'ils peuvent mettre à profit pour donner un sens aux écritures littérales et développer ainsi des concepts (outils et objets) algébriques. Les recherches conduites par Douady (1986) montrent la richesse des jeux de cadres dans l'enseignement des mathématiques.

3. Du traitement des formes à celui des contenus d'écritures littérales: une stratégie d'enseignement

Notre analyse des erreurs des élèves dans le traitement d'écritures mathématiques, numériques et littérales, conclut à l'enchaînement privilégié du regard des élèves aux formes de ces écritures au détriment d'une identification satisfaisante des informations ostensives et désignatives qu'elles portent. Les manipulations d'écritures s'apparentent ainsi souvent à celles que pourraient produire un automate ne disposant que d'un lexique peu élaboré et de quelques règles formelles de production de phrases ou de séquences lexicales. Tel est le cas, il nous semble, en contextes de résolution d'équations algébriques et de comparaison d'écritures algébriques.

Ce rapport des élèves aux écritures, nous avons essayé de mieux le comprendre en le situant dans le cadre des échanges maître-élèves. Or, dans ces échanges, l'écriture constitue pour l'enseignant un outil

de présentation des contenus et d'évaluation de la maîtrise de ces contenus chez les élèves. L'élève, de son côté, interprète les écritures de l'enseignant, les mémorise également et enfin, les produit afin de montrer ce qu'il sait. Que dans ces conditions, s'opère progressivement un clivage entre signifiants et signifiés mathématiques n'a rien d'étonnant. Car, comme le souligne Vergnaud (1991): «Le sens est une relation du sujet aux situations et aux signifiants. Plus précisément, ce sont les schèmes évoqués chez le sujet individuel par une situation ou par un signifiant qui constituent le sens de cette situation ou de ce signifiant pour cet individu. » (p. 158). Nous pourrions compléter ces propos en suggérant que, dans les pratiques d'enseignement examinées antérieurement, des signifiés «extra-mathématiques» se greffent aux signifiants que sont les écritures mathématiques.

Comment concevoir alors les situations d'enseignement de l'algèbre pour lier sens et écritures? Pour identifier quelques éléments de réponse à cette question, nous proposons d'examiner quelques recherches sur les caractéristiques et les fonctions des représentations.

Le langage naturel, les écritures mathématiques, les diagrammes, les schémas, les graphiques, sont des représentations qui remplissent diverses fonctions; de plus en plus d'études sont maintenant conduites dans le but de mieux définir ces fonctions. Et pour cause... Comment en effet peut-on examiner l'activité intellectuelle complexe en faisant abstraction des productions symboliques qui accompagnent cette activité? De notre bref examen des recherches en ce domaine, nous retenons pour le moment quelques résultats en psychologie cognitive et en didactique des mathématiques.

Agnoli et Krantz (1989) montrent que les erreurs logiques accompagnant les raisonnements sur les probabilités peuvent être réduites lorsque les adolescents ont recours aux diagrammes de Venn pour représenter les relations entre les ensembles. L'analyse théorique des contenus et des fonctions des diagrammes réalisée par Larkin et Simon (1987) en résolution de problèmes conclut aussi aux avantages «computationnels» des diagrammes sur les descriptions verbales: a) le diagramme peut réunir plusieurs informations et évite ainsi des recherches peu économiques d'éléments nécessaires pour faire des inférences; b) l'information dans un diagramme est une «information localisée» et n'exige pas une référence «langagière»; c) le diagramme «supporte» perceptivement de nombreuses actions inférentielles (traduction libre du texte en page 98). Ces chercheurs ajoutent cependant que ces avantages ne peuvent être exploités que par les sujets qui sont en mesure d'en saisir et d'en traiter les informations, voire même de les construire.

Les avantages des diagrammes sur les descriptions verbales dans l'étude précédente sont montrés dans un problème de physique (problème de poulies) et dans un problème de géométrie. Nous pensons, à l'instar de Vergnaud (1991), que le langage constitue également un

outil de représentation et de raisonnement fort précieux. Le fait que cet outil fait généralement partie de la boîte à outils utilisée pour résoudre un problème et construire des connaissances fait en sorte qu'il soit facilement oublié.

Vergnaud (1991) souligne d'abord le fait que la fonction «d'aide à la pensée» du langage en mathématiques est souvent «sous-estimée» et attribue trois fonctions de représentation au langage: «- représentation des éléments pertinents de la situation; - représentation de l'action; - représentation des relations entre l'action et la situation» (p. 160). Il conclut son examen des représentations en affirmant que si le langage est un outil de pensée sur les propriétés et les relations, le symbolisme mathématique contribue à la conceptualisation, «par la transformation des catégories de pensées mathématiques en objets mathématiques».

Les outils de représentation auxquels a recours un sujet sont variés et dépendent des problèmes qu'il désire résoudre. Dans notre étude sur la construction des propriétés des opérations, en contexte d'enseignement introductif à l'algèbre, le langage symbolique ou plus précisément, les écritures littérales de calcul, est considéré comme «outil de pensée et d'action». Les études de Chevallard sur l'algèbre (1984, 1989) et d'une façon particulière, l'étude sur l'enseignement des identités remarquables (Chevallard et Conne, 1984), renforcent notre conviction concernant le rôle déterminant que le langage algébrique (l'écriture littérale) peut jouer dans la construction de connaissances sur les nombres et les opérations.

Le langage algébrique montre les relations et permet d'opérer sur ces relations dépouillées de leurs attachements numériques. Il facilite aussi une réflexion sur les opérations et sur les relations entre les nombres (et non entre des nombres) et les systèmes. Le travail cognitif peut ainsi se dérouler plus librement dans un espace théorique ou dans un espace d'hypothèses et également, dans un espace expérimentiel (Klahr et Dunbar, 1988), le sujet pouvant toujours transformer les écritures littérales en écritures numériques. La coordination des informations dans les deux espaces peut alors faciliter la mise en forme d'un raisonnement formel et conséquemment, la construction algébrique des propriétés des opérations arithmétiques.

Le langage algébrique constitue donc, à notre point de vue, un levier de la pensée formelle qui agit sur des transformations et des relations, libérée de supports concrets définis, tout en étant capable d'envisager les concrétisations possibles de ces transformations ou de ces relations (Piaget, 1981).

C'est dans cette optique que nous formulons l'hypothèse suivante: le traitement de formes d'écritures littérales peut donner accès aux contenus de ces écritures, s'il constitue un moyen approprié (voir le seul moyen) de résoudre des problèmes ou de construire des solutions à ces problèmes. Cette dernière condition doit être satisfaite; dans ce

cas, les écritures littérales, tout en retenant leurs fonctions de représentation et de communication, acquièrent une autre fonction heuristique: celle d'être des mémoires économiques d'opérations à réaliser et à examiner. Cette vision didactique des écritures se démarque fondamentalement de la vision courante qui consiste à attribuer aux écritures une fonction de codage, de transcodage de solutions à des problèmes, ces écritures étant alors souvent des compromis faits au maître: «Dans ce cadre, les formulations semblent plutôt destinées au maître, et soumises à son jugement» (Laborde, 1982, p. 25).

DESCRIPTION D'UNE SEQUENCE D'ENSEIGNEMENT

La séquence d'enseignement comporte 11 situations mettant en jeu des connaissances sur les opérations arithmétiques et les nombres. Ces connaissances interviennent dans des calculs littéraux appliqués généralement à des problèmes de maximisation de mesures de longueur. Sept de ces situations font intervenir un dispositif informatique (environnement LOGO). Nous effectuons d'abord l'analyse de la première de ces situations et présentons ensuite l'ensemble des situations.

1. Analyse de la première situation (S1-L)

La première situation comporte une tâche initiale et des tâches complémentaires. Nous reproduisons les consignes pour chacune de ces tâches, décrivons ensuite le dispositif Logo et procédons enfin à l'analyse de cette première situation.

1.1. La tâche initiale: consigne

«La mesure du côté d'un carré est déterminée par l'application d'une séquence d'opérations arithmétiques à des nombres différents. Les nombres sont identifiés par les lettres a, b, c et d; les opérations sont: +, -, *. Vous devez trouver la séquence permettant de produire la mesure maximale du côté d'un carré; le carré attendu est dessiné à l'écran. Attention, vous ne pouvez utiliser des nombres dans la séquence; seules les lettres sont permises. Après chaque proposition de séquence, l'ordinateur trace pour vous le carré obtenu. Vous pouvez, si vous le désirez, noter sur une feuille ce qui vous semble utile. Vous êtes invités à chaque tentative de solution de formuler si possible des hypothèses sur les relations entre les nombres et d'indiquer les relations que vous jugez déterminées; vous ne pouvez jamais accéder aux nombres directement. Après 8 tentatives infructueuses pour trouver la solution, vous pouvez consulter les comportements d'autres élèves à

cette tâche.»

Dans cette première tâche, les valeurs de chacune des lettres sont: $a = 3$; $b = 8$; $c = 5$; $d = 7$.

1.2. Les tâches complémentaires: consignes

Une fois réalisée la tâche principale, l'élève a établi les relations entre les nombres mais ne connaît pas généralement ces nombres; des tâches complémentaires lui sont alors proposées.

1ère tâche

Généralement, les élèves ont trouvé qu'il faut multiplier par le plus grand des nombres (ici b); cette première tâche a pour but de les amener à démontrer pourquoi il en est ainsi.

«Vous avez proposé " $b(d + c) - a$ "; croyez-vous que le résultat serait le même si je proposais " $d(b + c) - a$ "?»

«Pouvez-vous m'expliquer avec des calculs sur les lettres pourquoi " $b(d + c) - a$ " est plus grand que " $d(b + c) - a$ "?»

2ème tâche

Dans cette seconde tâche, il s'agit de poursuivre l'analyse des relations numériques et des propriétés des opérations.

«Si je fais $b(d + c - a)$ au lieu de faire $b(d + c) - a$ qu'arrive-t-il?»

«Je vais faire calculer les deux expressions $b(d + c) - a$ et $b(d + c - a)$; je vais faire tracer les carrés correspondants; je vous donne même la mesure des côtés de ces carrés. Pouvez-vous me dire d'où vient la différence entre ces mesures; pouvez-vous exprimer cette différence par une expression algébrique?»

1.3. Le dispositif -Logo

Le carré à reproduire, selon la consigne, apparaît à la gauche de l'écran et y demeure pendant l'exécution de la tâche (procédure carré-resolution). Une seconde procédure (procédure carré-essai) permet de produire les carrés correspondant aux séquences d'opérations suggérées par les élèves; ces carrés demeurent également visibles tout au long de la tâche.

À la droite de l'écran, les élèves inscrivent les relations trouvées entre les paramètres (ex: $b > c$), les hypothèses sur ces relations (ex: $b > c > d$?) et toute autre information (ex: b est négatif). Les séquences sont aussi consignées dans cette fenêtre. Une procédure contrôle l'inscription de ces données. Enfin, le contenu de cette fenêtre est enregistré. Pour faciliter la visualisation d'une situation dans l'environnement informatique, la figure suivante présente un extrait

des conduites d'un élève à la première situation.

Figure 1: Traitement de la première situation dans l'environnement informatique: illustration (extrait du protocole des élèves S9 et S10).

S9 et S10 identifient les élèves et I, l'intervenant; la longueur du côté du carré à reproduire (première figure à gauche de l'écran) est $b(d + c) - a$ [$a = 3$; $b = 8$; $c = 5$; $d = 7$]; les figures numérotées sont celles produites par les calculs des expressions soumises par les élèves (ex: figure 1: figure correspondant au calcul de l'expression soumise à l'essai #1)

les lettres sont a, b, c et d; les opérateurs sont + - *

```

1 [(a * b + c - d)]
hypothèses: a et b petits?
relations: ...
informations: ...
2 [(a * d + c - b)]
hypothèses: a > b?
relations: b > d
informations: ...
3 [(a * d + b - c)]
hypothèses: d et c?
relations: b > d et b > c
informations: ...
4 [(a * b + d - c)]
hypothèses: b et a?
relations: b > d > c
informations: ...
5 [(b * d + c - a)]
hypothèses: a et c?
relations: b > d > c
informations: ...

```

Verbalisations et actions

Essai #1:

S9: on peut essayer dans l'ordre: $a * b + c - d$ (cette expression apparaît sur l'écran au numéro 1);

S10: on est loin du carré à faire;

S9: a et b sont peut-être petits (à l'écran, l'élève écrit «a et b petits?», à côté de l'item «hypothèses»);

– puisqu'à ce stade, les élèves ne connaissent aucune relation et aucune information sur les lettres, aux items «relations» et «informations» à l'écran n'est associé aucun texte.

Essai #2:

S9: on va essayer en ne changeant que b et d;
 $a * d + c - b$

c est peut-être plus grand que b (à l'écran, l'élève écrit «c > b?», à côté de l'item «hypothèses»);

je pense que c'est sûr que b est plus grand que d (à l'écran, l'élève écrit «b > d», à côté de l'item «relations»);

S10: comment sais-tu ça?

S9: tu vois que le carré 2 est plus petit que le carré 1; ça veut dire que d est plus petit que b;

Essai #3:

S10: on va essayer de changer b et c pour voir lequel est plus grand;

I: comment le sauras-tu?

S10: si c est plus grand en l'enlevant on va avoir un plus petit carré;
 $a * d + b - c$

S10: à l'écran, il écrit d'abord «b > d et b > c», à côté de l'item «relations»

S9: on ne sait pas lequel est le plus grand de b ou de c (à l'écran, l'élève écrit «d et c?», à côté de l'item «hypothèses»);

Essai #4:

S10: j'essaie $a * b + d - c$

S9: écrit alors «b > d > c», à côté de l'item «relations»;

S10: écrit ensuite «b et a?», à côté de l'item «hypothèses»;

Essai #5:

S9: $b * d + c - a$

je veux voir entre b et a, en comparant avec la figure 2;
 on n'est pas plus avancé;

je vais chercher lequel est le plus grand entre a et c;
 écrit «a et c?», à côté de l'item «hypothèses»;

copie ce qu'il avait écrit à l'essai précédent pour l'item «relations»;

1.4. L'analyse de la situation

Selon la consigne de la tâche principale, il s'agit de produire des écritures littérales à partir de lettres et d'opérateurs donnés; l'ordinateur calcule ces écritures et les nombres trouvés deviennent les mesures des côtés des carrés que l'ordinateur produit. La solution de cette tâche passe par l'application des propriétés des opérations et en particulier, par la distributivité de la multiplication sur l'addition; l'introduction de parenthèses dans les écritures est nécessaire. Les écritures constituent ainsi des arrangements possibles de signes.

Une production systématique des arrangements, production disponible avec les outils de raisonnement formel dont disposeraient les élèves, pourrait conduire à une solution; une telle production engendrerait toutefois une multiplication des écritures littérales. La possibilité de raisonner formellement sur les relations entre les figures dessinées et sur les relations entre les écritures littérales correspondantes (séquences), faisant alors intervenir les connaissances numériques et algébriques sur les opérations et les nombres, diminue le nombre d'écritures littérales nécessaires. Dans la création des situations d'enseignement, nous supposons que les élèves mettront en œuvre leurs

connaissances arithmétiques et algébriques pour «réduire l'espace des problèmes» (Newell & Simon, 1972).

Dans cette première tâche, si les informations des écritures littérales sont examinées, en regard des résultats des calculs et des connaissances arithmétiques sur les opérations, on ne peut inférer de la réussite de cette tâche, une connaissance algébrique des propriétés des opérations. Ce sera le rôle des tâches complémentaires d'impliquer plus spécifiquement ces connaissances. Examinons à cet effet, les consignes de la première tâche complémentaire:

1) «Vous avez proposé " $b(d + c) - a$ "; croyez-vous que le résultat serait le même si je proposais " $d(b + c) - a$ "?»;

2) «Pouvez-vous m'expliquer avec des calculs sur les lettres pourquoi " $b(d + c) - a$ " est plus grand que " $d(b + c) - a$ "?».

Selon la première consigne, la tâche pourrait être ainsi résolue: donner des valeurs à b, d, c et a, respectant les relations d'ordre établies ou supposées entre ces lettres; effectuer les calculs numériques correspondant aux écritures littérales. Cette solution relève d'une vérification empirique des hypothèses; on peut poursuivre la vérification en prenant d'autres valeurs de nombres et obtenir ainsi plus d'assurance concernant la validité de ces hypothèses. La seconde consigne invite à une expression générale de ces hypothèses, expression algébrique; des calculs algébriques peuvent alors être réalisés et examinés. Le statut d'une telle démonstration dépend toutefois des rapports à l'écriture algébrique. Nous touchons à une limite des situations d'enseignement proposées; la gestion des variables didactiques intervient cependant dans ces situations pour mieux contrôler le devenir algébrique (formel) des connaissances sur les propriétés des opérations arithmétiques.

1.5. Les variables didactiques des situations

Les variables didactiques des situations d'enseignement concernent:

1) la nature de la réponse fournie par l'ordinateur ou l'intervenant, à la suite du calcul de l'expression algébrique. Appelons «m» le nombre obtenu; nous pouvons alors distinguer les réponses suivantes:

a) un carré de côté «m» est tracé;

b) un segment de droite de longueur «m» est tracé;

c) le nombre «m» est écrit;

d) le symbole > ou < est inscrit entre les deux dernières expressions calculées;

2) la nature de la réponse attendue:

a) reproduire un carré, un segment de droite;

b) ordonner les lettres;

c) identifier la nature des nombres associées aux lettres;

d) identifier la lettre associée à une fraction;

- e) exprimer algébriquement les différences ou les effets de transformations dans des expressions;
- 3) la présence ou non d'expressions déjà traitées par l'ordinateur ou l'intervenant; dans certaines tâches, les élèves doivent poursuivre une tâche en tenant compte des expressions déjà calculées;
- 4) les informations sur les lettres:
- aucune information sur les nombres associés aux lettres;
 - la nature d'un nombre ou de plusieurs des nombres est indiquée (ex: un des nombres est une fraction; un des nombres est un entier positif...)
 - la taille des nombres est précisée (ex: tous les nombres sont inférieurs à 5)
 - les relations entre les nombres sont définies (ex: les valeurs absolues de 2 des nombres sont identiques);
- 5) l'emploi de parenthèses: cet emploi peut être suggéré ou non;
- 6) la nature et la taille des nombres associés aux lettres
- 7) la nature et le nombre d'opérateurs arithmétiques;
- 8) la sériation des lettres: cette sériation peut être ou non suggérée;
- 9) les ressources mises à la disposition des élèves: accès à certaines des séquences proposées par l'intervenant ou les élèves; accès à certains des commentaires ou à certaines des hypothèses de l'intervenant ou des élèves; accès à certaines des interactions intervenant-élèves;

2. Description des situations

Nous distinguons par les lettres L (LOGO) et N (papier-crayon), les réalisations matérielles des situations.

La première situation a déjà été décrite (S1-L). Cette situation vise une familiarisation de l'élève avec le dispositif informatique et la nature des tâches à réaliser; elle engage également l'élève dans un processus de raisonnement algébrique. Si ce processus peut prendre appui sur des connaissances arithmétiques, il procède d'une intégration et d'une généralisation de ces connaissances. La gestion des variables didactiques dans cette première situation et dans les autres situations fournit des occasions et des moyens de réalisation d'un telle construction.

Seconde situation (S2-N)

Les valeurs des lettres a, b et c sont respectivement 9, 12 et 8; les opérateurs sont + et *. Il s'agit pour les élèves d'ordonner ces lettres en faisant calculer par l'intervenant des expressions formées des lettres, des opérateurs et de parenthèses; cet ordre établi, les élèves

sont invités à examiner davantage les différences entre les écritures produites.

Troisième situation (S3-L)

Les valeurs des lettres a, b, c et d sont respectivement 5, $\frac{1}{4}$, 8 et 2; les opérateurs sont +, * et -. La tâche initiale et la première tâche complémentaire sont similaires à celles décrites pour la première situation. Dans la seconde tâche complémentaire, connaissant les valeurs de c et de a (valeurs identifiées au cours de la première tâche associée), les élèves doivent soumettre des expressions afin de déterminer les valeurs des autres lettres.

Quatrième situation (S4-N)

Les calculs des expressions «a (b + c - d)» et «a (b + c) - d» sont réalisés; les valeurs des lettres sont: a = $\frac{1}{3}$; b = 9; c = 6 et d = 3; sachant qu'un des nombres est une fraction et que les autres sont des entiers positifs, les élèves doivent trouver à quelle lettre la fraction est liée.

Cinquième situation (S5-L)

La tâche initiale de la cinquième situation est similaire à celle de la première situation: les lettres a, b, c et d valent respectivement $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, 6 et 5; les opérateurs sont +, * et /; seuls des segments de droite sont dessinés à l'écran. Pour la première tâche complémentaire, l'ordinateur calcule l'expression amputée de la division par b, soit le calcul $c * (d + a)$ au lieu de $(c * (d + a)) / b$ et l'intervenant demande aux élèves d'identifier la valeur de la lettre d; pour la seconde tâche associée, l'ordinateur calcule l'expression $(c * (d + a)) / a$ et l'intervenant demande aux élèves d'identifier la valeur de la lettre a.

Sixième situation (S6-N)

Les élèves sont informés que des expressions peuvent être formées par les lettres a, b, c et d et trois des opérateurs arithmétiques; il leur est demandé d'indiquer comment ils procéderaient pour déterminer l'appartenance de ces nombres à l'ensemble des nombres naturels ou à l'ensemble des fractions inférieures à 1, de la forme $\frac{1}{n}$.

Septième situation (S7-L)

Les lettres a, b, c et d valent 2, 3, -4 et -5; les opérateurs sont *, - et /; seule une tâche initiale similaire à celle de la première situation est présentée.

Huitième situation (S8-L)

Les lettres a, b, c et d valent 4, -3, 2 et 3; les opérateurs sont *, - et +; deux segments de droite sont dessinés à l'écran, leurs mesures respectives sont celles des calculs des expressions « $b * (a + c) - d$ » et « $d * (a + c) - b$ ». Sachant que tous les nombres sont inférieurs à 5, sachant également que les valeurs absolues de 2 des nombres sont identiques, les élèves doivent identifier ces nombres et ensuite, trouver la séquence qui permet de produire le segment de longueur maximale.

Neuvième situation (S9-L)

Les lettres a, b, c et d valent 9, 1/3, 3 et 6; les opérateurs sont *, + et /; deux segments de droite sont dessinés à l'écran, leurs mesures respectives sont celles des calculs des expressions « $c * (a + d/b)$ » et « $c * (a + d)$ », soit respectivement 81 et 45. Ces mesures, ainsi que la valeur de la lettre a, sont données aux élèves qui doivent trouver la séquence qui permet de produire le segment de longueur maximale.

Dixième situation (S10-N)

Les équations suivantes sont présentées: 1) $8(a + b) - c = 12$; 2) $8(a - b) - c = 60$; 3) $8a + cb - c = 24$. Sachant que les nombres a, b et c sont inférieurs à 10, les élèves doivent trouver ces nombres ($a = 5$; $b = -3$; $c = 4$), en effectuant le moins d'essais possibles. Ils doivent donc utiliser le maximum d'information et mettre en place un raisonnement formel; ils sont informés que c'est leur raisonnement plus que la réussite de l'épreuve qui nous intéresse et qu'ils doivent donc nous rendre compte obligatoirement de leur raisonnement.

Onzième situation (S11-L)

Les lettres a, b, c et d valent -9, 8, 5, et 7; les opérateurs sont +, - et *; la tâche initiale est similaire à celle de la première situation. La mesure du côté du carré correspond au calcul de l'expression $b(d + c) - a$ (ou $b(c + d) - a$); l'élève est informé que les nombres utilisés sont entre -10 et +10 («ils peuvent être tous positifs ... tous négatifs, ... certains peuvent être positifs, d'autres négatifs...; vous pouvez avoir toutes les possibilités»). La figure à reproduire est présentée à l'écran de même que celle correspondant au calcul de l'expression: « $a(b + c) - d$ » (la figure produite est alors plus grande que la figure attendue mais inversée).

Deux tâches complémentaires sont présentées lorsque la tâche principale est terminée; les consignes de chacune de ces tâches sont: a) première tâche: «Vous avez proposé l'expression A (ex: $b(d + c) - a$); croyez-vous que le résultat serait le même si je propose l'expres-

sion B (ex: $d(b + c) - a$) ou encore l'expression C (ex: $c(d + b) - a$)? – «Pouvez-vous m'expliquer avec des calculs sur les lettres pourquoi le carré produit par le calcul de l'expression A est plus grand que celui produit soit par l'expression B soit par l'expression C?»; b) seconde tâche: «Si je fais calculer l'expression A (ex: $b(d + c) - a$) au lieu de l'expression B (ex: $b(d + c) - a$) qu'arrive-t-il?» – «Pouvez-vous exprimer cette différence par une expression algébrique?».

3. Expérimentations: les deux études réalisées

Une première étude est d'abord réalisée auprès de 8 élèves du secondaire dont l'âge varie de 13 à 15 ans; ces élèves sont regroupés en binômes lors de la réalisation des 10 premières situations; ils doivent par ailleurs réaliser seuls la onzième situation. Cette dernière situation est créée à la suite d'un premier examen des conduites et vise une meilleure identification des opérations logiques appliquées par ces élèves dans la réalisation des situations.

Dans une seconde étude, il nous a semblé important de lier davantage les questions relatives à la construction algébrique des propriétés des opérations et à la microgénése des opérations de la pensée formelle. Nous avons donc proposé à 6 autres élèves du même âge les mêmes situations, les situations 1 à 10 étant toujours effectuées en binômes et la situation 11, individuellement. La séquence suivante de présentation de ces situations a été adoptée: a) première situation; b) onzième situation; c) deuxième à quatrième situations d) onzième situation; e) cinquième à dixième situations; f) onzième situation.

Bien que la onzième situation soit présentée à quelques reprises, il faut savoir qu'un laps de temps variant entre 2 et 4 semaines s'écoule entre chacune des présentations; les élèves ignorent de plus qu'il s'agit d'une même situation. Enfin, au cours de la première étude, il nous est arrivé de devoir reprendre une tâche principale à deux reprises, certains élèves ne pouvant en une période compléter les tâches d'une situation; étant informés de ce fait, les élèves entreprenaient la tâche comme s'il s'agissait d'une tâche originale et ne semblaient pas avoir conservé de souvenirs précis ou utiles des réalisations antérieures. Pour ces diverses raisons, il nous est apparu plus intéressant de conserver une même situation afin de pouvoir mieux comparer les opérations logiques appliquées et d'en retracer le progrès.

ANALYSE DES CONDUITES DE L'ENSEMBLE DES ELEVES
(1ERE ET 2EME ETUDES) AUX DIX PREMIERES SITUATIONS:
CONSTRUCTION ALGEBRIQUE DES PROPRIETES DES OPE-
RATIONS ARITHMETIQUES

L'examen des conduites des élèves permet de retracer l'évolution des représentations des situations et des connaissances arithmétiques et algébriques sur lesquelles s'appuient ces représentations et enfin, l'évolution des outils de raisonnement formel utilisés. Le terme représentation, selon la définition donnée par Brun et Conne (1990), réfère à la «fonction qui prend en charge les interactions entre connaissance et situation» (p. 266).

Cet examen permet également de montrer l'intérêt et les limites des situations d'enseignement. Puisque ces situations sont peu habituelles, il nous a semblé plus pertinent d'adopter un mode de présentation chronologique des conduites des élèves et des événements d'apprentissage. Il nous est aussi apparu important de présenter de courts extraits significatifs des conduites des élèves.

Une première analyse des conduites des élèves impliqués dans la première étude a déjà été réalisée pour les dix premières situations (Lemoine, 1991; Lemoine, Conne et Brun, 1991). Nous complétons cette analyse par celle des conduites des élèves ayant participé à la seconde étude. Pour des raisons d'économie de référence, nous associons au groupe 1 les élèves de la première étude et au groupe 2 ceux de la seconde.

1. Les connaissances associées aux représentations des situations et leurs évolutions

1.1. Les connaissances arithmétiques qui déterminent la représentation des tâches principales des situations Logo

Dès la première situation, les élèves sans exception cherchent à déterminer le plus grand et le plus petit des nombres. Multiplier par le plus grand, soustraire ou diviser par le plus petit sont des solutions invoquées par tous les élèves. Les nombres entrevus sont des entiers naturels; la soustraction et la division par le plus petit relèvent de cette connaissance. Le rapprochement avec la figure attendue est alors immédiatement interprété comme un progrès vers l'identification du plus grand des nombres et une incitation à poursuivre cette identification.

L'idée de recourir à des parenthèses n'est généralement pas exprimée par les élèves; deux élèves seulement (un élève de chacun des groupes) demandent la permission de recourir à des parenthèses, mais ne semblent d'abord voir dans cette proposition qu'une façon de présenter une séquence sous une forme comparable à celles qu'ils ont

déjà rencontrées. Ce n'est qu'à la suite d'une invitation expresse à utiliser des parenthèses que ces élèves, comme les autres, pensent que c'est une façon de «faire plus», «d'obtenir un plus grand nombre».

Enfin, si les élèves manifestent une incapacité à trouver la solution ne connaissant aucun des nombres, ils s'engagent très rapidement dans la production d'écritures littérales et dès les premières figures produites à l'écran, plusieurs semblent comprendre que la solution du problème passe par la sériation des nombres (des lettres); des hypothèses sur les relations de grandeur entre ces lettres sont très vite formulées.

1.2. L'évolution des connaissances sur la multiplication

1.2.1. Les écritures de la forme $a(b \pm c)$: nombres naturels uniquement ou nombres naturels et fractions

Au cours de la première situation, l'utilisation de parenthèses dans les écritures littérales n'est pas spontanée et n'implique pas d'autres connaissances que la multiplication par le plus grand des nombres; la position du plus grand nombre dans l'écriture avec parenthèses y trouve ainsi une justification.

Au moment d'aborder les tâches complémentaires de la première situation, tous les élèves connaissent la solution « $b(c + d) - a$ » mais ignorent pourquoi cette solution est gagnante. Ils sont alors amenés à justifier cette solution. La majorité des élèves procèdent alors à une application de l'opération à des nombres différents; cela les satisfait. Confrontés à d'autres applications, ils avouent ne pas savoir sans calculer. Quelques élèves par ailleurs pensent que cela n'est pas nécessaire mais ne savent pas le montrer. Contraints d'avoir recours aux lettres pour expliquer les différences «constatées empiriquement», plusieurs élèves réalisent la multiplication sur les écritures littérales, comparent ces écritures et certains semblent parvenir à une justification algébrique de ces différences. Les relations d'ordre entre les nombres b , c et d sont alors investies. L'extrait suivant des conduites des élèves S1 et S2 (tableau 1) à la première situation illustre cette démarche.

Tableau 1: Extrait du protocole des élèves S1 et S2 à la première situation ⁽⁶⁾

Essai # 7

S1: $a \times c - b + d \dots$

c'est petit... c'est ça c'est pas a et c

6. S1 et S2 identifient les élèves et I, l'intervenant; la longueur du côté du carré à reproduire est $b(d + c) - a$ [$a = 3$; $b = 8$; $c = 5$; $d = 7$].

Essai # 8

I: bonne idée les parenthèses (S1 avait en effet pensé aux parenthèses)

S1: $d(b+c) - a$ le plus petit... en moins et le plus grand en multiplication, le plus petit en dehors...; on est pas loin

Essai # 9

S2: peut-être c ou b ... le plus grand en dehors ... pour multiplier...
 $b(c+d) - a$...; oui c'est ça

Au cours de la première situation, les élèves en majorité construisent les connaissances suivantes sur la multiplication:

1) si $a > b > c$, alors $a(b+c) > b(a+c) > c(a+b)$;

2) si $a > b > c > d$, alors $a(b+c-d) < a(b+c) - d$ (seconde tâche complémentaire);

3) si $a > b > c$, alors $a(b+c) > ab+c$ et que $ac+b$.

Trois élèves (un du groupe 1 et deux du groupe 2) «généralisent» la règle 3) ainsi: si en multipliant on met plus d'un nombre dans les parenthèses, on majore le résultat; l'application de cette règle dans la troisième situation (opérateurs: +, - et *; $a=5$; $b=1/4$; $c=8$ et $d=2$) conduit à un résultat inattendu (dans le cas suivant: $(b+d) \times (a-c)$, il se produit une inversion de la direction dans le tracé du carré; le paramètre de déplacement de la tortue est alors un entier négatif). Un seul de ces élèves (groupe 1) conclut justement (dans ce cas) sur la relation entre a et c ($a < c$) et enlèvent les dernières parenthèses. Les deux autres élèves, par ailleurs regroupés dans un même binôme, effectuent plus de 12 essais selon cette forme; ce n'est que sur l'invitation de l'intervenant qu'ils «consentent» à enlever les parenthèses mais la réussite de la tâche qui s'en suit est attribuée «au hasard».

Nous avons exploité cet événement auprès des autres élèves en leur demandant de prévoir dans cette situation les résultats des calculs des expressions $(b+d) \times (a-c)$ et $(b+d) \times a - c$. Un de ces élèves seulement prévoit justement les résultats en déclarant que dans le premier cas on multiplie « $(b+d)$ » par un plus petit nombre que dans le second cas; cet élève ne peut cependant indiquer algébriquement quelle sera la différence entre ces deux calculs. Les autres élèves déclarent qu'il faut calculer pour savoir.

Une des tâches complémentaires aux première et troisième situations avait pour objectif d'amener une représentation algébrique de la différence entre des expressions de formes: « $a(b+c) - d$ » et « $a(b+c-d)$ » (formes plus simples que les expressions précédentes). La réalisation de cette tâche nous a permis d'évaluer la complexité de construction de cette différence et le jeu de coordination de connaissances numériques et algébriques qu'elle exige. Nous reproduisons à cet effet quelques extraits des conduites des élèves S1 et S3 (tableau 2) devant se prononcer sur les différences entre les expressions « $(a+d) \times c - b$ » et « $(a+d-b) \times c$ ».

Tableau 2: Extrait du protocole des élèves S1 et S3 à la troisième situation ⁽⁷⁾

Tâche 1

I: si je fais $((a+d) \times c - b)$ et $((a+d-b) \times c)$ quelle sera la différence?

S3: on ne sait pas les nombres

S1: ça fait rien

S3: on a des équations avec 4 inconnues...

S1: mais non on essaie; S1 effectue les multiplications sur une feuille

S3: peut-être bc de différence

S1: $-bc$... non ... pas tout à fait

S3: $b < c$ ou b^2c

S1: attends ... on a bc là et là seulement b ... la différence c'est c

I: $bc - b = c$ c'est ça

S1: non c'est pas ça

I: est-ce que pour toi les deux calculs suivants donnent les mêmes résultats?
 $((a+d) \times c - b)$ et $((a+d-b) \times c - 1b)$

S1: oui $1 \times b$ ou b oui

I: alors puis-je dire que la différence est $bc - 1b$

S1: oui mais c'est plus clair si on écrit $cb - 1b$

ça ne marche pas plus ... j'ai jamais vu ça $cb - 1b$
 je prends des nombres

$c=8$ $d=3$ $a=5$ $b=2$

mettons

1) $(a+d-b) \times c = 48$

et

2) $(a+d) \times c - b = 62$ 14 la différence

S3: je sais abd non $adb \times c$

S1: pareil $ca + cd$ dans les 2 mais dans le 1), $-bc$ en plus et dans 2) $-b$

I: j'écris «1 fois b » dans 2)

S1: faut trouver la différence entre bc et $1b$

2×8 et 1×2 2×8 et 2×1

S1: 7 fois plus petit

S3: $-7b$

S1: faut mettre c ... $-cb$ 1 fois moins 7 fois moins... $c - 7$ de moins j'abandonne

Tâche 2

I: je vous fais calculer les expressions suivantes et je vous donne les résultats en plus

$c(d+a) - b = 55 \frac{3}{4}$

$c(d+a-b) = 54$

7. S1 et S3 identifient les élèves et I, l'intervenant; la longueur du côté du carré à reproduire est $c(d+a) - b$ [$a=5$; $b=1/4$; $c=8$; $d=2$].

S3: ça pas d'allure $1 \frac{3}{4}$ de différence

S1: ça veut dire que b est tout petit si ça change pas beaucoup
... pourquoi une fraction ...

la différence est -cb mais pas en plus - b tout ça fait $1 \frac{3}{4}$

c (d + a) - b = cd + ca - b = $55 \frac{3}{4}$
en bas ... si c'est plus petit la différence entre cb et b $1 \frac{3}{4}$... faut que b soit une fraction si c'est toutes des fractions ça peut pas donner 54

S3: on peut pas savoir

S1: je suis sûre que b est une fraction ... à peu près sûre
mais je vois pas comment faire... je vais calculer pour voir

$$c(d + a) - b = cd + ca - b = 55 \frac{3}{4}$$

$$c(d + a - b) = cd + ca - cb = 54$$

la différence $cb - b = 1 \frac{3}{4}$ si c est un entier et b une fraction

on peut avoir je pense $b = \frac{1}{4}$ d'où $55 \frac{3}{4}$ et pour faire $1 \frac{3}{4}$

S3: $8 \times \frac{1}{4} = 2$ ça donne 56 en haut si on enlève pas b et 2 de différence

Nous pourrions pousser plus loin l'analyse de ces conduites; nous nous contentons pour le moment de souligner le rôle structurant des connaissances sur les écritures algébriques dans la coordination des connaissances numériques. Et, au cours de la quatrième situation, les conduites de ces élèves et des autres élèves - qui parviennent à un niveau comparable de construction - témoignent de ce rôle. Rappelons cette dernière situation et analysons ensuite les conduites de ces élèves.

«Les calculs des expressions "a (b + c - d)" et "a (b + c) - d" sont réalisés; les valeurs des lettres sont: a = $\frac{1}{3}$; b = 9; c = 6 et d = 3; sachant qu'un des nombres est une fraction et que les autres sont des entiers positifs, les élèves doivent trouver à quelle lettre la fraction est liée.»

Dès la présentation de cette situation, près de la moitié des élèves tentent de s'expliquer la diminution du résultat à la suite de la transformation de la première écriture, diminution non encore exploitée dans les situations précédentes (1ère expression: 4; 2ème expression: 2). Puisqu'il n'y a pas de nombre négatif, puisque les différences entre les expressions impliquent les lettres a et d, ces élèves concluent qu'une de ces lettres est une fraction et procèdent systématiquement à un examen des conséquences des hypothèses «a est une fraction» et «d est une fraction».

Suivons à cet effet au tableau 3, les raisonnements des élèves S5 et S6 (notez que ces élèves sont âgés de 15 ans et plus avancés dans leur scolarité que les autres). Seuls ces élèves et les élèves S9 et S12 poursuivent le problème au-delà de ce qui est attendu, les autres s'arrêtant à l'identification de la lettre qui est une fraction.

Tableau 3: Extrait du protocole des élèves S5 et S6 à la quatrième situation ⁽⁸⁾

S5: mettons d pour la fraction; là (1ère expression), d est multiplié...

S6: donc augmenté

S5: ça ne peut pas être d parce que le nombre est plus grand là (1ère expression); on enlève un plus grand nombre ...

S6: c'est l'autre a qui est une fraction... j'en suis sûr

S5: on va voir... - une fraction d'un nombre et là (2ème expression) moins le nombre au complet... c'est bon c'est a la fraction

S6: ça diminue de la moitié ... la fraction c'est $\frac{1}{2}$...

S5: non... on a 1) ab + ac - ad et 2) ab + ac - d

S6: la différence 2 c'est d - ad... si a est $\frac{1}{2}$... d - $\frac{1}{2}d = 2 \dots d = 4$

S5: c'est pas sûr ... on peut faire comme dans les équations

I: comme vous voulez

$$S5: ab + ac - ad = 4$$

$$- ab - ac + d = -2$$

$$-ad + d = 2$$

je suis pas plus avancé ... qu'est ce que je fais avec ça

I: d (?) = -ad + d ... pouvez-vous écrire autrement - ad + d en complétant ce que je viens de commencer?

S5: pour d faut mettre 1 ... on a d (+ 1) mais avec - ad ...

I: je ne vous demandais pas de trouver a mais d

S6: on peut mettre des nombres: faut faire 2 on a une fraction fois un nombre et un autre nombre pour faire 2; pas d = 1...;

S5: d est plus grand que 2 parce qu'on enlève

S6: ah oui... mettons d est 4 ... $4 - a \cdot 4 = 2 \dots -4a = -2; 4a = 2; a = \frac{1}{2};$

I: et si d vaut 8

S6: $8 - a \cdot 8 = 2 \dots -6 \cdot 8a = 6 \cdot a = \frac{6}{8} \dots$ ça pourrait marcher

I: et si d vaut 3

S5: $3a = 1; a \dots \frac{1}{3}$ aussi

S6: il faut savoir plus sur les autres p. c. q. quand on multiplie les autres nombres on change aussi tout

mettons b = 6; a = $\frac{1}{3}$; d = 3; c = 9

mettons $\frac{1}{3}(6 + 9 - 3) = 4$ et l'autre 2 c'est ça

1.2.2. Les écritures de la forme a (b ± c) / d: nombres naturels et fractions

L'introduction de la division dans les écritures, au cours de la cinquième situation, amène spontanément chez tous les élèves une représentation de la situation qui s'appuie sur les connaissances suivantes:

8. S5 et S6 identifient les élèves et I, l'intervenant [a = $\frac{1}{3}$; b = 9; c = 6; d = 3].

diviser fait diminuer un nombre; diviser par un plus petit nombre est souhaitable si on veut maximiser une mesure. Rappelons que dans la cinquième situation, les valeurs des lettres sont: $a = 1/4$; $b = 1/8$; $c = 6$ et $d = 5$; les opérateurs sont $+$, $*$ et $/$. Tous les élèves réussissent la tâche initiale en fondant leur raisonnement sur ces connaissances, sans avoir besoin de supposer l'existence de fractions. La réalisation des tâches complémentaires les oblige cependant à opérer sur les fractions.

Dans la première tâche, devant comparer les résultats des calculs des expressions « $c(a + d) / b$ » et « $c(a + d)$ », la majorité des élèves concluent facilement que b est une fraction en invoquant la technique de division par une fraction qui «inverse la fraction». Bien qu'ils soient tous capables d'exprimer par un opérateur scalaire la relation entre les calculs des deux expressions, un seul élève du groupe 2 peut toutefois identifier directement la valeur de b . Certains des autres élèves procèdent alors par attributions successives de valeurs à b .

Dans la neuvième situation, les lettres a , b , c et d valent 9, $1/3$, 3 et 6; les opérateurs sont $*$, $+$ et $/$. Deux segments de droite sont dessinés à l'écran, leurs mesures respectives sont celles des calculs des expressions « $c * (a + d/b)$ » et « $c * (a + d)$ », soit respectivement 81 et 45. Ces mesures, ainsi que la valeur de la lettre a , sont données aux élèves qui doivent alors trouver la séquence qui permette de produire le segment de longueur maximale.

Plusieurs élèves proposent rapidement l'écriture « $c * (a + d) / b$ » (135), comparent cette expression à la seconde et affirment être certains que b est $1/3$. Parmi ceux-ci, on retrouve ceux qui dans la situation précédente procédaient par attributions successives de valeurs à b . Invités à comparer la première et la seconde expression, quelques-uns parmi ces élèves réalisent les multiplications, trouvent les différences entre les écritures produites (1. $ca + cd / b = 81$; $ca + cd = 45$; 2. $cd/b - cd = 36$; 3. $d/b - d = 12$) mais ne peuvent exploiter algébriquement leur dernière forme d'expression de ces différences, soit $d/b - d = 12$ pour conclure sur d . Ils procèdent alors par substitutions successives de valeurs à d .

1.2.3. les écritures de la forme $a(b \pm c) / d$: entiers relatifs

Tous les élèves, dans la septième situation (valeurs des lettres: $a = 2$; $b = 3$; $c = -4$ et $d = 5$; opérateurs: $*$, $-$ et $/$), dès l'apparition d'un résultat négatif (entier négatif), rappellent les règles de calcul sur les entiers relatifs; quelques élèves font aussi référence à la valeur absolue des relatifs dans l'interprétation des écritures. Quelques élèves parviennent ainsi à produire une écriture dont le calcul conduit en valeur absolue au résultat attendu, mais un seul élève (S12) s'avère capable spontanément de mettre en place une vérification systématique des hypothèses et parvenir ainsi à trouver la solution. Un extrait du com-

portement de cet élève est alors montré aux autres (essai #5 du tableau 4); un de ces derniers élèves avoue alors comprendre ce qu'il faut faire et parvient ainsi à compléter la tâche.

Il nous semble ici intéressant de présenter un extrait du protocole de l'élève qui réussit spontanément (tableau 4); cet élève écrit sur papier chacune des hypothèses et explique clairement pourquoi il en abandonne certaines et en conserve d'autres. C'est cette écriture sur papier que l'autre élève qui réussit la tâche (S9) met à profit; il semble donc ainsi que cette écriture contrôle le procédé de vérification des hypothèses et facilite l'application des opérations formelles.

Tableau 4: Extrait du protocole des élèves S11 et S12 à la septième situation⁹⁾

Essai #5

S12: $d * (b - c) / a$

S11: on a trouvé

S12: non c'est à l'envers, pareil en valeur mais négatif c'est une affaire d'ordre

S11: moi je dis qu'il y a une erreur

S12: non faut voir ... il écrit sur papier:

1) si -: p. c. q. $d * (b - c)$ positif et a négatif

mettons d positif ... on va voir ça... d le plus grand en valeur

si je le mets à la place de a ça change la valeur mais pas le signe p.c.q. a est négatif; on va essayer

Essai #6

S12: $a * (b - c) / d$

peut-être que d est négatif et a aussi

non c'est pas ça... p. c. q. avant ça serait probablement un $+$ (essai #5) ... à moins que... c'est de plus compliqué

je vais écrire: un des 2 a et d est négatif

mettons d alors ... -/+ ça donne -

mais a est le plus petit en valeur... faut qu'il reste à la division

si d est négatif et a positif, faut que d multiplie un négatif

sinon c'est positif en tout

j'essaie d négatif et la parenthèse négative... je pense que

Essai #7

S12: $d * (c - b) / a$... on l'a ...

I: alors que dis-tu des nombres

S12: d négatif... c négatif b positif et a positif

si c est négatif quand on fait $-c$ ça devient plus et on a le même nombre en tout mais négatif...

9. S11 et S12 identifient les élèves et I, l'intervenant; la longueur du côté du carré à reproduire est $d(c - b) / a$ [$a = 2$; $b = 3$; $c = -4$; $d = -5$].

I: ah oui?

S12: sûr... c négatif... b positif b - c c'est comme b avec c sans les signes et c - b c'est comme c avec b mais en négatif faut que d soit négatif si a est positif ... je vais essayer avec a c - b

Essai #8

S12: $a * (c - b) / d...$ c'est ça a est positif...
là je sais plus je dois revoir tout ça

S12 propose alors un tableau pour vérifier tout ça en disant que cela va être long...; I intervient en lui demandant plutôt de reprendre ce qu'il a fait ... cet élève parvient ainsi à démontrer la solution de ce problème

1.2.4. Au terme de cette séquence, une situation de résolution d'équations du premier degré à 3 inconnues

Pour la majorité des élèves, la résolution d'équations comportant plus d'une inconnue n'a pas fait l'objet d'un enseignement en classe. Dans la dixième situation, les équations suivantes sont présentées: 1) $8(a + b) - c = 12$; 2) $8(a - b) - c = 60$; 3) $8a + cb - c = 24$; sachant que les nombres a, b et c sont inférieurs à 10, les élèves doivent trouver ces nombres ($a = 5$; $b = -3$; $c = 4$). La majorité des élèves réalisent les calculs et procèdent à une comparaison des écritures. Ils cherchent à expliquer les différences entre les nombres par l'examen comparatif d'écritures voisines. A l'exception de 2 élèves du groupe 2, tous trouvent que b doit être un nombre négatif. Certains essaient en vain de mettre en œuvre des calculs qui leur permettraient de trouver les valeurs, mais cette tentative échoue. Les élèves (S1, S5, S9, S12) qui trouvent alors les valeurs des lettres procèdent à un examen des différences entre les expressions 1 et 3, tenant compte du fait que b est négatif.

2. Le rôle structurant des écritures littérales dans la coordination et l'élaboration de connaissances arithmétiques et algébriques et l'examen différentiel des conduites des élèves

2.1. La coordination et l'élaboration de connaissances arithmétiques et algébriques

Nous retenons de cette première analyse le rôle déterminant des écritures littérales dans la coordination et l'élaboration de connaissances arithmétiques et algébriques. Ainsi, à la première situation, ces écritures ne sont pour les élèves qu'un masque superficiel des opérations arithmétiques et des connaissances numériques, masque mis en place par l'adulte pour «jouer à l'enseignant». Elles perdent rapidement ce rôle de codage-traduction d'une réalité arithmétique pour devenir un support symbolique indispensable à la formulation et la validation

d'hypothèses; ces hypothèses concernent les nombres, les ensembles de nombres et les opérations.

En acceptant d'opérer sur ces écritures et de les comparer, dès les premières situations, certains élèves semblent déjà conférer un statut algébrique à ces écritures. Ainsi, s'ils ont recours à leurs connaissances arithmétiques pour traduire ces écritures en écritures numériques, ils formulent les conclusions de leurs expériences numériques dans l'espace «algébrique». Cet espace devient pour eux et pour certains autres élèves, dans les situations subséquentes (quatrième à dixième situations), l'espace de raisonnement privilégié.

L'entrée dans l'espace de raisonnement «algébrique» entraîne une modification des connaissances; en devenant «objets du raisonnement», les connaissances arithmétiques peuvent être coordonnées et transformées en «objets d'un savoir algébrique initial». Les conduites et les réflexions de quelques élèves dans les dernières situations, en particulier celles du sujet S12 à la septième situation et du sujet S5 à la dixième situation, nous invitent à conclure à une telle construction. C'est selon nous parce qu'elles sont un savoir que les connaissances de ces élèves acquièrent une fonction d'utilité dans la résolution des tâches de ces situations.

2.2. L'examen différentiel des conduites des élèves

Au cours de l'analyse, nous avons à quelques reprises décrit des écarts entre les conduites des élèves. Huit élèves sur quatorze (groupe 1: S1, S2, S5, S6, S8; groupe 2: S9, S12, S13) réalisent une construction algébrique des propriétés des opérations; les raisonnements de ces élèves aux dernières situations sont de même nature que ceux présentés dans les protocoles.

Un second examen comparé des conduites des élèves en regard de chacune des situations nous permet de relever les événements suivants. Dès la troisième situation, six des huit élèves qui parviennent à une construction algébrique ne recourent à des traductions numériques des écritures littérales qu'à la suite d'hypothèses formulées dans l'espace algébrique; ils procèdent généralement à une coordination des connaissances numériques et algébriques et concluent dans l'espace algébrique en référant non aux nombres spécifiques mais aux systèmes de nombres. Les deux autres élèves de ce sous-groupe n'arrivent à un tel niveau qu'à la suite de la sixième situation.

Deux élèves (groupe 1: S3; groupe 2: S11) peuvent mettre à profit leurs connaissances arithmétiques et réussir les six premières situations mais leur réussite est de nature arithmétique. De nombreux essais sont réalisés; et peu d'hypothèses sont formulées. Ces élèves peuvent par ailleurs coordonner les comparaisons des figures et des expressions littérales et en déduire certaines relations entre les lettres; ils peuvent aussi opérer sur les écritures littérales mais ne sa-

vent traiter des différences entre ces écritures dans cet espace algébrique.

Quatre élèves (groupe 1: S4, S7; groupe 2: S10, S14) ne peuvent réussir que les tâches principales des quatre premières situations. Ils n'énoncent généralement que des relations binaires (ex: $b > c$); ils concluent aussi très souvent sur les relations sans procéder à des vérifications ou sans que ces conclusions résultent d'un raisonnement logique approprié. Ces élèves s'avèrent en plus incapables d'opérer sur les écritures littérales et conséquemment, de traiter des différences entre ces écritures que sous leur aspect «forme». Chez ces élèves, le recours à des traductions numériques est possible et ce n'est que dans cet espace que les justifications sont conduites. Mentionnons enfin que trois de ces élèves sont les plus jeunes des sujets de notre recherche.

ANALYSE DES CONDUITES DE L'ENSEMBLE DES ELEVES (1ERE ET 2EME ETUDES) A LA ONZIEME SITUATION: RAISONNEMENT FORMEL ET RAISONNEMENT ALGEBRIQUE

L'examen des conduites des élèves des groupes 1 et 2 à la onzième situation nous permet maintenant de lier raisonnement formel et raisonnement algébrique.

1. Analyse du comportement d'un élève de niveau formel à la onzième situation

La tâche initiale de la onzième situation est similaire à celle de la première situation. Les lettres a, b, c et d valent -9, 8, 5, et 7; les opérateurs sont +, - et *; la mesure du côté du carré correspond au calcul de l'expression $b(d + c) - a$ ou $b(c + d) - a$. L'élève est informé que les nombres utilisés sont entre -10 et +10; enfin, la figure à reproduire est présentée à l'écran de même que celle correspondant au calcul de l'expression: « $a(b + c) - d$ ».

Les consignes des tâches complémentaires sont: a) première tâche: «Vous avez proposé l'expression A (ex: $b(d + c) - a$); croyez-vous que le résultat serait le même si je propose l'expression B (ex: $d(b + c) - a$) ou encore l'expression C (ex: $c(d + b) - a$)? – «Pouvez-vous m'expliquer avec des calculs sur les lettres pourquoi le carré produit par le calcul de l'expression A est plus grand que celui produit soit par l'expression B soit par l'expression C?»; b) seconde tâche: «Si je fais calculer l'expression A (ex: $b(d + c) - a$) au lieu de l'expression B (ex: $b(d + c) - a$) qu'arrive-t-il?» – «Pouvez-vous exprimer cette différence par une expression algébrique?»

Dans l'analyse du raisonnement des élèves, nous essayons d'une

part d'identifier les caractéristiques générales d'une démarche formelle, soit la coordination du possible et du nécessaire et la maîtrise des opérations de la logique formelle (Inhelder et Piaget, 1970; Noelling, 1982). Nous présentons en premier le protocole du sujet S6 (tableau 5); ce protocole montre bien l'interaction entre les opérations relevant des connaissances du domaine d'application et les opérations de la pensée formelle (pour faciliter l'examen de ce protocole, nous avons numéroté les énoncés qui nous semblent relever d'un même raisonnement ou d'un raisonnement élaboré sur la base d'un même type de données).

Tableau 5: Extrait des protocoles du sujet S6 aux tâches de la onzième situation ⁽¹⁰⁾

Tâche initiale: Première passation

S6:

Séquences:

Résultats:

Essai#1: $a(b + c) - d$ -124

NOTE: le carré est plus grand que le carré attendu mais inversé;

1) tous les nombres peuvent être négatifs ... on augmente alors avec -d; puisque les nombres sont petits on augmente pas beaucoup;

2) si les autres sont tous négatifs... ça ne se peut pas... on aurait positif alors ... - * - = + et encore plus; ils sont pas tous négatifs;

3) en tout cas pas tous les trois a, b et c; si b et c sont négatifs, alors a est sûrement grand puisqu'on a une figure plus grande que celle qu'on veut;

4) je pense que a est grand peut-être le plus grand ... peut-être en négatif...; s'il est négatif, on peut le savoir en l'envoyant à la place de d: mettons d positif avec b et c... ça deviendrait positif;

Essai#2: $d(b + c) - a$ 100

5) je suis sûr que $d(b + c)$ c'est positif ... peut-être tous négatifs...

6) $a(b + c) > d(b + c)$ si on oublie les négatifs... a > d parce que c'est plus petit qu'avant... on peut pas savoir alors... comme ça;

7) je reprends tout ça: au moins un des trois a, b, et c est négatif...

8) si c'est pas a ... ça pourrait être b et c ... b ou c ... pas b ou c ca ferait trop petit;

10. S6 identifie l'élève et I, l'intervenant; les lettres a, b, c et d valent -9, 8, 5, et 7; les opérateurs sont +, - et *; la mesure du côté du carré à reproduire correspond au calcul de l'expression $b(d + c) - a$ (ou $b(c + d) - a$); nous indiquons les mesures associées à chacune des séquences pour faciliter la lecture des protocoles; l'élève n'a jamais accès à ces mesures mais uniquement aux figures à l'écran.

9) si b et c sont négatifs alors d est négatif pour que ça fasse positif là (2) ... alors a est positif et plus grand que d;

10) si b et c positifs alors a est le plus grand mais négatif et d est pas loin mais positif;

11) on peut pas savoir...; faut essayer pour b et c s'ils sont positifs et qu'on les sépare... ça va diminuer si d est positif mais grand et augmenter si d est positif mais pas grand et si d est négatif ça va diminuer encore plus ...

12) si b et c négatifs; si d est grand et négatif comme avant ...

Essai#3: $c(d + b) - a$ 84

13) $d > c$ mais le signe on peut pas savoir;

14) faut que les trois soient de même signe je suis à peu près sûr; si d b et c sont positifs alors a est négatif; si d b et c sont négatifs alors a est positif;

15) a est sûrement grand... si on pense pas au signe;

16) faut mettre d et a ensemble; comme a et d sont grands ça va devenir tout petit;

Essai#4: $c(d + a) - b$ -18

17) c'est ça ils sont pas de même signe... et $a > d$ sans les signes et faut qu'il soit négatif;

18) et je pense que c est positif;

19) on va voir pour b;

Essai#5: $b(d + a) - c$ -21

20) je parie comme ça... a négatif mais grand ensuite d b et c positif; donc... non c'est pas d le plus grand ... c'est b;

Essai#6: $b(d + c) - a$ 105

Tâche initiale: Seconde passation

S6:

Séquences:

Résultats:

Essai#1: $a(b + c) - d$ -124

1) le carré est plus grand en négatif

2) la multiplication est négative: on va essayer

- a b c négatifs, ça va pas ça serait positif et d est en soustraction pas en multiplication ... pas assez ... a b c négatifs on dit non;

- a b c positifs on refuse aussi;

- a b négatifs et c positif: la somme serait diminuée et la valeur aussi; on refuse;

- a b positifs et c négatif: on refuse comme avant;

- a c négatifs et b positif: non;

- a c positifs et b négatif: non;

- b c positifs et a négatif: somme positive max, c'est possible;

- b c négatifs et a positif: somme négative max, c'est possible

3) faudra savoir si a est positif ou négatif ou b c positifs ou négatifs;

- maintenant d et a peuvent-ils être de même signe?

- je pense que d est positif p, c, q. on obtient plus grand en négatif; il est peut-être plus grand en valeur que a aussi;

- facile à savoir: si $d > a$ puisque b et c sont de même signe, la valeur devrait être plus grande parce qu'il multiplie une somme;

Essai#2: $d(b + c) - a$ 100

4) on a diminué et c'est positif;

- b c positifs, a négatif et d positif: avec a négatif on augmente la valeur, avec d positif, on a positif mais plus petit qu'avant; mais attendez... tout va dans le même sens alors comme avant;

- b c positifs, a négatif et d négatif: impossible;

- b c positifs, a positif: on a déjà dit non;

- b c négatifs, a positif, d positif: non;

- b c négatifs, a positif, d négatif: c'est possible, mais on diminue;

5) reste 2 possibilités:

- b c d positifs et a négatif avec $a > d$ en valeur absolue; cela irait avec la diminution;

- b c d négatifs et a positif mais là mettons a maximum 10 il serait enlevé ce qui fait diminuer;

- je pense que d et a sont pas loin en valeur absolue;

- mais faut noter qu'on est pas loin...

6) faut maintenant je pense comparer b c et d, puisqu'ils sont de même signe, c'est facile;

Essai#3: $c(d + b) - a$ 79

7) $d > c$ en valeur absolue;

8) si d b c sont positifs et a négatif il reste une possibilité uniquement c'est que d est plus petit que b ...; de toute façon, si d b c sont négatifs et a positif c'est pareil;

- je suis sûr que a est bien placé quelle que soit sa valeur puisqu'il n'est pas de même signe que d, b et c;

- mais je pense qu'on peut pas savoir comme ça si d b c sont positifs ou négatifs;

9) la seule solution c'est donc $b(d + c) - a$;

I: tu en es sûr

S6: évidemment, tu veux voir

Essai#4: $b(d + c) - a$ 105

Le sujet S6 effectuée à deux reprises la tâche principale; même s'il réussit une première fois à trouver la solution du problème, il se déclare en effet insatisfait de sa démarche et propose de reprendre la tâche (une semaine d'intervalle sépare les deux passations). Examinons ces deux démarches.

Lors de la première passation, la conduite de ce sujet est marquée par un jeu continu du possible et du nécessaire; les actions réalisées

dans l'environnement (séquences proposées) sont commandées par l'analyse des transformations possibles des expressions en fonction d'hypothèses sur les relations entre les nombres et les résultats envisagés selon ces relations. Les hypothèses sont de plus d'abord «testées» mentalement et ne conduisent à une vérification dans le réel (exécution d'une séquence) que s'il est impossible logiquement de les confirmer ou de les infirmer.

Ainsi, dès l'entrée dans la situation, aux énoncés 1, 2 et 3, ce sujet formule une première hypothèse, puis la rejette au profit d'une autre puis d'une autre encore; il conclut à l'énoncé 3 en affirmant l'impossibilité des premières conjonctions sur l'appartenance des lettres au système des entiers négatifs. Le recours aux opérations de conjonction et de disjonction et à leurs inverses, soit l'incompatibilité et la négation conjointe, est alors manifeste.

A l'énoncé 4, le hypothèse «a est le plus grand des nombres» est formulée puis testée en proposant une séquence dans laquelle les lettres a et d sont permutées. C'est à ce moment qu'une hypothèse sur la nature des nombres d, b et c est exprimée; par cette formulation le sujet montre bien, il nous semble, qu'il saisit la difficulté de conclure sur la lettre a en négligeant les autres lettres (saisie, il nous semble, de l'impossibilité d'une affirmation sur a). Le résultat de la séquence proposée ne contredisant pas ces diverses hypothèses, le sujet conclut dans un premier temps à leur confirmation mais se ravise en envisageant une hypothèse alternative qui pourrait aussi expliquer le résultat (énoncé 5). Toutefois, comme le montre ces premiers énoncés et les énoncés subséquents de cette première passation, les inférences et déductions sont très souvent fausses. Ces défauts s'expliquent selon nous par une conjonction de connaissances souvent inappropriées sur les entiers relatifs (ex: énoncé 1) et d'opérations de la logique formelle en voie d'élaboration et qui ne peuvent orienter une démarche systématique de vérification d'hypothèses. Le sujet tente ainsi de prendre en compte simultanément plusieurs hypothèses mais ne parvient pas à élaborer un plan de vérification convenable.

Lors de la reprise de cette tâche, l'expérimentateur impose d'entrée la séquence que le sujet avait proposée au premier essai de la première passation. Un examen du protocole nous convaint aisément de la nature formelle du raisonnement de ce sujet qui s'avère, selon l'expression proposée par Noelting (1982), «capable de passer d'un connecteur logique à un autre devant une situation réelle qu'il expérimente». L'insatisfaction que le sujet rencontre après la première résolution de la tâche et qui le contraint à demander une reprise de cette tâche mérite également d'être soulignée; elle témoigne éloquemment de l'action indépendante de ce sujet qui ne se contente pas de réussir une tâche mais va au-delà d'une telle réussite, vers une compréhension formelle. Le problème qu'il se pose alors n'est plus celui de l'expérimentateur mais lui est propre.

Le contexte dans lequel prend place ce raisonnement mérite d'être examiné. En effet, l'impossibilité d'analyser systématiquement et d'une manière indépendante l'effet de chacun des paramètres pèse sur le raisonnement formel et nous apparaît être une contrainte importante pour la prise en compte dans un même regard des opérations de la logique formelle; cette contrainte constitue à notre point de vue un catalyseur non négligeable de la pensée formelle et plus spécifiquement, de la coordination des opérations de la logique formelle. Nous croyons également que cet effet est modulé par la possibilité de recourir à de multiples connaissances arithmétiques et algébriques pour générer et vérifier les hypothèses. L'examen des comportements des autres élèves à la onzième situation nous permet de mieux étayer ces interprétations.

2. Analyse des comportements de l'ensemble des élèves à la onzième situation

Dans notre poursuite de l'analyse des comportements des élèves, nous examinons d'abord les comportements à la dernière présentation de la onzième situation, soit au terme de la séquence d'enseignement. Cinq des huit sujets qui réalisent une construction algébrique des propriétés des opérations présentent un raisonnement formel comparable à celui du sujet S6 que nous venons d'examiner; ce sont les sujets S1, S5, S6, S9, S12. Les trois autres sujets (S2, S8, S13) envisagent plus rarement des hypothèses alternatives et effectuent plusieurs erreurs d'implication, ce qui a pour résultat d'amener une prolifération d'essais et une révision fréquente des conclusions qu'ils croyaient fondées. La recherche d'hypothèses alternatives ne survient souvent que lorsqu'ils sont contraints après plusieurs essais de revoir leur démarche; ils parviennent ainsi à terme à une conclusion qui leur paraît nécessaire.

Une analyse plus poussée des opérations logiques de ces sujets montre une juxtaposition plutôt qu'une coordination des énoncés constitués par les connecteurs logiques; cette juxtaposition s'explique par une utilisation plus fréquente de l'affirmation que de la conjonction et de la disjonction, ces dernières opérations n'étant utilisées que dans les impasses. On relève aussi chez ces sujets des connaissances plus élémentaires sur les opérations impliquant des entiers relatifs et des fractions.

Les deux élèves qui réussissent les six premières situations (S3 et S11) formulent peu d'hypothèses au moment du traitement de ces situations; par ailleurs, ils s'avèrent capables dans la tâche principale de la onzième situation de formuler plusieurs hypothèses; ces hypothèses ne considèrent toutefois qu'un paramètre de la tâche. Le raisonnement procède d'abord par affirmations et négations incom-

plètes; ainsi, le plus grand des nombres est recherché en proposant des séquences dans lesquelles chacune des lettres occupe tour à tour la position du multiplicateur, sans un contrôle des positions des autres lettres (ex: $a * (b + c) - d$ et $b * (d + c) - a$). Ce n'est qu'après plusieurs tentatives que la recherche devient systématique, les élèves invoquant alors la possibilité d'un multiplicateur négatif.

On observe chez ces élèves une multiplication importante des essais et finalement, un abandon de la tâche; l'impossibilité de conduire un raisonnement implicatif explique cet échec. Le nombre d'essais à la onzième situation est enfin bien supérieur à celui obtenu dans les autres situations où ils ne sont pas contraints de formuler des hypothèses. La réussite des six premières situations nous semble alors davantage attribuable aux connaissances arithmétiques et algébriques qu'ils utilisent pour interpréter les résultats des essais et conclure d'une façon «opportuniste» sur les relations entre les lettres qu'aux opérations logiques sur les relations.

Enfin, chez les autres sujets, les raisonnements sont empiriques; aucune hypothèse n'est formulée; aucune recherche structurée d'information n'est alors réalisée. Ces sujets abandonnent la tâche principale très rapidement, ne pouvant bénéficier de plus d'un bagage de connaissances arithmétiques suffisant pour interpréter le résultat obtenu à chacun des essais.

3. Evolution du raisonnement formel chez l'ensemble des élèves

Nous complétons cette analyse en essayant de rendre compte de l'évolution du raisonnement formel. Notons premièrement que chez les sujets qui ne peuvent effectuer que les quatre situations, on observe aucune différence entre les raisonnements conduits à la onzième situation, quel que soit le moment de réalisation de cette situation. Par ailleurs, chez les sujets qui réussissent les six premières situations et s'avèrent capables de formuler des hypothèses lors de la dernière présentation de la onzième situation, on assiste à une évolution du raisonnement. Les quatre premières situations semblent contribuer à la mise en place d'un premier niveau de raisonnement formel.

Le recours à des hypothèses et à des vérifications de ces hypothèses n'est toutefois constaté qu'au moment de la seconde passation de la onzième situation. Cependant, les conduites au cours des passations subséquentes ne montrent pas de progrès; l'impossibilité de coordonner les paramètres et de maîtriser le raisonnement implicatif et enfin, l'insuffisance des connaissances sur les opérations impliquant des entiers relatifs semblent expliquer cette stabilisation du raisonnement ainsi que l'échec aux situations de plus en plus complexes.

Les conduites à la onzième situation des élèves qui parviennent à une construction algébrique des propriétés des opérations sont égale-

ment très instructives. Tous les élèves du groupe 2 réalisent un progrès important entre la première et la dernière présentation de la onzième situation. Les progrès les plus marquants surviennent après la quatrième situation; tous peuvent formuler des hypothèses et coordonner possible et nécessaire. La majorité peut aussi prendre en compte plusieurs paramètres dans la formulation et l'interprétation des résultats des essais conduits. Ce n'est cependant qu'après la présentation des situations cinq à 10 que le raisonnement implicatif peut prendre place.

L'analyse du raisonnement implicatif dans le traitement de ces situations nous montre que ce raisonnement se présente pour la première fois chez certains déjà à la sixième situation, chez d'autres à la septième situation et chez les autres à la huitième situation. Il survient très souvent à la suite d'un essai spécifique et puisque ces essais sont produits par les sujets et diffèrent d'un sujet à l'autre, on peut penser qu'un meilleur contrôle des situations d'enseignement aurait pu s'avérer efficace. On note enfin chez ces sujets une évolution accélérée des connaissances sur les propriétés des opérations et des nombres dès l'apparition du raisonnement implicatif.

CONCLUSIONS

La composition «pensée formelle», «connaissances mathématiques» et «écritures littérales» que nous avons réalisée dans cette étude s'est avérée féconde. La fécondité s'évalue bien sûr, et cela n'est pas négligeable, par l'évolution de la compréhension algébrique (formelle) des propriétés des opérations et du raisonnement formel de plus de la moitié des élèves impliqués. Elle se mesure également par l'éclairage théorique et méthodologique original qu'elle apporte aux problèmes de l'apprentissage de l'algèbre et des structures de raisonnement logique qui rendent possible cet apprentissage.

Ainsi, en est-il de la question du passage arithmétique-algèbre maintes fois évoquée dans les recherches en didactique de l'algèbre; notre étude montre l'intérêt de situer l'élève dans un espace «algébrique» de raisonnement sur les écritures littérales si une construction algébrique (formelle) des propriétés des opérations est attendue. Les questions et les hypothèses formulées émanent alors du raisonnement dans cet espace et le recours aux connaissances numériques et numérales, aux connaissances de l'arithmétique, ne constitue pas une fin en soi mais un moyen d'obtenir une première validation des hypothèses et de poursuivre le raisonnement par la suite dans l'espace «algébrique».

Par ailleurs, cette approche de l'enseignement de l'algèbre comporte des «a priori» cognitifs sur le fonctionnement de l'élève. Elle suppose que l'élève puisse conduire un raisonnement formel ou dis-

pose des outils de la logique formelle pour formuler et vérifier des hypothèses sur la nature des nombres et les propriétés des opérations conduites sur ces nombres. Comme le montre les résultats de notre étude, cette condition ne semble pas vérifiée chez tous les élèves. En revanche, le fait qu'on assiste chez plusieurs élèves à une évolution des opérations formelles mérite d'être considéré.

Il serait sûrement important de revoir les situations et d'identifier les éléments des situations qui se sont avérées fructueuses afin de proposer et d'expérimenter de nouvelles situations. Nous pensons par exemple qu'un meilleur contrôle des variables didactiques (entre autres, la nature et la taille des nombres; la présence d'expressions déjà calculées...) serait fructueux.

Dans les situations que nous avons expérimentées, les connaissances numériques et numériques sur lesquelles prend appui le raisonnement sur les écritures littérales confèrent une signification au raisonnement algébrique qui devient dès lors un levier puissant de résolution de problèmes. Le grand mérite de ces situations réside selon nous dans les liaisons qu'elles déclenchent chez le sujet entre opérations concrètes et formelles, les opérations de la logique formelle devenant alors les seules adaptées aux situations. Nous croyons donc que ces situations sont des «révélateurs» de la pensée formelle. Elles pourraient être utilisées, en vue d'une meilleure compréhension de la microgenèse des structures formelles, chez des élèves qui sont par ailleurs dans une période déterminante de construction de ces structures. D'où notre intérêt pour les sujets de 13 à 15 ans.

Il nous semble enfin qu'imposant un langage formel de représentation et de traitement de connaissances, le cadre algébrique libère la mémoire de travail en offrant des symboles reconnus par les sujets pour désigner des contenus de pensée, assurant ainsi une gestion plus contrôlée des raisonnements.

Nous pensons également que le cadre géométrique Logo de visualisation des résultats des calculs littéraux est un levier didactique intéressant; il oblige à un calcul et à un examen des relations d'ordre entre les expressions algébriques. Il nous apparaît ainsi un cadre «charnière» entre le cadre arithmétique et le cadre algébrique. La majorité des élèves qui ont participé à notre étude ont su profiter de ce cadre.

L'intérêt de certaines des situations et des tâches qu'elles comportent est enfin discutable. Ainsi, les tâches complémentaires rompent souvent brusquement avec les tâches initiales; dans certaines de ces tâches, en permettant aux élèves d'avoir recours à des valeurs numériques, en spécifiant les valeurs des paramètres impliqués dans les différences entre diverses expressions algébriques, et plus encore, en suggérant un réinvestissement au niveau de l'écriture algébrique des relations numériques identifiées par les élèves, nous avons quelquefois, il nous semble, réduit le travail algébrique à un travail de codage algébrique d'écritures arithmétiques. Cette réduction va à l'encontre

du travail amorcé dans les tâches initiales. Il y aurait lieu, selon nous, de mieux exploiter l'environnement Logo dans les tâches complémentaires.

BIBLIOGRAPHIE

- AGNOLI F., KRANTZ D. H. (1989) Suppressing natural heuristics by formal instruction: The case of the conjunction fallacy, *Cognitive Psychology*, 21, (4), 515-550.
- AUROUX S., CHOUILLET A.-M. (1981) *Condillac - La langue des calculs*, Presses Universitaires de Lille.
- BOOTH L. R. (1984) *Algebra: Children's strategies and errors*, Windsor, U. K.: NFER-Nelson.
- BOOTH L. R. (1989) Grade 8 students' understanding of structural properties in mathematics, Actes de la 13^e conférence internationale *Psychology of mathematics education*, 1, pp. 141-148.
- BROUSSEAU G. (1986) Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques, *Recherches en didactique des mathématiques*, 7/2, pp. 33-115.
- BRUN J., CONNE F. (1990) Analyses didactiques de protocoles d'observation du déroulement de situations, *Education et recherche*, 3, 261-286.
- BRUN J., CONNE F., SCHUBAUER R., RETCHITZKI J. (1988a) L'étude des algorithmes de calculs dans la transmission et la constitution des connaissances numériques, *Swiss National Fund for Scientific Research*, n°11-25448-88.
- CASE R. (1985) *Intellectual Development: Birth to Adulthood*, New York: Academic Press.
- CAUZINILLE-MARMECHE E., MATHIEU J., RESNICK L. (1987) L'intégration de nouvelles connaissances: entre arithmétique et algèbre, *Journal européen de psychologie de l'éducation*, 2, (n°1), pp. 41-57.
- CHEVALLARD Y. (1984) Le passage de l'arithmétique à l'algèbre dans l'enseignement des mathématiques au collège (première partie): l'évolution de la transposition didactique, *Petit x*, (n°5), pp. 51-94.
- CHEVALLARD Y. (1989) Le passage de l'arithmétique à l'algèbre dans l'enseignement des mathématiques au collège (deuxième partie): perspectives curriculaires: la notion de modélisation, *Petit x*, (n°19), pp. 43-72.
- CHEVALLARD Y., CONNE F. (1984) Jalons à propos d'algèbre, *Interactions didactiques*, 3, pp. 1-54.
- CHEVALLARD Y. (1991) Dimension instrumentale, dimension sémiotique de l'activité mathématique, *Séminaire de didactique des mathématiques et de l'informatique*, année 1990-91, n°122, pp. 103-117.
- CONNE F. (1992) Savoir et connaissance dans la perspective de la

- transposition didactique, *Recherche en didactiques des mathématiques*, n°12/2.
- CONNÉ F., BRUN J. (1988b) Content and process: the case of teaching written calculation at primary school, Research Report, *Swiss National Fund for Scientific Research*, n°11-25448-88.
- DOUADY R. (1984) *Jeux de cadres et dialectique outil-objet dans l'enseignement des mathématiques – une réalisation dans tout le corpus scolaire*, Thèse de doctorat d'état, Université Paris VII.
- DOUADY R. (1986) Jeux de cadres et dialectique outil-objet, *Recherches en didactique des mathématiques*, 7, (n°2), pp. 5-31.
- INHELDER B., GARCIA R., VONECHE J. (1977) *Epistémologie génétique et équilibration, Hommage à Jean Piaget*, Neuchâtel, Delachaux et Niestlé.
- INHELDER B., PIAGET J. (1970) *De la logique de l'enfant à la logique de l'adolescent*. Presses Universitaires de France, 3^e édition.
- KIERAN C. (1981) Concepts associated with the equality symbol. *Educational Studies in Mathematics*, 12, pp. 317-326.
- KIERAN C. (1989) A perspective on algebraic thinking, Actes de la 13^e conférence internationale *Psychology of mathematics education*, 2, pp. 163-171.
- KIERAN C., BOOKER G., FILLOY E., VERGNAUD G., WHEELER D. (1990) *Cognitive Processes involved in learning school algebra*, in P. Neshet & J. Kilpatrick (Eds.), ICME Studies, Cambridge University Press, pp. 96-113.
- KIEREN T. E. (1988) Personal Knowledge of Rational Numbers: its intuitive and formal development, in National Council of Teachers of Mathematics, *Number concepts and operations in the middle Grades*, Lawrence Erlbaum, pp. 162-181.
- KLAHR D., DUNBAR K. (1988) Dual space search during scientific reasoning, *Cognitive Science*, 12, (1), 1-48.
- KUCHEMANN D. E. (1981) Algebra, in K. M. Hart (Ed.) *Children's understanding of Mathematics: 11-16*, London, Murray.
- LABORDE C. (1982) *Langue naturelle et écriture symbolique*, Thèse de doctorat, Université scientifique et médicale, Institut national polytechnique de Grenoble.
- LARKIN J. H., SIMON H. A. (1987) Why a diagram is (sometimes) worth ten thousand words, *Cognitive Science*, 11, (1), 65-100.
- LAWLER R. W., YAZADANI M. (1987) *Artificial intelligence and education, Volume I: Learning environments and tutoring systems*, Norwood, N. J., Ablex.
- LEMOYNE G. (1991) Situations Logo de construction formelle des propriétés des opérations arithmétiques, in J. L. Gurtner et J. Ret-schitzki (Eds.) *Logo et apprentissages*, pp. 135-146, Neuchâtel: Delachaux et Niestlé.
- LEMOYNE G., CONNÉ G., BRUN J. (1991) Connaissances arithmétiques et écritures algébriques chez des élèves de 13 à 15 ans. Sé-

- minaire de Didactique des mathématiques et de l'informatique*, Université Joseph Fourier, Grenoble, année 1990-91, n°123, pp. 119-138.
- MATZ M. (1980) Towards a computational theory of algebraic competence, *Journal of Mathematical Behavior*, 3, pp. 93-166.
- NEWELL A., SIMON H. A. (1972) *Human problem solving*, Englewood Cliffs, N. J., Prentice Hall.
- NOELTING G. (1982) *Le développement cognitif et le mécanisme d'équilibration*, Gaetan Morin: Québec.
- PASCAL D. (1980) *Le problème du zéro. L'économie de l'échec dans la classe et la production de l'erreur*, Mémoire, Université d'Aix-Marseille II et Université de Bordeaux I.
- PIAGET J. (1936) *La naissance de l'intelligence chez l'enfant*, Neuchâtel, Delachaux et Niestlé.
- PIAGET J. (1947) *La construction de l'intelligence*, Paris, Armand Colin.
- PIAGET J. (1974) *Réussir et comprendre*, Paris, Presses Universitaires de France.
- PIAGET J. (1981) *Le possible et le nécessaire, vol. 1.: l'évolution des possibles chez l'enfant; vol 2: l'évolution du nécessaire chez l'enfant*, Paris, Presses Universitaires de France.
- POLITZER G. (1990) L'activité inférentielle in J. F. Ricahrd, C. Bonnet, R. Ghiglione (Eds.), *Traité de psychologie cognitive 2, Le traitement de l'information symbolique*, pp. 106-128, Dunod., Bordas: Paris.
- SIEGLER R. S. (1983) Information processing approach to development, in P. H. Mussen (Ed.), *Handbook of Child Psychology*, 4, 129-211.
- SIERPINSKA A. (1992) *Sur la compréhension en mathématiques*, Colloque interne du programme de Recherche sur l'Emergence de l'algèbre, CIRADE, Université du Québec à Montréal, Document de travail.
- SLEEMAN D. H., BROWN J. S. (1982) *Intelligent Tutoring Systems*, New York, Academic Press.
- SLEEMAN D. H. (1986) Introductory Algebra: A case study of student misconceptions, *Journal of mathematical behavior*, 5, pp. 25-52.
- SLEEMAN D. H. (1987) PIXIE: a Shell for developing intelligent tutoring systems, in R. W. Lawler et M. Yazadani (Eds.), *Artificial intelligence and education, Volume I: Learning environments and tutoring systems*, Norwood, N. J., Ablex, pp. 239-263.
- VERGNAUD G. (1991) La théorie des champs conceptuels, *Recherches en didactique des mathématiques*, 10/2.3, pp. 138-170.