



HAL
open science

COUPES SÉMIOTIQUES

François Conne

► **To cite this version:**

François Conne. COUPES SÉMIOTIQUES. Jean-Pierre Sautot. Le film de classe. Étude sémiotique et enjeux didactiques., Lambert-Lucas, pp.105-142, 2008. halshs-01524598v2

HAL Id: halshs-01524598

<https://shs.hal.science/halshs-01524598v2>

Submitted on 10 Dec 2018 (v2), last revised 14 Sep 2023 (v3)

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

TROISIÈME ATELIER (II)

COUPES SÉMIOTIQUES

François CONNE

DIMAGE – Université de Genève
DDMES – SSRDM, Lausanne

INTRODUCTION

Les organisateurs de ces journées d'étude ont constitué des groupes de travail composés de participants venus d'horizons divers et dont les domaines d'expertise n'étaient pas les mêmes. Lors des analyses des séquences vidéo qu'on nous a demandé de faire en groupe, chacun de nous partait d'habitudes d'interprétation fort éloignées de celles de ses voisins. Nous entrons dans nos interprétations par le symbolique, les prolongions par quelques suggestions iconiques motivant la recherche d'indices en espérant ainsi donner quelque objectivité aux relations pressenties. Toutefois, interpellés que nous étions à brûle-pourpoint, les interprétations que nous livrions à chaud n'allaient pas de soi. Nous n'avions pas non plus eu le loisir de les lisser au préalable. Elles présentaient donc des aspérités et mêmes quelques failles. Ce sont celles-ci qui ont offert l'opportunité aux différentes lectures en présence d'entrer en dialogue.

Fort de ce constat, j'ai pris le parti pour ma contribution textuelle de décrire l'entrée qui était la mienne, et pour laquelle d'ailleurs on m'avait sollicité : mon examen de certaines questions de didactique des mathématiques à la lueur de la sémiotique peircienne. C'est ce que je vais tenter de restituer ici dans un mouvement qui me mènera très progressivement au sujet du colloque.

Dans la première partie, je commencerai par indiquer très succinctement ce qui me pousse à lier didactique des mathématiques et épistémologie peircienne, puis j'introduirai le lecteur à quelques idées et définitions de sémiotique peircienne. Cela fait, j'exposerai succinctement ce moyen d'analyse rendu par l'expression « coupe sémiotique ».

Dans la deuxième partie, j'illustrerai trois exemples de coupes sémiotiques dont la thématique commune concerne la question de la nouveauté dans la connaissance et l'expérience. Le lecteur pourra sauter la fin de mon exposé théorique (concernant l'idée de coupes sémiotiques) pour passer directement aux exemples et ne revenir que par la suite à la théorie. Les deux premiers exemples sont *ad hoc* afin d'introduire les lecteurs à des analyses sémiotiques portant sur des objets mathématiques ou didactiques. Je donnerai plus loin les raisons de mon choix. Seul le troisième exemple se rapporte à notre colloque et précisément à un des documents visionné par notre groupe et qui a fait l'objet de nos interprétations.

1. ÉLÉMENTS DE SÉMIOTIQUE PEIRCIENNE

1.1 LA DIDACTIQUE DES MATHÉMATIQUES COMME SCIENCE SPÉCIALE

« Les mathématiques pures diffèrent des sciences positives en ce qu'elles ne font pas d'assertions catégoriques, mais disent seulement ce qui serait vrai au cas où certaines hypothèses le seraient. Elles ne cherchent pas du tout à être responsables de la présence dans la nature de quelque chose qui correspondrait à leurs hypothèses, que ce soit de manière exacte ou approchée. Les sciences positives, pour leur part, cherchent bien à asserter quels sont les caractères des faits expérimentiels. » (Peirce 2002 : 283)

Et la didactique des mathématiques, si elle est une science, ne peut être qu'une science positive. Est-ce seulement possible ? Depuis longtemps, je me suis engagé à explorer le raisonnement suivant : La didactique des mathématiques ne traite pas directement de mathématiques mais de leur étude, de leur diffusion ou de celle des progrès de leur compréhension. Dans les phénomènes de l'étude des mathématiques, les signes jouent un grand rôle. Or ces derniers sont des éléments du monde tangible, objets d'expériences de l'étudiant. Parce que l'étude des mathématiques se fait par le truchement de signes, la didactique des mathématiques peut être considérée comme une science positive. Cela n'entraîne pas encore qu'elle le soit, mais c'est une possibilité logique. Voilà pourquoi je me suis attaché à l'étude des signes que l'on se donne dans l'étude des mathématiques. Et de ce point de vue, certes partiel, il y a une grande proximité entre les didactiques des mathématiques et celles des sciences positives.

1.2 À PROPOS DE LA SÉMIOTIQUE ET DE LA PRAGMATIQUE PEIRCIENNES

Je ne me référerai ici qu'à quelques idées de la sémiotique pragmatique de Charles Sanders Peirce, renvoyant le lecteur aux exposés existants dans la littérature (Everaert-Desmedt 1990 ou Fisette 1993 par exemple) pour une plus ample vision, même si je n'en connais aucun qui concerne directement les questions pédagogiques et didactiques.

Une première idée est de penser la logique comme une logique des relations.

Tout le monde connaît le syllogisme *Les hommes sont mortels, Socrate est un homme, donc Socrate est mortel*. La nécessité de développer une logique des relations vient du fait que le raisonnement suivant, pourtant élémentaire, ne peut être rendu sous une forme syllogistique : *2 divise 6 et 6 divise 42, donc 2 divise 42*. La relation *a divise b* (aRb) est une relation binaire et la véracité du raisonnement ci-dessus tient à une propriété de cette relation : elle est dite *transitive* : $aRb \ \& \ bRc$ alors aRc .

Une deuxième idée est qu'il est nécessaire de considérer des relations triadiques pour penser l'ensemble des relations, parce que s'en tenir aux seules relations binaires (ou dyadiques) ne suffit pas.

L'exemple le plus simple de relation triadique est celui qu'exprime la phrase suivante : *Pierre donne une bague à Marie*. On ne peut pas exprimer cette relation en lui substituant une combinaison de relations dyadiques, comme *Pierre donne une bague, Marie reçoit une bague, Pierre donne à Marie*, ou *Marie reçoit de Pierre*, ni non plus *Pierre donne une bague et Marie en reçoit une*, etc. Par contre au-delà, toute relation, qu'elle soit quaternaire ou plus, peut se ramener à une combinaison de relations ternaires. Il y a donc, dans l'approche de Peirce, trois modalités élémentaires de relations : unaires, binaires et ternaires.

Une troisième idée est de considérer les signes comme des relations triadiques entre un *representamen*, son *objet* et un *interprétant*.

C'est pour dénoter cela que, plus loin dans ce texte, je formulerai certaines caractérisations de signes en disant qu'*un signe confère à son objet quelque chose*, étant entendu que ce *quelque chose* est elle-même une relation sémiotique.

Dans cette sémiotique, le mot *objet* prend une signification toute particulière, c'est une abréviation pour *objet-du-signe* ; ce n'est pas un référent externe au signe mais une composante de ce dernier.

Peirce qualifie les signes de *convoyeurs de significations* ; il remarque qu'ils ne sont pas pour autant *pourvoyeurs de connaissances*. Si les signes sont relations, ce ne sont pas eux qui mettent les choses en relation, et par conséquent les signes permettent la connaissance mais ne sont pas à prendre pour la connaissance elle-même.

Une quatrième idée est de considérer en conséquence les signes comme les maillons d'un flux sémiotique.

Un signe fait venir à l'esprit de l'interprète des pensées, c'est ainsi qu'il agit sur lui. Mais l'esprit vit à l'heure de ses pensées actuelles sans qu'il y ait jamais le moindre arrêt. Ainsi l'esprit est occupé en permanence par un (ou des) flux. En particulier, une pensée ne se manifeste jamais à elle-même mais seulement dans une pensée subsé-

quente. Dans cette conception, la pensée est un mouvement de l'esprit qui se prête tout entier à ce qui est en passe de l'occuper et l'action du signe est tout autant ce qui oriente l'esprit sur des pensées subséquentes que ce qui préserve dans ces dernières le fil des pensées antécédentes. Ce que le signe prête à son objet n'est donc jamais des propriétés *en tant que telles*, mais *tout ce à quoi* ces propriétés sont par ailleurs liées. Dit autrement, un signe n'apporte à son objet qu'un tissu de relations. L'objet du signe se manifeste dans un processus de relais de signes à signes ; la représentation n'est jamais figée ; elle est présentation reportée du même objet dans des chaînes de signes.

Il découle de ceci qu'un signe pris isolément ne représente que très peu de chose de son objet. Par conséquent lorsque deux individus communiquent, ils peuvent le faire malgré de très grands décalages entre les significations qu'ils attribuent aux signes de leurs échanges. C'est par sa capacité à rendre compte de tels décalages, auxquels aucun échange intellectuel entre individus n'échappe, que la sémiotique intéresse la didactique des mathématiques.

Le maillon élémentaire du flux sémiotique est *le pas représentamen - interprétant* dont l'enchaînement produit des sémioses, et que pour cette raison je qualifie de *pas-de-sémiose*. La consistance du signe, *le fil* évoqué ci-dessus, tient à son *objet* qui détermine l'interprétant à entretenir avec lui une relation analogue à celle que le signe entretient avec lui. On l'a vu, le signe est une triade : *représentamen, objet, interprétant*. Il y a une relation forte entre la répétition des signes (que je dirais *réplique* en élargissant de manière légèrement abusive l'acception de ce terme au regard de celle que Peirce lui donne) et pas-de-sémiose.

Les objets des signes s'y font connaître au fil de sémioses. Les signes interviennent dans la connaissance des objets qu'ils représentent par les liens qui s'établissent entre toutes sortes de choses associées à ces objets. La connaissance est faite de mises en relations ; les signes sont des relations, certes, mais ne sont pas des mises en relations, ce n'en sont que les traces et les supports. Les signes ne créent pas des connaissances mais font office de relais dans les sémioses où les connaissances se développent. Ils n'ont pas de mémoire et surtout, si je puis dire, *ils mélangent tout*. Ce sont ces particularités qui font que des individus dont les connaissances sont très inégales ou disparates peuvent communiquer, échanger, et même penser ensemble. Ce sont eux aussi qui rendent possibles tous les passages *du coq à l'âne*. Cette mouvance des signes n'est coordonnée à aucun autre développement que le sien propre. Relativement à toutes ces choses que sont le développement cognitif d'un sujet, le développement historique d'un domaine de connaissance ou le développement conceptuel de la pensée humaine, les flux de signes sont anachroniques.

Les objets déterminent les sémioses et connaître un objet est connaître les déterminations qu'il impose aux signes. La relation n'est pas symétrique : le signe ne manifeste pas l'objet, c'est plutôt l'objet du signe qui se manifeste par l'entremise de (la détermination) des signes dans ses sémioses.

Tous ces liens à propos d'un objet, et ils sont fort nombreux et touffus, ne sont pas pour autant pertinents ; certains ne seront que fugaces, transitoires, certains pourront être rejetés. La connaissance d'un objet n'est donc pas pour autant un savoir à son propos. Tant que les sémioses ne se stabilisent pas, ou plutôt ne se reproduisent pas à l'identique, c'est-à-dire convergent sur ce que Peirce appelle un *interprétant final*, ou une *habitude*, la connaissance de l'objet sera non stabilisée. La stabilisation d'une sémiose sur un interprétant final n'est jamais absolue et définitive et son objet n'est jamais connu que jusqu'à ce point. Il reste ouvert, ne serait-ce que de manière latente. Il n'y a pas chez Peirce d'*objet final*.

La combinaison de la répétition et du fil sémiotique fait que ce dernier peut présenter des boucles. Une sémiose se stabilise sur une telle boucle et participe à des sémioses portant sur d'autres objets. Sur ce point, que je considère comme essentiel, ma compréhension de la sémiotique peircienne est encore lacunaire. Les objets ainsi liés par leurs chaînes sémiotiques forment un monde. Les sémioses sont donc les moyens de la mise en relations des choses du monde qui nous le rend connaissable. Et c'est pourquoi la relation des signes à leur objet est un aspect capital pour les questions épistémologiques.

Une cinquième idée est de conférer deux dimensions aux signes, la première étant le flux sémiotique dont il vient d'être question, la deuxième se déclinant selon trois modalités phénoménologiques : *priméité*, *secondéité* et *tiercéité*, qui correspondent aux trois modalités élémentaires de relation : unaire, binaire, ternaire. La priméité est la présence en tant que telle ; la secondéité est la catégorie du réel, de l'action et de la réaction, celle des relations physiques ; la tiercéité est la catégorie des relations et de leurs combinaisons. Les relations entre les trois niveaux phénoménologiques sont conçues comme gigognes : la tiercéité contient de la secondéité qui elle-même contient de la priméité. Ainsi par exemple une proposition est considérée comme combinant un signe de secondéité, un *indice*, à un signe de secondéité, une *icône*, signe de priméité. Dans *L'homme est mortel*, « homme » est l'indice de ce – l'*objet* – à quoi on attribue l'icône « mortel ». Un argument (par exemple un raisonnement) combine des propositions et des fonctions propositionnelles. Les jeux sémiotiques font donc se développer les signes selon ces deux dimensions, et la chose devient assez complexe à se représenter si on considère en outre les boucles sémiotiques et les bifurcations d'objets.

1.3 DÉFINITIONS DE SÉMIOLOGIE PEIRCIENNE AGRÉMENTÉES DE QUELQUES COMMENTAIRES SUCCINCTS

1.3.1 Signes

Je rappelle quelques définitions de la sémiotique indispensables pour ancrer la perspective adoptée :

Sign : [...] *something by knowing which we know something more.*
(C.P. 8.332) « Signe : [...] quelque chose dont la connaissance nous porte quelque chose de plus à la connaissance » (ma traduction).

Signe : [...] un signe ou représentamen est quelque chose (1) qui tient lieu pour quelqu'un (3) de quelque chose (2) sous quelque rapport ou à quelque titre. Il s'adresse à quelqu'un, c'est-à-dire qu'il crée dans l'esprit de cette personne un signe équivalent ou peut-être un signe plus développé. Ce signe qu'il crée, je l'appelle interprétant du premier signe. Ce signe tient lieu de quelque chose : de son objet (C.P. 2.228, Fissette 1993 : 10).

D'autres définitions sont nécessaires afin de caractériser la seconde dimension évoquée ci-dessus.

1.3.2 Icônes, indices et symboles (Conne 2008 : 224-228)

Si le signe tient lieu de son objet, cela n'implique pas pour autant que ce dernier serait déjà totalement connu. Au contraire, c'est par le signe que nous connaissons mieux l'objet, au travers de la manière dont il détermine les enchaînements de ses interprétants ou sémioses. Et si l'objet est connaissable, c'est parce que ces sémioses ne sont pas libres mais contraintes par l'objet lui-même. De ce point de vue, la relation qu'entretient un signe à son objet est quelque chose de crucial pour toute personne qui s'intéresse aux développements sémiotiques. Cette relation se décline sur trois modes : iconique, indiciel et symbolique.

Icône : Un signe iconique prête à son objet son apparence – qualitative, caractéristique ou générique – comme ressemblance suggestive.

Dans ce cas, le signe tient pour son objet en tant qu'il partage avec lui son apparence ou celle qu'on lui suppose. L'icône présente ainsi une possibilité d'être de son objet, elle est suggestive – sans suggérer pourtant quelque chose de précis. La relation d'une icône à son objet est une assimilation, le signe ne se distingue pas de son objet – objet dont on n'est même pas assuré qu'il existe.

Indice : Un signe indiciel prête à son objet sa présence – ou une de ses occurrences – comme signal – un fait qui attire notre attention ou une pensée fugace qui nous traverse l'esprit.

Contrairement au signe iconique qui nous informe seulement d'une forme logiquement possible que pourrait avoir un objet dont on ne sait s'il existe, le signe indiciel parce qu'il a été effectivement affecté par son objet nous en assure l'existence.

Symbole : Un signe symbolique prête à son objet sa logique comme conception – possible, informante ou significative.

Un signe symbolique *veut dire quelque chose* ; il contraint l'esprit de l'interprète. Toutefois, cela ne détermine pas pour autant sa signification d'une manière univoque et définie une fois pour toutes. Par conséquent, si le symbole « veut dire », il peut vouloir dire ceci à tel ou tel et cela à tel ou tel autre. La contrainte exercée par le symbole sur l'esprit de l'interprète a l'emprise de ce qui nous fait nous exclamer : « C'est logique ! » et qui nous rend difficile de nous départir de notre conception de l'objet. Un exemple de ce phénomène nous est donné par les erreurs, par exemple de calcul. Les règles de calcul que nous avons si bien intériorisées excluent par avance que nous venions à l'esprit certaines formes de réponses erronées. Une fois l'erreur observée, ces mêmes règles qui nous empêchaient de l'imaginer de manière anticipée vont nous en fournir une interprétation. Il n'est pas rare que nous ayons alors l'impression que nous aurions tout aussi bien pu la prévoir. Après coup cela semble toujours facile et ce qui produit ce sentiment n'est rien d'autre que l'action exercée par le symbole sur notre esprit.

Inférence (cf. Conne 2007 : 70) : La notion d'inférence permet de penser les articulations entre les deux dimensions que je viens d'évoquer. C'est dans la question de l'imagination et de la nouveauté dans les sémiotiques qu'elle apparaît le plus nettement, et ce sera amplement illustré dans les trois exemples que j'ai volontairement inscrits à cette enseigne. Pour Peirce de tous les signes seules les icônes ouvrent sur la découverte et l'invention, et ceci concerne tout particulièrement les mathématiques. À cela sont liées l'*induction*, la *déduction* et l'*abduction* qui seront au cœur de mon troisième exemple portant sur un des films qui nous a été donné à analyser. L'exposé qui suit n'est utile que pour ce troisième exemple et le lecteur fatigué de toutes les abstractions qui lui ont été données à lire jusqu'ici pourra aller y voir (page 131 et suivantes) avant de reprendre sa lecture ici même (page 113).

C. S. Peirce distingue trois modes de raisonnement, l'*induction*, la *déduction* et l'*abduction*.

Induction : L'induction consiste à relier un certain nombre de faits constatés en une loi générale. La vérité de ses conclusions est toujours tributaire de l'apparition d'un contre-exemple. Pourtant l'induction nous garantit bel et bien la véracité de ses conclusions

sur tous les cas qu'elle aura préalablement envisagés. Par conséquent le raisonnement par induction est un raisonnement valide et relativement pertinent qui ne garantit pas la portée de ses conclusions. Enfin, c'est par induction que l'expérience contribue à accroître nos connaissances.

Dédution : La déduction consiste à dire ce qui est vrai compte tenu de certaines prémisses acceptées. Sa fonction est de validation. En contrepartie, elle ne contribue en rien à l'invention ni à la découverte et elle ne garantit pas non plus la pertinence de ses conclusions. Cette pertinence ne peut être obtenue que par un retour aux faits ainsi expliqués (donc à l'expérience et l'induction) qui donneront toute leur signification aux conclusions déduites. Fait déterminant, la déduction permet une économie d'expérience en organisant l'expérimentation et en l'orientant sur des expériences cruciales. Dans chacun de ces modes de raisonnement, on dispose d'une règle générale suffisamment bien formulée que l'on soumet soit à l'épreuve des faits, soit à celle d'une démonstration.

Abduction : C. S. Peirce considère que même lorsque nous croyons avoir deviné une telle hypothèse, c'est un raisonnement – pas nécessairement conscient de lui-même – qui nous y aura amenés. Il nomme ce raisonnement *abduction*. C'est de tous les modes de raisonnement le seul qui amène à découvrir quelque chose de nouveau. En contrepartie, c'est un raisonnement qui n'offre aucune garantie sur la véracité de ses conclusions, ni par les faits, ni par la raison. Dans sa conception la plus achevée de l'abduction C. S. Peirce propose le schéma suivant : (1) *Le fait surprenant, C, est observé. (1.1) Mais si A était vrai, C irait de soi. (1.2) Donc, il est raisonnable de soupçonner que A est vrai.* On notera que les types de raisonnements s'imbriquent les uns dans les autres comme les maillons d'une chaîne. Ainsi dans ce schéma, l'abduction est décrite comme comportant un moment inductif : *le fait C est observé*, et un moment déductif : *si A est vrai, C va de soi*. Notons le principe sélectif sous-entendu par la référence au « fait surprenant », qui exprime une mise à l'épreuve de la pertinence des explications antérieures à l'observation de C. Une fois que A est formulée, on peut en faire la conjecture et la soumettre à un jugement de véracité (démonstration par déduction) et de pertinence (factualisation par induction). Et ainsi de suite. La découverte de A rend banal ce qui auparavant avait été une surprise. Par conséquent, et quel que soit le sort réservé à A, acceptation ou rejet, le processus abductif se solde toujours par un accroissement de la pertinence de nos explications.

1.4 COUPES SÉMIOTIQUES

Le privilège d'un article qui traite de signes est de faire prévaloir que l'article lui-même est un signe, ce qui m'encourage à le rédiger à l'image de son propos. Ainsi, le discours que j'y tiens est un symbole qui développe une conception des jeux de signes dans l'enseignement des mathématiques. Comme il sera plusieurs fois répété ici, on entre par la tiercéité. L'organisation de mon discours suit trois dimensions. La première est le fil des sémioses, la deuxième est celle des combinaisons d'icônes, d'indices et de symboles, la troisième est les enchâssements de ces combinaisons de signes les uns dans les autres. Cette dernière dimension est la plus difficile à présenter du fait de sa complexité et du fait surtout que ces enchâssements ne se font pas nécessairement entre signes de mêmes objets et que de telles bifurcations d'objets passent souvent inaperçues dans le flux sémiotique.

Étant donné leur mouvance, le caractère non linéaire mais bouclé de leurs développements, les enchâssements de signes de niveaux différents, les processus sémiotiques se présentent comme extrêmement complexes à analyser et nous ne pouvons les saisir qu'en procédant à des coupes. Pour moi, cette expression de *coupe sémiotique* a au moins trois connotations. D'une part, c'est une sorte d'« arrêt sur image » du processus afin de pouvoir le saisir et l'examiner. D'autre part, c'est une représentation d'un objet selon certaines de ses dimensions seulement. Ici c'est l'analogie avec les coupes histologiques à fin d'observation au microscope qui prévaut. Enfin, bien plus qu'un caractère figé, elle souligne une propriété essentielle des jeux sémiotiques, à savoir leur anachronisme au regard de l'histoire de la production des signes et du développement des significations.

Ainsi par exemple, un historien des mathématiques est toujours amené à appliquer ses propres signes mathématiques à des notions qui se sont développées antérieurement et indépendamment de ces signes-là. Un enseignant lit les productions des élèves avec des interprétants que ces derniers sont bien loin de soupçonner. Un chercheur qui analyse un document vidéo ne peut accéder qu'après coup aux événements qui auront marqué la leçon filmée. C'est bien parce que, chacun à son échelle propre, les processus historiques, développementaux et d'apprentissages sont irréversibles que ces décalages sont impossibles à éviter. Les anachronismes qui découlent de tous ces décalages sont au cœur des processus didactiques.

La sémiotique est l'instrument tout indiqué pour rendre compte de tels décalages et anachronismes. *Primo*, l'irréversibilité se trouve au cœur de la relation du signe à son objet puisque si les objets des signes se manifestent à la manière dont ils déterminent les sémioses, les signes, quant à eux, ne manifestent jamais grand-chose de leur objet, les significations ne tiennent pas aux signes eux-mêmes mais bien plus

à des jeux des relations dont ils ne sont somme toute que des relais. *Secundo*, sémiotiquement parlant on ne fait jamais que de *prendre des trains en marche*. L'anachronisme est là, car, sémiotiquement parlant, *revenir sur ses pas*, comme le fait tout enseignement, n'est jamais pour personne et quel que soit son passé un retour en arrière, tout au plus est-ce susceptible de ramener le processus à quelque chose d'équivalent. Ainsi le vocable *base*, que l'on utilise communément dans le jargon didactique et pédagogique, est-il plus à prendre au sens de *camp de base* des alpinistes que de *fondation*. On commence à apprendre bien avant d'avoir rejoint les camps de base du savoir et ces derniers sont là pour qu'on puisse y revenir aisément (et souvent).

1.5 TROIS EXEMPLES PRÉSENTÉS COMME DES COUPES SÉMIOTIQUES

Pour illustrer ce petit exposé, je vais présenter trois exemples. J'ai conçu la suite de ces exemples comme une marche d'approche de ce que nous avons travaillé lors de l'atelier. Le troisième exemple nous mènera à pied d'œuvre.

Mes exemples illustrent mes définitions au plus près, tout en cherchant à saisir les flux sémiotiques jouant tour à tour sur des signes de ces trois niveaux. Ainsi, mon discours portera sur les jeux d'associations des icônes, indices et symboles dans le mouvement interprétatif. J'illustrerai de tels jeux sur trois facettes distinctes auxquelles le chercheur en didactique des mathématiques est amené à s'intéresser à propos d'objets mathématiques : dans la représentation que l'on peut se faire de leur histoire (ex. 1) ; dans celle d'un point critique de leur enseignement (ex. 2) ; et enfin dans l'interprétation que le chercheur en didactique peut faire à propos d'une situation d'enseignement et de ce que son enregistrement vidéo lui aura donné à voir (ex. 3). Cela dit, chacun des exemples proposés est lui-même un signe, enchâssé dans mon discours.

Il sera question dans chacun de ces exemples de rencontres et sinon de nouveauté du moins d'inédits. Pourtant c'est d'imagination que je voudrais traiter ici. Les signes de l'imagination sont les icônes. Toute chose inédite qui se présente sollicite l'imagination. Voilà pourquoi il m'a semblé séduisant de traiter la question de l'imagination de l'inédit. Ni la nouveauté, ni ce qui est inédit ne sont au commencement, car ils ne peuvent se manifester que dans un cadre préétabli, se détacher d'un arrière-fond.

Les deux premiers exemples sont *ad hoc*. Ils portent sur des questions singulières et marquantes de l'arithmétique et de l'algèbre. Le premier exemple est volontairement choisi sur un sujet non élémentaire, les nombres imaginaires, mais je ne ferai que l'effleurer. Je l'ai choisi pour que la rencontre du lecteur avec les notions de sémiotique

peircienne se fasse sur quelque chose qui ne lui est pas familier, afin de bien souligner leur puissance heuristique.

Le premier exemple-schéma sera seulement suggestif. Il sera le plus succinct que je puisse faire. Il aura le statut d'une icône de ce qui est inédit. Il a été rédigé de manière à laisser le lecteur sur un diagramme, une illustration du jeu des combinaisons icône, indice, symbole. Dans cette intention, j'ai mis des sous-titres permettant à la lecture de se poser après chacune des étapes décrites et soulignant le diagramme que je présente. Toutefois, si on entre plus profond dans mon propos, on trouvera dans cet exemple des icônes, des indices et des symboles. La citation de Bombelli, par exemple, est elle-même un argument, un signe symbolique. Mais l'objet de mon exemple n'est pas l'objet de la citation de Bombelli.

Avec le deuxième exemple, qui porte, lui, sur des questions bien plus élémentaires et proches des savoirs scolaires, je compte sur un effet de contraste.

Le deuxième exemple laissera le lecteur sur un indice. Il ne s'agira pas d'une description réelle, mais d'une expérience de pensée qui, pour moi, est un signe qui restitue bien mieux ce qui se passe – sémiotiquement parlant – que toute description que je pourrais faire. Là encore, entrant dans le menu de l'exemple, dans les éléments qui défilent au cours de la sémiologie, on trouvera des icônes, des indices et des symboles et leurs combinaisons. Par exemple, l'idée de proposer une situation de quadrillage d'un carré est un élément de raisonnement didactique, donc un argument, un symbole. Par contraste avec le premier exemple, j'ai pris soin particulier à imaginer toutes sortes de jeux de signes à propos de quelque chose que je sais familier à tout ancien élève de l'école secondaire. L'expérience de pensée est ici une expérience d'imagination de ce qui est susceptible de se passer pour les apprenants.

J'espère que suite à la lecture de ces deux exemples, le lecteur se sera fait une idée de l'intérêt des notions de sémiotique peircienne pour les questions didactiques. L'un comme l'autre, ces exemples sont cependant trop schématiques pour fournir une explication de leur objet, mais tel n'est pas mon propos ici. Par contre ils indiquent une ligne interprétative et aident à se familiariser avec le foisonnement des significations selon les circonstances dans lesquelles ces objets mathématiques sont rencontrés : par des élèves en situation d'apprentissage ; par l'enseignant dans sa préparation ou sa réflexion sur la manière de réagir aux difficultés rencontrées par ses élèves ; lors de l'étude et de la lecture d'un ouvrage relatant l'histoire des nombres complexes, etc. Ces deux exemples serviront de tremplin à un troisième, d'une tout autre nature et qui porte directement sur les observations que j'ai pu faire sur une des séquences vidéo que nous avons travaillée au cours de ces deux journées de mars 2007, celle présentée

par Thierry Dias sur des situations de construction de maquettes de polyèdres. Au fil de mes développements, j'indiquerai plus précisément les liens que je fais entre ces exemples. Dans le troisième exemple, j'opérerai une mise en relation supplémentaire avec l'inférence et les formes que la pragmatique peircienne lui attribue : *induction, déduction, abduction*.

Le troisième exemple ne concerne plus un objet mathématique, ni des questions relatives à son enseignement, mais le travail d'interprétation d'un spécialiste à partir d'observations qu'il a pu saisir au fil d'un visionnement. Cette interprétation est complexe parce qu'elle fait intervenir des questions sur les mathématiques et leur épistémologie, des questions sur la signification que cela peut prendre de faire faire quelque expérience aux élèves à propos d'un théorème, des questions sur le statut du matériel pédagogique dans ce type d'expérience.

Mais l'exemple ne s'arrête pas là, et il tente de relier ces questions à ce que la vidéo donne à observer sur les élèves et qui, relativement à ces considérations, s'est présenté comme inédit. On est bien ici dans le travail interprétatif, mais l'objet c'est l'interprétation du chercheur, plus que celle des élèves, même si cette dernière fait l'objet de l'observation et de l'étude. Un des résultats de cette interprétation est d'introduire des considérations sur le travail d'inférence des élèves, et les abductions que l'expérience les porte faire. Ce résultat indique aussi une piste de réflexion possible consistant à mettre en regard les inférences expérientielles des élèves avec l'argument mathématique auquel on voudrait les mener. Cela pousse le chercheur à se demander comment une telle substitution de signe et d'objet pourrait être didactiquement contrôlée. J'ai tenté de rédiger cet exemple comme un argument, laissant le lecteur sur un résultat théorique : « Le matériel didactique est un signe d'objet mathématique, pas un modèle ».

2. TROIS COUPES SÉMIOTIQUES INTÉRESSANT LA DIDACTIQUE DES MATHÉMATIQUES

2.1 EXEMPLE SCHÉMATIQUE SUGGESTIF, À PROPOS DES NOMBRES IMAGINAIRES

Le simple fait de disposer d'une forme algébrique d'écriture du discriminant d'une équation du second degré permet à l'image d'une racine carrée de nombre négatif (dit aussi radical d'un nombre négatif) de se former.

2.1.1 Étape 0 : Arrière-fond de signes

Mais avant de considérer ceci, remontons un petit peu en amont, vers l'établissement de la formule générale elle-même. Cette formule sera ici considérée comme une icône, dont voici la forme la plus connue :

$$x = [-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}] / 2a$$

En classe, cette formule est souvent amenée (déterminée) par un calcul présenté par le professeur (ou le manuel). Je me rappelle que ce fut notre enseignant qui nous l'a fait dériver des règles algébriques apprises et que cela m'avait laissé sur l'impression d'un tour de passe-passe dans un sentiment de totale insatisfaction. Le principe du calcul est le suivant : à l'équation générale $ax^2 + bx + c = 0$ on associe la forme équivalente $x^2 + (b/a)x + c/a = 0$ puis on ajoute de chaque côté la quantité $(b^2/4a^2)$ ce qui transforme le membre de gauche en la forme d'un carré parfait ; après quelques calculs simples l'équation devient $(x - b/2a)^2 = b^2/4a^2 - c/a$, etc. Cette expérience servait d'indice à l'existence d'une formule de résolution dont la forme obtenue $x = [-b \pm \sqrt{(b^2 - 4ac)}] / 2a$ est l'icône. Par la suite et tout au long de mes études, j'ai été maintes et maintes fois amené à vérifier que le calcul du produit de $(x - [-b + \sqrt{(b^2 - 4ac)}] / 2a)$ par $(x - [-b - \sqrt{(b^2 - 4ac)}] / 2a)$ restituait bel et bien l'expression $x^2 + (b/a)x + c/a$! Tous ces calculs sont des expériences (sémioses), indices de l'existence de la solution, et s'ajoutent à chaque résolution particulière d'une telle équation.

2.1.2 Étape 1 : Icône, un nouveau imaginé

À partir de ce point, par exemple à l'occasion de la résolution de l'équation : $x^2 - 2x + 2 = 0$, nous rencontrons¹ une nouvelle icône. En toute légalité et par simple substitution, la formule par radicaux donne : $x = [1 \pm \sqrt{(-4)}] / 2$. Avec les notations dont nous disposons déjà, nous en avons une image, elle est là, on peut la lire. Certes nous pouvons dénier toute signification à une telle écriture. Justement le professeur nous disait que l'équation n'avait alors pas de solution, et il s'était peut-être fendu d'un petit commentaire en guise de réserve, il ne le faisait qu'une fois. Pour autant que nous étions capables de l'entendre, ce commentaire était vite oublié. On aurait pu nous parler de licornes que cela aurait eu le même effet ! On en restait donc là. Une nouvelle icône qui n'est pas l'icône de la formule de résolution, mais celle de quelque chose d'autre, s'y est introduite.

L'attribution de signification à ces écritures, et en particulier le jugement selon lequel dans ce cas cette équation n'a pas de solution, qui

¹ Je ne dirais pas non plus ici que $\sqrt{(-4)}$ aurait émergé. L'émergence de quelque chose est un phénomène réel, de secondarité, et donne l'icône associée à un indice. Dit autrement, quelque chose ne peut émerger qu'en tel ou tel endroit, et en telle ou telle circonstance. Il faut des indices pour le signaler. On peut certes parler d'émergence, voire d'émergent, en laissant tout cela implicite, mais si on veut faire quelque chose d'une idée pareille, il faudra bien passer par des spécifications et alors produire tôt ou tard nos indices ! C'est ici, en plaçant l'icône avant quelque considération que ce soit de son émergence, que mon propos n'est pas historique, ni développemental, mais bien sémiotique, s'agençant selon d'autres relations que factuelles. Et c'est bien ce dont l'expression *coupe sémiotique* cherche à rendre compte.

plus tard s'entendra comme un abus de langage du à une omission, voulant dire « n'a pas de solution *réelle* », cette interprétation-là est quelque chose qui vient après l'icône. Si on peut dire « Cette équation n'a pas de solution », c'est justement sur la base de la présence de cette nouvelle icône $\sqrt{-4}$ qu'on le fait (ou plus généralement sur la base de l'écriture générale : $\sqrt{-a}$ où $a > 0$). Il faut donc bien que le signe soit déjà là. L'interprétation à laquelle invite l'enseignement, « L'équation n'a pas de solution », n'est que provisoire. À ce moment de notre apprentissage, prononcer une telle sentence représentait une sorte de pari, celui de ne pas poursuivre plus avant le calcul. C'était un pari car il se pouvait qu'une erreur nous ait fait aboutir au radical d'un nombre négatif.

2.1.3 Étape 2 : Indice, le nouveau attesté

Dans la résolution des équations du second degré, les choses peuvent s'arrêter à ces simples radicaux. En particulier, tant que ces solutions ne sont pas considérées, on ne demandera pas, par exemple de vérifier que $[x - 1 + \sqrt{-4} / 2]$ fois $[x - 1 - \sqrt{-4} / 2]$ restitue tout aussi naturellement $x^2 - 2x + 2 = 0 \dots$ à la condition toutefois de bien vouloir considérer que $\sqrt{-4}$ se manie exactement comme \sqrt{a} , en assimilant a à un nombre positif. Notons qu'à partir de là ce qui est vraiment nouveau se réduit à l'icône $\sqrt{-1}$. On aurait pu ainsi constater que l'on aboutit au même résultat en multipliant $[x - 1 + \sqrt{-1}]$ par $[x - 1 - \sqrt{-1}]$. Un tel calcul nous aurait donné l'expérience du fait qu'on peut calculer avec $\sqrt{-4}$, ou $\sqrt{-1}$, sans que cela porte à conséquence, car au bout du calcul il ne restera plus trace de telles écritures. Mais justement, quel sens cela aurait-il de remonter d'une formule considérée comme impossible à l'expression, elle tout à fait ordinaire, dont elle est issue ? On ne peut rien anticiper d'imaginable, à moins de s'intéresser tout spécialement à l'icône $\sqrt{-1}$.

C'est, très schématiquement dit, ce qui s'est passé historiquement et en particulier dans le cas de la résolution d'équations cubiques. Ces calculs sont des indices qui signalent l'existence d'un objet, associé à cette icône, disons pour simplifier $\sqrt{-1}$. Un objet dont on ne sait pas ce qu'il est exactement, et dont le simple fait de pouvoir dire que ce serait une nouvelle sorte de nombre représente une grande avancée conceptuelle.

2.1.4 Étape 3 : Symbole, ce nouveau interprété

Voici le commentaire de Bombelli à propos de la formule de dal Ferro, dans le cas où apparaît un nombre négatif sous la racine carrée :

« Ce type de racine présente lors de son calcul des opérations différentes des autres et porte un nom différent... [II] semblera à la plupart des gens plus sophistiqué que réel. C'était aussi mon point de vue, jusqu'à ce que je

lui trouve sa démonstration géométrique. » (cité par Mazur 2004 : 96)

Dans cette coupe sémiotique, ce « calcul plus sophistiqué que réel », s'interprète comme la qualification de quelque artifice. Mais, tout artificiel qu'il soit, ce quelque chose existe. Et c'est ce qu'indique avec insistance le fait qu'on sache opérer des calculs sur les icônes qui le représentent. Par contre, la démonstration géométrique qu'évoque Bombelli (il semble que Bombelli ait fait le lien entre ces équations cubiques et le problème de la trisection de l'angle), est d'une tout autre nature et livre une interprétation de cet objet dont on savait l'existence dès le moment où il permettait des résolutions efficaces. L'histoire confirmera que le problème a parti lié à la division des angles. Et on se fera petit à petit une nouvelle conception des nombres qui puisse accueillir ce à quoi l'icône $\sqrt{-1}$ a ainsi prêté sa forme.

2.1.5 Anachronisme de l'exemple 1

Sans présenter d'inexactitude, mais en étant plus que partiel, cet exemple ne restitue pas le processus historique étudié par maints auteurs (je ne donnerai ici que Mazur 2004, mais il y en a bien d'autres) et n'a pas la prétention de l'expliquer. Il sert simplement à donner une idée aux lecteurs de la manière dont on peut manier les distinctions de sémiotique peircienne. J'ai tenu à prendre cet exemple pour la raison qu'aucun lecteur ne pourra m'objecter que les nombres complexes ne défient pas l'imagination et parce qu'une telle disposition d'esprit aidera grandement le lecteur à comprendre le schéma du jeu des signes iconiques, indiciels et symboliques.

2.2 EXEMPLE SCHÉMATIQUE INDICATIF, À PROPOS DE LA FIGURE CONTRE-INTUITIVE QUE LE PRODUIT DE 0,1 PAR 0,1 EST 0,01

Partons donc du signe : $0,1 \times 0,1 = 0,01$. Avant d'apparaître comme peu intuitive, cette forme de relation, telle qu'elle ainsi écrite, est proprement inimaginable, impensée. Il faut soit la faire produire par un dispositif, par exemple en transcrivant ce qui apparaît sur l'écran d'une calculette, soit la trouver écrite dans quelque document, soit se la faire présenter par quelqu'un qui la connaît déjà. En classe, la rencontre de cette forme d'écriture ne se présentera jamais seulement comme le produit d'un jeu d'écriture, elle sera toujours accompagnée d'un double commentaire portant sur les règles du calcul d'une part et sur des significations numériques de l'autre, et liant les deux : les règles de calculs étant comme la cause de l'apparition de cette écriture ; les significations numériques donnant raison aux règles. Tout ceci pourra être fait en référence aux calculs en colonnes encartés.

$$\begin{array}{r}
 0,1 \\
 \times 0,1 \\
 \hline
 01 \\
 \underline{00} \\
 0,01
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r}
 45,23 \\
 \times 21,4 \\
 \hline
 18092 \\
 4523 \\
 \underline{9046} \\
 967,922
 \end{array}$$

La relation entre la formule, les règles qui déterminent l'écriture et les significations dont ces règles procèdent est ternaire. Il y a un lien fort, symbolique au sens peircien du terme, entre les significations numériques invoquées et les règles de jeu d'écritures. La plupart du temps à l'école, ce lien est considéré comme univoque et seul concevable. Cela permet au système enseignant de garder le contrôle sur les significations de ce que font les élèves tout en leur conférant la responsabilité d'une bonne application des règles de calcul qu'ils doivent apprendre.

Pourtant, ce lien entre significations numériques et règles du maniement des écritures n'est pas renversable : si on peut déduire les règles à partir des significations, on ne peut pas inférer des significations univoques à partir des régularités observées. Ce qui, vu dans la perspective de l'enseignant, semblera univoque sera multivoque si on le regarde dans la perspective de l'apprenant. En effet, ce que nous font voir ces jeux d'écritures que sont les calculs est rempli d'ambiguïtés. Imaginons donc quelques possibles. Dans l'écriture $0,1 \times 0,1 = 0,01$, on peut voir bien des choses : $1 \times 1 = 1$ bien sûr, et aussi l'apparition d'un 0 intercalaire. Ou bien on peut observer que la pose des facteurs du produit comporte deux 0, deux 1, et deux virgules, et que le produit comporte encore deux 0 mais seulement une virgule et un 1. Et suivant cet ordre d'idées, on pourrait alors interpréter $0,1 \times 0,1 = 0,01$ en se disant que le résultat doit compter un chiffre de plus que la donnée ce qui réglerait la question du zéro intercalaire : dans $0,1 \times 0,1$ la donnée compte deux chiffres après la virgule, donc la réponse s'écrira : 0,01. Autre exemple : $0,11 \times 0,11$, $11 \times 11 = 121$, 121 a trois chiffres, déjà un de plus que 11 donc $0,11 \times 0,11 = 0,121$. Erreur ! Le résultat est 0,0121. On pourrait alors opter pour une autre règle : inscrire systématiquement un 0 après la virgule $0, \dots \times 0, \dots = 0,0 \dots$. Ce qui permet de produire le résultat de $0,11 \times 0,11$ mais ne marche pas pour $0,4 \times 0,4$, car le produit n'est pas 0,016 mais bel et bien 0,16 ! On pourrait interpréter encore autrement la formule en y voyant l'image inversée de $10 \times 10 = 100$ Il suffirait de lire les écritures numériques à l'envers : $01 \times 01 = 001$. Ces jeux d'écritures ne manqueront pas d'être perçus par les sujets même si assez vite ils les rejeteront comme non pertinents. Essayez donc de lire $0,11 \times 0,11$ comme 110×110 inversé, cela marcherait encore (parce que 121 se lit

la même chose dans les deux sens), par contre hélas cela ne marchera plus pour $0,12 \times 0,12$ et 120×120 inversé (parce que 144 ne se lit pas la même chose dans les deux sens). On peut ainsi très aisément imaginer une foule d'autres écritures qui pourraient se présenter comme possibles, voire même plausibles. Par exemple : $0,1 \times 0,1 = 0,1$ cette forme est effectivement celle d'une erreur très commune, ou encore des formes plus excentriques comme $0,1 \times 0,1 = 0,2$ ou $0,1 \times 0,1 = 0,11$ ou si on raisonnait en cumulant tous les signes des données $0,1 \times 0,1 = 0,10,1$ pourquoi pas ? À chacune de ces écritures on pourra dégager la règle *ad hoc*. Comment donc s'y retrouver ?

Toutes ces régularités qui sont des possibles nouveautés sont erronées, mais l'expérience présente mille autres règles qui ne porteront pas à conséquence et qui seront mêmes parfois utiles à la compréhension. Une de ces règles, très prégnante pour tout ce qui concerne les écritures de nombres entiers, veut que l'écriture d'un nombre entier ne présente jamais le chiffre 0 comme premier chiffre. Cette règle intervient dans les calculs en colonne, par exemple en soustraction, ou en division. Or, comme on peut le voir dans la pose du calcul en colonnes ci-dessus, ce qu'on demande aux élèves avec la notation décimale est justement d'inclure des écritures dont le premier chiffre est un 0. Certes ce 0 initial ne se présente jamais tout seul mais toujours suivi de la virgule. Mais dans les calculs en colonnes on traitera à part les chiffres et la virgule, on sépare donc chiffres et virgule (on doit compter son rang dans le résultat à partir de son rang dans les facteurs du produit).

Reprenons un exemple avec la pose en colonne de 0,32 fois 0,13 : va-t-on procéder comme avec les nombres entiers, devra-t-on multiplier successivement les chiffres de 0,32 par le 3 de 0,13 puis par son 1, puis par son 0 ? Et si on se contente de multiplier par le 3, et par le 1 vu que multiplier par 0 ne donne que 0, pourquoi est-ce qu'alors $0,32 \times 0,13$ ne serait pas égal à 0,416 ? (Car le résultat est 0,0416). Comment dans tout cela faire le tri entre ce qui est correct et ce qui est faux puis, parmi ce qui est correct, ce qui est signifiant ou insignifiant ? Ainsi donc les règles générales du calcul ne permettent pas de régler entièrement tout ce qui se passe pour tel ou tel calcul particulier.

Lorsque dans l'enseignement on présente une manière de calculer ou lorsqu'on fait s'y exercer les élèves, on les fait entrer dans des jeux de signes qui vont leur présenter plusieurs icônes et autant d'indices qui vont faire écho de choses déjà connues et constatées. Tout ceci rend la situation du novice encore plus compliquée à décrire et à comprendre. Un des problèmes vient de ce que les règles de calcul se manifestent comme des régularités de calculs actualisés et ne sont pas accessibles directement et immédiatement dans toute leur généralité. Le novice doit apprendre à distinguer celles qui sont générales de celles qui ne sont que contingentes.

Toutes ces choses sont bien connues des chercheurs qui ont travaillé sur les erreurs. Si je les relate ici c'est pour leur donner un éclairage sémiotique, qui est bien absent des recherches classiques en ce domaine. Le point le plus délicat dans ces affaires est que toutes ces régularités *ad hoc* fonctionnent pour la plupart de manière implicite et qu'elles restent latentes tant que le sujet n'est pas confronté à des écritures bien précises. Il est très difficile de savoir si elles fonctionnent comme règles de production ou seulement après coup. Elles ne fonctionnent en tous les cas pas comme des règles que l'on appliquerait strictement, dans une sorte de mot à mot, mais bien plus comme des jugements de plausibilité : soit *a posteriori* en examinant la forme du résultat trouvé, soit *a priori* en cherchant à diriger ses calculs vers l'obtention de quelque forme reconnaissable. Ainsi donc la plupart du temps ces règles fonctionnent en parallèle aux règles de calcul proprement dites et sans laisser de traces (les seules traces étant celles des calculs effectués). On peut parler de contrôles des calculs sur des écritures (icônes) selon un certain contexte (indice).

Ces considérations ne concernent pas que les novices et ici je donnerai un exemple très significatif. Tout dernièrement, un didacticien patenté, mathématicien et professeur émérite donnait une conférence au cours de laquelle il a projeté un diapositif contenant une très grossière erreur de calcul. Il s'agissait de calculer $14 \times 0,9$. Le diapositif présentait la pose de ce calcul, puis quelques étapes : $9 = 10 - 1 \rightarrow 14 \times 0,9 = 140 - 14 = 124$. Cette erreur est exemplaire du fonctionnement indiciel-iconique d'un calculateur trop pressé. Il procède de deux erreurs : la première suite à deux évitements, ou raccourcis, menés dans la foulée, la seconde par un jeu de répétition analogue à ce que j'ai présenté plus haut. Premier évitement : *Puisque dans la multiplication de 14 par 0,9, je ne multiplierai 14 que par 9, il suffit de trouver 14×9 , et de placer la virgule*. La seconde partie de ce raisonnement formulé a été oubliée en route, sans doute à la faveur de la combinaison avec le deuxième raccourci de calculs : *Je substitue à un produit par 9 une soustraction, en passant par le produit du nombre par 10, raccourci favorisé par le fait que le produit d'un nombre par 10 est rendu par un jeu d'écriture simplissime qui se formule communément par l'expression : ajouter un zéro*. On obtient donc $14 \times 0,9 \rightarrow 140 - 14$. Or il eût fallu écrire $14 \times 1,4$ et ne pas amplifier 14 par 10 mais le réduire à son dixième par un jeu d'écriture lui aussi simplissime : $14 \rightarrow 1,4$. Sauf que, au bout du compte, cela ne détermine pas l'écriture d'une soustraction aussi élémentaire que $140 - 14$! À cela est venue s'ajouter une seconde erreur : $140 - 14 = 124$ (au lieu de 126) qui procède elle aussi d'un raccourci : *estimation de l'ordre de grandeur du résultat, environ 120, et répétition du chiffre 4, sans doute parce que déjà itéré dans la donnée : $140 - 14$* . Le tout donne une superbe erreur qui montre bien que le calcul n'est jamais une

simple application de règles générales. Notez aussi ce qui m'a fait réagir au moment de la conférence : dans un premier temps je n'ai pas lu le calcul mais je me suis simplement étonné de ne pas trouver le chiffre 6 aux unités que j'avais inféré de $14 \times 0,9$ (le 6 de $4 \times 9 = 36$). Ne le trouvant pas, j'ai regardé de plus près le calcul, sans toutefois vraiment m'étonner de l'absence de virgule, ni du fait qu'il était étrange que $14 \times 0,9$ ait produit quelque chose d'aussi grand que 124 ou 126 ! Dans cet exemple interviennent plusieurs signes iconiques : *140 pour 14×10 , $140 - 14$ pour 14×9* , indiciels : *tiens il a écrit 124 et j'attendais un 6 aux unités*, et symboliques : *124 ne peut pas être les 9/10 de 14, 12 est plus petit et proche de 14, ah c'est 12,4 (en fait 12,6)*. Les jugements de plausibilité s'appuient sur des signes qui, compte tenu du contexte, *id est* selon les attentes que ce contexte nous suggère, nous apparaissent conformes ou surprenants.

Ce que les recherches classiques sur les erreurs n'ont jamais bien pu traiter tient aux deux caractéristiques mentionnées ci-dessus : *primo* le caractère *ad hoc* et non formulé de certaines règles suivies, et *secundo* le fait qu'elles viennent doubler le calcul proprement dit et ne laissent pas de traces. Or pour en parler, pour les traiter, les chercheurs doivent les nommer, les décrire et les formuler. Et c'est aussi ce que j'ai fait bien sûr. Cette opération n'est pas franche, au contraire, elle a eu pour effet une inversion par rapport à la situation d'un sujet en train de calculer. Dans mon dernier exemple, mon collègue ne se reconnaît pas dans ma description car il était dans un calcul alors que je me suis mis dans ses erreurs. Alors qu'un calculateur développe les signes de son calcul, et que pour ce faire il engage ponctuellement quelques règles et jugements, j'ai, pour ma part, développé un propos portant sur les règles qu'il a suivies. À ces règles, j'ai attribué des signes que j'ai développés par associations. Par contre, je me suis contenté de présenter très ponctuellement, voire évasivement, quelques calculs où elles pourraient se manifester.

Comment caractériser ce qui se passe ici ? La réponse sémiotique consiste à considérer que c'est une affaire d'*objet du signe*. Ces règles supposées par l'analyste n'ont, pour le calculateur, pas de signe propre, elles ne sont pas les objets de ses signes. Lui calcule, l'analyste ne calcule pas, il développe des considérations et des interprétations sur les erreurs, sans s'occuper plus qu'il ne faut des calculs en jeu. Pourtant entre ce qui se produit dans tel ou tel calcul et ses propos il y a bel et bien un lien : celui de formes aisément reconnaissables et que toute personne un tant soit peu expérimentée en calcul n'aura pas de difficulté à reconnaître (icônes), celui des circonstances où ces formes apparaissent (indices) et celui de quelques significations numériques à quoi les relier (symboles). Mes propos vous auront tantôt évoqué des choses familières tantôt présenté des choses parfaitement compréhensibles et concevables. Par contre les sémoses dans lesquelles ces

signes communs sont pris différent totalement. Si vous aviez comme moi assisté à la conférence de ce collègue, vous n'auriez pas manqué de reconnaître qu'il y avait erreur, mais il y a fort peu de chances que vous l'ayez interprétée comme je l'ai fait ci-dessus.

Ces considérations changent passablement la perspective du chercheur : puisque le signe qu'il fait de ce qu'il retire de l'analyse des calculs des élèves n'est pas un signe de calcul, il ne pourra pas sans autres attribuer aux élèves ce qu'il aura inféré. Dit autrement, les conclusions de ses analyses n'expliqueront pas grand-chose de ce qui aura pu se passer. Par contre ce qu'il obtient sont des liens, des relations qui permettent de saisir ensemble (*cum prehendere*) des choses advenues dans différents calculs et auxquelles le sujet n'a pas accès, faute de signes (ou plutôt parce qu'il est dans des signes d'autres choses). On peut dire que le chercheur pourra dès lors lire entre les lignes des traces laissées par le calculateur. Et c'est aussi ceci qui lui permettra de lui venir en aide : soit en soulignant quelque possible (intervention sur une icône), soit en lui faisant faire quelque expérience de calcul ou autre – basée sur les liens quelque fois intrigants entre certains contextes et certaines formes obtenues (intervention sur un indice), soit en lui procurant quelque logique interprétative nouvelle (intervention sur un symbole). Ces signes que développe le chercheur dans l'interprétation et la compréhension de ce qu'il observe ont donc bien plus une valeur d'intervention que d'explication.

Reprenons donc toutes ces considérations en examinant quelques composantes des signes que je viens de développer à propos de la formule $0,1 \times 0,1 = 0,01$.

2.2.1 Possibles

L'icône est une chose existante. Les formules sont des propriétés d'écriture : $0,1 \times 0,1 = 0,2$ $0,1 \times 0,1 = 0,11$ sont des choses parfaitement existantes qui ont la propriété, l'une, d'une addition de 1, et l'autre, d'une répétition de 1. Ce genre de choses se trouve ailleurs, certes combiné à d'autres, ainsi dans l'écriture $11 \times 11 = 121$, etc.

L'icône n'est pas l'image d'une seule propriété, elle n'est nullement un attribut abstrait, elle est convoyeuse de significations. En particulier, chose restée jusqu'ici implicite, elle donne une image à un ordre de grandeur. Cet enrichissement des propriétés par le lien des signes est tributaire des assimilations du sujet à ses connaissances. Par exemple, si quelqu'un rejette le résultat 0,01 du produit de 0,1 par lui-même, et par ce rejet même se trouve préférer la formule $0,1 \times 0,1 = 0,1$, s'il le fait en parfaite conscience de forcer ainsi ses écritures, parce qu'il ne peut pas croire possible ce 0,01 qui apparaît sous sa plume, c'est justement parce qu'il l'assimile à l'écriture d'un nombre plus petit que 0,1 et qu'il se fait l'idée que cela ne se peut pas se produire dans une multiplication !

Notez *a contrario* que dans les circonstances d'un calcul automatique, mené sans penser trop loin, avoir fait abstraction de cet aspect des signes, avoir négligé ce pan de ce qu'ils nous suggèrent, ici l'ordre numérique, est une circonstance favorable à l'apparition de la formule et de l'écriture $0,01^2$. Ce découplage des jeux de signes et des significations est nécessaire.

Lorsqu'on rencontre la formule $0,1 \times 0,1 = 0,01$, elle se présente comme un jeu d'écriture sans que l'on sache s'il existe effectivement quelque chose de mathématique à quoi cette forme d'écriture puisse se prêter. Si je vous avais proposé l'icône : $01 \times 01 = 001$, qui de vous y aurait reconnu la même chose – et la même chose que $10 \times 10 = 100$?

2.2.2 Indiqué

L'examen ou l'écriture contrôlée du calcul de 0,1 fois 0,1 est une expérience qui signale, par sa présence irréfutable et reproductible à volonté – et non plus seulement indéniable – que quelque chose existe. Cette écriture se prête bien à quelque chose, mais quelle est donc cette chose ? Ce n'est pas $0,1 \times 0,1 = 0,01$ qui n'est et ne sera jamais qu'une icône prêtée à cet objet pour lui donner une apparence.

Ces expériences signalent l'existence de quelque chose à quoi on peut attribuer telle ou telle propriété que l'on retrouve dans d'autres choses existantes de la diversité du monde – ici des formules du monde des écritures numériques – mais pas non plus « tout et n'importe quoi » comme écriture. Cela aura valeur d'indice : il y a quelque chose à comprendre. Il faudrait pouvoir par un moyen ou un autre rendre compte de ce qui est désormais attesté, s'en faire une raison. Parmi ces autres choses existantes auxquelles rapporter notre formule, il y a bien sûr la traduction en fraction : $0,1 = 1/10$, et $0,1 \times 0,1 = 1/10 \times 1/10 = 1/100 = 0,01$. On peut encore imaginer l'expérience qui consisterait à étendre progressivement la multiplication aux nombres décimaux par un nombre entier, puis aux nombres entiers par un décimal, pour aboutir finalement à la multiplication d'un décimal par lui-même. Autre exemple : considérer que s'il est établi que $0,1 \times 1 = 0,1$ et que $0,1 \times 2 = 0,2$, alors $0,1 \times 1,5$ serait situé à mi-distance entre 0,1 et 0,2, soit en 0,15. Ceci requiert pas mal de règles et de conventions d'écritures ! Notez le filtrage opéré par les expériences et leur fonction indiciaire.

² Cette remarque est capitale parce que notre expérience est entièrement faite de moments où notre attention se relâche, tantôt ici, tantôt là, et que ce qui ne nous avait aucunement alarmés ici peut nous sembler là, et tout d'un coup, être un mur insurmontable.

2.2.3 Interprétable

L'objet auquel cette formule est rapportée est la multiplication, ou plus précisément une de ses propriétés³. Il sera préférable pour cet exposé de s'en tenir à un aspect de cet objet, que je formulerai ainsi : *Le produit de deux nombres n'est pas nécessairement supérieur à chacun de ses termes*, ou si vous préférez éviter la formulation négative mais synthétique : *Le produit de deux nombres peut être inférieur à l'un ou l'autre de ses termes, voire à tous les deux*. La formule a donc reçu un signe qui lui est propre et une formulation générale (énoncée en langue française).

Exprimé ainsi, l'objet, enjeu non plus de la présentation iconique ni de l'expérience indiciaire mais de l'interprétation symbolique, est présenté sous l'aspect accommodateur : *Voilà ce à quoi il faudra se faire si l'on veut assimiler les nombres décimaux aux connaissances numériques que nous avons déjà*⁴. L'enjeu n'est donc pas d'adopter telle ou telle révision des règles jusqu'ici admises, mais de retrouver, par le support des règles admises, et de celles que selon nos indicateurs nous devons admettre, une conception de la multiplication qui, elle, s'en accomode. Cet enjeu s'exprime à la faveur de l'explicitation d'une nouvelle relation, jusqu'ici restée sous-entendue : l'ordre des nombres (et pas l'ordre des écritures, ce qui nous a occupés jusqu'ici !). Suivant ce fil de signification, les écritures décimales rendent compte de la possibilité de produire rapidement d'infimes parties. L'itération des zéros après la virgule se conçoit ainsi. Se rendre compte que l'enjeu de la formule réside dans la relation entre la multiplication des nombres et leur ordre demande toute une interprétation et de nouvelles expériences. Ce n'est pas alors le calcul qu'il s'agit de travailler mais bien l'interprétation de ce fait dans les connaissances que l'on a par ailleurs et la cohérence de tout cela.

On peut imaginer à ce moment une nouvelle *expérience coup-de-pouce*, introduisant et produisant de nouvelles icônes, selon d'autres règles que scripturales et indiquant d'une autre manière l'existence de ce nouvel objet de pensée : à savoir la propriété de la multiplication qui est ici en jeu. Ainsi, on pourrait dessiner un carré, tracer sur chacun de ses côtés des traits aux dixièmes, tirer les lignes horizontales et verticales reliant les coches correspondantes, produisant ainsi un quadrillage régulier. On s'intéresserait au carré de côté un dixième en le faisant apparaître comme un petit carré parmi les cent que comporte cette grille.

Cette expérience est une réplique, sur un autre mode et en suivant

³ Et plus loin le nombre bien sûr, le nombre décimal comme notation d'un opérateur.

⁴ Assimilation et accommodation sont indissociables, sinon il ne saurait y avoir quoi que ce soit à accommoder.

d'autres règles, de la propriété en question. Une telle expérience est donc, elle aussi, un indice de cette chose à comprendre – et pas encore vraiment conçue. Une telle convergence d'indices vient les renforcer. Elle vient prêter sa logique graphique à la conception de cette chose : $0,1 \times 0,1 = 0,01$, en lui conférant une signification, la rendant interprétable autrement. Du point de vue de la relation d'ordre, les nouvelles icônes que procure le dessin apportent cependant ceci de compliqué que n'apparaissent pas des centièmes de longueurs mais des centièmes de surface, et que si l'on veut penser les dixièmes en terme surface, il faut alors les chercher : ce sont les bandes et les colonnes du quadrillage.

Par contre cette expérience est porteuse d'une autre interprétation, essentielle pour cette question. Le fait que $0,1$ fois $0,1$ donne $0,01$ et pas un nombre plus grand heurte et choque la conception que nous pouvions avoir jusqu'ici de la multiplication selon laquelle le produit est plus grand que les facteurs. Toutefois, elle ne la ruine pas. Bien au contraire, au bout du compte elle la renforce jusqu'à la déterminer en quelque chose de parfaitement adapté. Pour s'en convaincre il suffira de considérer qu'il serait revenu parfaitement au même de dessiner un carré, de l'amplifier en amplifiant par dix ses côtés et de constater par pavage que le carré amplifié est recouvert par cent des petits carrés. Bel effet miroir ! La logique géométrique s'est donc prêtée à la conception de notre objet puisqu'au bout de ces développements on comprend, ne serait-ce que confusément, que c'est la même raison – et plus seulement la même règle – qui veut que $0,01$ soit le produit de $0,1$ par lui-même et 100 , le produit 10 par lui-même. On y apprend aussi que la multiplication peut rendre compte de phénomènes d'amplification ou de réduction et ce, de la même manière.

Bien entendu, mon exemple est fort schématique, et bien d'autres cheminements dans ce petit monde sont possibles et sans doute nécessaires, comme par exemple le recours à d'autres registres de notation, et d'autres règles : j'ai déjà mentionné la notation fractionnaire, mais maintenant que nous disposons de la signification commune de ce qui fait que $10 \times 10 = 100$ et $0,1 \times 0,1 = 0,01$ nous pouvons en déduire une règle de calcul en colonne inédite consistant à décaler les produits vers la droite lorsqu'ils correspondent à des facteurs décimaux, comme dans l'exemple ci-dessous :

45,23	45,23
<u>x 21,4</u>	<u>x 21,4</u>
18092	18,092
4523	45,23
<u>9046</u>	<u>904,6</u>
967,922	967,922
<i>notation usuelle</i>	<i>nouvelle notation</i>

On retombe alors sur un jeu d'écriture (portant sur la disposition des chiffres). Dans la notation usuelle, on place la virgule sur le résultat final seulement, en comptant que le résultat aura deux chiffres après la virgule ; dans la notation inédite, la virgule reste dans le tableau, toujours à la même place.

2.2.4 Transversalité de l'exemple 2

Ce qu'indique ce deuxième exemple est que l'analyse du chercheur croise et traverse les contextes dans lesquels il puise ses observations. Les fils de relations qui se sont développés lors de mon analyse ne suivent pas le fil du travail en classe, ni celui de l'enseignant, ni celui de l'élève, et ne respectent pas la chronologie. Ce qui, je l'ai déjà dit, permet de lire entre les lignes de ce qui se passe, de rapprocher des choses qui se seront passées à des moments divers, de reporter ce qui aura pu être observé avec certains élèves sur ce qui se passe pour d'autres dans d'autres contextes, de naviguer aussi, et peut-être même surtout, entre des formes d'écritures produites (icônes), des éléments contextuels auxquelles elles sont liées (indices) et des significations auxquelles on peut les rapporter (symboles). Il indique surtout l'intérêt que représentent les analyses sémiotiques, et tout particulièrement l'attention qu'il convient de porter aux icônes, à les lier à quelque contexte (indice) afin de s'engager sur des jeux d'interprétation (et pas seulement d'écritures).

Il est clair que mes analyses coupent et recoupent le matériel d'observation et que c'est en cette transversalité que réside leur valeur d'intervention dans le processus d'enseignement/apprentissage et d'orientation de ce dernier vers certaines significations contrôlées. Il est clair que ce que j'ai appelé plus haut « anachronisme » n'est qu'une des formes que cela peut prendre, lorsque la transversalité passe outre l'ordre chronologique ou développemental. Mon exemple est une coupe sémiotique par laquelle je tente de restituer le fourmillement des signes subséquent à l'introduction d'un signe de quelque chose de nouveau.

2.3 EXEMPLE SCHÉMATIQUE INTERPRÉTATIF

Mes deux premiers exemples partagent quatre caractères que je voudrais commencer par dégager. Le premier est que ce sont tous deux des coupes sémiotiques, le deuxième est qu'ils ne reposent pas sur des faits d'observation : ce sont des représentations informées, le troisième est qu'ils sont tous deux relatifs à un matériau pré-interprété, le quatrième est que dans les deux schémas, une expérience géométrique est présentée comme faisant le pas vers le symbolique et, nourrissant l'imagination à une tout autre source que celle du jeu réglé des écritures algébriques, donne une signification à la nouveauté.

Revenons sur la troisième caractéristique : Qu'est-ce que j'entends par le qualificatif *pré-interprété* ? Dans ces deux exemples il a été fait cas de nouveauté, mais *de facto*, pour nous, il n'y avait rien de réellement nouveau. Ces exemples reposent sur des représentations que nous pouvons nous faire de situations où quelque chose de neuf se présente. Dans le premier exemple j'ai mêlé des considérations historiques et un témoignage d'élève, dans le deuxième exemple, j'ai cherché à me représenter quelques aspects d'une situation de rencontre de nouveauté par quelque novice, mais je l'ai fait d'un point de vue déjà informé – en particulier par tout ce que je connais des erreurs de calcul – et selon cette interprétation que dans l'affaire, les signes nous fournissent un fil conducteur. Peut-on éviter toute pré-interprétation ? Je ne le crois pas, et je dirais même que nous entrons tous par la tiercéité et le symbolique, soit que nous en restions à des habitudes interprétatives que nous ne faisons que réitérer, soit que le processus interprétatif rebondisse d'une manière inusitée, ré-ouvrant la question de la signification de ce qui nous occupe. Or ceci ne peut pas se faire en restant au niveau symbolique mais demande des icônes et des indices nouveaux.

Mon troisième exemple va introduire des éléments d'observation. Fort peu, et hélas bien moins que je ne l'aurais voulu. Ceci tient aux conditions de travail des ateliers. Je ne dispose pas des enregistrements vidéo que nous avons visionnés et je ne les ai vus qu'une seule fois, je n'ai plus pour rédiger mon exemple que mes notes ainsi qu'une analyse effectuée dans les jours qui ont suivi. Malgré toutes ces conditions défavorables, je puis montrer comment ces éléments d'observation ré-ouvrent le processus interprétatif, et ce, même pour quelqu'un d'expert comme je le suis en didactique des mathématiques et sur le domaine étudié par mes collègues. C'est pour cela que je qualifie mon troisième exemple d'interprétatif.

Avec cet exemple, je vais aussi opérer un renversement, et j'en viens ici à la quatrième caractéristique que je donnais ci-dessus. Alors que dans les deux premiers exemples, la géométrie venait apporter sa logique à la conception nouvelle des objets nombres ou multiplication, donc œuvrait à titre de symbole, ici elle œuvre à titre d'icône, l'indice étant dévolu aux propriétés physiques de ce matériau iconique. Il reviendra à la logique d'un schéma mathématique le privilège de nous fournir une conception possible, informante et significative, de ce que la situation avait donné à inférer aux élèves.

À PROPOS DE LA SÉQUENCE VIDÉO MONTRÉE PAR T. DIAS ET SES COLLABORATEURS, AUTOUR DES POLYÈDRES ET DU THÉORÈME QUI INDIQUE QUE LES SEULS POLYÈDRES RÉGULIERS ONT POUR FACES SOIT DES TRIANGLES ÉQUILATÉRAUX, SOIT DES CARRÉS, SOIT DES PENTAGONES RÉGULIERS

2.3.1 Premier argument :

Un matériel didactique pour l'étude des polyèdres

L'équipe de Viviane Durand-Guerrier et Thierry Dias (Dias 2006) travaille sur un matériel fait de plaques en plastique que l'on peut clipper afin de réaliser des maquettes de polyèdres. Il se trouve que dans mes observations en classe d'enseignement spécialisé, j'ai aussi été amené à étudier ces questions sur un matériel tout à fait semblable. Je m'étais rendu compte que ce matériel – énième variante de matériels analogues – était mis disposition des élèves, qu'il rencontrait la faveur de certains d'entre eux, mais pas de tous, et que les enseignants n'avaient pas la moindre idée de l'usage qui pourrait en être fait au-delà de ce que leur indiquait la notice. En particulier, les enseignants n'avaient pas investi pour autant l'univers des polyèdres, ne jouaient pas avec le matériel, si ce n'est pour aider les élèves, et ne savaient même pas qu'existaient ces choses que l'on appelle des *solides platoniciens* (ou parfaits) ! Certes ils connaissaient tous le cube et si on leur faisait remarquer, savaient distinguer un tétraèdre d'une pyramide égyptienne.

Si le matériel leur fournissait bel et bien des icônes de polyèdres et quelques expériences relativement sommaires, ils n'avaient élaboré qu'une interprétation très limitée de ces objets. Avec des significations si frustrées, leur exploitation de ce matériel didactique ne pouvait pas dépasser une vague possibilité : *Ce matériel est susceptible de permettre à certains élèves de développer quelque habileté et familiarité à ces objets mathématiques, ceci pourrait être favorable au développement de leurs goûts et de leurs compétences en la matière.* Qui plus est, les constructions et jeux auxquels s'adonnaient les élèves et qu'il leur était donné d'observer les laissaient sur cette interprétation habituelle que rien ne semblait pouvoir bousculer. En effet, faute de pouvoir identifier les mathématiques en jeu, ils en étaient réduits à rapporter ces observations à des caractéristiques personnelles des élèves.

2.3.2 Deuxième argument : Une situation d'enseignement dont on nous a présenté un extrait de la vidéo

Mes collègues lyonnais ayant ailleurs décrit leur projet et donné des éléments d'observation, je renvoie les lecteurs à ce document (Dias 2006) et me contenterai de rappeler qu'un de leurs buts est d'établir avec les élèves la liste des cinq polyèdres réguliers qui existent. Cela

suppose qu'on arrive à les convaincre par raisonnement que seuls des polyèdres à faces triangulaires (équilatérales), carrées et pentagonales sont envisageables pour obtenir un polyèdre régulier. En fait, il existe un seul polyèdre parfait à faces carrées : le cube, un seul aussi à faces pentagonales régulières : le dodécaèdre (12 faces), et trois polyèdres à faces triangulaires équilatérales : le tétraèdre (4 faces), l'octaèdre (8 faces) et l'icosaèdre (20 faces). Avec des faces triangulaires équilatérales, on peut encore construire un hexaèdre (6 faces) et un décaèdre (10 faces) sans que cela donne pour autant des polyèdres parfaits. Ces polyèdres sont aisément constructibles avec le matériel.

Un raisonnement convaincant limitant le nombre de tels polyèdres se développe schématiquement de la manière suivante.

On raisonne sur les sommets d'un polyèdre que l'on suppose parfait. Si ce polyèdre est parfait, alors chaque sommet est à la jointure du même nombre de faces et ces faces sont toutes de la même forme, celle d'un même polygone régulier. On peut donc raisonner sur un seul des sommets, cela vaudra pour tous les autres. Comme le polyèdre est un objet en trois dimensions non plat, un tel sommet se trouve à la jonction d'au moins trois faces et si on fait la somme des angles que fait chacune de ces faces à ce sommet, on obtiendra un angle inférieur à 360° . Comme les faces sont toutes identiques et qu'elles sont de la forme d'un certain polygone régulier, la somme des angles des faces se rejoignant en un sommet sera un multiple de l'angle de ce polygone. Il y a au moins 3 faces, donc cette somme des angles est au moins le triple de l'angle de la face. Nous avons vu aussi qu'elle est inférieure à 360° . L'angle de la face d'un tel polyèdre est donc inférieur à 120° . Les seuls polygones réguliers qui possèdent un tel angle sont le triangle équilatéral, d'angle 60° , le carré, d'angle 90° et le pentagone régulier, d'angle 108° . Les polyèdres réguliers ont donc un de ces trois polygones comme faces.

Ce raisonnement n'implique pas pour autant que ces polyèdres existent bel et bien, il dit que s'ils existent alors ils possèdent cette propriété de n'être composés que de triangles équilatéraux, de carrés ou de pentagones réguliers. Voilà au sens de Peirce une icône concernant ces polyèdres.

2.3.3 Troisième argument : Un problème épistémologique et ses répercussions en problème d'enseignement

« Wittgenstein dans ses *Remarques sur les fondements des mathématiques* (ouvrage inachevé) [...] attirait l'attention sur le manque de détermination des concepts mathématiques. Il est allé jusqu'à proposer qu'un théorème mathématique ne présente aucun caractère de nécessité tant qu'il n'a pas été prouvé ; mais il pensait qu'après qu'on en a donné une preuve, on ne peut faire autrement que d'accepter celle-ci sous peine d'être taxé de stupide ou d'irrationnel. Ce qui conduit à accepter une preuve, ce ne sont pas

les habiletés et concepts mathématiques acquis, mais plutôt une condition nécessaire à l'acquisition de ces habiletés et concepts, qui réside dans la nature humaine. C'est quelque chose d'inné. Être humain implique d'être capable de prouver un peu. » (Hacking 1975 : 69)

« Les mathématiciens, par exemple, n'avoueraient jamais que cela n'a aucun sens de dire que la diagonale d'un carré est incommensurable à son côté, et pourtant comment la distinction du commensurable et de l'incommensurable pourrait-elle jamais devenir pratique, quand on sait que la diagonale d'un carré diffère de quelque fraction rationnelle du côté, d'une quantité moindre que toutes celles qu'on a pu lui assigner antérieurement ? Et l'on ne diminuerait pas cette difficulté d'un iota si, au lieu de conséquences pratiques, il nous fallait modifier la maxime de manière à la faire se rapporter à des conséquences expérientielles. Voilà qui est tout à fait évident. » (Peirce 2002 : 282)

Si les enseignants de la situation dont on nous a montré des extraits vidéo acceptent le théorème (selon lequel il n'existe que cinq polyèdres parfaits) et œuvrent en connaissance de cause, ce n'est pas encore le cas des élèves qui, eux, ne se trouvent placés devant aucun caractère de nécessité et sont par conséquent dans ce *vide de détermination conceptuel* qu'évoque Hacking à la suite de Wittgenstein. D'autre part, tenter de le leur faire découvrir avec le matériel polydron n'est-ce pas se mettre dans la difficulté que signale Peirce, et ce surtout que le dit théorème ne cherche pas du tout à être responsable de la présence dans l'artefact didactique (le matériel de construction) de quelque chose qui correspondrait à ses hypothèses, que ce soit de manière exacte ou approchée ? Prise dans une telle tenaille, l'entreprise semble sinon insensée, du moins *stupide et irrationnelle* et allant à l'encontre de ce qui est *tout à fait évident* ! Et pourtant elle a lieu et elle donne des effets ainsi que peuvent en témoigner nos didacticiens ! *Quid ?*

La seule réponse que je puisse apporter à cette contradiction procède de considérations sur le caractère sémiotique du matériel et des expériences que l'on fait faire avec :

- Ce matériel produit des icônes de polyèdres, des choses qui prêtent leur apparence à la figure mathématique appelée polyèdre. Une figure mathématique est irréalisable matériellement, mais on peut lui associer des choses matérielles porteuses de certaines de leurs propriétés. Ces icônes ressemblent aux dessins que l'on connaît par ailleurs.
- Lorsque je construis un assemblage de polydrons en clippant des pièces entre elles, j'obtiens une surface articulée qui le cas échéant se fermera, formant une sorte de coquille. Autour des charnières des plaques il y a un certain jeu. La construction ne tient pas toute seule, du moins tant qu'elle n'est pas suffisamment avancée. Du

jeu subsiste jusqu'à ce qu'elle soit fermée ⁵. Dans l'expérience matérielle, cette rigidité est un indice de l'existence du polyèdre mathématique que l'on vient de construire. C'est un phénomène dont je puis parler de multiples manières, par exemple, ma construction se ferme et se ferme sur une plaque plane, ayant un nombre fini d'arêtes et, si mes plaques ont toutes le même côté, des arêtes égales à ce côté.

La séquence didactique nous fournit des icônes d'objets idéaux mathématiques, et des indices dans les expériences qu'on fait avec. Ces objets mathématiques idéaux sont définis par ailleurs – dans le savoir – c'est-à-dire sont associés à des signes symboliques qui nous permettent en retour de modéliser les expériences faites avec le matériel afin de les interpréter. Je viens de vous donner un exemple d'une telle modélisation en mettant en évidence un des traits de l'expérience de construction : la fermeture de la construction et la rigidité qu'elle prend progressivement et je l'ai déclaré particulièrement significatif. Ce sont mes savoirs sur les polyèdres qui m'ont permis de faire une telle remarque sur quelque chose qui autrement reste largement implicite. D'autres propriétés du matériel tout aussi prégnantes sont non pertinentes. Les inférences que l'on peut faire en expérimentant sur un tel matériel didactique illustratif d'objets mathématiques abstraits sont ambiguës. D'un côté ce matériel suggère de lui-même quelques propriétés que l'on veut mettre en évidence – par induction –, de l'autre la connaissance de ce que ce matériel est censé illustrer permet une lecture des expériences que l'on fera avec ce matériel – par déduction. Entre les deux, il y a un saut. Seule une abduction nous permet de faire un tel saut. Est-il envisageable qu'une telle abduction puisse s'amorcer au cours de la situation, ou au moins quelques éléments tangibles sur laquelle l'enseignant puisse venir l'ancrer ? C'est ce que j'ai cherché à voir lors du visionnement.

2.3.4 Quatrième argument : Deux évènements observés

Cette vidéo montre deux évènements qui se sont spontanément présentés et du plus grand intérêt pour moi. La consigne était la suivante. Le professeur a donné une définition de polyèdres parfaits (polyèdre convexe, à faces polygones réguliers, lesquelles faces sont toutes superposables, et tel qu'un même nombre de faces entoure chacun de ses sommets). Il s'agissait de confectionner un polyèdre régulier en allant se servir dans une boîte contenant en nombre des faces polygonales diverses – toutes n'étaient pas des polygones réguliers, il y avait par exemple des rectangles. La classe fonctionnait en groupes d'élèves.

⁵ Et ce du moins dans tous les cas de constructions de polyèdres convexes.

2.3.4.1 Premier évènement

Un groupe d'élèves a choisi de prendre des octogones réguliers et a tenté de confectionner un tel polyèdre. Si on cherche à entourer un octogone par d'autres, et si on veut éviter des chevauchements, on devra sauter un côté sur deux. Ainsi, un des élèves trouve très vite un assemblage de six faces en assemblant ses octogones selon le schéma en croix d'un développement de cube. Cet assemblage, une fois monté, donne un polyèdre fait de six octogones et de huit faces vides (trous) en forme de triangles équilatéraux, bref, une coque de cube que l'on aurait coupée autour de chaque sommet, ou encore une coquille trouée qui, si on la complétait par 8 faces triangulaires, donnerait un polyèdre à 14 faces régulières de deux types : octogones et triangles : 14 faces, 36 arêtes, et 24 sommets, 3 faces par sommet.

La vidéo montre que deux élèves du groupe font très rapidement l'hypothèse (erronée) qu'il devrait être possible d'agrandir leur construction afin d'élargir ces 8 trous qui ont la forme et la taille d'un triangle équilatéral jusqu'à leur donner la forme et la taille des faces octogonales. Tel est le premier moment de leur abduction.

Le deuxième moment, déductif, est le suivant : on peut agrandir cette construction en augmentant son développement en croix (qui est une des formes que peut prendre le développement du cube). C'est ce que propose le partenaire de celui qui a construit le polyèdre troué, cela se voit clairement à la vidéo, sans qu'aucun mot ne semble échangé entre eux (du moins celui qui voit la vidéo ne les entend pas distinctement).

La recherche inductive, prise en charge par le premier des acolytes, peut être formulée ainsi : De combien de faces agrandir cette croix – développement du cube tronqué – dans sa longueur (axe) et dans ses bras ? L'élève cherche diverses manières de combiner ses plaques afin de produire (cause) un polyèdre qui ne serait composé que de faces octogonales régulières. Il fait diverses tentatives, toutes infructueuses. À ce moment, son travail est interrompu par une mise en commun du professeur.

Je n'ai pas vu la suite de la vidéo. Selon les auteurs de la vidéo, survient alors dans la classe une nouvelle hypothèse (abduction) : *Ce ne serait pas possible d'y arriver*. Alors tout change et la seconde abduction peut en retour venir expliquer, pour les élèves, le fait que leur recherche n'aboutissait pas. Ainsi si l'expérience supporte l'étude de la figure mathématique (cause), c'est la sanction de l'expérience qui est expliquée (raison) par les propriétés mathématiques qui ont été insufflées dans le matériel physique.

2.3.4.2 Second évènement

Le second évènement a eu lieu dans l'autre groupe d'élèves, lors de la même séance, filmée par quelqu'un d'autre. Les élèves assemblent des faces hexagonales et se rendent compte de deux choses. Sur la table cet assemblage se met en plaque, il pave en quelque sorte la table. Mais la plaque qu'ils produisent est souple, articulée par ce principe de clip en charnière. Chaque fois qu'ils soulèvent leur morceau de plaque, elle se plie. Ce petit jeu qu'ils constatent leur fait espérer qu'en agrandissant la plaque ils arriveront à y enfermer quelque volume.

À partir de ces éléments d'observation, j'extrapole sans savoir ici ce qui a bien pu venir à l'esprit des élèves. Ils ont certes bel et bien observé et remarqué la non-rigidité de leur construction, mais ils semblent ne pas en avoir donné plus de signification que leur habitude : *Lorsqu'ils construisent un polyèdre, leur construction ne se rigidifie qu'au moment où elle ferme, à ce moment leur construction « tient toute seule ».*

Pour moi cependant, ceci m'ouvre une sémiose inhabituelle. Je me demande ce qui se passerait si on arrivait à faire tenir une telle construction (qui se défait sous le poids des plaques, les charnières sont assez fragiles). Je conclus qu'on aurait la possibilité d'une courbure. Plus tard chez moi, j'examine matériellement la chose avec mon propre jeu. C'est ce qui semble être le cas, cela semble même être une courbure régulière, ce qui permettrait éventuellement d'obtenir une coque s'approchant d'une sphère, qui sait ?⁶ Mais je sais aussi que, idéalement, ce n'est pas possible. Comment donc comprendre ce qu'il m'est donné d'observer ? C'est en réexaminant les propriétés du matériel à l'aune de ce que je sais des propriétés mathématiques qu'il est censé illustrer que je trouverai la réponse. Exemple de la détermination des sémioses par l'objet.

2.3.5 Cinquième argument :

Qu'est-ce que le matériel nous donne vraiment à voir ?

L'examen attentif du matériel est assez délicat. Une observation minutieuse montre que les charnières se déplacent par leur jeu et ne se trouvent plus tout à fait parallèles aux bords des faces, en quelque

⁶ Ici je suis dans une nouvelle abduction et j'ai même passé son moment déductif, puisque c'est par un argument de symétrie des plaques et des défauts du matériel que je me laisse persuader – suis-je stupide ou irrationnel ? – d'obtenir quelque chose que, par une sorte d'idéalisation des défauts du matériel (Mais qu'est-ce qui est défaut ? En tout cas pas le mouvement des charnières, seul le jeu de leurs axes), je tiendrais ce jeu pour identique en chaque charnière ce qui me fait conclure à une courbure constante, donc à une calotte se rapprochant à une sphère, donc à un morceau de coque polyédrique (régulier ? régulier jusqu'où ?)...

sorte elles lèvent sous l'effet de torsion entre les plaques. (Je ferai ici abstraction de l'épaisseur des plaques, qui bien entendu joue un rôle essentiel.) Les charnières se croisent alors selon un angle moindre que 120° et par conséquent la somme de cet angle pris 3 fois ne donnera plus tout à fait 360° . C'est cela qui confère à la plaque sa légère courbure. Le raisonnement mathématique donné ci-dessus est non seulement sauf, mais il explique à la fois le cas idéal et l'écart de la réalisation matérielle à cet idéal !

Ici, c'est le mode d'assemblage, ces charnières, qui fait que ce matériel ne donne pas un assemblage rigide d'hexagones, mais un assemblage articulé. Pour la maquette et les expériences qu'elle donne à faire, cette articulation est non seulement fonctionnelle, mais encore nécessaire. Les maquettes peuvent ainsi prendre forme progressivement pour se rigidifier lorsque le matériel fermera. Ce qui résulte de l'assemblage de plaques hexagonales n'est pas à proprement parler un pavage d'une surface plane, on ne colle pas les plaques à la table comme on le ferait de catelles⁷. Si je puis dire ainsi, on produit une plaque froissable en ses charnières. L'assemblage de 6 triangles équilatéraux produit un effet encore plus net que celui de 6 hexagones. Est-ce un défaut du matériel ? Pour moi pas du tout parce que ce qu'il met en évidence est une de ses caractéristiques cruciales : le jeu des articulations et les circonstances où on obtiendra une construction rigide ou non. La forme du polyèdre se détermine au fur et à mesure de la progression de la construction, c'est bel et bien cela dont ce matériel procure l'expérience. De telles considérations me permettent alors d'organiser mes expériences dans un signe cette fois de ce matériel en quelque sorte *transverse* aux propriétés mathématiques qu'on voulait illustrer. Cette sorte d'expérimentation, fondée sur des propriétés du matériel qui l'écartent de ce qu'il est censé illustrer, m'apporte des connaissances nouvelles sur les polyèdres eux-mêmes ! Telle est la force des icônes. J'observe par exemple qu'en assemblant en trièdre 3 triangles équilatéraux, ou 3 carrés, on a quelque chose de très rigide ; puis qu'en assemblant 4, 5 ou 6 triangles équilatéraux (voire plus) on perd cette rigidité. J'envisage aussi de construire des polyèdres non convexes, qui ne seront pas des polyèdres parfaits, et pour lesquels on peut assembler autour de certains de leurs sommets 6 plaques triangulaires ou plus. Dans cet ordre d'idées, avec un élève (9 ans, enseignement spécialisé), je m'amuse même à inventer une sorte de girofle faite de l'assemblage de nombreux triangles et trouve que cela illustre de manière saisissante comment l'intersection de deux charnières matérielles est un point fixe, en l'occurrence ici un point fixe immatériel car situé dans le prolongement de leurs axes. Chose que le constructeur du matériel n'avait pas envisagée et que

⁷ Carreaux de céramique, carrelage de cuisine (en Suisse romande) (Note de l'éditeur).

sans doute fort peu de gens ont relevée.

Tout ceci indique l'importance qu'il y a à examiner avec soin les propriétés du matériel. Si on examine les axes des charnières qui sont les arêtes de ce que ces constructions tiennent pour – et qui ne sont pas exactement les côtés des plaques – on est alors assez vite attiré sur le fait suivant : dans aucune des maquettes de polyèdres que l'on confectionne avec ces plaques, on n'obtient matériellement les sommets ! Ils sont toujours comme extrapolés perceptivement ! En particulier, jamais les sommets ne sont les coins des plaques ! Or ceci est supposé dans la démonstration du théorème. Dans la foulée on remarque alors qu'aucun des plaques n'a la forme d'un polyèdre, puisque leur bord est découpé en charnière et que les arêtes des polyèdres que l'on peut confectionner ne sont obtenues que lorsque deux plaques sont assemblées. Toutes choses que l'on néglige car dans l'expérience on fait la part des choses entre les caractéristiques fonctionnelles du matériel et les caractéristiques idéales qu'il est censé illustrer. Selon une certaine pré-interprétation. Mais lorsqu'un élève joue avec ce matériel, à quel type de caractéristiques donnera-t-il plus d'importance ? Et surtout comment et jusqu'où fait-il la part des choses ?

2.3.6 Sixième argument : Où les deux événements relevés au cours du visionnement se font écho

On peut même considérer alors le cube, confectionné avec six plaques carrées, comme... un cube tronqué à chacun des huit sommets... certes un petit trou, mais qui peut être identifié à un petit triangle équilatéral – on hésite, mais à y regarder de près, il semble bien que oui – ... ce qui peut faire penser qu'on pourrait agrandir notre construction, ne serait-ce que pour y voir plus clair... jusqu'à obtenir – pourquoi pas ? – la forme que l'on obtenait avec les octogones ! (Et donc nous revoilà retournés à l'évènement 1.)

Pour cela il faut examiner le matériel, les plaques, etc. Pour bien voir ce qui est en jeu – c'est le cas de le dire –, il est utile de se référer au modèle idéal d'hexagones rigidement fixés selon leurs côtés et de ne pas commettre la stupidité ou l'irrationalité de ne pas croire que si les angles sont de 120° alors trois hexagones ne peuvent que s'assembler à plat. Il nous faut donc croire les axiomes et prémisses que l'on s'est donnés et aux conséquences qui en découlent. Le *hic* est que les charnières sont faites pour courber les assemblages de plaques et pas pour paver une surface plane ! Le jeu des charnières est donc un signe du jeu entre ce signe et son objet.

On comprend alors ce qui se passe, en se référant à ces idéaux (à prendre au pluriel car c'est à tout moment qu'on en vient à idéaliser). Comme je l'ai expliqué, on va regarder l'axe des charnières et le comparer aux bords des plaques, et par là on va pouvoir identifier le phé-

nomène physique en cause, et enfin comprendre en quoi la maquette physique s'éloigne du schéma mathématique. On est là dans le troisième moment abductif de cet argument, qui porte sur l'expérience, le volet phénoménologique de la situation. Grâce à l'idéalisation mathématique et en déroulant (à diverses reprises, plus ou moins localement) l'entier du processus abductif, on peut saisir le phénomène de jeu dans les charnières !⁸

Ainsi donc, on retrouve ce que vous et moi savions depuis longtemps déjà, au point que cela en est devenu un principe. Avec ce matériel là, sur ce point à égal à tous les autres matériels didactiques de ce genre, on ne peut ni observer, ni tirer par induction que trois plaques hexagonales ne s'assemblent qu'à plat. Seule une abduction nous permet de trouver cette interprétation de ce que le matériel nous suggère (le théorème sur l'agencement des hexagones et par là celui qui limite le nombre de polyèdres parfaits à cinq). Ce point est essentiel pour ce qui a trait à la compréhension en mathématiques. Dans l'étude des maths on est appelé à deviner sans toujours bien comprendre. L'abduction est une discontinuité dans le tissu de la compréhension.

Conclusion de l'exemple

Le problème des maquettes matérielles tout comme celui des dessins d'objets mathématiques idéaux est bien connu et fortement rabâché. Néanmoins, on ne devrait pas confondre signe et modèle. C'est pourquoi autant que j'ai pu, j'ai mis maquette au lieu de modèle. Dans cet exemple, ce qui est modèle pour moi, ce sont les mathématiques des polyèdres pour ce matériel physique. Ce qui est signe est pour moi ce matériel : un matériel conventionnel, réglé par une syntaxe des assemblages, pour cet objet mathématique qu'on appelle polyèdre.

Il y a va-et-vient entre les deux et circularité aussi, celle-là même du mouvement abductif. Dans ses premiers écrits, Peirce parlait de *réduction*, ce n'est qu'ensuite qu'il lui a préféré *abduction*. Je pense aussi que ce dernier terme est préférable, le comparer à *abstraction* est intéressant, car le terme *abduction* connote pour moi que c'est notre esprit qui est tiré et pas lui qui extrait (ce que connote *abstraction*). Le matériel signe de cet objet qui sera le modèle par lequel nous saisirons, analyserons, voire comprendrons ce que ce matériel nous donne à voir. Et les écarts des signes matériels et autres de cet objet mathématique nous apprendront autant sur les polyèdres que sur les polyèdres, sur l'objet que sur les signes au travers desquels il se manifeste.

⁸ Il est très important de ne pas confondre les divers moments du processus : on décolle de l'expérience et on y retourne, c'est bouclé. Cela J. Brun l'avait déjà bien noté (Brun et Conne 1990). Voilà pourquoi je parle de retour à l'expérience. On peut mettre le préfixe re- partout, il n'y a pas de point de départ.

Qui veut tirer un parti didactique d'expériences à faire faire aux élèves doit entrer en considération sur des questions phénoménologiques.

« Que l'on comprenne donc bien ce que nous avons à faire, en tant que chercheurs phénoménologiques : il s'agit tout simplement d'ouvrir les yeux de notre esprit et de bien regarder le phénomène, et de dire quelles sont les caractéristiques qui se trouvent ne jamais y faire défaut. Que le phénomène soit quelque chose que l'expérience extérieure impose à notre attention, ou que ce soit le rêve le plus fou, ou que ce soit la plus abstraite et la plus générale des conclusions de la science. Les facultés que nous devons nous efforcer de réunir pour ce travail sont au nombre de trois. La première et la plus importante est cette faculté rare, la faculté de voir ce qui saute aux yeux, tel qu'il se présente, tout simplement, sans le remplacer par aucune interprétation, sans le complexifier par l'intrusion de telle ou telle modification supposée. Telle est la faculté de l'artiste qui voit par exemple les couleurs apparentes de la nature, comme elles apparaissent. Lorsque le sol est couvert de neige, d'une neige sur laquelle le soleil brille de tous ses feux, sauf là où se projettent à n'importe quel homme ordinaire, si vous lui demandez quelle lui paraît être sa couleur, il vous dira, c'est blanc, blanc pur, plus blanc sous la lumière, un peu grisâtre à l'ombre. Mais ce n'est pas ce qu'il a sous les yeux qu'il décrit ; c'est sa théorie de ce qui doit être vu. L'artiste, lui, dira que les ombres ne sont pas grises mais d'un bleu mat, et que la neige sous le soleil est d'un jaune vif. Ce pouvoir observationnel de l'artiste est ce dont on a le plus besoin dans l'étude de la phénoménologie. La deuxième faculté dont nous devons nous efforcer de nous doter est cette faculté de discrimination résolue qui s'accroche telle un bulldog au trait particulier que nous sommes en train d'étudier, le traque partout où il peut s'insinuer, et le détecte sous tous ses déguisements. La troisième faculté dont on aura besoin est le pouvoir de généralisation du mathématicien, cette capacité pour la formule abstraite qui comprend l'essence même du trait que l'on examine, purifié de toute adjonction d'éléments annexes extérieurs et non pertinents. » (Peirce 2002 : 285)

Pour en revenir au travail engagé dans toute interprétation de telles expériences, que ce soit celle du chercheur, celle de l'enseignant ou celle des élèves, on doit considérer que deux choses y sont mises en tension : ce qui a trait aux idéalités mathématiques et ce qui a trait au matériel physique conçu pour en fournir des icônes et des indices. Dans les sémioses que cela occasionne, il s'agit de concilier, progressivement, ces deux logiques, idéale et matérielle, qui se prêtent à la conception de l'objet, ici les polyèdres et en particulier les polyèdres parfaits.

CONCLUSION

Lorsqu'il m'est donné de visionner un film de classe, la question qui m'occupe principalement est : *Qu'est-ce qui se passe ?* Bien sûr la

personne qui me montre ce film, elle, voudra me dire : *Qu'est-ce qui s'est passé ?* Derrière ce jeu sur les temps des verbes se cache ce que j'ai appelé l'anachronisme que je me permets par une approche sémiotique. Je ne veux pas entrer ici dans une discussion méthodologique ni épistémologique sur l'observation différée réalisée sur documents vidéos, car ce que je cherche à faire se trouve bien en deçà de telles considérations. Je me demande ce qu'il est possible de faire lorsqu'on visionne de tels documents, je me questionne sur les regards que l'on peut y porter. Puisque je me suis centré sur les activités sur les polyèdres, c'est à elles que je vais me référer dans cette conclusion. Ma question exprime que je suis à la recherche d'événements, l'usage du présent dans sa formulation laisserait entendre une idée d'accompagnement, d'une mise en correspondance temporelle entre le temps de la séquence filmée et celui de mon assistance à son spectacle. Pourtant mes propos dans le troisième exemple montrent que dans mes analyses il n'en est rien : je n'ai fait que peu de cas de la temporalité de l'activité filmée, de même que je n'ai guère relaté les moments par lesquels le visionnement m'a fait passer ; qui plus est, j'ai largement bifurqué sur des éléments d'observations personnelles que j'ai pu faire en différé, par exemple lorsque j'ai évoqué mes propres jeux avec ce matériel une fois rentré chez moi, etc. Le jeu sur le temps du verbe dans mes expressions ci-dessus distingue deux attitudes différentes vis-à-vis du matériel filmé. Soit on estime que ce document contient tout ce qu'il faut pour pouvoir identifier ce qui s'y est passé, donc on suppose *a priori* qu'une lecture et une analyse attentives seront à même de nous dire ce qui s'est passé, soit on considère que cette question reste ouverte, qu'il n'est pas certain qu'au bout du visionnement on puisse y répondre.

Lorsque je vois le film de classe portant sur la situation des polyèdres, je suis un spectateur privilégié puisque j'étudie moi-même ce sujet avec des élèves, que je possède un matériel équivalent, que j'y joue régulièrement, que je connais aussi un peu les travaux de mes collègues, etc. Et pourtant, lorsque je vois ce film, je ne suis pas certain de pouvoir dire ce qui s'est passé, parce que j'identifie des choses qui me renvoient non pas à des considérations sur les élèves, les enseignants ou la situation qu'ils ont imaginée, mais des considérations sur l'expérience qui est la leur, les propriétés du matériel et les relations de ce matériel didactique avec les objets mathématiques qu'il est censé illustrer. Ma lecture très experte de ce bout de film de classe me ramène à chercher à mieux connaître le contexte – le décor et l'intrigue. Qui veut rendre compte d'un événement se doit de lui supposer un cadre fixé.

Si mon expertise m'amène à douter que le film vidéo puisse nous révéler ce qui s'est passé dans cette activité de classe, que pourront donc dire ceux de mes collègues qui n'ont jamais touché à ce matériel,

pour qui la question des polyèdres parfaits n'est pas une question à laquelle ils ont réfléchi, qui ne connaissent pas de démonstration de l'existence de seulement cinq polyèdres parfaits, qui n'ont peut-être jamais entendu ou lu le mot *isocaèdre* ? Mes collègues non experts sur le domaine des polyèdres ont été *de facto* placés devant la question de savoir s'il est possible, nonobstant tout ceci, d'identifier quelque chose qui se serait passé. Et s'ils y arrivent, s'ils sont convaincus qu'effectivement quelque chose s'est passé, ce sentiment sortira encore renforcé ! L'indice n'en sera que plus net. Quant à savoir de quoi c'est l'indice, donc à analyser ce qui aura été identifié, peut-être s'en remettront-ils aux experts, ou alors y verront-ils un tout autre objet que celui qui m'intrigue, les relançant sur des questions sur lesquelles ils sont eux-mêmes des experts : par exemple, l'analyse des échanges verbaux, ou des dynamiques collaboratives, ou que sais-je encore ? Ce que j'ai appelé décor – les polydrons – et intrigue – la rencontre des cinq polyèdres parfaits – sont pour eux des icônes associées à cet indice. Par contre, si mon visionnement me fait douter de ce que je connais de ce décor et de cette intrigue, et par là ne me rend plus tout à fait assuré de pouvoir dire ce qui s'y serait passé, leur manque d'expertise en ces questions leur permet au contraire d'en rester à ces icônes. Il n'y a rien à redire là-dessus : comme au théâtre, le décor et les costumes n'ont nullement besoin d'être précis et fidèles, mais ils doivent au moins être clairement suggestifs ; de même, le spectateur n'aura pas besoin de comprendre toutes les subtilités de l'intrigue pour se laisser emporter par les événements auxquels il assiste.

Comment donc rendre profitable un visionnement entre de si différentes expertises ? Il va de soi que chacun est invité à présenter du mieux qu'il peut les analyses de sa compétence, mais est-ce possible sans les autres et quels pourraient être les obstacles qui rendraient la collaboration difficile ? Pour avancer dans cette question, je dois pousser plus avant mon commentaire sur les analyses auxquelles cet article est dédié. Le principal obstacle est ce que j'ai appelé la *pré-interprétation*. Tout matériel didactique procède d'une intention ; il a le statut d'une illustration des objets que l'on veut enseigner et faire apprendre. Exactement comme ce que j'ai dit à propos de la formule $0,1 \times 0,1 = 0,01$, ce signe est tout d'abord symbolique. Cette relation symbolique est dénotée par le nom même qui a été donné à ce matériel, *polydrons*, qui n'en donne aucune description. Si j'ai pu qualifier ce matériel de jouet, c'était bien pour me déprendre d'un tel préjugé, jamais ailleurs vous ne trouverez une telle qualification. Le point essentiel à considérer est que cette relation est symbolique et que ce caractère ne dépend pas du fait que vous soyez ou non connaisseurs des polyèdres et de leur mathématique ! Cette pré-interprétation détermine la manière dont on va jouer avec ce matériel, voire permet de distinguer ce qui dans les jeux des élèves serait jeu libre d'imagina-

tion, sans grande portée mathématique, et ce qui serait activité didactique. Elle a donc catégorisé le monde. J'ai déjà souligné la dissymétrie de cette relation : *Ce qui, vu dans la perspective de l'enseignant semblera univoque, sera multivoque si on le regarde dans la perspective de l'apprenant*. Et l'exemple des polydrons nous a présenté très clairement de telles ambiguïtés. Je me contenterai d'en rappeler une seule : *L'assemblage de plaques hexagonales donne aussi bien une plaque plane qu'une plaque ayant une certaine courbure*. Cette ambiguïté n'est pas que sémiotique, elle est liée à quelque chose de tout à fait matériel, palpable et visible : le jeu dans les charnières.

Le problème de la pré-interprétation en didactique des mathématiques est qu'elle est à la fois à l'entrée et à la sortie du processus d'enseignement. Il y a donc en quelque sorte un cercle vicieux dans lequel l'enseignant pourrait se laisser enfermer, ne voyant dans ce que ses élèves font que ce qu'il sait par avance devoir y voir, et laissant l'élève voir tout autre chose que ce qu'il serait censé trouver. Ce cercle vicieux didactique empêche toute confrontation mais n'empêche nullement l'administration de l'enseignement en classe. Or didactiquement parlant, il faut que ce cercle soit ouvert puisque l'enseignant a l'intention de faire voir à l'élève novice ce que, pour l'initié qu'il est, le matériel montre. Comme je l'ai dit, mes analyses ont pour fonction de dépasser cette pré-interprétation (ou, si je puis dire, ce pré-jugement) en relançant le processus interprétatif lui-même. Pour moi elle ne vaut que le temps d'une entrée en matière au début du visionnement du film. Je vais alors examiner dans le film tout ce qui pourrait m'amener à reconsidérer les choses que je croyais pouvoir y trouver. C'est ici que je sors l'artillerie sémiotique. Et je cherche dans ces documents des sémoses et pas une histoire. Mon travail se fait alors sur deux dimensions, l'une consistant à analyser des signes selon les composantes analytiques de la sémiotique, l'autre, plus pragmatique, consistant à retracer une ou des sémoses dans une interprétation.

Voilà ce que je puis faire et voilà ce que je puis offrir à mes collègues. Le point est pour moi crucial parce que dans l'affaire, la pré-interprétation est ce qui fait le plus écran à la collaboration entre experts d'horizons divers. En effet ce cercle vicieux dans lequel tout enseignant se laisse vite prendre nous concerne aussi et même plus encore. En procédant à des coupes sémiotiques, je pense pouvoir me donner les moyens de briser ce cercle, pour moi-même, afin d'en dégager un mouvement interprétatif relancé, seul à même de m'ouvrir à des interprétations autrement expertes.