



**HAL**  
open science

## **Addition, addition répétée, multiplication : un trajet éclairé par les schèmes d'action**

Gisèle Lemoyne, S. Vincent, Jean Brun, François Conne, Jean Portugais

► **To cite this version:**

Gisèle Lemoyne, S. Vincent, Jean Brun, François Conne, Jean Portugais. Addition, addition répétée, multiplication : un trajet éclairé par les schèmes d'action. Artigue M., Gras, R. & Tavignot P. (éds) Vingt ans de Didactique des Mathématiques en France, La pensée sauvage, pp.236-242, 1993. halshs-01535918

**HAL Id: halshs-01535918**

**<https://shs.hal.science/halshs-01535918>**

Submitted on 9 Jun 2017

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

## ADDITION, ADDITION RÉPÉTÉE, MULTIPLICATION: UN TRAJET ÉCLAIRÉ PAR LES SCHÈMES D'ACTION

Gisèle Lemoyne<sup>(1)</sup>, Suzanne Vincent<sup>(2)</sup>, Jean Brun<sup>(3)</sup>,  
François Conne<sup>(4)</sup>, Jean Portugais<sup>(5)</sup>

### ABSTRACT

In this study, we show how the notion of schema allows for a better understanding of the construction of multiplicative structures. Problems involving multiplicative relations were submitted to school children. On the basis of their behaviors, we identified three levels in the development of those structures. At a first level, multiplicative and additive relations are not differentiated; additive schemata, such as «iteration and equivalence» are prevailing. At a second level, a differentiation of additive and multiplicative relations takes place; by a generalization of the «iteration» schema which now applies to elements or sets of elements, multiplication becomes repeating addition. Finally, at a third level, a coordination of elements-parts-whole relationships and numerical knowledge is done; multiplication and repeating addition are distinguished.

Dans le texte sur les erreurs en division écrite (Brun et al., 1993), on a montré comment la notion de schème (Inhelder et Cellérier, 1992; Vergnaud, 1990) permet de comprendre les erreurs des élèves. Ces erreurs témoigneraient de coordinations de schèmes conduisant à la formation d'un schème-algorithme pour la division. Parmi ces schèmes, le schème «partager/distribuer» est central. Nous poursuivons l'examen de son fonctionnement et de sa coordination à d'autres schèmes, dans le contexte de problèmes sur les relations additives et multiplicatives.

### 1. La problématique de notre recherche

Selon Vergnaud (1983), le champ conceptuel des structures multiplicatives inclut, entre autres, les proportions, les fonctions linéaires et non-linéaires, les rapports scalaires, les nombres rationnels. C'est dire les nombreuses questions théoriques à ce sujet (Lesh et Landau, 1983; Brousseau, 1986, 1987; Kieren, 1989; Ricco, 1982; Vergnaud, 1983).

1. Université de Montréal.
2. Université de Montréal.
3. Université de Genève.
4. Université de Lausanne et Service de l'enseignement spécialisé.
5. Université de Sherbrooke.

Notre recherche traite de la construction des rapports multiplicatifs chez des élèves de 8 à 10 ans. Nous pensons que pour identifier les relations dans plusieurs problèmes multiplicatifs, l'élève doit pouvoir comparer «multiplicativement» les quantités. Ainsi, la solution « $3 \times 8 = 24$ ;  $8 \times 18 = 144$ » du problème «Si 3 boîtes contiennent 18 billes, quelle est la quantité de billes que contiennent 24 boîtes?» suppose que l'élève puisse calculer la relation entre 3 et 24, c'est-à-dire répondre à des questions du type: Combien de fois 24 est-il plus grand que 8, combien y a-t-il de 3 dans 24? Elle suppose aussi qu'il puisse conduire le raisonnement suivant: si j'ai 8 fois plus de boîtes, j'aurai 8 fois plus de billes. Mais, à propos de cette solution, certaines questions surgissent: Pourquoi l'élève ne se pose-t-il pas de question sur le nombre de billes dans chaque boîte? Pourquoi ne cherche-t-il pas à trouver d'abord le contenu d'une boîte? Pour expliquer ces conduites, pourrait-on invoquer des schèmes liés à l'addition, à la multiplication, au partage?

### 2. Les relations «éléments-parties-tout» et les structures multiplicatives

Dans leur étude sur la multiplication, Berthoud-Papandropoulou et Kilcher (1983) précisent les statuts attribués aux variables de rang (éléments, parties, tout) et les compositions des relations entre elles, chez des élèves du primaire. Trois niveaux de conduites sont définis. Les conduites de niveau 1A se caractérisent par la prise en compte d'une seule variable à la fois; au niveau 1B, les conduites montrent une tentative de mise en relation entre les variables. Au niveau IIA, on voit apparaître une stabilisation des relations entre les variables, une conservation du tout lors du changement des relations contenues et une composition des parties. Le réglage de ces actions est réalisé au niveau IIB. Au niveau IIIA, les problèmes simples de multiplication sont réussis, malgré des confusions dans l'interprétation des parties. Elles disparaissent au niveau IIIB.

Brun (1992) a aussi étudié les rapports parties-tout, dans le cadre de situations de partage. Il montre comment le fonctionnement du schème de partage est orienté par la comparaison des parts et par leur équivalence numérique. Au sujet des rapports parties-tout, Brun (1992, p 5) précise: «la relation entre tout et parties... est traitée principalement comme une segmentation du tout; sur chaque segment du tout, progressivement épuisé, on exerce un contrôle de l'équivalence numérique.»

### 3. Aperçu général des problèmes présentés dans notre étude

Deux catégories (A et B) de problèmes sont construites.

Dans certains problèmes de la catégorie A (A1), il s'agit d'illustrer des relations additives et multiplicatives (ex: autant, a de moins, a

fois plus). Dans d'autres problèmes, l'illustration concerne des énoncés impliquant les relations précédentes (ex: Julie a acheté 3 fois plus d'animaux aquatiques que ne l'a fait Marcelin. Julie a acheté plus de 10 animaux. En tout Julie et Marcelin possèdent 16 animaux.). Les illustrations (A) sont réalisées sur papier ou sur ordinateur. Sur ordinateur, les élèves disposent d'objets «graphiques» et «textes». Les premiers sont regroupés par classe (ex: animaux aquatiques); les modifications qu'ils peuvent subir sont variées (ex: taille, nombre). Les objets «textes» remplissent diverses fonctions (ex: parler, penser, décrire).

Dans la seconde catégorie (B), les élèves sont invités à distribuer une collection d'objets, selon des règles exprimées sous diverses formes:

B1 - un opérateur (ex: Vous devez donner 4 jetons à Simon. Vous devez donner 2 fois 4 jetons à Caroline et 3 fois 4 jetons à Mathieu.);

B2 - une relation (ex: Vous avez 32 jetons à distribuer. Vous devez donner d'abord 8 jetons à Mathieu et 2 fois plus à Simon.);

B3 - un rapport (ex: Vous devez partager 16 jetons entre 2 enfants. A chaque fois que vous en donnez 1 à un enfant, vous en donnez 3 à l'autre.).

#### 4. La coordination de schèmes dans la construction de relations multiplicatives

L'analyse des conduites montre comment la généralisation et la coordination de schèmes sont constitutives des relations multiplicatives. Pour en débattre, nous identifions des niveaux de construction.

Le premier niveau se caractérise par la prégnance de schèmes additifs. Les relations additives et multiplicatives ne sont pas dissociées. Pour illustrer la relation «a fois plus», les élèves créent deux collections comportant un même nombre d'éléments et ajoutent à l'une des collections le nombre d'éléments correspondant à la valeur «a» de la relation. «Fois plus» ou «de plus» résulte alors d'une coordination des schèmes d'équivalence (autant) et d'itération d'une unité (de plus). A ce niveau, dans les problèmes de partage inégal d'une collection, selon la contrainte exprimée, le schème partager/distribuer est d'abord appliqué. Les connaissances sur les tables d'addition contrôlent l'application de ce schème. Une coordination de ce schème et des schèmes d'équivalence et d'itération assure l'accomplissement de la tâche. Examinons les conduites à deux problèmes (sur ordinateur: poissons dans des aquariums, 9 poissons au maximum par aquarium).

*Problème 1:* Marie a acheté 2 fois plus de poissons que Julie. En tout, elles en ont acheté 24.

*Problème 2:* Marie a acheté 2 fois plus de poissons que Julie. En tout, elles en ont acheté 12.

Dans le second problème, un élève procède ainsi: il partage la quantité de poissons en 2 parts égales, disant en même temps « $6 + 6 = 12$ ». Il enlève ensuite un poisson dans chacun des aquariums puis, il ajoute 1 puis 1 autre poisson dans l'aquarium appartenant à Marie.

Ce même élève, dans le premier problème, réalise «numériquement» le partage des poissons en 2 parts égales, énonçant les tables « $10 + 10 = 20$ ;  $11 + 11 = 22$ ;  $12 + 12 = 24$ ». Il tente d'attribuer à chacun des personnages un aquarium de 12 poissons, mais ne pouvant le faire, il déclare d'abord le problème impossible, disant qu'il faut avoir les poissons dans le même aquarium. L'expérimentateur insiste alors pour qu'il trouve une solution. Il trouve successivement les solutions suivantes:

- a) 1 aquarium de 9 poissons à Julie; 1 aquarium de 9 poissons à Marie et 1 autre aquarium de 2 poissons à Marie;
- b) 1 aquarium de 9 poissons à Marie; 1 aquarium de 7 poissons à Julie.

L'expérimentateur rappelle alors la contrainte sur le tout et suggère de revoir la solution «a)», en disant que les poissons peuvent être mis dans plusieurs aquariums.

L'élève propose alors la distribution: Marie - 2 aquariums de 5 poissons; 1 aquarium avec 1 poisson et 1 autre avec 2 poissons; Julie - 2 aquariums de 5 poissons et 1 autre aquarium avec 1 poisson. Cette solution, il la rejette cependant, les poissons devant occuper un seul aquarium, selon lui.

L'extension et la coordination des schèmes nous permettent de distinguer deux sous-niveaux. Au premier, l'équivalence et la différence entre les collections produites sont fondées sur une comparaison des éléments; l'élève ne peut envisager une collection qui soit composée de sous-collections. Le second est caractérisé par l'extension des conditions d'application des schèmes; le jugement d'équivalence entre les collections peut alors s'appuyer sur une comparaison des éléments ou des sous-collections (parties) composant ces collections.

Au second niveau, on assiste à une différenciation et à une généralisation des schèmes précédents; le schème «fois de plus» est ainsi construit du schème «de plus», dont il constitue une différenciation. Le schème d'itération peut désormais fonctionner sur des regroupements d'éléments, sur des parties constituées d'éléments. La multiplication envisagée comme une addition répétée va caractériser le schème «fois de plus». Pour illustrer la relation «3 fois plus», les actions suivantes sont réalisées:

- a) produire 2 collections identiques (ces collections peuvent être composées de sous-collections);
- b) ajouter à une des collections, 3 collections de même mesures que les précédentes. Sous le jeu de contraintes, les tentatives d'application de ce schème peuvent entraîner des résistances et des généralisations.

Examinons quelques conduites.

*Problème 1:* Marie a acheté 2 fois plus de poissons que Julie ou 2 fois le nombre de poissons achetés par Julie. En tout, elles ont acheté 24 poissons.

– *Conduites:* illustration-1: Marie: 2 aquariums de 8 poissons; Julie: 1 aquarium de 8 poissons; l'élève dit: « $8 \times 3 = 24$ »;

illustration-2 (modification de l'illustration-1): Marie: 1 aquarium de 8 poissons; 2 aquariums de 4 poissons; Julie: 1 aquarium de 8 poissons.

*Problème 2:* Marie a acheté le double de poissons de Julie. En tout, elles ont acheté 24 poissons.

– *Conduite:* (élève précédent): illustration: Marie: 1 aquarium de 9 poissons et 1 autre de 7 poissons; Julie: 1 aquarium de 8 poissons; invité à justifier son illustration, l'élève dit «le double de l'autre,  $2 \times 8 = 16$ »; lui demandant de comparer les problèmes 1 et 2, l'élève déclare d'emblée qu'il s'agit de problèmes différents.

*Problème 3:* Marie a acheté 3 fois la quantité de poissons achetés par Julie. En tout, elles ont acheté 16 poissons.

– *Conduites:* illustration-1: Marie: 4 aquariums de 3 poissons; Julie: 1 aquarium de 3 poissons; correction de l'énoncé: 15 est substitué à 16;

illustration-2 (demande de révision de l'expérimentateur): Julie: 1 aquarium de 2 poissons; Marie: 1 aquarium de 2 poissons; 3 aquariums de 4 poissons.

*Problème 4:* Marie a acheté 3 fois la quantité de poissons achetés par Julie. En tout, elles ont acheté 9 poissons.

– *Conduites:* illustration-1: Julie: aucun poisson; Marie: 3 aquariums de 3 poissons;

illustration-2 (demande de révision de l'expérimentateur): Julie: 1 aquarium de 1 poisson; Marie: 1 aquarium de 1 poisson et 3 aquariums de 2 poissons; correction de l'énoncé: 8 est substitué à 9.

Les généralisations du schème «fois de plus» procèdent d'une extension des schèmes d'équivalence et d'itération qui désormais peuvent être appliqués à des éléments et à des sous-collections ou parties d'un tout. Elles assurent le maintien de la relation d'équivalence entre les collections initiales et permettent de considérer l'ajout qui rend compte du partage selon la relation, indépendamment de l'équivalence initiale. Elles sont enfin soutenues par des connaissances numériques plus nombreuses que celles utilisées au premier niveau.

Dans notre étude, les conduites de quelques élèves relèvent d'un troisième niveau caractérisé par une première construction des relations multiplicatives. La coordination des schèmes précédents procède d'une construction d'invariants fonctionnels de ces schèmes,

d'une coordination des relations éléments-parties-tout et de connaissances numériques variées. A ce niveau, multiplication et addition répétée se différencient.

Nous présentons quelques conduites d'un élève qui se situe à ce troisième niveau.

*Problème 1:* Vous devez partager 32 jetons entre 2 enfants. A chaque fois que vous en donnez 2 à un enfant, vous en donnez 6 à l'autre.

– *Conduite:* L'élève commence la distribution selon la règle «2 bonbons à un enfant; 6 à un autre; 2 autres bonbons au premier et 6 autres au second...» puis, il s'arrête après le deuxième tour. Il dit alors «2 et 6; 6 c'est 3 fois; ...  $10 \times 3 = 20$  ... mettons 10 à lui et 30 à elle... ah non... c'est trop il faut avoir pas plus que 32 c'est moins...»; il calcule alors ainsi:  $9 \times 3 = 27$ ;  $27 + 9 = 36$ ;  $8 \times 3 = 24$ ;  $24 + 8 = 32$ . L'expérimentateur lui demande s'il sait faire  $8 \times 4$  et  $32 / 4$ ; il répond « $8 \times 4 = 32$  et  $32 / 4 = 8$ , le contraire».

*Problème 2:* Marie a acheté 3 fois la quantité de poissons achetés par Julie. En tout, elles ont acheté 16 poissons.

– *Conduite:* (2 mois plus tard): illustration-1: Julie: 1 aquarium de 3 poissons; Marie: 1 aquarium de 9 poissons; 1 aquarium de 3 poissons; illustration-2 (demande de révision de l'expérimentateur): il dit «3 fois la quantité... mettons Julie 2 alors Marie 6; on a 8, la moitié de 16; je sais Marie 12 et Julie 4»; invité à expliquer à un autre élève ce qu'il vient de faire, il déclare alors: «c'est simple ... 3 fois plus ça veut dire l'autre a 1 fois et Marie 3 fois...»; l'expérimentateur lui demande de trouver ce qui ne marchait pas dans son premier dessin; il dit alors: «avant si je mets à chacun 1 aquarium de 3 poissons, j'aurais pris les poissons 1 fois... il faut 3 fois cela... il y avait un aquarium de trop pour Marie... c'est pas 3 mais 4 pour 1 aquarium,  $3 \times 4 = 12$ , + 4, ça fait 15»

Mentionnons en terminant qu'à ce niveau, l'élève ne sait composer les rapports pour pouvoir effectuer la division qui lui permettrait de trouver la part de chacun. L'étude de la composition de ces rapports apparaît une poursuite naturelle de notre recherche.

## RÉFÉRENCES

- BERTHOUD-PAPANDROPOULOU I., KILCHER H. (1983) Multiplication et associativité multiplicative, in J. Piaget (Ed.) *Le possible et le nécessaire, 2: L'évolution du nécessaire chez l'enfant*. 95-118. Paris: Presses Universitaires de France.
- BROUSSEAU G. et N. (1987) *Rationnels et décimaux dans la scolarité obligatoire*. Talence: ed. IREM de Bordeaux.

- BROUSSEAU G. (1986) *Théorisation des phénomènes d'enseignement des mathématiques*. Thèse d'Etat, Université de Bordeaux 1.
- BRUN J. (1992) *Situations de partage: variables de situations et conduites des élèves*, Rapport de recherche.
- BRUN J., CONNE F., FLORIS R., LEMOYNE G., LEUTENEGGER F., PORTUGAIS J. (1993) Erreurs systématiques et/ou schèmes-algorithmes? *Actes du Colloque des 20 ans de Didactique des Mathématiques*, Grenoble: éditions La Pensée Sauvage.
- INHELDER B., CELLÉRIER G. (1992) *Le cheminement des découvertes de l'enfant*. Neuchâtel: Delachaux et Niestlé.
- KIEREN T. E. (1989) *Rational and fractional numbers as mathematical and personal knowledge: implications for curriculum and instruction*. Document de Travail. Université d'Alberta.
- LESH R., LANDAU M. (1983) *Acquisition of mathematics concepts and processes*. New York: Academic Press.
- RICCO G. (1982) Les premières acquisitions de la notion de fonction linéaire chez l'enfant de 7 à 11 ans. *Educational Studies in Mathematics*, 13, 289-327.
- VERGNAUD G. (1990) La théorie des champs conceptuels. *Recherches en didactique des mathématiques*, 10, n°2-3, 133-170.
- VERGNAUD G. (1983) Multiplicative structures. In R. Lesh & M. Landau (Eds.), *Acquisition of mathematics concepts and processes*. (pp.127-174), New York: Academic Press.

## COMMENT L'ENFANT INTERPRÈTE-T-IL LES NOMBRES ÉCRITS À PLUSIEURS CHIFFRES?\*

Anne Sinclair<sup>(1)</sup>, Chantal Tièche Christinat<sup>(2)</sup>, Anne Garin<sup>(3)</sup>

### ABSTRACT

We asked 90 children aged 5, 6 and 7 (30 children per age group) to tell us which one of two numerals (composed of one, two or three digits) «is bigger» or «said more», and to explain the reasons for their choice. Results show that the principle «more numbers means more» is rigorously applied from the age of 5. At 6 and 7, children often base their judgments on an additive hypothesis and treat written numbers composed of several digits as a summation of their parts, and thus judge, for example, that  $35 > 40$  because  $3 + 5 > 4$ . However, the understanding that the order of the digits is meaningful and that the left-most digit «counts for more» is quite early. The various different strategies used by the children are not incompatible at these ages; they treat different kinds of numerals in different ways and use a «case by case» approach.

### 1. Comment l'enfant interprète-t-il les nombres écrits à plusieurs chiffres?

L'enfant de 5 à 7 ans est amené à lire, écrire, à manipuler des nombres écrits comportant plusieurs chiffres, et cela de manière très régulière dès l'entrée à l'école primaire. Toutefois, différents travaux (Sinclair & Sinclair, 1986; Bergeron, Herscovics & Bergeron, 1987a, 1987b; Kamii & Joseph, 1988; Fuson, 1990; Sinclair, Garin & Tièche Christinat, 1992) montrent clairement que ces activités ne peuvent pas, pour ce groupe d'âge, reposer sur une compréhension de la structure multiplicative et récursive de notre système de nombres, ni sur une compréhension de la valeur de position, principe qui sous-tend la numération écrite. Il nous semblait donc intéressant d'étudier comment les enfants à ces âges interprètent et comprennent les nombres écrits composés de plusieurs chiffres, sans passer par une tâche d'explicitation de la valeur de chaque chiffre écrit, ni exiger de la part des enfants une verbalisation quelconque. En dehors d'une compréhension véritable, quelles hypothèses, principes ou règles les enfants construisent-ils pour faire sens de ce matériel graphique particulier?

\* Nous remercions le Fonds National de la Recherche Scientifique (subside n°11-25427.89), ainsi que les enfants et les enseignants ayant participé.

1. Université de Genève.
2. Université de Fribourg.
3. Université de Genève.