



HAL
open science

Répliques didactiques aux difficultés d'apprentissage en mathématiques

François Conne, Jean-Michel Favre, Jacinthe Giroux

► **To cite this version:**

François Conne, Jean-Michel Favre, Jacinthe Giroux. Répliques didactiques aux difficultés d'apprentissage en mathématiques : Le cas des interactions de connaissances dans l'enseignement spécialisé. P.A. Doudin et L. Lafortune (éds). Intervenir auprès d'élèves ayant des besoins particuliers, Chapitre 6, Presses Université du Québec, pp.118-141, 2006, 978-2-7605-1386-0. halshs-01537807

HAL Id: halshs-01537807

<https://shs.hal.science/halshs-01537807>

Submitted on 13 Jun 2017

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Répliques didactiques aux difficultés d'apprentissage en mathématiques

Le cas des interactions de connaissances dans l'enseignement spécialisé¹

François Conne

*Universités de Lausanne et de Genève
francois.conne@pse.unige.ch*

Jean-Michel Favre

*Haute École pédagogique de Lausanne
jean-michel.favre@edu-vd.ch*

Jacinthe Giroux

*Université du Québec à Montréal
giroux.jacinthe@uqam.ca*

-
1. L'enseignement spécialisé est dispensé à des élèves en grande difficulté, c'est-à-dire souffrant de handicaps sévères, dont la plupart dépendent de l'assurance invalidité.

Les difficultés qu'éprouvent certains élèves à apprendre les mathématiques à l'école mettent chaque fois en péril le projet d'enseignement dont elle est porteuse. Faire appel à une instance spécialisée (corps professionnel, classes, institutions) pour la prise en charge de certains élèves revient à reconnaître qu'il existe non seulement des difficultés d'apprentissage, mais aussi des difficultés à enseigner. En outre, chaque fois qu'il est question d'enseigner des mathématiques à des élèves de l'enseignement spécialisé², on laisse entendre que ces élèves auront nécessairement – par définition, pourrait-on dire – des difficultés à les apprendre. Cet implicite est intrinsèquement lié au contexte de l'enseignement spécialisé, même si – et tout le monde s'accorde là-dessus – les difficultés ne seront pas les mêmes pour tous les élèves.

En ce qui concerne les questions proprement didactiques, nos observations³ montrent cependant que les difficultés que les élèves rencontrent dans l'apprentissage des mathématiques en classe spéciale et celles qui se posent à leurs enseignants pour les leur enseigner ne sont pas très différentes de celles qui se présentent dans l'Eo. En revanche, le terrain de l'Esp est plus sensible et, de ce fait, plus affecté par les difficultés d'apprentissage/enseignement, ce qui, dans ce contexte, rend la dynamique des interactions cognitives particulièrement fragile. Ce n'est donc pas tant la nature des difficultés qui change que le fait que les aléas des interactions par lesquelles il faut passer pour acquérir des savoirs sont amplifiés et rendent l'accomplissement de l'enseignement plus mouvementé, voire parfois chaotique.

C'est par conséquent sur cet aspect des choses que nous avons prioritairement choisi d'orienter notre chapitre, où nous chercherons, dans un premier temps, à rappeler l'ambiguïté du terme apprendre⁴ – puisqu'on peut tout aussi bien dire que quelqu'un apprend quelque

-
2. Nous considérons tout au long du texte l'« enseignement spécialisé » et l'« adaptation scolaire » comme des expressions équivalentes. De plus, nous utilisons généralement l'abréviation « Esp » pour « enseignement spécialisé/adaptation scolaire » et l'abréviation « Eo » pour « enseignement ordinaire ».
 3. Toutes les idées développées dans ce chapitre prennent appui sur les expériences des auteurs et sur celles des enseignantes qui ont collaboré aux expérimentations menées dans les classes de l'Esp au Québec et en Suisse.
 4. **En allemand, on retrouve un peu cette homophonie entre *lernen* et *lehren* tandis que l'anglais, avec *learn* et *teach*, la perd complètement.** Comme le français dispose du mot *enseigner*, on ne peut imputer ici une pauvreté de vocabulaire. Il y a donc là une richesse dans la nuance qui mérite qu'on s'y arrête.

chose (pour lui) ou que quelqu'un apprend quelque chose à quelqu'un d'autre – et en tirer parti en postulant que dans le processus d'enseignement aussi bien l'enseignant que l'enseigné apprennent quelque chose de leurs interactions. Cette considération nous permettra, dans un second temps, de réunir difficultés d'enseignement et d'apprentissage au sein de l'échange didactique et de les utiliser pour nous interroger non pas sur les sujets (les élèves, leurs difficultés propres, leurs manques ou handicaps, ainsi que les enseignants, leurs rapports personnels aux mathématiques), mais sur les savoirs qu'on voudrait enseigner et faire apprendre, les signes et les milieux de tâches mathématiques sous lesquels on les présente aux élèves. Dans un troisième temps, nous évoquerons un séminaire d'initiation à la recherche, tel qu'il est pratiqué depuis une dizaine d'années pour la formation des enseignants spécialisés au canton de Vaud, où nous avons d'ores et déjà pu mettre en œuvre nos conceptions théoriques.

1. Les mathématiques et leurs manifestations dans l'acte d'enseignement

Depuis de nombreuses années, nous nous intéressons aux questions posées par l'enseignement des mathématiques dans l'Esp. Nous cherchons à développer, conduire et étudier des situations dans ces conditions particulières. Nous cherchons également à observer et à rendre compte de tout ce qu'en retour cet ordre d'enseignement peut nous apprendre sur la didactique des mathématiques elle-même (Conne, 2004a). Il n'est pas inutile de rappeler ici ce qui constitue le fondement de notre démarche.

Au cœur de la didactique des mathématiques se trouvent les mathématiques que nous considérons sous trois aspects :

- **un domaine universel de connaissance**: ce monde si intrigant constitué par les nombres, les formes, leurs propriétés et leurs structures ;
- **un champ de savoirs et de représentations supportant la connaissance** de ce monde que sont les formes communes de connaissance du monde mathématique, comme les algorithmes de calcul, la symétrie ou les fonctions ; ces savoirs sont historiquement et culturellement marqués ; ils ne se présentent jamais seuls, mais sous la forme d'organisations, elles-mêmes transitoires et

en constante évolution, qu'il s'agisse de développements à long terme comme l'histoire des mathématiques ou de développements microscopiques comme ceux d'un apprentissage;

- **une forme de l'intelligence de l'homme : la pensée logicomathématique (au sens de Piaget).**

Nous pensons que le principal enjeu de tout enseignement des mathématiques, que ce dernier ait lieu dans l'Esp ou dans l'Eo, est de faire connaître ce domaine, d'y donner accès. Les savoirs élaborés par l'histoire et la culture sont des moyens pour le faire, car ils donnent toujours quelque chose à connaître de cet univers, mais ils ne constituent pas la fin de l'enseignement. Le fait que ces savoirs, et plus généralement ces accès à la connaissance des mathématiques, soient transmissibles et partageables s'explique en définitive par la forme même de l'intelligence et de la pensée.

L'enseignement est par ailleurs une entreprise interindividuelle. Si l'enjeu d'un apprentissage concerne un individu et un domaine de connaissance, l'enjeu de l'enseignement met quant à lui en interaction des individus (dont l'un a le statut d'enseignant et les autres, celui d'élève) et un domaine de connaissance, et ce, de façon plutôt étrange, puisque, pour un des individus, l'enjeu sera l'appropriation (partielle) du domaine par les autres. Cette bizarrerie ne tient toutefois que lorsqu'on s'arrête à considérer l'enseignement du seul point de vue de ce qu'il est censé produire, c'est-à-dire un apprentissage de la part des élèves; elle disparaît dès qu'on élargit l'angle de vue pour le regarder comme un processus liant tous ces individus à un domaine de connaissance.

Comme nous l'avons déjà annoncé plus haut, nous postulons que « dans l'acte d'enseignement lui-même, chacun des acteurs (enseignant et élève) accède au domaine des connaissances mathématiques ». Cela n'est toutefois pas à proprement parler un partage de connaissances ou encore de savoirs, puisque chacun est amené à connaître les mathématiques à sa façon et surtout selon la perspective que lui offre sa position dans ce processus (Conne, 1999). Il s'agit pourtant bel et bien d'une coprésence dans le domaine, où chacun est situé dans l'organisation des savoirs en question. L'enseignement s'accomplit avec la détermination de ses acteurs à propos d'une chose commune que représentent, dans les cas qui nous préoccupent, les connaissances mathématiques en jeu et les formes et organisations sous lesquelles

elles se manifestent⁵. Comme il a déjà été dit, lorsque l'on considère les produits de l'enseignement plus que le processus, on s'arrête généralement aux connaissances et savoirs produits chez les enseignants. On considère peu, en effet, les connaissances des enseignants et ce qu'ils pourraient apprendre des mathématiques à travers l'acte même d'enseignement pour s'intéresser plutôt aux savoirs qu'ils possèdent collatéralement. La formation des enseignants⁶ est alors conçue pour leur donner à l'avance les savoirs qu'ils mettront en œuvre dans leurs enseignements futurs. C'est ce que Conne (1999, p. 50-51) a appelé un «schéma de procuration».

Or, si l'on peut estimer que cette part de la formation des enseignants fait actuellement l'objet de propositions intéressantes et bien documentées, la question de connaître les mathématiques au sein même de l'interaction d'enseignement, c'est-à-dire les savoirs acquis à l'occasion et par l'acte d'enseignement lui-même, est bien moins étudiée⁷. Nous devons toutefois signaler des précurseurs au Québec qui, sous la direction du professeur A. Morf en 1983 déjà, proposaient à la recherche en perfectionnement des maîtres à l'élémentaire la notion de *mathématique de transaction*⁸. En passant, faisons part de notre admiration pour la pertinence de leurs vues. C'est en effet une question qui nous paraît fondamentale dans la mesure où ces savoirs sont déterminants dans l'échange avec les élèves et, par conséquent, dans l'expérience mathématique de chacun (celle des enseignants pas moins que celle des élèves). Nous pensons d'ailleurs qu'il s'agit là d'un enjeu majeur pour l'Esp – et donc pour la formation des enseignants spécialisés – eu égard à la fragilité de la dynamique des interactions au sein du processus d'enseignement qui, en cas de rupture, risque d'entraver l'accès de l'enseignant et de l'élève au domaine des connaissances mathématiques. Nous illustrons l'ensemble des propos qui précèdent à l'aide d'un exemple.

-
5. C'est-à-dire les organisations de savoirs et leurs représentations ou plus généralement les signes.
 6. Nous considérons ici la question de la formation des enseignants dans un sens large qui prend autant en compte les formations initiales et continues dispensées dans des cours que les aspects formateurs que l'on trouve dans les ouvrages didactiques, méthodologies et manuels d'enseignement qui visent à aider et outiller les enseignants dans l'accomplissement de leur tâche.
 7. Nous citons à ce propos, outre les travaux portant sur les erreurs dans les algorithmes de calcul (Brun, Conne, Lemoyne et Portugais, 1994), ceux de Bloch (2000), Cange et Favre (2003), Conne (2003) et Giroux (2004).
 8. A. Morf, avec la collaboration de R. Allaire, J. Girard, H. Kayler et J.-B. Lapalme (1983).

Obtenir par pliage un carré à partir d'une feuille de papier rectangulaire

Supposons qu'un enseignant, pour une raison ou une autre, veuille faire fabriquer par les élèves de sa classe un carré à partir d'une feuille ordinaire et qu'il se dise qu'il y a là une belle occasion de les interroger sur la manière dont ils pourraient s'y prendre. Deux types de réponses seront donnés : des réponses qui reposent sur une procédure à l'œil, c'est-à-dire une réduction de la feuille pour qu'elle atteigne approximativement une taille carrée – ici nous avons pu observer tout une gamme de moyens mis en œuvre ; des réponses qui reposent sur une mesure – là on peut envisager une gamme de moyens allant de l'emploi d'un double décimètre au pliage dans un coin de la feuille à 45° .

Supposons ensuite que l'enseignant veuille diriger les élèves sur cette manière relativement simple et pratique d'obtenir une feuille carrée : le pli du coin. Notons tout d'abord qu'il s'agit ici bel et bien d'une construction géométrique, qui confie au pliage et au rabattement du bord rectiligne les rôles dévolus classiquement à la règle et au compas. Préside donc à cette construction, à ce « fait-de-plier », un théorème qui combine en fait deux propriétés mathématiques. La première est relative aux pliages de feuilles de papier : si l'on rabat ainsi un coin de feuille rectangulaire, de sorte à ramener le bord latéral de la feuille sur le bord longitudinal, le pli coïncidera avec la bissectrice de l'angle que font les deux bords rabattus l'un sur l'autre. La seconde est une propriété du carré pour lequel les diagonales sont aussi les bissectrices des angles (coins) qu'elles relient. Dans la feuille de papier, élément constitutif du milieu, se conjuguent donc les propriétés matérielles de ses pliages – elle se pliera comme son matériau le permet, le pli se marquera rectilignement, etc. – et les propriétés de sa forme – elle est rectangulaire, ce qui veut dire qu'elle a des bords rectilignes, parallèles deux à deux et ses coins sont à angle droit. De fait, ni le matériau de la manipulation, ni la manipulation elle-même ne sont exempts de mathématiques.

Ces propriétés – aussi précisément analysées – sont bien évidemment inaccessibles aux élèves, et peu d'enseignants s'en feront une idée très claire. Pourtant, ils n'en pensent pas moins, bien que, en comparaison de la simplicité mathématique, ces pensées paraissent bien confuses⁹. Dire cela, c'est dire qu'une troisième mathématique est convoquée dans cette petite expérience, soit celle de l'organisation des connaissances du plier, et cette mathématique-là, on n'y accède qu'indirectement, en multipliant les angles d'approche où ces propriétés géométriques seront en jeu. Et l'intérêt pour l'élève d'apprendre le truc du pli du coin est à la mesure de cette troisième mathématique.

9. *Ce qui se conçoit bien s'exprime clairement* n'empêche pas que, de quelque manière que ce soit, seul ce qui se conçoit vient à s'exprimer. Ici les notations jouent un rôle crucial, comme nous l'enseigne l'étude de l'histoire des mathématiques, et que nous confirment aussi toutes nos observations.

Est-ce que cela signifierait que l'élève qui aurait appris à faire ainsi serait dans l'erreur? Non, car la procédure est garantie. Mais qu'est-ce qui pourrait convaincre les élèves et les enseignants que cette procédure est bien adéquate? Tout d'abord une appréciation perceptive: on aboutit bien, si on se donne suffisamment de peine, à une forme carrée. Seulement cela? Non, parce que ce qui a été présenté ici comme un moyen de construction pourrait fonctionner comme moyen de vérification, comme critère pour décider si tel morceau de papier rectangulaire est un carré ou non, et cela, parce que le rabattement par ce pli reporte longueur sur largeur et permet de vérifier ainsi leur égalité¹⁰. Cela dépasse donc l'accord perceptif. Le lien que l'on peut donc établir entre les deux valeurs que peut prendre la même procédure (construction ou vérification) est donc un moyen que l'enseignant aura d'indiquer l'idée que cette procédure exploite, c'est-à-dire l'égalisation des côtés du rectangle pour obtenir un carré.

Que pourrait-il advenir, éventuellement de surprenant, dans un moment d'enseignement de cette petite procédure? Tout autant la facilité avec laquelle certains élèves vont arriver à l'apprendre et surtout à l'adopter que la difficulté que d'autres auront à l'utiliser, ou encore que ce sera assez rare qu'un élève la trouve tout seul. Dans le contexte de l'Esp, cela donnera que beaucoup d'élèves ne la connaîtront pas, et ce, sans considération d'âge. Nous avons compris ce qui rend cette procédure si peu probable à être spontanément trouvée; mais qu'est-ce donc qui la rend alors si facilement assimilée? Certes, le pliage n'est pas très difficile à exécuter. Mais est-ce que cela suffit? Comme nous l'avons dit, un jugement perceptif intervient et, en ce sens d'ailleurs, cela renforce l'élève dans l'idée de se fier à ce type de jugement. Mais intervient conjointement autre chose, à savoir une procédure organisée, invariable et par là relativement formelle et qui a toutes les marques de la précision: elle ne produit pas seulement un carré, une forme perceptivement carrée, mais elle le produit précisément, elle produit précisément le carré. À l'école, tout concourt à s'en convaincre, on le croit, et certains vont jusqu'à faire de cette croyance un savoir. Voilà donc ce qu'il est donné à connaître et à savoir dans cette petite expérience de pliage, voilà sa réalité. Voilà aussi la réalité dans laquelle va nécessairement se mouvoir toute interaction que l'enseignant aura avec ses élèves à son propos.

Et c'est ensuite dans l'écoute attentive et l'échange qu'il entretiendra avec eux qu'il va y avoir, pour lui, matière à apprendre. Ainsi, par exemple, certains élèves vont lui proposer, pour obtenir un carré, de plier leur feuille en deux (de manière à réduire la longueur). Pliage plus simple et plus à portée de l'intuition des élèves, procédure elle aussi formelle et précise, et pour laquelle nous avons pu régulièrement observer que les élèves espéraient qu'il en sortirait une forme carrée, et leur surprise à

10. *De facto*, c'est une vérification partielle. Il faut, pour en être tout à fait assuré, d'autres mesures encore, des angles ou bien d'autres reports des côtés, voire des diagonales. Nous laissons au lecteur le soin de rafraîchir à cette occasion ses savoirs en géométrie élémentaire. Quant à nous, nous avons omis ces précisions afin de ne pas trop alourdir notre propos.

ne pas y arriver¹¹. Ce faisant, l'enseignant apprendra en quels termes les élèves semblent aborder ce problème : comment réduire la longueur du rectangle afin de l'égaliser à la largeur, quelle bande du rectangle couper alors ? Le pli du coin a alors ceci de surprenant qu'on plie de biais, alors qu'on cherche à découper parallèlement aux bords, tandis que la procédure de pliage en deux a ceci d'inattendu qu'elle inverse les dimensions de la feuille de départ : la demi-longueur devient la largeur d'un nouveau rectangle. Par là, l'enseignant pourra récolter des indications précieuses concernant l'organisation des représentations que se font les élèves du carré et du rectangle¹².

On pourra poursuivre l'expérience en surprenant les élèves avec la trivialité de la tâche qui consisterait à produire un morceau de papier rectangulaire à partir d'une feuille carrée, et d'autres tâches encore, plus faciles ou plus difficiles à accomplir¹³. Cette interprétation exploratoire du milieu aura pour conséquence de différencier deux aspects critiques de la mathématique cognitive : une condition de rapport (l'égalité ou non des dimensions qui distinguent rectangle et carré) et une condition de taille. Nous avons appris alors la richesse des situations géométriques qui demandent aux élèves de combiner ainsi une condition de forme à produire avec une condition de taille, avec la tâche générique suivante : essaie donc de produire – dessins, découpe, etc. – telle figure qui soit la plus grande que tu puisses obtenir sur cette feuille de papier. Tâches toujours fort révélatrices de la dynamique des représentations que se font les élèves de ces différentes figures géométriques telles qu'elles se révèlent sur un support en papier (sur lequel on trace des traits, par pliage ou par dessin).

2. Les fonctions du savoir dans l'acte d'enseignement

Nous considérons le savoir comme une chose avant tout pragmatique. C'est ainsi qu'il faut comprendre la définition de Conne (1992) : « le savoir est une connaissance utile ». Cette définition nous permet de

11. Il est très intéressant de jouer sur les dimensions des feuilles rectangulaires pour voir dans quelle mesure les élèves éprouvent le pliage par deux. Ou, encore plus fructueux, de demander de produire le plus grand losange plutôt que le plus grand carré, mais alors la solution devient autrement plus difficile à justifier.
12. On peut, par exemple, demander simplement aux élèves de dessiner ou de découper des carrés et l'on observe que souvent ils les font assez petits, de sorte que les différences dues aux imprécisions du dessin ou de la découpe soient moins perceptibles. Les sujets se concentrent sur l'obtention de la forme, quitte à négliger la contrainte de taille. En modifiant légèrement la tâche, on a pu obtenir le même phénomène avec des enseignants en formation.
13. En demandant, par exemple, que le carré soit centré sur la feuille de départ, tout en sachant que cette tâche suscite d'autres représentations encore.

caractériser trois fonctions du savoir mathématique dans le processus d'enseignement qui sont ordonnées selon le rapport qu'elles entretiennent avec l'activité cognitive des acteurs de la classe. La première est dans un rapport d'extériorité à cette activité, alors que la troisième est directement liée à l'activité des acteurs en situation, en particulier à celle de l'enseignant. On ne peut confondre chacune de ces fonctions, même si celles-ci sont *de facto* toujours imbriquées dans l'enseignement des mathématiques. Elles sont donc distinctes, complémentaires et chacune est nécessaire aux deux autres.

2.1. Repérer les savoirs enseignés en regard d'un programme

La première fonction du savoir mathématique dans l'enseignement est une fonction d'administration, dans la mesure où il y joue un rôle d'organisateur et de repère. Ici les mathématiques peuvent être qualifiées de mathématiques programmatiques, du fait qu'elles sont organisées en programmes. Pour l'enseignement, cette fonction est essentiellement «institutionnalisante», le rôle de l'enseignant étant de communiquer le savoir et d'en administrer l'étude (par le biais de situations, de problèmes, d'exercices, de cours, etc.). L'enseignant veille à ce que les mathématiques qu'il propose aux élèves leur soient accessibles. À cette fin, il évalue l'écart entre ce que fait l'élève et les mathématiques qu'il a l'intention d'enseigner pour le maintenir à son optimum. Cet écart, en effet, ne doit pas être trop important pour que l'objet d'enseignement soit à la portée de l'élève, mais doit pourtant rester suffisant pour motiver un apprentissage.

C'est la fonction la plus classique du savoir mathématique dans l'enseignement. Notons que, de ce point de vue, le savoir mathématique reste une entité extérieure aux activités et aux individus, un cadre, un repère¹⁴. Cette fonction ne se rapporte pas aux mathématiques développées par les élèves, à leurs conceptions, ni même à celles des enseignants¹⁵.

14. En se référant à la théorie anthropologique (Chevallard, 1996) et à sa manière de considérer les phénomènes de transpositions didactiques, on pourrait parler ici d'«écosystème».

15. Par l'extériorité que confère cette fonction au savoir mathématique, ces choses restent confinées à la vie de la classe et à ce qui s'y déroule; elles relèvent ainsi du domaine privé du groupe-classe.

2.2. Contextualiser le savoir en une situation objective

Tout au long du xx^e siècle, la question de la (re)contextualisation des connaissances et des savoirs est devenue de plus en plus sensible dans les différentes sciences. Du côté de la didactique des mathématiques, y compris dans ses propositions de formation, cela s'est marqué par la considération du fonctionnement du savoir en situation¹⁶. Dans un tel schéma, l'enseignant vise une confrontation directe (adidactique) de l'élève à une situation. Par conséquent, et dans la mesure du possible, il s'abstient de communiquer ou d'énoncer directement le savoir. L'idée est de chercher à reproduire ainsi, artificiellement, une *genèse* de ces savoirs (au sens d'une épistémologie génétique et développementale). Précisément, on vise à provoquer un apprentissage en aménageant un ensemble de contraintes, de conditions propices à l'élaboration de stratégies de résolution qui engagent le savoir visé. Pour ce faire, l'enseignant apprête à l'intention de l'élève un milieu (tâches, consignes, support symbolique ou physique...) avec lequel ce dernier interagira et qui devra lui résister. Il met ainsi en scène le savoir dans des situations qu'il fait jouer aux élèves : au premier acte, la situation installe tel ou tel fonctionnement de savoirs déjà acquis par les élèves (modèles implicites) ; au deuxième acte, elle met ce fonctionnement sinon en échec du moins en difficulté ; le dénouement du troisième acte engage les élèves à apprendre de nouveaux savoirs. Pour l'enseignement, la fonction du savoir est donc ici essentiellement « dévoluante ». Dans un tel schéma d'interactions, le savoir est injecté, enfoui, pourrions-nous dire, dans la situation puisque le milieu est aménagé pour favoriser un certain fonctionnement du savoir et offrir à l'élève une rétroaction sur la pertinence, l'efficacité, la justesse des connaissances qu'il injectera à son tour dans la situation. Mais l'enseignant reste à la porte de la situation puisqu'il ne lui appartient pas, dans cette dialectique, d'infirmier et de valider la stratégie et la connaissance de l'élève¹⁷. Il contrôle de l'extérieur le bon déroulement du processus,

16. Les concours, rallyes et autres olympiades mathématiques en sont aussi un emblème (voir Brousseau, 2001).

17. Brousseau (1988) a proposé un premier schéma dit de « structuration du milieu ». Ce schéma ne considérait pas complètement le travail de l'enseignant ; c'est pourquoi Margolinas (1993-1994) et Grenier (1998) ont proposé de le compléter. Toutefois, estimant que ce schéma ne prenait pas suffisamment en considération le fait que le professeur en situation d'enseignement déployait, lui aussi, une activité cognitive mathématique, Bloch (1999) a proposé, à son tour, un nouveau complément. On a alors abouti à un schéma très équilibré entre le point de vue de l'élève et celui du professeur.

renvoie les élèves au milieu qu'il a préalablement aménagé, joue sur les variables didactiques (les contraintes) de la situation et organise une progression des situations pour susciter des ruptures et chercher à provoquer des transformations importantes dans les stratégies des élèves qui témoignent alors de leur apprentissage. Le savoir est appris, pourrions-nous dire, lorsque l'élève peut interagir sans obstacle avec le milieu et qu'il peut ainsi contrôler la situation¹⁸.

2.3. Suivre les connaissances induites par la situation chez les élèves et les piloter dans l'interaction

Nos expériences et recherches nous ont amenés à examiner les mathématiques telles qu'elles sont pratiquées en classe au cœur même des interactions des enseignants avec leurs élèves. Les bases théoriques de cette approche ont été posées dans différents textes (Conne, 1996, 1998, 1999, 2003, 2004a, 2004b) auxquels nous renvoyons les lecteurs¹⁹. Au sein de la situation d'enseignement, non seulement l'élève, mais aussi l'enseignant interagit avec le milieu; il s'y produit donc ce que Conne (2003) nomme des « interactions de connaissances ». La fonction des savoirs des uns et des autres est le contrôle de la situation. Ainsi, l'enseignant confie à l'élève certaines choses à faire avec le milieu (un objet à produire, une solution à trouver...) et comme, en principe, ce sont de nouvelles choses pour lui, c'est pour pouvoir contrôler ce qui se présente comme inattendu que l'élève est conduit à apprendre et à acquérir de nouveaux savoirs.

L'enseignant, quant à lui, ne peut enseigner que ce qu'il sait; ce qui signifie qu'au contraire de l'élève il peut anticiper en partie la réaction du milieu, ce qui va s'y produire du point de vue du savoir visé. Cependant, l'observation fine des processus d'enseignement nous révèle qu'en réalité bien des choses, au regard du savoir, inattendues et inédites pour l'enseignant, s'y produisent également²⁰. L'enseignant doit alors agir sur le milieu pour tenter de le contrôler

18. D'autres milieux et d'autres types d'interactions sont prévus pour que le statut culturel du savoir en jeu soit identifié (voir Brousseau, 1998).

19. L'enseignement y est vu comme un processus qui se déroule à l'intérieur d'une entité: le quatuor situation, enseignant, enseigné et milieu.

20. C'est d'ailleurs ce que nous ont appris tant les études d'épistémologie et de psychologie cognitive que nos propres observations didactiques; il suffit de penser aux erreurs et aux règles insoupçonnées qu'elles ont révélées.

afin que la situation demeure pertinente pour les élèves. Et c'est en agissant sur le milieu, pour mieux comprendre et contrôler les écarts entre ses anticipations et les événements qui se produisent en situation, que l'enseignant à son tour apprend et acquiert des nouveaux savoirs (qui ne sont naturellement pas les mêmes que ceux qui sont appris par l'élève).

3. Connaître les mathématiques en interaction

Dans l'enseignement des mathématiques, le savoir remplit chacune des trois fonctions que nous avons décrites. Les propositions des didacticiens se distinguent essentiellement par le fait qu'elles mettent l'accent tantôt sur l'une, tantôt sur l'autre, même si le niveau que nous avons qualifié de suivi des interactions de connaissances a été peu investi du point de vue des contenus, restant plutôt jusqu'ici l'apanage des approches psychologiques de type clinique²¹. L'imbrication des trois fonctions du savoir dans l'enseignement se marque parce que tout enseignement doit conjuguer – il s'agit en fait d'une transaction – deux niveaux d'objectifs²², l'un externe, qui correspond aux savoirs repères du programme, et l'autre interne, qui correspond à la dynamique de la situation d'enseignement et aux connaissances qui y sont induites, ainsi que les savoirs qui y sont mis en œuvre. De ce point de vue, le niveau du savoir contextualisé (en situations, en situations-problèmes, en petits jeux ou concours mathématiques de tout genre) se trouve à l'interface interne / externe. Nous pourrions invoquer de nombreux arguments montrant qu'il ne suffit pas de considérer uniquement cet aspect des fonctionnements didactiques de savoirs, mais nous nous contenterons ici d'un seul argument qui nous semble suffisamment parlant.

21. Nous ne reprendrons pourtant pas le terme « clinique » à notre compte, parce que, contrairement aux approches psychologiques, nous cherchons à tirer parti, à des fins didactiques, des processus et des dynamiques telles qu'elles se présentent à nous.

22. Souvent, on dit de ces niveaux que l'un serait macro et l'autre micro – reprenant la même distinction que les psychologues genevois faisaient entre « macrogenèse » et « microgenèse ». Quant à nous, nous préférons dire que l'un est interne ou local et l'autre externe ou global.

On peut faire dévolution d'un problème à l'élève, mais le cadre situationnel dans lequel cette dévolution opère est sous le regard vigilant de l'enseignant. La situation d'enseignement comporte des imprévus qui peuvent se présenter comme un problème d'enseignement, lequel sera bel et bien dévolu à l'enseignant. Si la situation ne permet pas aux élèves de faire fonctionner les connaissances et de les modifier comme prévu, l'enseignant doit pouvoir le repérer et intervenir sur le vif. En situation ordinaire d'enseignement, c'est le savoir qui est le repère ultime de l'enseignant (ce savoir qui peut lui permettre de repérer des connaissances des élèves, de relancer leur activité en proposant un contre-exemple...). C'est sans doute la raison pour laquelle le pilotage conduit en plusieurs cas, même chez des enseignants chevronnés, rompus aux situations didactiques (Salin, 1999), à de l'enseignement ostensif caractérisé, selon Bloch (1999), par « le fait que l'enseignant ne fait usage, dans la situation, que des savoirs²³ qu'il vise pour les élèves en fin d'apprentissage » (p. 173). On peut comprendre que des élèves peuvent se sentir coupables de ne pas entrer en situation, mais, et ce, particulièrement chez les plus jeunes ou les élèves en difficulté, ils ne sont pas en position de remettre en cause la pertinence de la situation d'enseignement elle-même. L'enseignement ne peut être effectué sans la confiance des élèves dans la situation qui leur est proposée. La position de l'enseignant est extrêmement délicate, puisqu'il engage sa responsabilité à l'égard de ce que produit l'élève; l'enseignant est responsable de ce qu'il a aménagé comme situation d'apprentissage pour l'élève. Dans le processus de recherche d'un contrat, l'élève réserve, et souvent sollicite, un espace à l'action professorale pour corriger le tir de la situation d'enseignement.

Un contrôle didactique de l'interaction de connaissances enseignant / enseignés par le savoir mathématique, même partiel, est donc quelque chose de primordial à assurer. C'est bien ce que nous rappellent sans cesse nos observations et interventions sur le terrain de l'Esp, non seulement parce que ce contrôle se révèle plus difficile à

23. Nous adjoignons une remarque pour les puristes. Dans le texte original, Bloch avait écrit « connaissances », mais, si nous avons remplacé ici ce terme par celui de « savoirs », c'est dans un souci de cohérence avec la définition de « savoir » qui précède. Dans la mesure où un savoir est considéré comme une connaissance utile, une connaissance dont on fait usage est effectivement un savoir. Nous savons par ailleurs que Bloch, dans ce texte, se réfère bien au propos de Conne (1996) concernant la distinction entre « savoir » et « connaissances » et nous sommes donc certains de ne pas avoir altéré le propos de notre collègue.

assurer que dans les conditions Eo, mais encore parce qu'il s'y exerce d'une manière plus serrée vu que le nombre d'élèves y est restreint (une mesure qui vise justement à favoriser les interactions). Nous illustrons cela par un deuxième exemple.

Interaction de connaissances dans des tâches de comparaison de nombres

Les tâches de comparaison de nombres sont très investies dès l'entrée dans la scolarité, car elles sollicitent la coordination de plusieurs connaissances numériques (Giroux et Lemoyne, 1998 ; Giroux, 1999). Elles sont si « naturalisées » au monde scolaire qu'on ne cerne plus toujours très bien les savoirs auxquels elles se réfèrent, ceux par lesquels on compare la grandeur des nombres selon l'ordre défini dans l'ensemble des nombres naturels. Une première appréhension de ces relations est exprimée chez les jeunes élèves lorsqu'ils reconnaissent que plus l'écriture d'un nombre est longue, plus le nombre qu'elle exprime est grand. Par la suite, la comparaison de deux nombres ayant le même nombre de chiffres est fondée sur celle des chiffres de ces nombres en partant de la plus grande position (ou la plus grande puissance de 10) jusqu'à la plus petite.

L'exemple qui suit est tiré d'une situation à laquelle participait un chercheur faisant équipe avec l'enseignante d'une classe d'élèves en difficulté d'apprentissage de 7 à 9 ans. Ici, la calculette est utilisée pour mettre en scène les savoirs sur la comparaison de nombres. Les élèves sont invités à écrire sur la calculette le plus grand nombre possible. Ils « tapent » alors sur les touches chiffrées autant de fois que nécessaire pour remplir l'écran²⁴. Par un jeu de comparaison entre les écritures produites, le chercheur les relance à la recherche d'un nombre encore plus grand. La situation se déploie comme prévu jusqu'à l'abstraction par les élèves d'une procédure qui permet de contrôler le milieu : taper toujours sur la touche 9.

Une élève produit toutefois l'écriture 76 et demande si ce nombre est grand. Ce comportement est inattendu pour le chercheur parce qu'à la différence des autres élèves, la fillette témoigne d'un certain contrôle du geste pour produire une écriture qui n'a que deux chiffres²⁵ et pour laquelle elle a la curiosité de connaître la grandeur du nombre exprimé. Il n'est pas inutile de préciser, pour comprendre les interactions qui vont suivre, que cette élève, intégrée depuis peu et considérée comme la moins avancée de la classe, n'a manifesté jusqu'alors aucun engagement dans

-
24. Notons que, sur le registre de l'écrit, on peut toujours allonger une écriture de nombre « par la droite » ou « par la gauche », mais que sur la calculette on ne peut le faire que « par la droite » et « vers la gauche », ce qui fait que, le premier chiffre étant tapé, on ne pourra plus l'augmenter à moins de l'effacer.
 25. L'enseignante vise au cours de cette période l'apprentissage des dix premiers nombres pour cet élève.

les activités d'apprentissage²⁶. Cet événement est donc une réelle surprise pour le chercheur qui, voulant répondre à la demande de l'élève, modifie la tâche sur le vif, comme le montre l'extrait suivant :

Élève: Est-ce que c'est un grand nombre ? (montrant 76 sur sa calcullette)

Chercheur: C'est grand comme l'âge d'une grand-maman !

Élève: Comme une mamie ! (en souriant)

L'élève retourne à sa place et revient avec sa calcullette.

Élève: C'est grand comme l'âge de qui ? (montrant 768 sur sa calcullette)

Chercheur: Euh... c'est grand comme... l'âge de la grand-maman, de la grand-maman, de la grand-maman... beaucoup de grands-mamans comme cela²⁷.

Élève: Comme ceux qui sont au cimetière ?

Chercheur: Oui, il y en a comme cela dans les cimetières.

L'élève retournera à sa place et reviendra, à quatre reprises, avec un nouveau nombre comportant un chiffre de plus que le précédent. Les réponses du chercheur sont de plus en plus nébuleuses, cherchant à repérer des faits, des personnes pouvant correspondre au nombre et qui aient un sens pour l'élève.

Pourquoi donc le chercheur ne relance-t-il pas l'élève en intervenant directement sur la calcullette pour produire l'écriture d'un nombre encore plus long (et implicitement plus grand) ? C'est pourtant un des savoirs reconnus comme utiles pour contrôler le milieu. Dans l'interaction, le chercheur interprète que non seulement l'élève agit pour interroger le milieu, mais qu'elle le fait sur une tâche modifiée par rapport à celle qui est proposée : écrire un grand nombre, ce qui n'est pas tout à fait la même chose qu'écrire le plus grand nombre possible. De ce point de vue, piloter la situation pour que l'élève produise un nombre plus grand, par comparaison avec le premier, reviendrait à demander à l'élève de bien vouloir suivre le chercheur dans la logique de la tâche prescrite. Or, ici, le chercheur décide plutôt de suivre l'élève.

En évoquant la vieillesse d'une personne pour exprimer la grandeur de l'écriture produite par l'élève, le chercheur établit une comparaison entre l'écriture numérique (76) et l'âge d'une grand-maman pour répondre à la demande de l'élève. Le rapport habituel par lequel on attribue à une personne un âge exprimé par un nombre (personne → âge → nombre) est renversé, puisque c'est au nombre 76 qu'est attribuée la valeur d'un

26. Et ce, malgré différentes mesures mises en place pour soutenir cette élève (tâches de bricolage, soutien d'une technicienne, etc.).

27. En fait, il ne connaît pas la réponse à cette question ; et vous, cher lecteur ? De plus, dans les cimetières du nouveau monde, il n'existe pas de telles sépultures.

âge vieux exprimé en la personne d'une grand-maman (nombre → âge → grand-maman). L'élève, qui semble amusée de cette réponse, présentera successivement quatre nouveaux nombres, chacun d'eux produit par l'ajout d'un seul chiffre au précédent²⁸. Les repères de l'âge d'une personne pour juger de la grandeur d'un nombre rencontrent vite leurs limites et le chercheur est mis dans l'embarras. Néanmoins, il poursuit dans la ligne de l'échange en maintenant la référence entre écritures numériques et âges de grands-mères. La perte d'équilibre du chercheur ne semble pourtant pas affecter l'élève qui manifestement se réjouit de savoir produire à répétition – à volonté si ce n'est des limites de la calculette – un nombre plus grand que le précédent (et sans doute tellement grand qu'il embête l'adulte !) et l'échange dure ainsi de longues minutes.

4. Investir les mathématiques dans et par la formation

Forts de nos expériences et recherches personnelles sur les interactions cognitives et le fonctionnement des savoirs dans l'acte d'enseignement, nous pensons que la conception classique de la formation à l'enseignement ne prépare pas véritablement les futurs enseignants à l'acte d'enseigner. Par conséquent, ces derniers sont réduits à l'apprendre par eux-mêmes selon les modèles que leur montrent leurs pairs ou tout simplement selon ceux qu'ils ont connus pendant leur propre scolarité. Ce que nous connaissons des élèves en difficulté en mathématiques, que ce soit dans le cadre de l'Esp ou dans celui de l'Eo, tend en effet à nous convaincre que ces modes « spontanés » de l'art d'enseigner sont insuffisants, et cela, malgré la richesse et la valeur indéniable des intuitions dont font preuve nombre d'enseignants que nous avons pu observer.

De notre point de vue, la formation à l'acte d'enseigner les mathématiques devrait donner à l'enseignant des moyens pour ne pas dévier du contenu et faire en sorte que, même dans le cadre de l'Esp et aux prises avec les difficultés particulières à y enseigner, il reste bien « maître de mathématiques » et ne se mue pas tantôt en clinicien, thérapeute ou psychologue, tantôt en répétiteur, tuteur ou éducateur. Autrement dit, que l'enseignant sache ce qu'il fait et fait faire et que ce soient bien des mathématiques. Or, nous pensons que l'enseignant sera maître des mathématiques qu'il apprend à ses élèves à la mesure

28. Ce qui est la procédure requise pour accomplir la tâche prescrite au départ.

de la conscience, du contrôle et du recul réflexif qu'il aura sur ce qui se fait et se passe effectivement dans la dynamique de la situation. Ce qui suppose qu'il considère sa tâche d'enseignement comme une mise à l'épreuve de ses propres savoirs et qu'il s'intéresse à réaliser cette confrontation en étant curieux d'apprendre quel rapport il peut y avoir entre ce qu'il propose aux élèves et ce que ces derniers en feront, en diront et en penseront. Pour lever cet écran de préjugés que risquent de constituer les savoirs, il faut que ces derniers soient mis au défi de ce que ses élèves font, disent et pensent et que l'enseignant puisse ainsi mesurer l'écart entre la réalité à laquelle il avait cru pouvoir confronter ses élèves et celle avec laquelle ces derniers ont effectivement travaillé, et arriver à prendre en compte les connaissances qui se trouvent en amont des savoirs visés. Ainsi, et ainsi seulement, il pourra éviter de recourir à un enseignement essentiellement ostensif. Pour cela, il faut que l'enseignant se déprenne d'une double illusion, soit celle d'en savoir déjà assez pour enseigner ce qu'il a à enseigner – sinon que pourrait-il apprendre en enseignant? – et celle de penser qu'il connaît suffisamment ses élèves, leurs manques et difficultés au point de ne plus pouvoir jamais se laisser surprendre par ce qu'ils font. En résumé, il ne doit pas rester cantonné à des idées toutes faites sur les savoirs, les élèves et les rapports qu'ils entretiennent.

Pouvoir suivre la pensée de ses élèves en situation, qu'ils soient ou non en difficulté d'apprentissage, et pouvoir définir et repérer leurs possibilités demande des savoirs mathématiques. Introduire les enseignants à cette idée nous paraît très profitable et prometteur, même si nous reconnaissons que cette perspective est relativement exigeante²⁹. Elle doit en conséquence être sérieusement prise en compte par

29. Nous trouvons déjà cette idée dans le texte de Lemoyne (1990), intitulé: «La peur de ne pas savoir la réponse: les difficultés d'apprentissage et d'enseignement des mathématiques». De même, elle est présente dans toutes les recherches consacrées aux erreurs dans les algorithmes de calcul, comme en témoigne cette citation tirée de Brun, Conne, Lemoyne et Portugais (1994, p. 129-130): «Contrairement aux apparences, c'est moins de lacunes à caractère numérique ou numéral dont les erreurs de division présentées témoignent que d'un contrôle (au sens d'exploitation adaptée des connaissances disponibles) encore incertain ou fragile, comme si cette curiosité qu'est l'algorithme résistait encore à l'exploration que l'élève a pu en faire jusque-là. C'est pourquoi notre stratégie didactique serait précisément de considérer un algorithme comme une curiosité à explorer au moyen des connaissances numériques et numérales dont on dispose, jusqu'à ce qu'on en trouve la clé. C'est l'hypothèse qui nous guidera pour le montage de situations didactiques.»

la formation, non pas en termes de formation complémentaire en mathématiques, mais bien plus en termes d'accompagnement dans une démarche qui vise à intéresser les enseignants aux productions des élèves et aux mathématiques qui s'y révèlent. Nous illustrons cela par un dernier exemple.

Un séminaire d'initiation à la recherche dans la formation des enseignants spécialisés

Dès 1992, alors qu'il était formateur d'enseignants spécialisés (tous titulaires d'une classe et en formation complémentaire), F. Conne avait eu la charge de créer un séminaire d'observation et de recherche. Il avait alors proposé une unité intitulée « Pratiques de chercheur », dont le concept était centré sur l'organisation d'une séance d'entretien du chercheur-formateur avec des élèves. Ces derniers provenaient des classes de l'un ou l'autre des participants, qui se chargeait de les faire venir pour l'occasion³⁰. La tâche des enseignants était de prendre des notes d'observation, éventuellement de procéder à un enregistrement audio ou vidéo de l'entretien, puis d'établir un protocole de cet entretien afin de pouvoir l'analyser. Une présentation publique des résultats de cette analyse couronnait le tout. La séance d'observation était soigneusement préparée. Le chercheur-formateur avait pris l'option de refuser le plus possible d'être informé sur les élèves qu'il allait rencontrer et il déclarait en particulier qu'il ne voulait rien savoir ni des raisons de leur présence dans l'Esp, ni même de leurs difficultés pour les mathématiques (nous reviendrons plus en avant sur ce point capital). Bien entendu, la formule n'aurait pu être mise sur pied si le nombre d'enseignants inscrits au séminaire avait été trop grand (plus de 10-15). Cette formule a aussi évolué au fil du temps, de même que les enjeux que les participants y mettaient. Plus tard, dès 1998, J.-M. Favre a repris la responsabilité du séminaire³¹ et l'a développé à sa manière.

Nous n'avons pas la place ici de relater l'évolution de ce concept, mais deux observations nous semblent toutefois importantes à rapporter. La première concerne la préparation de l'entretien lui-même, c'est-à-dire l'élaboration des questions qui seraient posées aux élèves, des tâches qui leur seraient soumises, etc. Au début (durant environ deux ans), c'est le chercheur-formateur qui prenait entièrement en charge cet aspect. À la suite de quoi, le séminaire a évolué vers une prise en charge de plus en plus partagée entre le formateur et les participants, autour d'une

30. Il est intéressant de relever que les élèves répondaient généralement volontiers à cette invitation, même quand il s'agissait d'élèves que l'on qualifiait de très sensibles à la peur de se tromper. Certains d'entre eux ont même parfois assisté aux entretiens de leurs camarades et y ont manifesté un très grand intérêt. Il faut dire que nous les considérons comme nos invités et qu'ils étaient à nos petits soins durant toute une demi-journée.

31. F. Conne y participait toujours, mais à titre de consultant.

problématique choisie lors de la première phase du séminaire. La seconde observation est encore plus importante. Ce séminaire entrait dans le cadre d'une formation complémentaire, en emploi, imposée par les autorités scolaires. Le moins qu'on puisse dire, c'est que les enseignants n'y venaient pas sans grandes réticences, sans méfiance pour ces théoriciens que les formateurs étaient à leurs yeux. Leurs doutes quant aux recherches et à leur pertinence étaient aussi très grands³². Ces circonstances ont fait que cette séance d'observation est devenue dès le départ l'occasion d'une mise à l'épreuve réciproque du formateur et de l'enseignant des élèves interrogés. Le séminaire instaurait en quelque sorte une mise en scène à trois personnages : l'enseignant, les formés et le formateur. L'enseignant mis à l'épreuve de la prestation de ces élèves ; le chœur des formés appelés à fournir des observations intéressantes et pertinentes sur la base d'un consensus ; le formateur mis à l'épreuve de rassurer suffisamment les élèves et de leur faire des propositions adéquates afin qu'ils livrent un peu de leurs pensées. Cette mise à l'épreuve du formateur par les formés, pas vraiment anticipée, a été sans conteste l'élément qui a fait le succès de la formule. Elle permettait en effet de distinguer ce qui avait trait à ce que l'enseignant savait sur ses élèves, comment il les connaissait pour leur avoir enseigné des mathématiques et ce qui relevait du savoir mathématique lui-même. En déclarant vouloir rester ignorant des difficultés des élèves et ne vouloir considérer que les mathématiques pratiquées au cours de l'entretien, le formateur se déclarait plus savant en mathématiques que l'enseignant et en même temps moins connaisseur de l'élève (et par là aussi peut-être des élèves en général). Tout cela, sous le regard des autres enseignants, les formés, véritables observateurs (puisque les observations retenues ne seraient que celles qui feraient l'objet d'un consensus entre tous les formés). Enfin, n'oublions pas qu'il s'agissait d'une mise à l'épreuve de nos savoirs, connaissances et préjugés, et que, pour une séance, le séminaire se livrait donc à l'incertitude de ce que le couple élève-chercheur allait pouvoir faire et révéler. Finalement, la formule a eu beaucoup de succès et en premier lieu auprès des élèves interrogés qui, chaque fois, nous demandaient de revenir.

Dans sa formule actuelle, qui est en de nombreux points similaire à celle d'origine, le séminaire reste un lieu privilégié pour chercher à intéresser les enseignants en formation (y compris le formateur) aux mathématiques dont relèvent les productions des élèves interrogés au cours des entretiens et à leur donner l'occasion d'apprendre. L'an passé, par exemple, alors que le séminaire de recherche portait sur les rapports entre procédures d'estimation et procédures de calcul dans l'effectuation d'un algorithme, une production d'élève a particulièrement retenu l'attention. Il s'agissait d'un élève qui, du point de vue de son enseignant, avait de la peine à investir les activités mathématiques. Or, les observateurs, dont l'enseignant lui-

32. De plus, F. Conne ne leur cachait pas qu'il n'avait jamais tenu une classe de sa vie.

même, ont rapporté que cet élève avait produit des choses intéressantes durant l'entretien. L'enseignant nous a fait part de sa surprise et nous avons cherché à comprendre ce qui s'était passé durant cette interaction.

La tâche soumise à l'élève était de trouver un calcul dont le résultat serait 1459 (voir la production ci-après). L'élève a commencé par proposer une addition qui donnait bien ce résultat. L'expérimentateur lui a alors demandé de trouver également une soustraction, puis une multiplication et enfin une division qui devaient, elles aussi, donner 1459 comme résultat. Notons en ce qui concerne la division que l'expérimentateur savait qu'elle³³ n'avait pas été enseignée en classe auparavant.

The image shows a student's handwritten work on a piece of paper. It contains four mathematical operations, all of which result in the number 1459:

- Addition:** $1311 + 148 = 1459$
- Multiplication:** $1119 \times 13 = 1459$
- Subtraction:** $1459 - 0000 = 1459$
- Division:** $318152613 \div 118 = 2695361$ (Note: The student has written 118 as the divisor and 318152613 as the dividend, with a quotient of 2695361. There are some corrections and scribbles in the division work.)

Below the division work, there are several small calculations: $2 \div 2 = 1$, $8 \div 2 = 4$, $10 \div 2 = 5$, and $18 \div 2 = 9$. There is also a scribble that looks like 281018 .

L'analyse de cette production a permis de restituer le fil des procédures successivement engagées par l'élève. Pour aboutir à 1459, dans chacun des quatre cas qui lui étaient soumis, l'élève a mis en œuvre le même type de procédure, chiffre par chiffre, lui permettant de proposer des calculs qui aboutissaient successivement à 1, 4, 5 et 9. Cette façon d'envisager les choses, à la fois sous l'angle de l'unité des procédures et en considérant 1459 comme une juxtaposition de quatre chiffres relativement indépendante du nombre qu'il est censé représenter, a passablement surpris les enseignants. Certains ont révélé que, vraisemblablement, en situation habituelle d'enseignement, la même production les aurait incités à porter une appréciation, tâche par tâche, essentiellement évaluative-remédiate de la prestation de l'élève, du type: « l'addition, c'est ok; la soustraction, il a trouvé une astuce pour s'en sortir sans trop de frais; quant à la multiplication et la division, il a encore passablement de travail à faire pour y parvenir ».

Cela n'était déjà pas si mal et la chose aurait pu s'arrêter là. Il s'est trouvé cependant que le formateur, considérant ses notes quelque temps après la fin du séminaire, a voulu réexaminer l'idée que l'élève avait eue pour trouver un dividende et un diviseur qui donne 1459 comme quotient. Une idée qu'il avait réalisée, au moins partiellement (voir la production), dans les cas où le diviseur était égal à 2 et à 3. Il a constaté qu'on pouvait

33. Nous voulons dire son algorithme bien sûr.

généraliser cette procédure élaborée sur ces deux cas très simples en un algorithme toujours valide. Un simple jeu de notation y suffisait en plaçant les données selon une oblique³⁴:

$$\begin{array}{r}
 2 \\
 \quad 8 \\
 \quad 1 \quad 0 \\
 \dots\dots\dots 1 \quad 8 \\
 \hline
 2 \quad 9 \quad 1 \quad 8 \quad (\text{qui, divisé par } 2, \text{ donne bien } 1459)
 \end{array}$$

La relance de l'activité, quoique très différée dans le temps, était dès lors toute trouvée: on pouvait enseigner à l'élève (et à ses camarades) un nouvel algorithme partant de ce que l'enseignant (ici le formateur) avait appris de ses productions.

Conclusion

L'exemple de ce séminaire de recherche montre que nous concevons la formation comme une entreprise intégrée entre divers acteurs. Ceux que nous venons d'évoquer sont l'élève, l'enseignant, le chœur des formés, le formateur et le chercheur en didactique des mathématiques, sans oublier bien sûr les mathématiques elles-mêmes et tout le décor sémiotique des milieux de leur étude. Ici se dessine une nouvelle fonction didactique du savoir assurant l'intégration des trois niveaux de contrôle de notre petite théorie: la reconnaissance des questions mathématiques³⁵ sur le fond desquelles se déroulent les interactions, qui permet ainsi de comprendre comment les mathématiques y ont été contextualisées et à quels repères programmatiques elles correspondent: les théorèmes de pliage et propriétés des carrés; la mise en correspondance de la succession des chiffres dans la production

34. C'est-à-dire selon la disposition usuelle d'une division écrite. Ce jeu de signes, caractéristique de tout calcul mathématique, ramenait la tâche à la reconstitution, dans le format habituel du calcul écrit, d'une division dont seul le résultat est connu. Signalons ici que l'idée d'utiliser un diagramme oblique avait été suggérée au formateur par son travail sur un autre algorithme, également créé de toutes pièces durant le séminaire et permettant, à partir des propriétés utilisées dans la preuve par neuf, d'effectuer la division par neuf de n'importe quel nombre entier. On peut ainsi déterminer le quotient et le reste de cette division en ne procédant qu'à des additions cumulées des chiffres du dividende.
35. Pour beaucoup de nos collègues, cette fonction est méprisée sous prétexte d'un préjugé négatif. Pourtant elle est essentielle et on ne saurait la confondre avec ce que la théorie des situations a nommé «effet Jourdain» (Brousseau, 1986).

d'une écriture numérique et de la suite des générations de grands-mères comme signifiant leur ordre de grandeur; enfin, le découpage des calculs écrits chiffre par chiffre, comme lien entre les algorithmes des quatre opérations, support à une tentative d'extrapolation de la division par l'élève. Nous sommes donc bien loin d'un schéma simpliste de délégation qui reporterait l'opposition : enseignant (donc *sachant*) / enseigné (donc *ignorant*) en une cascade descendant de la dyade chercheur-formateur à celle de formateur-formé pour aboutir, en classe, à celle de professeur-élève. Dans un dispositif tel que celui que nous avons évoqué, le simple fait que le formateur-chercheur³⁶ se présente à l'enseignant comme ignorant de l'élève – de ce que l'élève pourrait lui révéler soit à son sujet, soit au sujet des mathématiques – lui permet de retourner les réponses des élèves en autant de questions à leur professeur. Cela ne suffit pas certes, puisque, comme nous l'avons exposé, notre ambition serait de former les enseignants à interpréter par eux-mêmes et dans l'acte d'enseignement les réponses des élèves comme autant d'interpellations. La piste que nous proposons (et que nous explorons présentement) est d'axer la formation sur ce que, à propos des mathématiques et des milieux sémiotiques propices à leur étude, un enseignant peut apprendre de ses élèves, dans et par le biais des interactions d'enseignement.

■ Bibliographie

- BLOCH, I. (1999). «L'articulation du travail mathématique du professeur et de l'élève dans l'enseignement de l'analyse en première scientifique», *Recherches en didactiques des mathématiques*, 19(2), Grenoble, La Pensée Sauvage, p. 1345-1394.
- BLOCH, I. (2000). *L'enseignement de l'analyse à la charnière lycée/université*. Thèse de doctorat, Université de Bordeaux I.
- BROUSSEAU, G. (1986). «Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques», dans J. Brun (dir.), *Didactique des mathématiques*, Lausanne, Delachaux et Niestlé, 1996, p. 45-143.
- BROUSSEAU, G. (1988). «Les différents rôles du maître», *Bulletin de l'Association mathématique du Québec*, 2(23), p. 14-24.
- BROUSSEAU, G. (1998). *Théorie des situations didactiques*. Textes rassemblés et préparés par N. Balacheff, M. Cooper, R. Sutherland et V. Warfield, Grenoble, La Pensée Sauvage.

36. Ou bien un formateur intégré dans une équipe de recherche, à l'image de ce qui est réalisé au sein du groupe Didactique des mathématiques de l'enseignement spécialisé (Favre, 2004).

- BROUSSEAU, G. (2001). « Les doubles jeux de l'enseignement des mathématiques. » Conférence au colloque Inter IREM : « Rallyes Mathématiques, jeux, compétitions, clubs et leurs retombées sur l'enseignement et l'image des mathématiques », Toulouse, 15-17 juin.
- BRUN, J., F. CONNE, G. LEMOYNE et J. PORTUGAIS (1994). « La notion de schème dans l'interprétation des erreurs des élèves à des algorithmes de calcul écrit », *Cahiers de la recherche en éducation*, 1(1), Université de Sherbrooke, p. 117-132.
- CANGE, Ch. et J.-M. FAVRE (2003). « L'enseignement des mathématiques dans l'enseignement spécialisé est-il pavé de bonnes analyses d'erreurs ? », *Éducation et francophonie*, XXXI (2) : La spécificité de l'enseignement des mathématiques dans l'enseignement spécialisé. En ligne : <<http://www.acef.ca/revue/collection.html>>.
- CHEVALLARD, Y. (1996). « Concepts fondamentaux de la didactique : perspective apportée par une approche anthropologique », dans J. Brun (dir.), *Didactique des mathématiques. Textes de base en pédagogie*, Lausanne, Delachaux et Niestlé, p. 145-196.
- CONNE, F. (1996). « Savoir et connaissance dans la perspective de la transposition didactique », dans J. Brun (dir.), *Didactique des mathématiques. Textes de base en pédagogie*, Lausanne, Delachaux et Niestlé, p. 273-338.
- CONNE, F. (1998). « L'activité dans le couple enseignant / enseigné », *Actes de la IX^e école d'été de didactique des mathématiques*, septembre 1997, Houlgate, ARDM.
- CONNE, F. (1999). « Faire des maths, faire faire des maths, regarder ce que ça donne », dans F. Conne et G. Lemoyne (dir.), *Le cognitif en didactique des mathématiques*, Montréal, Les Presses de l'Université de Montréal, p. 31-69.
- CONNE, F. (2003). « Interactions de connaissances et investissement de savoir dans l'enseignement des mathématiques en institutions et classes spécialisées », *Éducation et francophonie*, XXXI(2) : La spécificité de l'enseignement des mathématiques dans l'enseignement spécialisé. En ligne : <<http://www.acef.ca/revue/collection.html>>.
- CONNE, F. (2004a). « Comprendre la théorie est en attraper le geste et pouvoir continuer », dans V. Durand-Guerrier et C. Tisseron (dir.), *Actes du séminaire national de didactique des mathématiques*, ARDM et IREM, Paris, p. 79-99.
- CONNE, F. (2004b). « Jouer la surprise », *L'Éducateur*, 7, p. 35-37.
- FAVRE, J.-M. (2004). « La création d'un groupe de recherche pour étudier les questions d'enseignement et d'apprentissage des mathématiques dans l'enseignement spécialisé », dans V. Durand-Guerrier et C. Tisseron (dir.), *Actes du séminaire national de didactique des mathématiques*, ARDM et IREM, Paris, p. 79-99.
- GIROUX, J. (1999). « L'introduction d'un objet de savoir en début de scolarité », dans F. Conne et G. Lemoyne (dir.), *Le cognitif en didactique des mathématiques*, Montréal, Les Presses de l'Université de Montréal, p. 213-234.
- GIROUX, J. (2004). « Échanges langagiers et interactions de connaissances dans l'enseignement des mathématiques en classe d'adaptation scolaire », dans G. Lemoyne (dir.), *Revue des sciences de l'éducation*, numéro thématique, « Le langage dans l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques » XXX(2), p. 303-327.

- GIROUX, J. et G. LEMOYNE (1998). «Coordination of knowledge on numeration and arithmetic operations in first grade students», dans J. Brun (dir.), *Educational Studies in Mathematics*, 35(3), p. 283-301.
- GRENIER, D. (1998). «Milieu et contrat dans l'étude de l'enseignant et des interactions didactiques», dans J. Brun, F. Conne, R. Floris et M.-L. Schubauer-Leoni (dir.), *Méthodes d'étude du travail de l'enseignant. Actes des secondes journées didactiques de la Fouly (1996). Interactions didactiques*, p. 123-146.
- LEMOYNE, G. (1990). «La peur de ne pas savoir la réponse: les difficultés d'apprentissage et d'enseignement des mathématiques», *Repères*, p. 79-101.
- MARGOLINAS, C. (1993-1994). «La structuration du milieu et ses apports dans l'analyse a posteriori des situations», dans C. Margolinas (dir.), *Les débats de didactique des mathématiques, annales 1993-1994*, Grenoble, La Pensée Sauvage, p. 88-102.
- MORF, A. (1983). «La mathématique de transaction. Une notion pour la recherche en perfectionnement des maîtres à l'élémentaire», *Bulletin de l'Association mathématique du Québec*, mai, p. 20-23.
- SALIN, M.-H. (1999). «Les pratiques ostensives des enseignants», dans F. Conne et G. Lemoyne (dir.), *Le cognitif en didactique des mathématiques*, Montréal, Les Presses de l'Université de Montréal, p. 327-349.