

"Recherches épineuses" sur les courbes algébriques dans la correspondance entre Leonhard Euler et Gabriel Cramer

Thierry JOFFREDO

LHSP - Archives Henri-Poincaré, Université de Lorraine



Présentation du volume 4A/VII de la correspondance de Leonhard Euler. Bernoulli-Euler Zentrum, Université de Bâle, 17 novembre 2017

Euler à Cramer, 20 octobre 1744

ne doutant point
 pour cela. J'ai appris avec bien du plaisir, que sous un
 ge sur la même matière, et comme je suis extrêmement curieux de le voir,
 je joins mes félicitations à celles de M^r Bouquet, pour Vous en demander
 la publication. Ce sont à mon avis de telles matières, qui pour la plupart ne
 sont pas encore mises dans tout leur jour, et je ne doute nullement, que Vous
 n'en ayez éclairci quantité de circonstances, qui me sont échappées aussi bien
 qu'à d'autres, qui ont écrit sur cela. Il s'y trouve même des recherches si épi-
 neuses, où il faut apporter toute l'attention possible pour ne s'y tromper pas.
 ce qui m'est arrivé en développant la nature du point de rebroussement de la
 seconde espèce. M^r le Marquis de l'Hôpital avoit fait voir qu'il y avoit en
 effet des courbes douces d'un tel point, mais M^r Guade malbré prétend, que
 les deux branches de la courbe, qui forment ce point, s'étendent toujours de
 l'autre côté, de sorte que selon lui ce point n'est autre chose, qu'une intersection
 infiniment petit. Les raisons qu'il en

Plan

Gabriel Cramer : quelques jalons biographiques

Les échanges avec Euler dans la correspondance de Cramer

Panorama de la correspondance de Cramer

Présentation de la correspondance Euler-Cramer

Recherches épineuses sur les courbes algébriques

De l'existence des points de rebroussement de la seconde espèce

Sur un paradoxe à propos des intersections des courbes, et de l'élimination des inconnues entre équations

En conclusion : deux "Introductions" aux destins liés

Plan

Gabriel Cramer : quelques jalons biographiques

Les échanges avec Euler dans la correspondance de Cramer

Panorama de la correspondance de Cramer

Présentation de la correspondance Euler-Cramer

Recherches épineuses sur les courbes algébriques

De l'existence des points de rebroussement de la seconde espèce

Sur un paradoxe à propos des intersections des courbes, et de l'élimination des inconnues entre équations

En conclusion : deux "Introductions" aux destins liés

Gabriel Cramer, citoyen de la République de Genève



- ▶ né en 1704 dans une famille patricienne de Genève, fils et petit-fils de médecins ;
- ▶ professeur de mathématiques (1724-1750), puis de philosophie (1750-1752), à l'Académie de Genève ;
- ▶ membre du Conseil des Deux Cents (à partir de 1734), du Conseil des Soixante (1751).

Gabriel Cramer, citoyen de la République de Genève



- ▶ né en 1704 dans une famille patricienne de Genève, fils et petit-fils de médecins ;
- ▶ professeur de mathématiques (1724-1750), puis de philosophie (1750-1752), à l'Académie de Genève ;
- ▶ membre du Conseil des Deux Cents (à partir de 1734), du Conseil des Soixante (1751).

Gabriel Cramer, citoyen de la République de Genève



- ▶ né en 1704 dans une famille patricienne de Genève, fils et petit-fils de médecins ;
- ▶ professeur de mathématiques (1724-1750), puis de philosophie (1750-1752), à l'Académie de Genève ;
- ▶ membre du Conseil des Deux Cents (à partir de 1734), du Conseil des Soixante (1751).

... et citoyen de la République des lettres

- ▶ **voyages et séjours** : *Grand tour* de formation
1727-1729, Paris 1747-1748 ;
- ▶ **journaux** : Philosophical Transactions (Londres), Journal littéraire (La Haye), Bibliothèque italique (Genève) ;
- ▶ **affiliations académiques** : Montpellier, Bologne (1743), Berlin (1746), Londres (1749), Lyon (1750) ; plusieurs candidatures à l'Académie royale des sciences de Paris (1748, 1750) ;
- ▶ **correspondances** : Mairan, Buffon, Clairaut, les Bernoulli, D'Alembert, Euler ...

... et citoyen de la République des lettres

- ▶ **voyages et séjours** : *Grand tour* de formation
1727-1729, Paris 1747-1748 ;
- ▶ **journaux** : Philosophical Transactions (Londres), Journal littéraire (La Haye), Bibliothèque italique (Genève) ;
- ▶ **affiliations académiques** : Montpellier, Bologne (1743), Berlin (1746), Londres (1749), Lyon (1750) ; plusieurs candidatures à l'Académie royale des sciences de Paris (1748, 1750) ;
- ▶ **correspondances** : Mairan, Buffon, Clairaut, les Bernoulli, D'Alembert, Euler ...

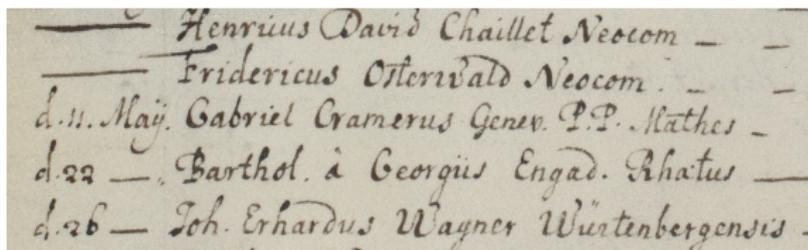
... et citoyen de la République des lettres

- ▶ **voyages et séjours** : *Grand tour* de formation
1727-1729, Paris 1747-1748 ;
- ▶ **journaux** : Philosophical Transactions (Londres), Journal littéraire (La Haye), Bibliothèque italique (Genève) ;
- ▶ **affiliations académiques** : Montpellier, Bologne (1743), Berlin (1746), Londres (1749), Lyon (1750) ; plusieurs candidatures à l'Académie royale des sciences de Paris (1748, 1750) ;
- ▶ **correspondances** : Mairan, Buffon, Clairaut, les Bernoulli, D'Alembert, Euler ...

... et citoyen de la République des lettres

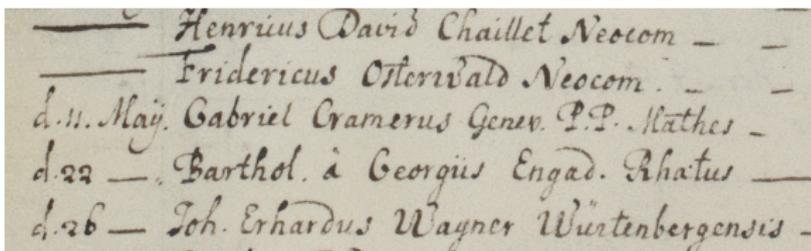
- ▶ **voyages et séjours** : *Grand tour* de formation
1727-1729, Paris 1747-1748 ;
- ▶ **journaux** : Philosophical Transactions (Londres), Journal littéraire (La Haye), Bibliothèque italique (Genève) ;
- ▶ **affiliations académiques** : Montpellier, Bologne (1743), Berlin (1746), Londres (1749), Lyon (1750) ; plusieurs candidatures à l'Académie royale des sciences de Paris (1748, 1750) ;
- ▶ **correspondances** : Mairan, Buffon, Clairaut, les Bernoulli, D'Alembert, Euler ...

Le séjour bâlois : mai-octobre 1727



— Henrius David Chaillet Neocom —
— Fridericus Osterwald Neocom. —
d. 11. Maj. Gabriel Cramerus Genév. P.P. Mathes —
d. 22 — Barthol. à Georgius Engad. Rhatus —
d. 26 — Joh. Erhardus Wagner Württembergensis —

Le séjour bâlois : mai-octobre 1727



Jean Bernoulli à Daniel Le Clerc, 13 mai 1727, UBB L Ia 50 Nr 7 :

"Je suis bien aise de connoitre personnellement Monsr. le Prof. Cramer; il me fait l'honneur de frequenter mes leçons sur la Geometrie des infinis, j'ai déjà pû entrevoir qu'il a du savoir et du merite, tout jeune qu'il est; J'augure de Lui qu'il deviendra grand et excellent Mathematicien, l'heureuse disposition et les beaux commencements que je remarque en Lui m'en sont un seul garant."

Activité et production savante

- ▶ actif sur les champs des mathématiques pures (géométrie, algèbre et analyse, probabilités) et des mathématiques mixtes (mécanique – forces vives –, astronomie, hydrodynamique, propagation du son, dioptrique) ;
- ▶ manuscrits de cours (logique, géométrie), quelques dissertations, articles et mémoires épars ;
- ▶ éditeur scientifique des *Opera* de Jean I Bernoulli (1743) et de son frère Jacques (1744), de la correspondance de Leibniz et de Jean I Bernoulli (1745). Supervise l'édition du *Methodus inveniendi* d'Euler (1744) ;
- ▶ mais surtout . . .

Activité et production savante

- ▶ actif sur les champs des mathématiques pures (géométrie, algèbre et analyse, probabilités) et des mathématiques mixtes (mécanique – forces vives –, astronomie, hydrodynamique, propagation du son, dioptrique) ;
- ▶ manuscrits de cours (logique, géométrie), quelques dissertations, articles et mémoires épars ;
- ▶ éditeur scientifique des *Opera* de Jean I Bernoulli (1743) et de son frère Jacques (1744), de la correspondance de Leibniz et de Jean I Bernoulli (1745). Supervise l'édition du *Methodus inveniendi* d'Euler (1744) ;
- ▶ mais surtout . . .

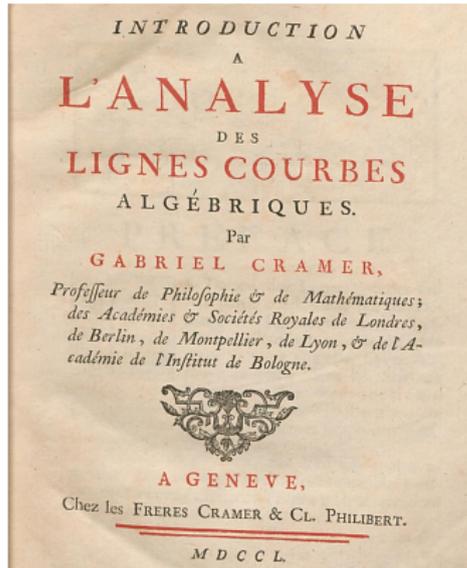
Activité et production savante

- ▶ actif sur les champs des mathématiques pures (géométrie, algèbre et analyse, probabilités) et des mathématiques mixtes (mécanique – forces vives –, astronomie, hydrodynamique, propagation du son, dioptrique) ;
- ▶ manuscrits de cours (logique, géométrie), quelques dissertations, articles et mémoires épars ;
- ▶ éditeur scientifique des *Opera* de Jean I Bernoulli (1743) et de son frère Jacques (1744), de la correspondance de Leibniz et de Jean I Bernoulli (1745). Supervise l'édition du *Methodus inveniendi* d'Euler (1744) ;
- ▶ mais surtout . . .

Activité et production savante

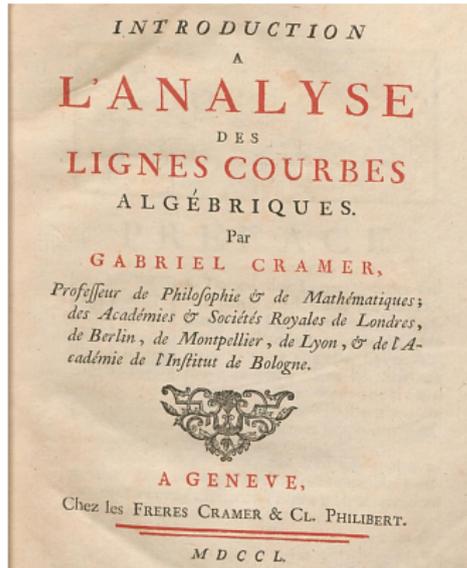
- ▶ actif sur les champs des mathématiques pures (géométrie, algèbre et analyse, probabilités) et des mathématiques mixtes (mécanique – forces vives –, astronomie, hydrodynamique, propagation du son, dioptrique) ;
- ▶ manuscrits de cours (logique, géométrie), quelques dissertations, articles et mémoires épars ;
- ▶ éditeur scientifique des *Opera* de Jean I Bernoulli (1743) et de son frère Jacques (1744), de la correspondance de Leibniz et de Jean I Bernoulli (1745). Supervise l'édition du *Methodus inveniendi* d'Euler (1744) ;
- ▶ mais surtout . . .

L'œuvre d'une vie : l'*Analyse des courbes*



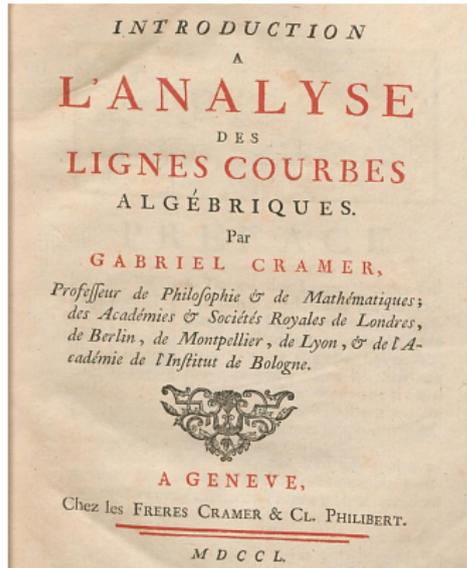
- ▶ classification des courbes algébriques (définies par une équation algébrique $f(x, y) = 0$) des cinq premiers ordres ;
- ▶ étude des branches infinies, asymptotes, points singuliers, tangentes, extrema, courbure ... sans aucun recours au calcul différentiel ;
- ▶ annexes algébriques sur l'élimination des inconnues.

L'œuvre d'une vie : l'Analyse des courbes



- ▶ classification des courbes algébriques (définies par une équation algébrique $f(x, y) = 0$) des cinq premiers ordres ;
- ▶ étude des branches infinies, asymptotes, points singuliers, tangentes, extrema, courbure ... sans aucun recours au calcul différentiel ;
- ▶ annexes algébriques sur l'élimination des inconnues.

L'œuvre d'une vie : l'Analyse des courbes



- ▶ classification des courbes algébriques (définies par une équation algébrique $f(x, y) = 0$) des cinq premiers ordres ;
- ▶ étude des branches infinies, asymptotes, points singuliers, tangentes, extrema, courbure ... sans aucun recours au calcul différentiel ;
- ▶ annexes algébriques sur l'élimination des inconnues.

Jalons

Cramer

31 juillet 1704 : Naissance
de Gabriel Cramer à Genève.

Euler

1700

1705

1710

1715

1720

1725

1730

1735

1740

1745

1750

Jalons

Cramer

31 juillet 1704 : Naissance
de Gabriel Cramer à Genève.

Euler

15 avril 1707 : Naissance de Leonhard Euler à Bâle.



Jalons

Cramer

31 juillet 1704 : Naissance de Gabriel Cramer à Genève.

1717 : Entre à l'académie de Genève, apprend les mathématiques auprès d'Étienne Jallabert.

Euler

15 avril 1707 : Naissance de Leonhard Euler à Bâle.

1700
1705
1710
1715
1720
1725
1730
1735
1740
1745
1750

Jalons

Cramer

31 juillet 1704 : Naissance de Gabriel Cramer à Genève.

1717 : Entre à l'académie de Genève, apprend les mathématiques auprès d'Étienne Jallabert.

Euler

15 avril 1707 : Naissance de Leonhard Euler à Bâle.

1720 : Entre à l'université de Bâle, apprend les mathématiques auprès de Jean Bernoulli.

1700
1705
1710
1715
1720
1725
1730
1735
1740
1745
1750

Jalons

Cramer

31 juillet 1704 : Naissance de Gabriel Cramer à Genève.

1717 : Entre à l'académie de Genève, apprend les mathématiques auprès d'Étienne Jallabert.

août 1722 : *Dissertatio physico-mathematica de sono.*

Euler

15 avril 1707 : Naissance de Leonhard Euler à Bâle.

1720 : Entre à l'université de Bâle, apprend les mathématiques auprès de Jean Bernoulli.

1700

1705

1710

1715

1720

1725

1730

1735

1740

1745

1750

Jalons

Cramer

31 juillet 1704 : Naissance de Gabriel Cramer à Genève.

1717 : Entre à l'académie de Genève, apprend les mathématiques auprès d'Étienne Jallabert.

août 1722 : Dissertatio physico-mathematica de sono.

1724 : Professeur de mathématiques à l'Académie de Genève.

Euler

15 avril 1707 : Naissance de Leonhard Euler à Bâle.

1720 : Entre à l'université de Bâle, apprend les mathématiques auprès de Jean Bernoulli.

1700

1705

1710

1715

1720

1725

1730

1735

1740

1745

1750

Jalons

Cramer

31 juillet 1704 : Naissance de Gabriel Cramer à Genève.

1717 : Entre à l'académie de Genève, apprend les mathématiques auprès d'Étienne Jallabert.

août 1722 : *Dissertatio physico-mathematica de sono.*

1724 : Professeur de mathématiques à l'Académie de Genève.

Euler

15 avril 1707 : Naissance de Leonhard Euler à Bâle.

1720 : Entre à l'université de Bâle, apprend les mathématiques auprès de Jean Bernoulli.

février 1727 : *Dissertatio physica de sono.*

1700
1705
1710
1715
1720
1725
1730
1735
1740
1745
1750

Jalons

Cramer

31 juillet 1704 : Naissance de Gabriel Cramer à Genève.

1717 : Entre à l'académie de Genève, apprend les mathématiques auprès d'Étienne Jallabert.

août 1722 : Dissertatio physico-mathematica de sono.

1724 : Professeur de mathématiques à l'Académie de Genève.

Euler

15 avril 1707 : Naissance de Leonhard Euler à Bâle.

1720 : Entre à l'université de Bâle, apprend les mathématiques auprès de Jean Bernoulli.

février 1727 : Dissertatio physica de sono.

avril 1727 : Départ pour l'académie des sciences de Saint-Petersbourg.

1700

1705

1710

1715

1720

1725

1730

1735

1740

1745

1750

Jalons

Cramer

31 juillet 1704 : Naissance de Gabriel Cramer à Genève.

1717 : Entre à l'académie de Genève, apprend les mathématiques auprès d'Étienne Jallabert.

août 1722 : Dissertatio physico-mathematica de sono.

1724 : Professeur de mathématiques à l'Académie de Genève.

mai 1727-mai 1729 : Grand Tour de formation (Bâle, Londres, Leyde, Paris).

Euler

15 avril 1707 : Naissance de Leonhard Euler à Bâle.

1720 : Entre à l'université de Bâle, apprend les mathématiques auprès de Jean Bernoulli.

février 1727 : Dissertatio physica de sono.

avril 1727 : Départ pour l'académie des sciences de Saint-Petersbourg.

1700

1705

1710

1715

1720

1725

1730

1735

1740

1745

1750

Jalons

Cramer

31 juillet 1704 : Naissance de Gabriel Cramer à Genève.

1717 : Entre à l'académie de Genève, apprend les mathématiques auprès d'Étienne Jallabert.

août 1722 : *Dissertatio physico-mathematica de sono*.

1724 : Professeur de mathématiques à l'Académie de Genève.

mai 1727-mai 1729 : Grand Tour de formation (Bâle, Londres, Leyde, Paris).

1740-1745 : Édition des *Opera* des frères Bernoulli, avec Bousquet à Lausanne (pour Jean) et les frères Cramer à Genève (pour Jacques).

Euler

15 avril 1707 : Naissance de Leonhard Euler à Bâle.

1720 : Entre à l'université de Bâle, apprend les mathématiques auprès de Jean Bernoulli.

février 1727 : *Dissertatio physica de sono*.

avril 1727 : Départ pour l'académie des sciences de Saint-Petersbourg.

1700

1705

1710

1715

1720

1725

1730

1735

1740

1745

1750

Jalons

Cramer

31 juillet 1704 : Naissance de Gabriel Cramer à Genève.

1717 : Entre à l'académie de Genève, apprend les mathématiques auprès d'Étienne Jallabert.

août 1722 : *Dissertatio physico-mathematica de sono*.

1724 : Professeur de mathématiques à l'Académie de Genève.

mai 1727-mai 1729 : Grand Tour de formation (Bâle, Londres, Leyde, Paris).

1740-1745 : Édition des *Opera* des frères Bernoulli, avec Bousquet à Lausanne (pour Jean) et les frères Cramer à Genève (pour Jacques).

Euler

15 avril 1707 : Naissance de Leonhard Euler à Bâle.

1720 : Entre à l'université de Bâle, apprend les mathématiques auprès de Jean Bernoulli.

février 1727 : *Dissertatio physica de sono*.

avril 1727 : Départ pour l'académie des sciences de Saint-Petersbourg.

juillet 1741 : Arrivée à Berlin à l'invitation de Frédéric II ; directeur de la classe de mathématiques de l'Académie en 1746.

1700

1705

1710

1715

1720

1725

1730

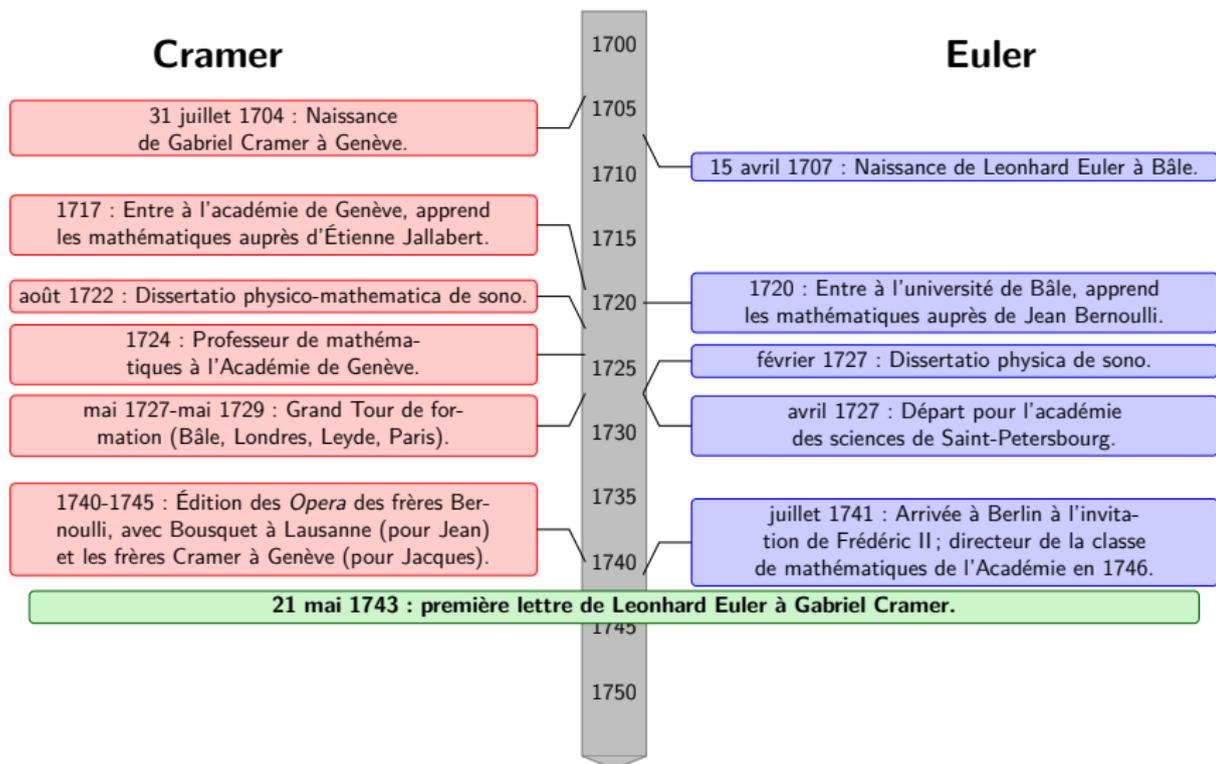
1735

1740

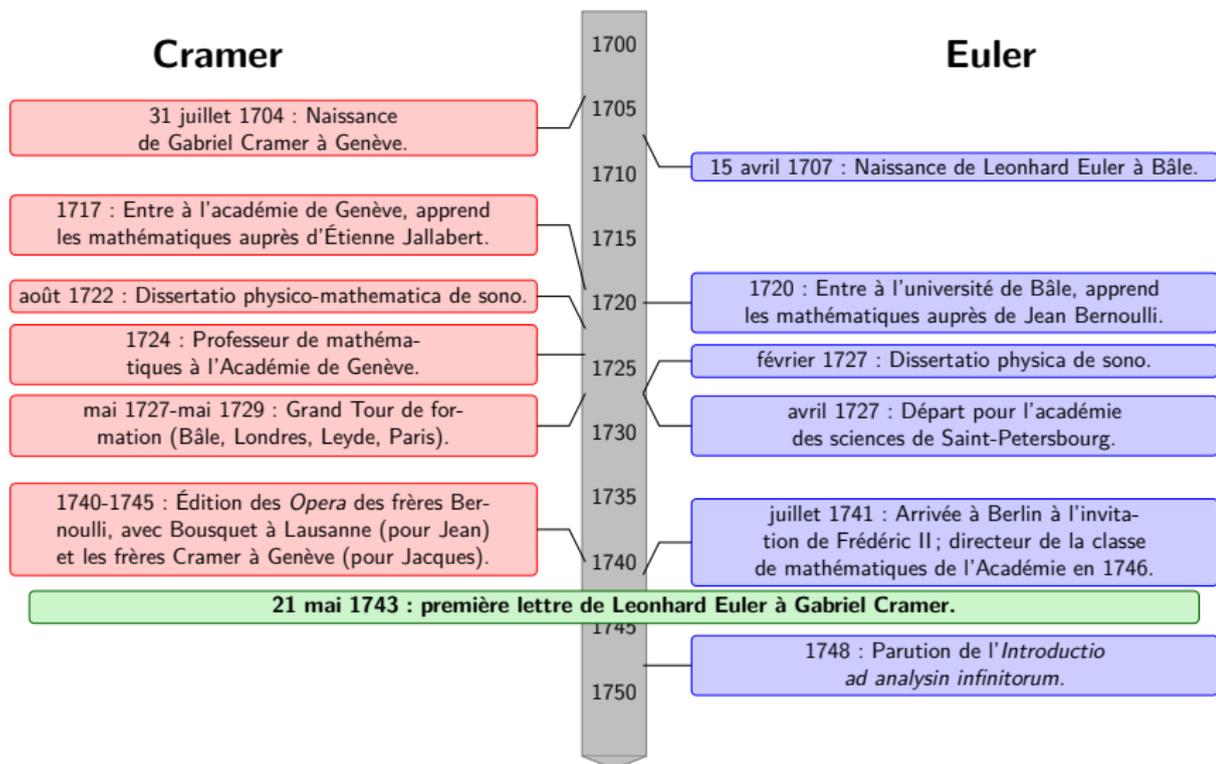
1745

1750

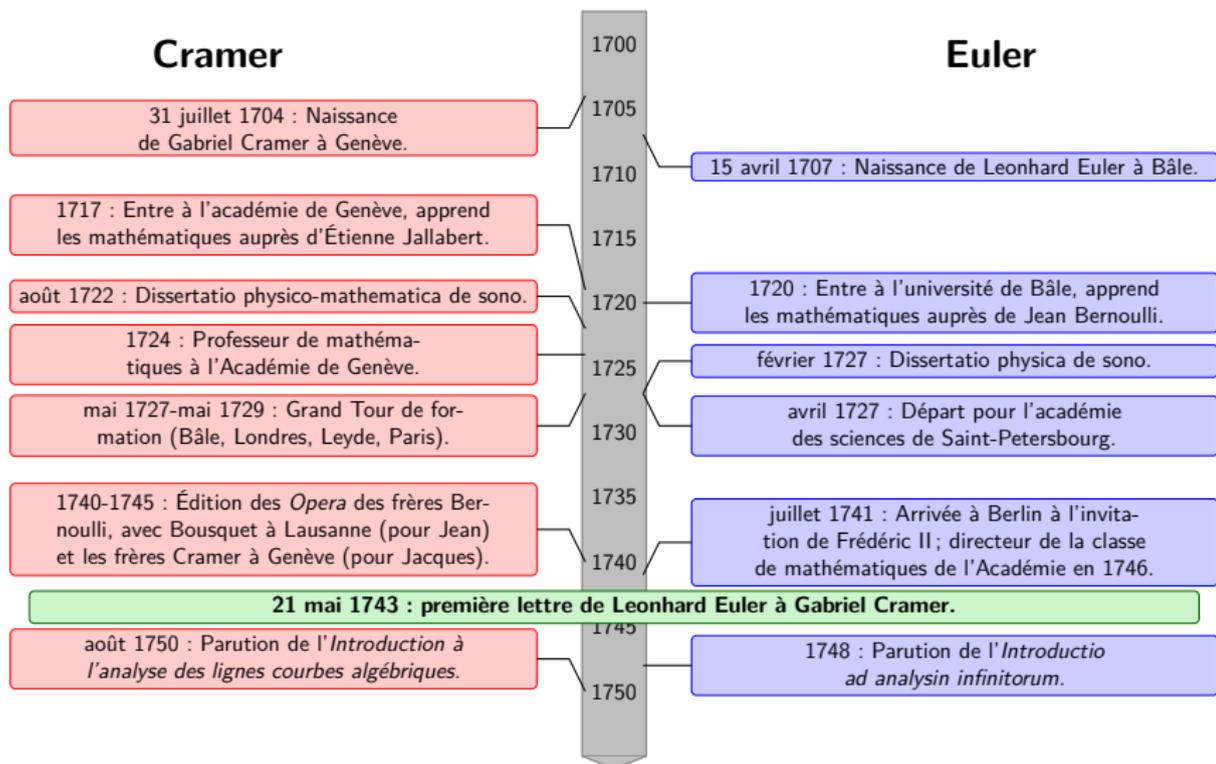
Jalons



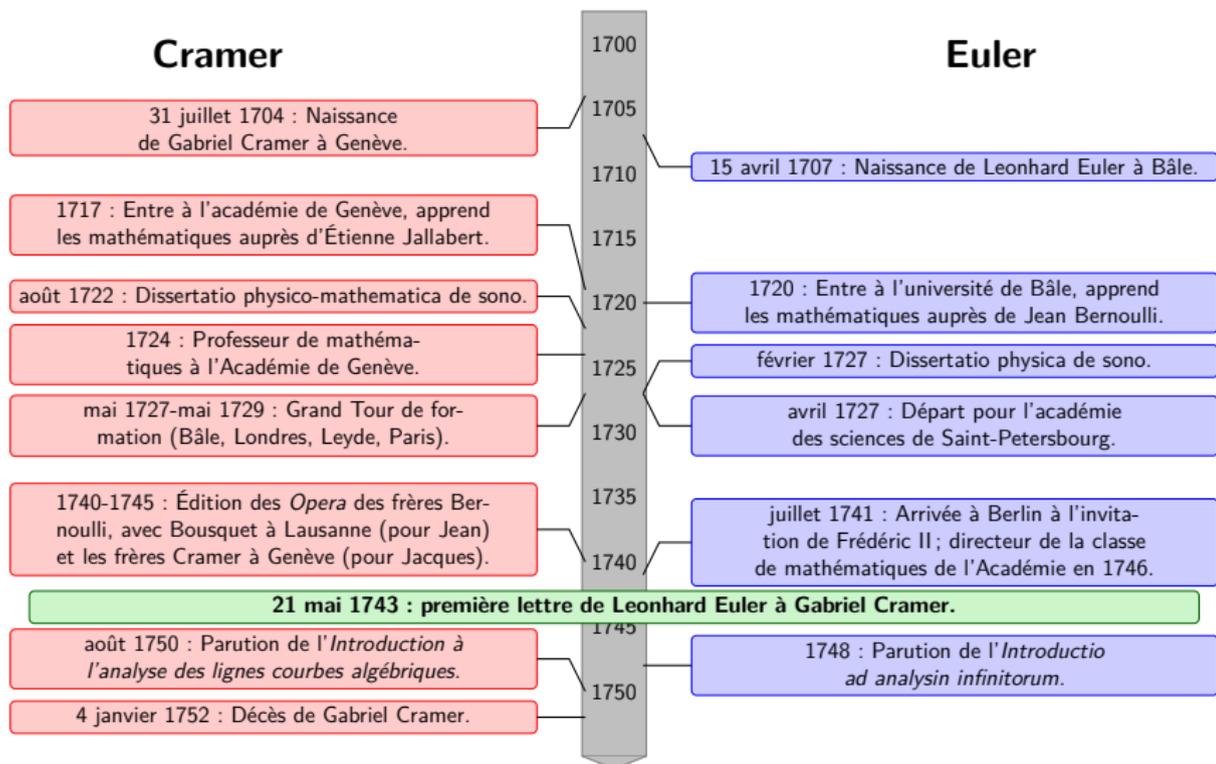
Jalons



Jalons



Jalons



Plan

Gabriel Cramer : quelques jalons biographiques

Les échanges avec Euler dans la correspondance de Cramer

Panorama de la correspondance de Cramer

Présentation de la correspondance Euler-Cramer

Recherches épineuses sur les courbes algébriques

De l'existence des points de rebroussement de la seconde espèce

Sur un paradoxe à propos des intersections des courbes, et de l'élimination des inconnues entre équations

En conclusion : deux "Introductions" aux destins liés

Plan

Gabriel Cramer : quelques jalons biographiques

Les échanges avec Euler dans la correspondance de Cramer

Panorama de la correspondance de Cramer

Présentation de la correspondance Euler-Cramer

Recherches épineuses sur les courbes algébriques

De l'existence des points de rebroussement de la seconde espèce

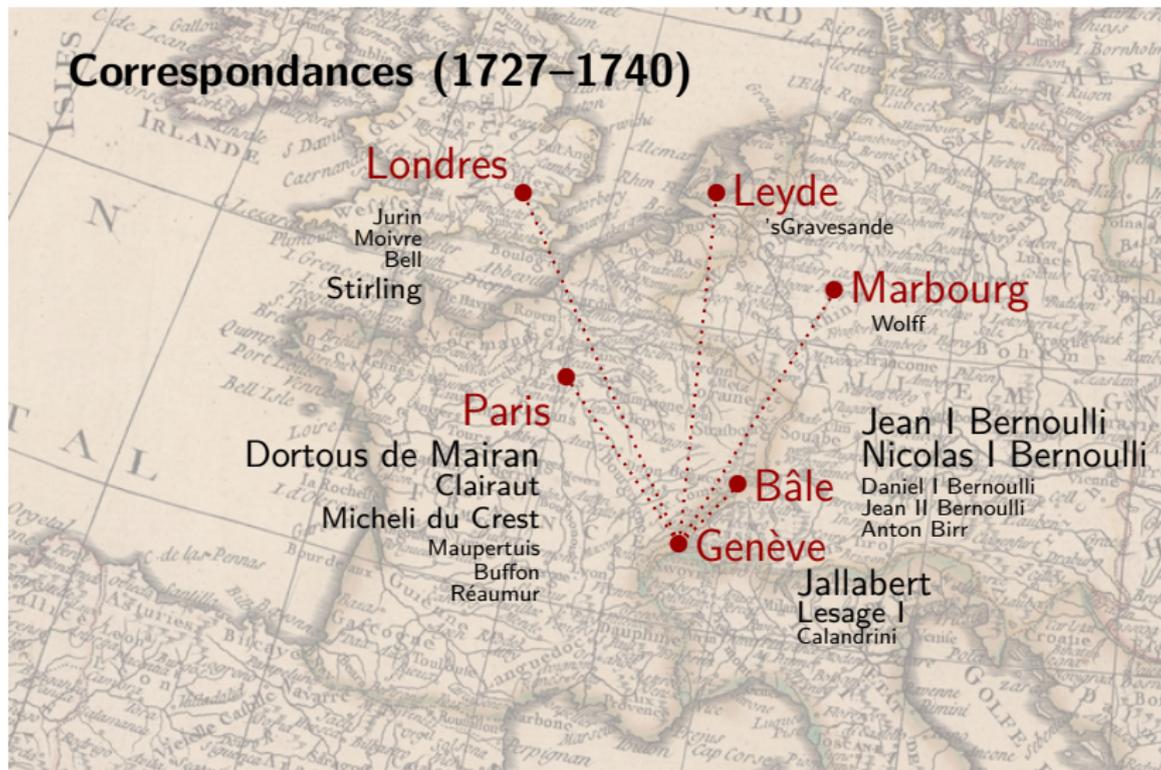
Sur un paradoxe à propos des intersections des courbes, et de l'élimination des inconnues entre équations

En conclusion : deux "Introductions" aux destins liés

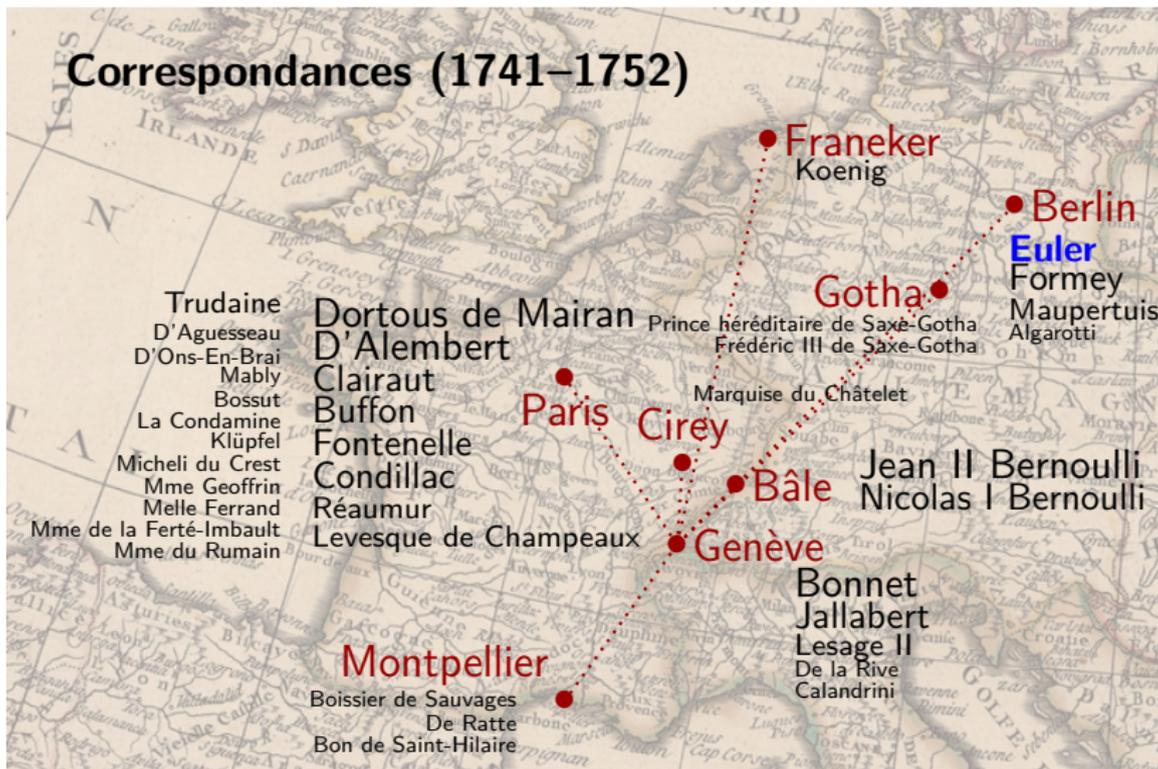
- ▶ Aujourd'hui, 547 lettres inventoriées : correspondance active 249 (dont brouillons, minutes), correspondance passive 298 ;
- ▶ datées entre le 24 mai 1727 et le 1^{er} janvier 1752 ;
- ▶ 80 correspondants différents identifiés (dont 14 avec plus de 10 lettres conservées) ;
- ▶ principaux fonds d'archives où ces lettres sont conservées : Bibliothèque de Genève (BGE Ms Suppl 384, Ms Fr 652, 656 et 657, Ms 242, Ms Bonnet 43), Bibliothèque de l'université de Bâle (UBB Ms L la 655, Ms L la 21 et 22, Ms L la 686), British Library à Londres (BL Add Ms 23899), Archives de l'académie des sciences de Saint-Petersbourg (AAN, f. 136. op. 2, n° 13) ;

- ▶ Aujourd'hui, 547 lettres inventoriées : correspondance active 249 (dont brouillons, minutes), correspondance passive 298 ;
- ▶ datées entre le 24 mai 1727 et le 1^{er} janvier 1752 ;
- ▶ 80 correspondants différents identifiés (dont 14 avec plus de 10 lettres conservées) ;
- ▶ principaux fonds d'archives où ces lettres sont conservées : Bibliothèque de Genève (BGE Ms Suppl 384, Ms Fr 652, 656 et 657, Ms 242, Ms Bonnet 43), Bibliothèque de l'université de Bâle (UBB Ms L la 655, Ms L la 21 et 22, Ms L la 686), British Library à Londres (BL Add Ms 23899), Archives de l'académie des sciences de Saint-Petersbourg (AAN, f. 136. op. 2, n° 13) ;

Principaux correspondants



Principaux correspondants



Plan

Gabriel Cramer : quelques jalons biographiques

Les échanges avec Euler dans la correspondance de Cramer

Panorama de la correspondance de Cramer

Présentation de la correspondance Euler-Cramer

Recherches épineuses sur les courbes algébriques

De l'existence des points de rebroussement de la seconde espèce

Sur un paradoxe à propos des intersections des courbes, et de l'élimination des inconnues entre équations

En conclusion : deux "Introductions" aux destins liés

Les lettres Euler-Cramer



- ▶ Aujourd'hui, 19 lettres inventoriées : 10 d'Euler, 9 de Cramer (originaux et brouillons, minutes) ;
- ▶ datées entre le 21 juin 1743 et le 2 novembre 1751 ;
- ▶ pour la plupart conservées à la Bibliothèque de Genève et Académie des sciences de Saint-Petersbourg (mais aussi Londres, Bâle, Washington DC).

Les lettres Euler-Cramer



- ▶ Aujourd'hui, 19 lettres inventoriées : 10 d'Euler, 9 de Cramer (originaux et brouillons, minutes) ;
- ▶ datées entre le 21 juin 1743 et le 2 novembre 1751 ;
- ▶ pour la plupart conservées à la Bibliothèque de Genève et Académie des sciences de Saint-Petersbourg (mais aussi Londres, Bâle, Washington DC).

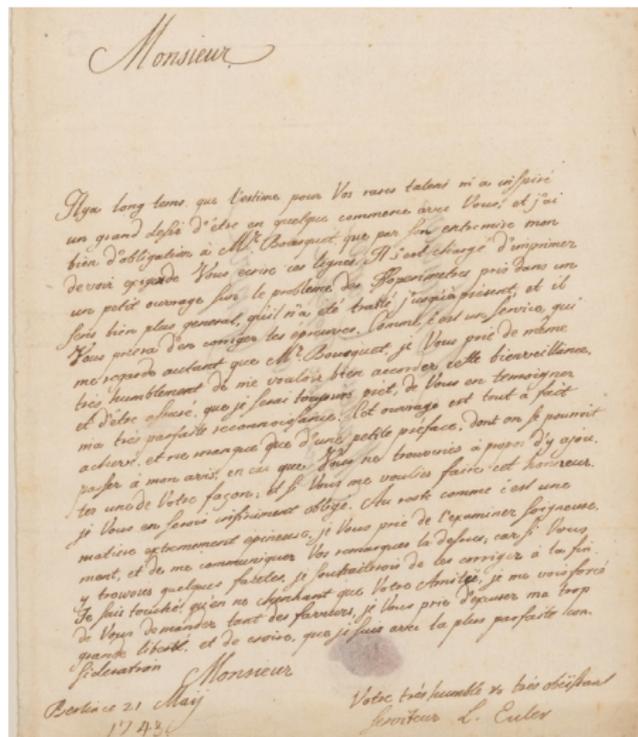
Les lettres Euler-Cramer



- ▶ Aujourd'hui, 19 lettres inventoriées : 10 d'Euler, 9 de Cramer (originaux et brouillons, minutes) ;
- ▶ datées entre le 21 juin 1743 et le 2 novembre 1751 ;
- ▶ pour la plupart conservées à la Bibliothèque de Genève et Académie des sciences de Saint-Petersbourg (mais aussi Londres, Bâle, Washington DC).

Première lettre : Euler à Cramer 21 mai 1743

Quelques semaines après la parution des *Opera Omnia* de Jean Bernoulli, Euler demande à Cramer de corriger les épreuves et de rédiger une préface à son traité des isopérimètres (*Methodus Inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes*) qui va être imprimé par Marc-Michel Bousquet à Lausanne.



Thèmes abordés dans la correspondance

- ▶ **édition scientifique** : sollicitations d'Euler (déclinées par Cramer) pour deux autres ouvrages :
 - ▶ *Introductio in analysin infinitorum* (1748);
 - ▶ *Institutiones calculi differentialis* (1754).
- ▶ **sociabilité savante** : association de Gabriel Cramer à l'Académie des sciences et belles lettres de Berlin (1746).
- ▶ **mathématiques mixtes** : quelques passages et allusions à la dioptrique, propagation de la lumière et du son, mécanique (forces vives), astronomie (aurores boréales et comètes), hydrodynamique (expérience des rameurs) ...
- ▶ **mathématiques pures** : logarithmes imaginaires, courbes algébriques (points singuliers, intersections entre deux courbes, élimination).

Thèmes abordés dans la correspondance

- ▶ **édition scientifique** : sollicitations d'Euler (déclinées par Cramer) pour deux autres ouvrages :
 - ▶ *Introductio in analysin infinitorum* (1748);
 - ▶ *Institutiones calculi differentialis* (1754).
- ▶ **sociabilité savante** : association de Gabriel Cramer à l'Académie des sciences et belles lettres de Berlin (1746).
- ▶ **mathématiques mixtes** : quelques passages et allusions à la dioptrique, propagation de la lumière et du son, mécanique (forces vives), astronomie (aurores boréales et comètes), hydrodynamique (expérience des rameurs) ...
- ▶ **mathématiques pures** : logarithmes imaginaires, courbes algébriques (points singuliers, intersections entre deux courbes, élimination).

Thèmes abordés dans la correspondance

- ▶ **édition scientifique** : sollicitations d'Euler (déclinées par Cramer) pour deux autres ouvrages :
 - ▶ *Introductio in analysin infinitorum* (1748);
 - ▶ *Institutiones calculi differentialis* (1754).
- ▶ **sociabilité savante** : association de Gabriel Cramer à l'Académie des sciences et belles lettres de Berlin (1746).
- ▶ **mathématiques mixtes** : quelques passages et allusions à la dioptrique, propagation de la lumière et du son, mécanique (forces vives), astronomie (aurores boréales et comètes), hydrodynamique (expérience des rameurs) ...
- ▶ **mathématiques pures** : logarithmes imaginaires, courbes algébriques (points singuliers, intersections entre deux courbes, élimination).

Thèmes abordés dans la correspondance

- ▶ **édition scientifique** : sollicitations d'Euler (déclinées par Cramer) pour deux autres ouvrages :
 - ▶ *Introductio in analysin infinitorum* (1748);
 - ▶ *Institutiones calculi differentialis* (1754).
- ▶ **sociabilité savante** : association de Gabriel Cramer à l'Académie des sciences et belles lettres de Berlin (1746).
- ▶ **mathématiques mixtes** : quelques passages et allusions à la dioptrique, propagation de la lumière et du son, mécanique (forces vives), astronomie (aurores boréales et comètes), hydrodynamique (expérience des rameurs) ...
- ▶ **mathématiques pures** : logarithmes imaginaires, courbes algébriques (points singuliers, intersections entre deux courbes, élimination).

Plan

Gabriel Cramer : quelques jalons biographiques

Les échanges avec Euler dans la correspondance de Cramer

Panorama de la correspondance de Cramer

Présentation de la correspondance Euler-Cramer

Recherches épineuses sur les courbes algébriques

De l'existence des points de rebroussement de la seconde espèce

Sur un paradoxe à propos des intersections des courbes, et de l'élimination des inconnues entre équations

En conclusion : deux "Introductions" aux destins liés

Recherches communes

Dans sa lettre du 30 septembre 1744, Cramer décline la sollicitation d'Euler sur l'édition de son *Introductio* :

"La première, c'est le grand nombre d'autres occupations, qui quoi que minces chacune à part, font toutes ensemble une grande charge. La seconde un peu plus délicate, c'est que j'ai aussi composé, il y a déjà 4 ou 5 ans, un petit Essai qui roule à peu près sur la même matière, que la seconde partie de votre traité. Je l'intitulois Introduction à l'Analyse des lignes courbes."

Euler répond le 20 octobre :

"J'ai appris avec bien du plaisir, que Vous ayes composé un ouvrage sur la même matière, et comme je suis extrêmement curieux de le voir, je joins mes sollicitations à celles de M^r Bousquet, pour Vous en demander la publication. Ce sont à mon avis de telles matières, qui pour la plupart ne sont pas encore mises dans tout leur jour, et je ne doute nullement, que Vous n'en ayes éclairci quantité de circonstances, qui me sont échappées aussi bien qu'à d'autres, qui ont écrit sur cela."

Plan

Gabriel Cramer : quelques jalons biographiques

Les échanges avec Euler dans la correspondance de Cramer

Panorama de la correspondance de Cramer

Présentation de la correspondance Euler-Cramer

Recherches épineuses sur les courbes algébriques

De l'existence des points de rebroussement de la seconde espèce

Sur un paradoxe à propos des intersections des courbes, et de l'élimination des inconnues entre équations

En conclusion : deux "Introductions" aux destins liés

Euler à Cramer, 20 octobre 1744

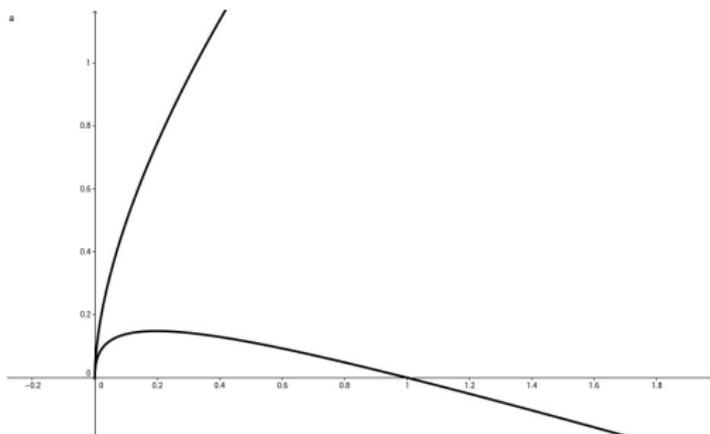
Euler reconnaît une erreur dans son *Introductio* à propos d'une espèce de point singulier :

*"Il s'y trouve même des recherches si épineuses, où il faut apporter toute l'attention possible pour ne s'y tromper pas, ce qui m'est arrivé en développant la nature du **point de rebroussement de la seconde espèce**. Mr le Marquis de l'Hopital avoit fait voir qu'il y avoit en effet des courbes douées d'un tel point, mais Mr Gua de Malves pretend, que les deux branches de la courbe, qui forment ce point, s'étendent toujours de l'autre côté, de sorte que selon lui ce point n'est autre chose, qu'une intersection de deux branches, qui se croisent à un angle infiniment petit. Les raisons qu'il en apport[e] me sembloient asses fortes, et j'en ai encore trouvé d'autres, qui m'ont déterminé à croire, qu'il avoit raison, comme Vous aures sans doute remarqué en parcourant mon ouvrage. **Mais depuis j'ai reconnu très clairement, que je m'étois trompé sur ce point, et qu'il y a effectivement des courbes, qui ont un tel point de rebroussement tout net, sans qu'on le puisse regarder comme une intersection infiniment proche de deux branches.**"*

Euler à Cramer, 20 octobre 1744

Dans cette lettre, Euler fournit le premier exemple connu d'équation d'une courbe (du quatrième ordre) présentant un tel rebroussement :

$$y^4 - 2xy^2 + xx = x^3 + 4yxx$$



Cramer à Euler, 11 novembre 1744

*"Le point de rebroussement de la seconde espèce est un véritable Paradoxe. Il est bien vrai que les raisons de Mr de Gua ne m'avoient pas paru tout à fait demonstratives : c'est pourquoi je n'en avois rien dit, me contentant de passer cette espèce de point sous silence dans l'énumération des diverses sortes de points doubles. Mais je vous avouerais pourtant que, comme vous, j'étois fort prévenu contre l'existence de ces points-là, n'en aiant jamais trouvé avant celui que Vous m'indiquez. **J'ai fait tout mon possible pour chicaner votre Courbe.** Mais il n'y a point moi-même de résister à l'évidence. **D'abord j'ai voulu croire qu'elle se terminoit en une sorte de petit sac fort allongé,** en cette forme :"*



Cramer à Euler, 11 novembre 1744

*"Ensuite j'ai examiné, si ce point du sommet ne seroit pas un point de rebroussement ordinaire, dont une branche par une inflexion fort proche du sommet retourne sa concavité vers l'autre branche, comme cela arrive à des courbes que je connois, et dont le sommet à cette figure. Ce qui donnoit quelque apparence à ce soupçon, **c'est qu'on peut concevoir ce point, comme formé par l'évanouissement d'une feuille.** Car si au lieu de l'éq[uation] $y = 4\sqrt{ax} \pm \sqrt[4]{ax^3}$, on prend $y = \sqrt{ax} \pm \sqrt[4]{ax(x-b)^2}$, la Courbe aura cette forme à peu près et b diminuant à l'infini, la feuille s'évanouit.*



Or il est ordinaire qu'un foliolum evanescens produise un point de rebroussement de le prem[ière] espèce. Mais il a falu encore renoncer à cette conjecture."

Cramer à Euler, 11 novembre 1744

*"En un mot, **quelque Construction qu'on imagine**, il est constant que la Courbe $y^4 - 2xy^2 - 4x^2y - x^3 + x^2 = 0$ a au sommet un point de rebroussement de la 2e espèce, desquels par conseq[uent] l'existence est mainten[ant] incontestable."*

Avant de convenir de l'existence du rebroussement de seconde espèce exhibé par Euler, Cramer cherche à lui opposer des configurations géométriques alternatives, sans le secours de l'analyse (qu'il mettra toutefois en œuvre dans son traité). La discussion se poursuit dans les trois lettres suivantes (15 déc. 1744, 26 avr. 1745 et 6 juil. 1745) qui achèveront de convaincre le Genevois.

Euler à Cramer, 6 juillet 1745

Euler conclut l'échange en faisant le constat de la difficulté de concilier l'approche géométrique et l'approche analytique (c'est-à-dire algébrique) sur cette question des courbes :

*"Le doute que Vous avez encore sur la courbe dont l'équation est $y = \sqrt{x} \pm \sqrt[4]{x^3}$ est fort bien fondé, et en considérant la chose selon la géométrie, l'axe de cette courbe devrait être en même temps un diamètre. **la géométrie n'est pas toujours d'accord avec l'analyse**, et il y a aussi bien des cas où la géométrie donne par ses constructions des courbes defectueuses qu'abondantes."*

Cet échange avec Euler a très clairement renforcé la confiance de Cramer dans la capacité de l'analyse à rendre compte de l'existence de singularités dans le cours des courbes algébriques, parfois en opposition avec l'intuition géométrique.

D'Alembert à Euler, 24 mars 1747

"Je me suis appercu comme vous, Monsieur, de l'erreur de M. de Gua sur le point de rebroussement de la 2^{de} Espece. J'en ay parlé, mais avec beaucoup de menagemens, dans le memoire sur le calcul integral que j'ay envoyé à vôtre academie le 6 Dec. dernier. J'y parle d'une courbe $y = x^2 \pm \sqrt{x^5}$, qui a un point de cette Espece à son origine, & j'y refute en passant le raisonnement de M. de Gua, qui consiste à negligier le terme x^5 & a ne prendre que $y = x^2$ lorsque $x = 0$."

D'Alembert entre ici dans une dispute de priorité avec Euler sur la découverte des rebroussements de 2de espèce, à l'occasion d'échanges assez confus entre les trois hommes en 1748–1749, qui ne s'achèvera qu'avec une généreuse reconnaissance publique par Euler de l'antériorité de D'Alembert, en 1752.

De l'existence des points de rebroussement de la seconde espèce

Dispute Euler-D'Alembert



RECHERCHES

SUR LE CALCUL INTÉGRAL

PAR MR. D'ALEMBERT.

PREMIÈRE PARTIE.

DE L'INTEGRATION DES FRACTIONS RATIONNELLES.



OUR POUVOIR reduire généralement à la quadrature de l'hyperbole ou à celle du cercle, une fraction rationnelle différentielle, suivant la methode de



SUR LE POINT DE REBROUSSEMENT

DE LA SECONDE ESPECE

de Mr. le Marquis de l'HÔPITAL,

PAR M. EULER.

J'ai déjà fait voir dans quelques pieces, que j'ai eu l'honneur de présenter à l'Academie Royale, que même la Geometrie n'est pas exemte des controverses, & des contradictions apparentes, quoiqu'on soutienne fort souvent le contraire. Mais j'ai aussi fait remarquer ce

Planches
II. & III.

412

AVERTISSEMENT

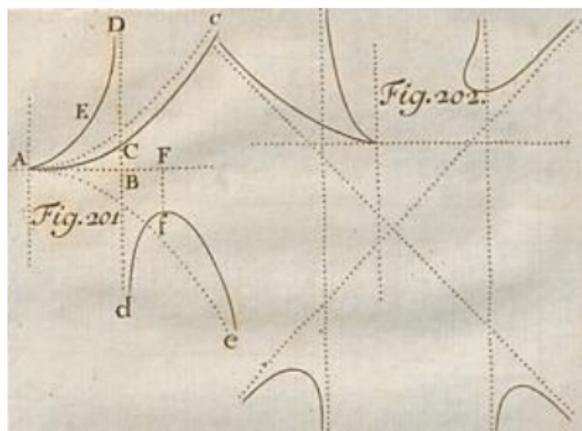
au sujet des Recherches sur la Précession des Equinoxes

PAR M. EULER.

Quoique ce Mémoire soit inferé dans le Volume des Mémoires de l'Académie pour l'Année 1749, l'Auteur déclare, qu'il ne l'a composé qu'après avoir lu l'excellent ouvrage de M. D'ALEMBERT sur cette matière; & qu'il ne fait pas la moindre prétention à la gloire, qui est due à celui qui a le premier résolu cette importante question. Comme il s'est borné à exposer uniquement la route, qu'il a suivie pour développer ce problème, il n'y a ajouté aucun discours préliminaire, dans lequel il n'auroit pas manqué d'indiquer, que c'est uniquement à Mr. D'ALEMBERT, qu'on est redevable de la discussion de cette importante matière. D'ailleurs l'ouvrage de Mr. D'ALEMBERT fut reçu d'abord avec un applaudissement si général, qu'il a paru superflu alors d'informer le public d'un fait aussi bien constaté & reconnu de tout le monde. Mais puisque ces circonstances pourroient tomber dans l'oubli avec le tems, on a jugé nécessaire d'en instruire le Public par cet avertissement: comme c'est aussi Mr. D'ALEMBERT, qui a le premier donné le denolement sur la nature des courbes, qui ont un point de rebroussement de la seconde espèce ou à bec d'oiseau.

Cramer, *Introduction* p. 590 sq

Dans son *Analyse des courbes*, Cramer proposera pour premier exemple la courbe d'équation $x^4 - ax^2y - axy^2 + \frac{1}{4}a^2yy = 0$ pour laquelle il établit, à l'aide de développements en série, qu'elle présente un rebroussement en bec à l'origine.



Cramer à Euler, 25 septembre 1750

Dans la lettre accompagnant l'envoi à Berlin d'un exemplaire de son *Introduction* adressé à Euler :

"Après la publication de vôtre bel Ouvrage, je n'aurois pas balancé à condamner le mien à l'obscurité qui le cachoit dès longtems, si quelques amis, trop prevenus en ma faveur, ne m'avoient fait des instances pour le publier, croiant qu'une autre manière de présenter les choses, et peutêtre la diversité du langage feroient recevoir ce que j'avois écrit. La vie ambulante que j'ai menée depuis environ 3 ans, et surtout un voiage de plus d'une année à Paris, où j'ai vécu dans toute la dissipation qu'emporte le séjour dans une Capitale et la frequentation du grand monde, ne m'a point permis de retoucher mon Ouvrage et de l'enrichir de plusieurs bonnes idées que la Lecture du vôtre m'auroit pû faire naitre. [. . .] J'en avois dès 4 ou 5 ans changé quelques endroits du dernier Chap[itre] sur les Rebroussemens, que j'appelle en Bec, au sujet des éclaircissemens que vous aviez eu la bonté de me donner, dans les Lettres que nous échangeions en ce tems-là."

Plan

Gabriel Cramer : quelques jalons biographiques

Les échanges avec Euler dans la correspondance de Cramer

Panorama de la correspondance de Cramer

Présentation de la correspondance Euler-Cramer

Recherches épineuses sur les courbes algébriques

De l'existence des points de rebroussement de la seconde espèce

Sur un paradoxe à propos des intersections des courbes, et de l'élimination des inconnues entre équations

En conclusion : deux "Introductions" aux destins liés

Cramer à Euler, 30 septembre 1744

Après avoir rappelé qu'une courbe est complètement déterminée par la donnée de $\frac{n(n+3)}{2}$ points, et ayant à l'esprit que deux courbes d'ordres m et n se coupent généralement en mn points, Cramer soumet à Euler un paradoxe sur le nombre de points d'intersection de deux courbes algébriques d'ordre 3 :

"Cependant, voici qui favorise la pensée de cet Anglois. Deux lignes du 3^e ordre se peuvent couper en 9 points. Ainsi une ligne du 3^e ordre n'est pas suffisamment déterminée en la faisant passer par 9 points, et de même pour les ordres supérieurs. Auriez vous, Monsieur, vous qui savez si bien approfondir les matières, quelque bonne explication de cette Difficulté."

Comment est-il possible que deux courbes d'ordre 3, distinctes l'une de l'autre, se coupent en neuf points, alors même que ces neuf points devraient définir une unique courbe d'ordre 3 ?

Euler à Cramer, 20 octobre 1744

Euler propose effectivement une solution à ce paradoxe dans sa réponse du 20 octobre, invoquant la possibilité d'une dépendance entre les $\frac{n(n+3)}{2}$ équations permettant de déterminer les coefficients de l'équation de la courbe :

"Toutes ces reflexions ne [m'ont] servi au commencement qu'à relever les difficultes du cas, que Vous m'aves bien voulu proposer, mais enfin j'ai pourtant trouvé la solution de ce doute, dont j'espere que Vous seres satisfait. Je dis donc, qu'encore qu'il soit vrai, qu'une ligne de l'ordre n soit déterminée par $\frac{nn+3n}{2}$ points, cette regle est pourtant assujettie à quelques exceptions : car l'equation generale des lignes de l'ordre n ayant $\frac{nn+3n}{2}$ coefficiens à déterminer, il peut arriver qu'un pareil nombre d'equations, qu'on tire d'autant de points donnés, ne soit pas suffisant pour cet effet : ce qui est evident, lorsque deux ou plusieurs de ces équations deviennent identiques, ou equivalentes."

Cramer à Euler, 11 novembre 1744

"Souffrés que je vous propose le Theorème que j'ai trouvé sur cette matière, et que l'amour propre me fait trouver assés élégant. Soient plusieurs inconnues z, y, x, v, etc. et autant d'equations

$$A^1 = Z^1z + Y^1y + X^1x + V^1v + \text{etc.},$$

$$A^2 = Z^2z + Y^2y + X^2x + V^2v + \text{etc.},$$

$$A^3 = Z^3z + Y^3y + X^3x + V^3v + \text{etc.},$$

$$A^4 = Z^4z + Y^4y + X^4x + V^4v + \text{etc.},$$

où les lettres A^1, A^2, A^3, A^4 , etc. ne marquent pas, comme à l'ordinaire, des puissances de A, mais le premier membre, supposé connu, de la première, 2e, 3e, 4e etc. equation.

[. . .] S'il y a deux equations et deux inconnuës, on trouvera

$$z = \frac{A^1Y^2 - A^2Y^1}{Z^1Y^2 - Z^2Y^1} \text{ et } y = \frac{Z^1A^2 - Z^2A^1}{Z^1Y^2 - Z^2Y^1} . "$$

Cramer à Euler, 11 novembre 1744

"Souffrés que je vous propose le Theorème que j'ai trouvé sur cette matière, et que l'amour propre me fait trouver assés élégant. Soient plusieurs inconnues z, y, x, v , etc. et autant d'equations

$$A^1 = Z^1z + Y^1y + X^1x + V^1v + \text{etc.},$$

$$A^2 = Z^2z + Y^2y + X^2x + V^2v + \text{etc.},$$

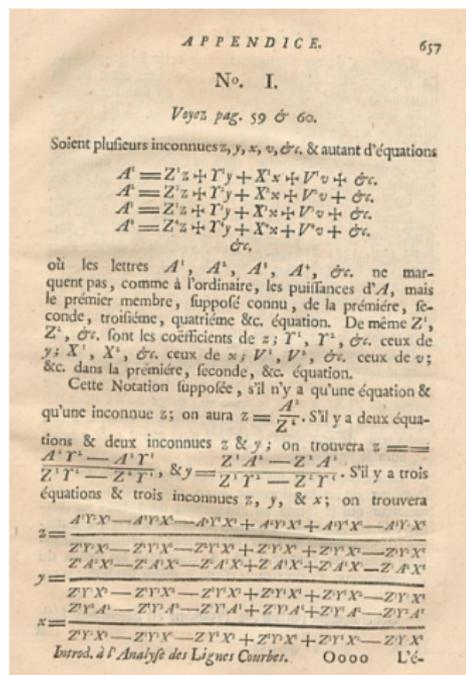
$$A^3 = Z^3z + Y^3y + X^3x + V^3v + \text{etc.},$$

$$A^4 = Z^4z + Y^4y + X^4x + V^4v + \text{etc.},$$

où les lettres A^1, A^2, A^3, A^4 , etc. ne marquent pas, comme à l'ordinaire, des puissances de A , mais le premier membre, supposé connu, de la première, 2e, 3e, 4e etc. equation. [...]

S'il y a deux equations et deux inconnuës, on trouvera

$$z = \frac{A^1Y^2 - A^2Y^1}{Z^1Y^2 - Z^2Y^1} \text{ et } y = \frac{Z^1A^2 - Z^2A^1}{Z^1Y^2 - Z^2Y^1}."$$



Cramer à Euler, 11 novembre 1744

"Donc généralement parlant, le Problème est déterminé. Mais il y a des Cas particuliers où il reste indéterminé, et d'autres où il devient impossible. L'un et l'autre peut arriver, quand le Denominateur Commun de toutes les fractions, qui expriment les valeurs des inconnuës, est égal à zero; c'est à dire, s'il n'y a que deux équations, quand $Z^2 Y^1 - Z^1 Y^2 = 0$. [...] Alors, si les quantitez A^1, A^2, A^3, A^4 , etc. sont telles, que les Numerateurs de ces mêmes fractions soient aussi égaux à zero, le Problème reste indéterminé, comme si aiant autant d'inconnuës on avoit eu une ou plus[ieurs] équations de moins."

Cramer à Euler, 11 novembre 1744

"Donc généralement parlant, le Problème est déterminé. Mais il y a des Cas particuliers où il reste indéterminé, et d'autres où il devient impossible. L'un et l'autre peut arriver, quand le Denominateur Commun de toutes les fractions, qui expriment les valeurs des inconnues, est égal à zero ; c'est à dire, s'il n'y a que deux équations, quand $Z^2 Y^1 - Z^1 Y^2 = 0$. [...] Alors, si les quantitez A^1, A^2, A^3, A^4 , etc. sont telles, que les Numerateurs de ces mêmes fractions soient aussi égaux à zero, le Problème reste indéterminé, comme si aiant autant d'inconnues on avoit eu une ou plus[ieurs] équations de moins."

Réponse d'Euler, le 15 décembre 1744 :

"Je suis ravi que Vous ayez été satisfait de la solution de l'enigme sur la description des lignes courbes par des points donnés, que Vous me proposates dernièrement. Mais il me semble, que la même solution Vous avoit été connue bien longtems auparavant ; les belles formules, que Vous avies trouvées pour cet effet n'ayant pu manquer de Vous y conduire d'abord."

Deux mémoires d'Euler (1748)



SUR UNE CONTRADICTION APPARENTE DANS LA DOCTRINE DES LIGNES COURBES.

PAR M. EULER.

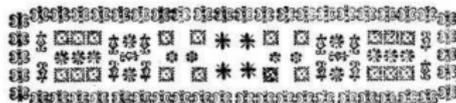


I.

On croit généralement que la Geometrie se distingue des autres sciences, parce que tout qu'on y avance est fondé sur des démonstrations les plus rigoureuses, & qu'il ne s'y trouve rien, qui puisse donner occasion à des controverses. En effet, puisque dans la Geometrie on n'admet d'autres propositions, que celles qui sont parfaitement démontrées, on ne sauroit comprendre, comment on pourroit tomber en dispute. Encore moins fera-t-il possible, que deux propositions solidement prouvées soient en contradiction entr'elles, vu que les vérités, bien loin d'être contraires, se trouvent toujours dans la plus parfaite harmonie entr'elles. Et quoiqu'il arrive souvent dans les autres sciences, que deux vérités se paroissent contredire, on est pourtant bien assuré, que ce n'est qu'une contradiction apparente, qui tire pour la plus part son origine des idées moins précises, ou du défaut d'une connoissance suffisante des choses, auxquelles il faut avoir égard. Par cette raison on fera d'autant plus porté à croire, que dans la Geometrie de pareilles contradictions apparentes ne trouvent aucun lieu, puisqu'on est bien éloigné de se contenter des idées vagues, & non suffisamment déterminées.

Et 2

II.



DEMONSTRATION SUR LE NOMBRE DES POINTS, OU DEUX LIGNES DES ORDRES QUELCONQUES PEUVENT SE COUPER.

PAR M. EULER.

I.



Dans la Piece précédente j'ai rapporté sans démonstration cette proposition, que deux lignes courbes algébriques, dont l'une est de l'ordre m & l'autre de l'ordre n se peuvent couper en mn points. La vérité de cette proposition est reconnue de tous les Geometres, quoiqu'on doive avouer, qu'on n'en trouve nulle part une démonstration allés rigoureuse. Il y a des vérités générales, que notre esprit est prêt d'embrasser aussitôt qu'il en reconnoit la justesse dans quelques cas particuliers: & c'est parmi cette espece de vérités, qu'on peut ranger à bon droit la proposition, dont je viens de faire mention, puisqu'on la trouve vraie non seulement dans quelques, ou plusieurs cas, mais aussi dans une infinité de cas différens. Cependant on conviendra aisément, que toutes ces preuves infinies ne font pas capables de mettre cette proposition à l'abri de toutes les objections, qu'un adversaire peut former, & qu'il faut absolument une démonstration rigoureuse, pour le réduire au silence.

II. Avant

Euler à Cramer, 15 octobre 1750

"A cause de ce défaut et encore d'autres dont mon ouvrage est défiguré, je Vous felicite d'avoir enrichi le public d'un ouvrage accompli sur cette matiere, qui etant delivré de tout défaut explique la theorie des lignes courbes aussi solidement que clairement. J'ai surtout admiré Vos appendices, qui renferment de très importants éclaircissemens pour l'algebre, à laquelle il manque encore, tout comme Vous le remarques quantité de choses : où il faut sans doute rapporter l'elimination des inconnues."

À propos de l'élimination des inconnues et de la démonstration du théorème sur le nombre de points d'intersection de deux courbes :

"je vois avec bien du plaisir que Vous avez tiré Votre Demonstration du menu principe dont je me suis servi en regardant les racines des équations. Mais Vous avez poussé cette recherche beaucoup plus loin que moi, ayant trouvé une methode de former d'abord l'equation, qui doit resulter après l'élimination au lieu que je me suis contenté de m'assurer sur le degré de cette équation."

Euler à Cramer, 2 novembre 1751

Après avoir défendu sa propre méthode, Euler ajoute quelques réserves a posteriori :

"Je dois pourtant avouer que je n'en ai pu tirer les avantages dont je m'étois flatté car pour peu que les equations sont compliquées, on tombe d'abord dans des formules si embrouillées qu'on perd toute la patience de poursuivre le calcul."

Par ailleurs, il convient que les notations de Cramer présentent bien des avantages :

"Plus que je considere la maniere d'exprimer Vos formules pour les facteurs des racines des équations, plus j'en admire les avantages qu'elle fournit dans cette espece de recherches, et je ne doute pas qu'une semblable methode de s'exprimer ne soit propre à porter toute l'algebre à un plus haut degré de perfection."

Plan

Gabriel Cramer : quelques jalons biographiques

Les échanges avec Euler dans la correspondance de Cramer

Panorama de la correspondance de Cramer

Présentation de la correspondance Euler-Cramer

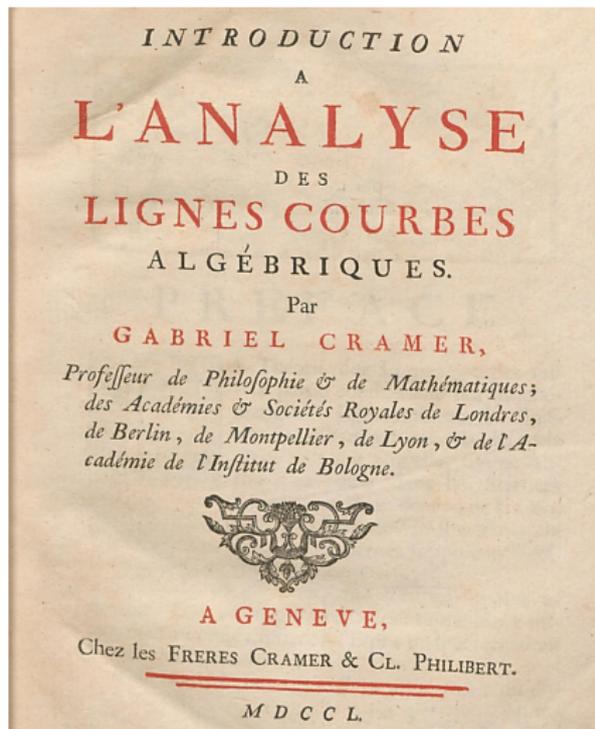
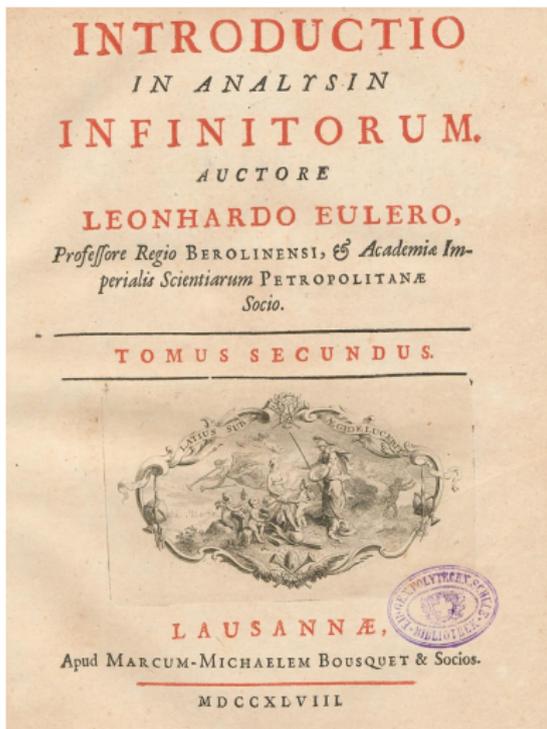
Recherches épineuses sur les courbes algébriques

De l'existence des points de rebroussement de la seconde espèce

Sur un paradoxe à propos des intersections des courbes, et de l'élimination des inconnues entre équations

En conclusion : deux "Introductions" aux destins liés

Deux "Introductions" aux destins liés



Merci de votre attention.

