



HAL
open science

Règle, signification et sens : ma recherche sur les écritures d'égalités numériques

François Conne

► **To cite this version:**

François Conne. Règle, signification et sens : ma recherche sur les écritures d'égalités numériques. 2019. halshs-01974856

HAL Id: halshs-01974856

<https://shs.hal.science/halshs-01974856>

Preprint submitted on 9 Jan 2019

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

RÈGLE, SIGNIFICATION ET SENS : MA RECHERCHE SUR LES ÉCRITURES D'ÉGALITÉS NUMÉRIQUES.

François Conne

Dans les deux notes ci-dessous, de 2013 et 2015, je reviens sur ma recherche sur les écritures d'égalités lacunaires menée à la fin des années mille-neuf-cent-soixante-dix et au début des années mille-neuf-cent-quatre-vingt, dont les analyses sont restituées dans le document de 1984 *Une épreuve de calcul en première primaire: analyses détaillées de productions d'élèves* (Conne, 1984). Cette recherche aura nourri le texte *Comptage et écriture en ligne d'égalités numériques* (Conne, 1988), ainsi que les épisodes de la série *Des dénombrements à la division euclidienne ó Activités numériques élémentaires à l'école primaire* (Conne, 1987-1988).

NOTE DU 18 AVRIL 2013

18 avril 2013

Règle, signification et sens : ma recherche sur les écritures d'égalités numériques.

Dans le manuel de première primaire suisse romand des années 1972/1996 (pour la France, CP, noté dans la suite 1P, actuellement, en Suisse serait noté 3P ou 3P/harmos), la signification donnée à la présentation et l'exercice du calcul sur des égalités numériques est celle-ci : *le signe égal signifie que les expressions écrites qu'il relie désignent le même nombre*. De ce point de vue, le signe égal est toujours médian, entre deux expressions, quelles qu'elles puissent être, simple écriture de nombres ou écriture composée d'écriture de nombres et de signes d'opérations, voire de parenthèses. Dans cet ordre d'idées parler d'écritures présentant le signe = en position finale/initiale ne veut rien dire.

Dans ce manuel, on avait même imaginé un scénario où cette affaire était jouée sur un dispositif de cartes, d'élastiques, d'enveloppes et d'étiquettes ; on avait aussi lié cela à des notations ensemblistes (idée d'étiqueter des ensembles, sur les étiquettes figurent les noms de nombres). Cette signification était proposée en conformité de la conception ensembliste des maths modernes ainsi que des conceptions d'alors sur les représentations symboliques comme simples illustrations, après coup, des actions et opérations (cf. ma thèse).

Selon cette idée, une écriture lacunaire est une écriture d'équivalence à compléter pour laquelle soit conforme à une syntaxe. Pour trouver l'écriture du nombre qui convient, il faudra calculer ó soit par comptage soit par recours à une table ou à un répertoire mémorisé.

Il s'établit ainsi, sans doute involontairement, une assimilation d'une signification des écritures ó la demande de fournir un calcul ó à une autre ó une forme signifiant l'équivalence de deux désignations. Mes recherches ont montré qu'une autre logique prévalait alors pour les élèves : celle d'être l'écriture d'un comptage. J'y reviens ci-dessous.

Une autre signification se greffait là-dessus, celle de la composition (signe égal final, une lacune $A + B = \square$) et celle de la décomposition (signe égal initial, deux lacunes $A = \square + \square$ ou une lacune $A = B + \square$; exercice dans deux sens de la table d'addition). L'idée de rendre indifférente la place du signe = fait augmenter la variété des écritures que l'on pouvait/devait considérer. Sans qu'il y ait nécessité à y donner une signification explicite, parler composition/décomposition donne une signification à la place qu'occupe le signe =.

La signification de la place du signe = comme dénotant composition/décomposition avait été proposée avant la réforme des maths modernes dans certains manuels suisses romands des années 1960. C'était déjà une conception moderne de l'enseignement des maths, puisque on ne se contentait pas de savoir faire, mais que l'on concevait le calcul en termes de composition/décomposition et qu'on s'intéressait au nombre pour lui-même plus qu'à ses applications. Toutefois, ce n'était assurément pas un de ces

emblèmes de ce qu'on appelait maths traditionnelles pour les opposer aux maths modernes. En fait cela participait d'un intérêt déjà marqué sur le langage mathématique et les écritures formelles, mais pas encore maths modernes parce que ne remontant pas aux ensembles comme fondement (ici le fondement restait le nombre).

Donc c'est selon ces significations, très abstraites, et pour la première déjà algébrique, que l'on a voulu habituer les élèves à interpréter et traiter correctement des écritures de formes variées, en particulier en leur demandant de compléter certaines écritures incomplètes afin qu'elles soient conformes à cette signification. Il y avait là une sorte de récupération (et élargissement) des variations imaginées dans les années 1960, au principe d'une signification algébrique abstraite du signe =.

Notez en passant que dans sa proposition d'enseigner l'algèbre, Chevallard reprendra exactement cette conception en mettant en avant des "expressions algébriques" que l'on transforme sous le principe de maintien d'équivalence (résolution d'équations).

Les élèves ont donc été autant exercés au calcul sur de telles données, qu'à se conformer à certaines formes de transcription de leur réponse. Sont présentées, outre les formes lacunaires déjà évoquées, des formes comme $3 + 6 = 9$ ou $1 + 5 = 2 + 4$ ou $7 = 2 + 5$ (et leurs correspondants lacunaires) alors que les formes comme $3 + 3 = 4 + 5 = 6$ transcription assez explicite d'un comptage, ou $7 + 2 = 9 + 3 = 12$ notation de la progression d'un calcul, sont exclues. Ces dernières étant explicitement bannies comme irrecevables en algèbre, ont été considérées comme à ne jamais tolérer, même en IP afin d'éviter que les élèves prennent de mauvaises habitudes (ce qui est encore une autre signification que celle décrite ci-dessus). Ainsi, on sanctionnait comme fausse la réponse 9 à la question $7 = 2 + \dots$ ($7 = 2 + 9$). Le fait que $7 + 2$ fasse effectivement 9 ne faisait qu'embarrasser l'enseignant qui souvent préférerait ne pas en tenir compte, ne pas le relever.

Ma recherche a montré que cette signification, équivalence d'écritures désignant des nombres, n'était pas assimilée par les élèves, et que les enseignants eux-mêmes n'y tenaient pas plus que ça. Cette signification est abstraite en ce sens qu'elle fait l'impasse sur les moyens à mettre en œuvre pour établir de telles équivalences. Ainsi les élèves étaient confrontés à un hiatus entre cette signification « officielle » et celle de ce qu'on leur demandait de faire comme calcul. Ce hiatus les renvoyait à apprendre à rendre leurs réponses conformes (trouver des moyens de faire sanctionner leurs réponses comme conformes).

Le sens était celui du comptage, pour eux le sens du signe = n'était pas lié à la signification d'une équivalence de dénomination d'un même nombre, mais bien à la production d'une addition ou plus généralement d'un comptage : "ça fait". Dès lors pour se conformer aux formes imposées par les règles des tâches scolaires, certains élèves accommodaient ce sens à une inversion (du sens) de leur lecture, rétablissant ainsi la position finale du signe =, ou bien ils apprenaient que le signe = en position initiale devait se lire : « est fait par » ($7 = 2 + 1$ « 7 est fait par 2 et ... »), ou encore ils apprenaient à déplacer l'accent en lisant l'écriture du nombre non lié par un signe d'opération comme « pour faire n ».
Par exemple $7 = 2 + \dots$ « pour faire 7, j'ai 2 et encore ... ».

Ma recherche a bien dû, pour analyser, expliciter, c'est-à-dire thématiser, et traduire cela en signification et discours analytique explicatif. Mais on ne peut pas rendre tous ces termes explicites aux élèves. Du fait de rendre la position du signe = relevante, on se rapproche de cette idée explicitée dans les manuels des années 1960, de qualifier les exercices de calcul demandés aux élèves de tâches de composition/décomposition (composition/décomposition se rendent bien par les expressions : « ça fait », « pour faire », « c'est fait par ».) Mais là encore ces termes, "composition", "décomposition", ne s'adressent pas tant aux élèves qu'aux enseignants et formateurs.

Ainsi ces expressions (« ça fait », « pour faire », « c'est fait par ») ne sont pas pour autant elles-mêmes thématisées par les élèves, ni par les enseignants. Elles ne fonctionnent pas pour eux comme des significations. Elles ne sont pas à être forcément ce qui peut rester implicite, incorporé dans l'action. Elles sont liées à l'action de comptage et ni le comptage, ni le calcul ne sont des objets de cet enseignement. Ce sont des pratiques plutôt que des choses dont on parle et encore moins que l'on considère pour elles-mêmes. Par contre, dans ces manuels, les nombres sont des objets que l'on désigne par des écritures et des expressions pour lesquelles, le cas échéant on indiquera l'équivalence en reliant leurs expressions respectives par un signe =.

Les « ça fait », « c'est fait par » ou encore « pour faire » sont des expressions langagières qui accompagnent une action effectuée, sur le point de l'être, ou qu'on se propose d'effectuer. Elles sont transparentes. On les prononce, elles disent fort bien ce qu'elles ont à dire, mais c'est à peine si on les écoute. De plus, le « ça fait » n'est pas pour autant immédiatement associé au « c'est fait par », ni au « pour faire ». Ces expressions peuvent dénoter des contextes différents. Je veux dire que ces expressions sont liées à ce qu'on est en train de faire ou c'est ce qu'on fait qui dit de quel faire il s'agit, dans la forme active, « ça fait » le « ça » est autant le faire que son produit. Pour moi, elles expriment du sens plutôt que des significations.

D'un point de vue sémiotique, ces expressions sont des images langagières des actes de calcul sans que l'on s'occupe du diagramme entre conventions de calcul et conventions langagières que cela établit. Et bien sûr, les élèves de 1P ne pensent pas à la forme passive du verbe faire - forme passive qui souvent intervertit sujet et objet du verbe.

Ces expressions verbales ne sont donc pas nécessairement liées directement, elles ne le sont qu'en tant qu'associées à un comptage effectif : « sept plus deux, ça fait neuf », alors que « sept est fait par deux et cinq », tandis que « neuf est fait par sept et deux ». Bref, si « ça fait », c'est toujours néanmoins au calculateur de le faire. Le « ça fait » exprime que c'est ce que reproduira quiconque le calcule conformément aux règles. Etc.

En fait on prononce ces expressions verbales exactement comme les sujets lisent le signe =, rares sont les élèves qui, répondant $9 \text{ à } 7 = 2 + \dots$ ($7 = 2 + 9$), lisent préalablement : « sept égale deux plus ... » et encore moins après coup « sept égale deux plus neuf ». Je veux dire que souvent leur lecture ne respecte pas les places des signes, et ils peuvent lire aussi bien $7 = 2 + 9$ comme « sept plus deux égale neuf » et ne pas comprendre que leur réponse puisse être fautive. On ne se déprend pas ainsi du sens. Et plusieurs enfants m'ont prétendu que, à $7 = 2 + \dots$, lu de gauche à droite, la réponse devait être 9, alors que, à la même égalité lacunaire, lue de droite à gauche, la réponse devait être 5. D'autres, lorsque je leur demandais de me dire si la réponse 9 à $7 = 2 + \dots$ était correcte me disaient que non et corrigeaient non pas la réponse 9, mais la donnée 7 parce que « $2 + 9$ ça fait 11 et pas 7 ».

De même, pour cette élève qui proposait d'écrire $3 + 3 = 4 + 5 = \underline{6}$, le sens était bel et bien clair, celui de transcrire son comptage (trois plus trois me fait réciter : « trois plus trois, quatre cinq, six », et même me fait hausser le ton pour dire avec « six » que c'est la réponse et que je m'arrête). Toutefois, elle ne pouvait pas le dire autrement que par son écriture, réponse soulignée. Justement, c'est une compréhension non thématifiée, sa transcription manifestait qu'elle avait compris sans qu'elle puisse dire, elle-même, ce qu'elle avait compris (c'était sur la base de l'illustration ensembliste à laquelle elle devait faire correspondre une écriture numérique, le comptage comme signification de ce qu'elle écrivait). À moi de comprendre puis d'y donner une signification dicible (pour nous adultes tout au moins). Cette observation m'aura bien plus tard fourni la clé pour comprendre les nombreuses réponses, 8 et 9 fournies par bien d'autres élèves à la question $7 = \dots + \dots$ $7 = \mathbf{8} + \mathbf{9}$. Etc.

Bref, la question est bel et bien de savoir concilier calcul écrit et calcul fait, voire encore transcription du moyen mis en œuvre pour le faire. Parfois cela coïncide, parfois pas. Et par le truchement d'une épreuve papier crayon qui confrontait les élèves à toute une variété d'items, ma recherche les a amenés à effectuer un tel travail afin de rendre compatibles formes des écritures d'égalité et sens lié à leurs comptages. En particulier il leur aura fallu sur la base de la forme des données, (se décider à) interpréter la demande comme celle d'une composition, d'une décomposition ou d'une *décomposition impossible*. Pour eux, la clé était de lire sur les données la transcription de comptages à effectuer ou à reconstituer.

Un tel travail n'est certes pas exempt de contrôles effectués au niveau de significations, mais alors de significations idoines ou ad hoc ou qui n'étaient pas reconnues comme objets d'enseignement. Elles n'étaient certes pas totalement insoupçonnées par les enseignants, mais leur prégnance était largement sous-estimée, voire négligée. Dans les échanges, ces significations restaient largement tributaires du sens et des formes. Dans ce cas, on ne sait alors pas trop comment dire, et encore moins en parler, et on s'occupe surtout à montrer. Autrement dit, les enseignants ou moi-même les comprenions immédiatement, mais sans pourtant savoir qu'en faire, parce que non traitables dans le cadre interprétatif prévalant à ce genre d'exercice (un exercice qui se donnait pour instrumental).

Il m'aura fallu toute cette recherche pour arriver à une thématisation cohérente. Elle m'a permis de mettre en évidence que la tâche proposée n'était pas tant de calcul que d'interprétation d'écritures par les élèves. Depuis lors, il m'est facile d'échanger avec les élèves et de trouver les termes parlant pour eux, bien que la théorie qui me le permet leur soit inaccessible. Ma recherche m'a ainsi permis de me déprendre des significations prévalantes fonctionnant comme de véritables pré-interprétations du travail de l'élève et occultant aux yeux des enseignants la réalité des écritures des élèves.

Dans l'ordinaire, c'est aux élèves d'apprendre à se conformer aux conventions d'écritures numériques. Et c'est ce qui se passe effectivement au final. Quasi tous finissent par produire des réponses conformes pour compléter de telles écritures lacunaires sans avoir pour autant intégré la thématisation algébrique abstraite attribuée au signe =. (Signalant, je le répète que deux expressions nomment le même nombre. Plus généralement le signe = signale que deux choses différentes dénotent le même objet).

De plus, une fois exercés à la table d'addition, la grande majorité n'aura plus à recourir au comptage pour donner sa réponse. Ceci aura pour effet de déconnecter ces tâches de celle d'un comptage et de les rendre encore plus formelles (exercice de la table selon les trois modalités suivantes : trouver la case de la ligne de n et de la colonne de m, ou trouver la ligne/colonne d'une case donnée étant connue en outre sa colonne/ligne. On peut thématiser ceci sous l'idée de composition/décomposition de nombres selon la relation de somme).

Les adultes qui proposaient de telles tâches aux élèves en sont tous à ce niveau de ne plus passer par le comptage et donc à un niveau formel a priori. Ceci leur permet de sanctionner la conformité des réponses, « à l'aveugle », sans comprendre, et encore moins anticiper, ce qui pourrait pousser les élèves à répondre $9 \text{ à } 7 = 2 + 1$ ($7 = 2 + 9$), ni à repérer, et encore moins à faire le lien, avec les réponses du type 8 et 9 à $7 = \dots + \dots$ ($7 = 8 + 9$). Et bien sûr, il leur est impossible de repérer qu'une élève (Nadia) ait pu répondre selon une *syntaxe* voulant que le nombre en position tout à droite soit toujours celui du résultat (ses réponses laissent en effet penser qu'elle a scrupuleusement suivi cette règle). Sans qu'elle y ait forcément donné une signification explicite, du moins autrement que sous la forme d'une règle : « on fait comme ça », voire plus impératif encore : « ça se fait comme ça ». En effet, identifier une telle signification renvoie à l'explicitation de nos conventions d'écriture qui font que l'écriture et la lecture se calent à une progression de gauche à droite des traces laissées sur le papier. De telles considérations abstraites sont hors de portée d'une élève de l'école primaire.

Copie de Pina 1P (mai 1980) (Les réponses de l'élève sont écrites au-dessus de la lacune.)

Prénom : Pina

1° Complète pour faire de bons calculs.

$$2 + 6 = \underline{8} \qquad \underline{6} + 3 = 9$$
$$4 = \underline{10} + 7 \qquad \underline{7} = 5 + 2$$
$$4 = \dots + 4 \qquad 4 = 5 + \underline{9}$$

2° Trace les calculs faux

$$5 = \cancel{7} + 2 \qquad 8 = \cancel{7} + 3$$

3° Complète pour faire de bons calculs (ne mets pas de 0,

$$7 = \underline{8} + \underline{9} \qquad \underline{4} + 4 = \underline{8}$$
$$5 + \underline{6} = \underline{11}$$

4° Complète pour faire de bons calculs.

$$1 + 5 = 3 + \underline{4} \qquad 2 + 7 = 7 + \underline{8}$$
$$3 + 4 = \underline{7} + 5 \qquad 3 + 6 = \underline{9} + 9$$

Merci

Prénom : Pina

1° Complète pour faire de bons calculs

$$8 = \underline{9} + 3 \qquad 7 = 2 + \underline{3}$$
$$\underline{6} = 1 + 5 \qquad \dots + 8 = \underline{7}$$
$$9 + \dots = 4 \qquad 3 + \underline{7} = 8$$

2° Trace les calculs qui sont faux.

$$5 = \cancel{1} + 6 \qquad 3 = 7 + 10$$

3° Complète pour faire de bons calculs (ne mets pas

$$\underline{4} + \underline{1} = 5 \qquad \underline{2} + 2 = \underline{4}$$
$$\underline{4} = \underline{5} + 6$$

4° Complète pour faire de bons calculs

$$4 + 2 = 2 + \underline{5} \qquad 3 + 4 = 3 + \underline{4}$$
$$5 + 4 = \underline{9} + 3 \qquad 6 + 2 = \underline{8} + 4$$

Merci

NOTE DU 10 MARS 2015

10 mars 2015

P. Ricoeur Du texte à l'action: essai d'herméneutique II, p. 247

"(í) la première manière dont l'homme tente de comprendre et de maîtriser *le divers* du champ pratique, est de s'en donner une représentation fictive (í). La structure narrative fournit à la fiction des techniques d'abréviation, d'articulation et de condensation par lesquelles est obtenu l'effet d'augmentation iconique que l'on décrit par ailleurs en peinture et dans les autres arts plastiques"í et je rajouterais et en maths aussi !

On peut tenter d'illustrer ces propos de Ricoeur avec les observations et réflexions autour de ma recherche sur les égalités lacunaires. *Comptage et écriture en ligne d'égalités numériques*, RDM 9.1, pp 71-116 1988.

Je tente une esquisse.

1° « (í) la première manière dont l'homme tente de comprendre et de maîtriser *le divers* du champ pratique, est de s'en donner une représentation fictive (í) »

Dans ma recherche, « Le champ pratique » est celui du calcul (ici en 1P donc par comptage) sur la base d'écritures d'égalités additives lacunaires.

La pratique est ce calcul demandé(e) par la consigne et indiqué(e) sur l'écrit.

Il y a champ parce que nous avons bien affaire à une pratique, c'est elle qui est promue, à laquelle on initie les élèves et qui est enseignée.

Il y a donc bel et bien divers.

Qui plus est, par le fait de confronter les élèves à un ensemble structuré d'items, cet ensemble est lui-même une représentation (partielle, schématique) de ce divers. Mais alors l'écriture change de statut, du moins pour le chercheur puisque ce dernier joue sur les écritures comme sur des énoncés. Énoncés de quoi ? C'est le cœur de mon propos sous 2°.

On peut même dire que cette représentation est fictive, puisque la forme des égalités lacunaires que j'ai empruntée aux manuels scolaires est fictive au regard des écritures mathématiques et équationnelles auxquelles elle se réfère. Les égalités lacunaires ne sont pas des écritures des mathématiques du moins selon leur pratique savante.

Mais ces écritures sont tout aussi fictives si on considère ce à quoi elles sont utilisées en classe : susciter des calculs par comptage de la part des élèves.

Ces écritures sont toutes des légisignes (chiffres ou lettres, +, =, ... mais aussi règles d'écriture et de lecture gauche droite etc.) et leur rapport à un calcul ou une relation numérique est symbolique. Il n'y a pas d'hésitation à avoir.

2° « La structure narrative fournit à la fiction des techniques d'abréviation, d'articulation et de condensation par lesquelles est obtenu l'effet d'augmentation iconique que l'on décrit par ailleurs en peinture et dans les autres arts plastiques »

et je rajouterais : et en maths aussi !

2.1 Toute ma recherche a procédé des récits qui se donnent dans cet enseignement, que l'on peut formuler de diverses manières, récits de ce que l'on fait pour répondre à ces questions, et qui racontent ce que l'on a fait comme calcul.

Mais tout aussi bien pour le chercheur : récits-fictions qui laident à inférer ce qui se passe dans la tête des élèves.

Une manière de raconter : « En effet dans $2 + \# = 6$ on te dit ceci : *si à deux on ajoute # on obtient six alors # vaut quatre.* »

2.2 On pourrait dire bien autrement, ce n'est qu'une manière. Dans ma recherche, j'en ai privilégié une autre dont j'avais observé qu'elle était très parlante pour les élèves : « Pour faire 6 et j'ai 2, il me faut encore ... ? » ou bien « 2 plus combien fait 6 ? ». Etc. Peu importe toutes les variations et nuances possibles si ce n'est :

a. que ce sont des narrations ;

b. qu'il y a champ pratique de narrations (mais pas seulement les miennes). Toutefois notons, que c'est surtout moi, le chercheur, qui ai cherché à me faire une représentation du divers de ce champ pratique.

2.3 Pour les initiés à la sémiotique peircienne, il y a même une narration comme celle-ci : « 4 est un interprétant de #, soit il vient immédiatement, soit il est obtenu par un calcul, c'est-à-dire le parcours d'une chaîne d'interprétants. »

2.4 Le travail demandé (voir feuille d'élève) confronte explicitement les élèves à une représentation d'une variété d'écritures : toutes sont différentes, il n'y en a qu'une seule de sa sorte. Raconter l'écriture devient donc une clé (possible) pour se confronter à cette variété et répondre par une variété de calculs qui lui corresponde. (Il y a diagramme, qui est une sorte d'icône, et comme le dit Ricoeur : « effet d'augmentation iconique ».)

L'effet d'augmentation se manifeste par le fait que la narration se fait argument (au sens de Peirce). Les enfants disent : « *pour faire six et j'ai deux* » et cette formulation est tout hypothétique donc argumentale.

2.5 Ainsi $4 = \# + 9$ peut se lire : *si à 4 on ajoute #, on obtient 9*, ce qui bien sûr ne correspond pas à la syntaxe en usage ; ou, par exemple en lisant de droite à gauche ; ou encore en se repérant sur la position du égale ; ou sur le lien qu'effectue + (j'ai plein de choses que me disent les enfants sur ces signes, dont une petite partie, assez petite, est rapportée dans ma thèse) ; ou *si à 9 on ajoute # alors on obtient 4*. Ce qui tout autant peut amener à dire : *ce n'est pas possible*, ou *il faut ajouter -5* (ou une *perte de 5* dans la métaphore des parties de billes, *5 passagers descendus* dans celles des arrêts de bus, etc.). On a toujours une structure de *si ... alors*. C'est une implication, pas un simple stimulus (cause), mais bel et bien une raison.

2.6 Le seul point délicat est l'écriture $2 + 6 = \dots$: peut-on considérer cela comme un argument ?

Notons, en passant, que le signe ..., que j'appelle lacune, connote un inachèvement d'une action, induite par $2 + 6 =$, alors que le signe # connote le signe d'un nombre. Il me semble par contre que "combien" connote les deux.

Bien interpréter cette question est crucial. Elle revient à se demander ceci.

On peut considérer que $2 + 6$ et 8 sont les signes de nombres (ici bien sûr du même nombre). Alors, vu comme sémiotique, le calcul $2 + 6 \rightarrow 8$ détermine 8 comme interprétant à entretenir la même relation que $2 + 6$ à ce nombre, c'est-à-dire 8 désigne ce nombre comme le fait $2 + 6$.

Dans ce cas, le signe $=$ est superflu (car redondant). Et surtout $+$ et $=$ ne sont pas de même niveau.

Mais qu'en est-il alors de ce que j'appelle "lacune" ? (Rendue par diverses graphies : espace laissé blanc, $\dot{\quad}$, ici les deux indiquent une place où inscrire un signe de nombre. On a même tout un "divers de connotations", selon qu'on marque cela par un espace laissé blanc, ou des signes comme : ... , xxx , # , ? , etc.).

Je soutiens que l'écriture change de statut dès le moment où on commence à envisager des écritures avec lacunes.

Ne considérons déjà rien que la forme d'écritures avec signe $=$ final. Sans lacune il n'y a qu'une forme : $A + B = C$, avec une lacune viennent 3 formes, de même avec deux lacunes, alors qu'avec 3 lacunes il n'y a à nouveau plus qu'une forme. Ensuite selon les nombres qui seront inscrits, se présenteront toutes sortes « d'événements calculatoires » : des calculs faciles comme $1 + 2 = \dots$; des calculs impossibles mais de la forme d'un leurre comme $2 = 7 + \dots$; des calculs incitant au doublement comme $3 + \dots = \dots$, etc. Tout un divers du champ pratique considéré. (Et que dire de ceci : $+. .= \dots$?)

L'icône ainsi engendrée (et supportée par la narration) fait de $2 + 6 = \dots$ le signe non plus d'un nombre mais d'un calcul (celui que l'on narre pour rendre compte comment on lit ce signe). Et dans ce signe, ... indique une place. Répondre, c'est écrire un interprétant de $2 + 6 = \dots$ et plus seulement de $2 + 6$, par exemple $2 + 6 = 8$ (mais pourquoi pas non plus $2 + 6 = 6$, ou encore $2 + 6 = 4$, etc.)

Et c'est cet interprétant que l'enseignant attend de voir sur la feuille de l'élève.

ou ... ne désignent aucun nombre particulier. Cela désigne soit un des constituants d'un calcul que l'on narre partiellement : "2 + 6, combien ?" Soit un des termes à trouver d'une relation explicite (de désignation) : un autre signe qui représente le même nombre que le signe $2 + 6$.

Dans les deux cas l'écriture à considérer n'est plus celle d'un nombre, mais soit celle d'un calcul, soit celle d'une relation, dans lesquels sont enchâssés des signes de nombres 2, 6, $2 + 6$, puis 8 (ou 4, ou 6 etc.).

Par contre, ... n'est qu'un signe de place/chose qui est résultat d'un calcul/chose qui est second terme d'une relation (ici je donne trois signes interprétants de ...).

2.7 Ces distinctions que je fais ici ne sont que le produit d'un passage à la loupe qui a pour effet de « désabrèger, de désarticuler et de décondenser » ce que « la structure narrative » avait « abrégé, articulé, condensé ».

2.8 J'insiste sur la dualité : celle des actions et des relations, les deux seraient toujours présentes.

Le point nodal est que l'on ne se contente pas seulement d'effectuer $A + B$, mais que l'on considère aussi ce que l'on fait, ce calcul lui-même, en relation justement avec les autres calculs que l'on a déjà effectués, ou que l'on va encore effectuer sur les autres items. Ceci renvoie à quelque chose sur quoi Peirce insiste énormément, pour dire que dans l'acte perceptif nous avons aussi la conscience que nous percevons. Et il le dit aussi pour le signe.

Donc c'est bien ce qui me semble se passer ici et c'est aussi ce en quoi nous avons de la difficulté pour nous exprimer : si je calcule $2 + 6 = \dots$ que ce soit par comptage ou par appel de mémoire, je ne me contente pas de penser 8, je pense ce calcul aussi. Donc j'ai tout ce qu'il faut pour faire de mon acte un argument. Et c'est ceci qui est narré.

Cette considération est essentielle pour arriver seulement à comprendre les demandes à toute la variété de formes d'items.

Dès lors les écritures que je propose sont bel et bien des énoncés, des énoncés de calculs à reconstituer.

De ce point de vue, mon article (RDM, 1988) sur les égalités lacunaires est étroitement lié à mon autre article (RDM, 1985) sur les problèmes d'arithmétiques puisque j'y défends la thèse que ces calculs demandent autant de raisonnement (de calculs relationnels) que les problèmes d'arithmétique. Et cela relançait complètement la question des savoirs-en-acte, théorèmes-en-acte etc.

C'est bien sûr cela qui m'a amené à parler dans S&C de *savoirs pragmatiques, savoirs réfléchis et savoirs savants*.

2.9 Le travail consistant à trouver une variété d'items est formel (syntaxique). Rien de difficile jusqu'ici. Il est intéressant comme support (via diagramme) de production de variété de réponses d'élèves et c'est en cette étude qu'a consisté ma recherche. Il l'est aussi comme occasion de recueillir une variété de narrations, paraphrases les unes des autres (dans les sémoses que sont mes analyses et études des réponses des élèves, mais aussi ce qu'ils me racontent lorsque je leur demande d'expliquer ou justifier leur réponse ou que je les fais discuter entre eux de leurs réponses distinctes etc.).

Voici deux autres exemples.

On peut dire : *si on a 2 et aussi (et puis) 6, alors ensemble (en tout) cela fait 8, comme : si on demande d'additionner 2 et 6 on trouvera 8* (ici c'est causal). *Si à 2 on ajoute 6 alors on obtient 8* convient aussi.

On peut alors encore affiner : $\dots + 3 = 9$, et $3 + \dots = 8$ ne sont pas tout à fait équivalents. Ou encore $\dots + 9 = 4$ peut se comprendre : *en partant de quelque part et faisant 9 pas, on arrive à 4*, ce qui sur un jeu de bande numérique, peut se dire : *en partant de quelque part je fais 9 pas et je tombe sur une case dont le chiffre des unités est 4, alors je suis parti d'une case dont le chiffre des unités est 5, mais dont celui des dizaines est une de moins que le chiffres des dizaines où je suis arrivé*, ou encore, *si en partant de quelque part et en faisant 9 pas j'arrive à 4 je suis parti de -5*. Tandis que $9 + \dots = 4$ est autre chose puisque je dois admettre *si en partant de 9 et faisant quelques pas je suis arrivé à 4, c'est que j'ai reculé de 5 pas*.

Tout cela sont autant de métaphores dont chacune a ses spécificités.

2.10 Maintenant, dans l'enseignement les choses sont un peu plus complexes parce que les deux formes souches de cet enseignement sont : $A + B = \dots$, $C = \dots + \dots$, puis $A + B = C + D$, etc.

Dans $C = \dots + \dots$, l'argument (et les narrations susceptibles d'en rendre compte) est autre : c'est « *si on a C alors on peut le décomposer (le répartir) en ... et ...* », argument que je puis prolonger en: *par exemple si on a C on peut le répartir en A et ...* . (En fait ces écritures sont gênantes puisque le signe ... n'est généralement utilisé qu'enchâssé dans une forme d'égalité. On ne peut pas éviter de telles imperfections.)

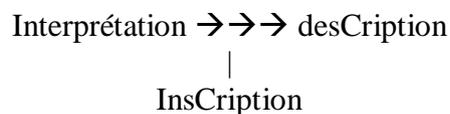
La forme $A + B = C + \dots$ est aussi autre. « *Si à ... on ajoute C on obtient la même chose que en ajoutant A à B* » qui peut devenir : « *si à ... on ajoute C, on obtient la même chose que A ajouté à B, or comme C est # de plus (de moins) que B alors ... est # de moins (de plus) que A* ». Etc.

On a donc bien une forme d'exercices argumentaux.

Maintenant on voit combien il est difficile de communiquer cela à des élèves de 1P, et c'est là que tout va se passer à la fois dans l'action et la narration d'un champ de pratique via des représentations de son divers : métaphores d'enfants qui calculent, diagrammes des variations d'écritures, images de calculs ou de comptages que sont ces écritures, etc. C'est comme ça qu'on obtient des élèves qu'ils fassent ce qu'il est bien trop abstrait de leur expliquer.

2.11 On constate aussi combien nombreux et complexes sont les jeux d'interprétants, à quel point nouées sont les relations, combien nous sommes incapables de prendre et garder en tête la mesure de ces foisons de signes.

2.12 Ricoeur propose aussi une triade qui rappelle le graphiste et le grapheur de Peirce



Ici, mais dans les analyses de ma thèse pour une bonne part aussi, cela se noue sur l'écriture. L'écriture spatialise des relations temporelles, on devrait dire l'inscription pour être plus précis. Un diagramme est espace-temps ou plutôt espace-temps-figures, car elles rompent avec le temps. Ainsi l'événement du surgissement d'un effet perceptif d'épaisseur dans le dessin en perspective cavalière du cube rompt avec la succession des traits : « carré, carré, traits de liaisons ». Cette rupture est celle du pas écriture / lecture, on ne relit pas ce qu'on écrit comme on l'a écrit. Et c'est là que les images enfermées dans les diagrammes jouent, donc ici que joue la priméité (« l'effet d'augmentation iconique »).

Les élèves sont pris dans le mouvement des signes, ils sont dans le signe, dans le diagramme (et cette fois je crois avoir compris ce que cela peut vouloir dire cette expression) et cela se voit à ... tous les gommages de leurs réponses, leurs hésitations avant de se décider pour telle réponse, etc. J'avais été frappé par la diversité et la variété incroyable de leurs réponses et avais conclu que collectivement ils exploraient tout ce qu'on pouvait imaginer explorer sur ces items. Maintenant je vois que cela a été produit par le signe que j'ai construit avec cet ensemble de 30 items posés ensembles, tout comme ce que j'ai pu observer dans les problèmes de billes est lié au milieu des problèmes que représente la batterie de Durand Vergnaud.

Cela ne veut pas seulement dire que c'est interactif entre le sujet et le milieu, et que ce qui s'actualise du sujet ne se fait que sur des signes, cela veut dire aussi que l'observateur y est triadiquement lié.

L'observateur (la position dans l'interaction, pas la personne qui l'occupe, et dans l'interaction d'enseignement, élève est, lui aussi, observateur) est l'interprétant de l'interaction et la validité de ce qu'il observe tient à sa détermination par ce qu'il observe. Et bien entendu la chaîne continue. Ainsi dire que les élèves explorent telles écritures n'a aucun sens en soi (tout au plus cela reste pure potentialité et encore potentialité hypothétique) cela ne se révèle que dans une triade, schématiquement dite : sujet, ensemble d'item, observateur.

REMARQUES

Rem 1. Cette recherche a valu pour moi en ce qu'elle aura ouvert.

Le 28 septembre 2014 lors d'une réflexion à partir du caractère sans doute non reproductible de ma recherche, contexte de recherche de thèse et contexte culturel tout autant et en tous les cas, jamais reproduit, je me suis demandé : qu'est-ce qui a été donc acquis avec cette recherche ? Et la réponse : eh bien c'est un jalon dans les recherches sur les erreurs, puis c'est bien de là que j'ai acquis ma manière d'interagir avec les élèves, en particulier Es, sans plus trop m'occuper de leurs erreurs, si ce n'est leurs narrations possibles...

Rem 2. La narration comme manière de se jouer des significations attribuées.

Je me disais aussi que l'erreur était sans signification mathématique, on lui déniait toute existence, on l'excluait. Mais vu que l'erreur a été produite elle n'est pas pour autant insensée, et cela peut appeler à lui donner quelque signification - didactique, psychologique etc. ó à attribuer à telles ou telles circonstances dans lesquelles elle se trouve, etc. Mathématiquement parlant, l'erreur n'est pas. Pourtant, elle s'est produite. L'erreur n'a alors de signification que par effet de clôture de la sémiotique (ou bifurcation sur une autre sémiotique, sanction de l'élève ou que sais-je encore ?), sur un jugement, un « diagnostic » etc. Ce que je tente de faire est de prolonger la sémiotique, donc de ne pas fermer le sens, et pour cela, de suspendre la signification qu'on pourrait lui donner (par attribution). *Poursuivre donc le sens nonobstant l'erreur.* Ce qui peut aller vers renouer avec des significations admises en mathématiques.

RÉFÉRENCES

Conne F.

1981 La transposition didactique à travers l'enseignement des mathématiques en première et deuxième année de l'école primaire. Thèse de doctorat. Lausanne. Conne / Couturier - Noverraz, (publiée en 1986). 462 pages. <http://tel.archives-ouvertes.fr/tel-01066233>

1984 Une épreuve de calcul en première primaire: analyses détaillées de productions d'élèves. *Interactions Didactiques* 6, 193p.

1985 Calculs numériques et calculs relationnels dans la résolution de problèmes d'arithmétique. *Recherches en didactique des mathématiques*, 5 (3), 269-332. <https://halshs.archives-ouvertes.fr/halshs-01523859>

1988 Comptage et écriture en ligne d'égalités numériques. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 9 (1), 71-116. <https://halshs.archives-ouvertes.fr/halshs-01523870>

1987 Comptage et écriture des égalités dans les premières classes de l'enseignement primaire (1^{er} épisode). *Math-Ecole*, 128, 2-12.
<http://halshs.archives-ouvertes.fr/halshs-01027537>

1987 Entre comptage et calcul (2^{ème} épisode). *Math-Ecole*, 130, 11-23.
<https://hal.archives-ouvertes.fr/halshs-01048667>

1988 Numérisation de la suite des nombres et faits numériques (3^{ème} épisode). *Math-Ecole*, 132, 26-31. <https://hal.archives-ouvertes.fr/halshs-01048692>

1988 Numérisation de la suite des nombres et faits numériques (3^{ème} épisode, suite). *Math-Ecole*, 133, 20-23. <https://hal.archives-ouvertes.fr/halshs-01048712>

1988 Calculs numériques (4^{ème} épisode). *Math-Ecole*, 135, p23-36.
<https://hal.archives-ouvertes.fr/halshs-01048720>

Chevallard, Y.

1984 Jalons à propos d'algèbre : La question du rapport entre algébrique et numérique. *Interactions Didactiques* 3, 54p. avec F. Conne.

Ricoeur, P.

1986 Du texte à l'action : essai d'herméneutique, tome 2. Edition du Point.