



**HAL**  
open science

## **PETITS CUBES ET BAGUETTES Instruments de compensation du handicap ou inducteurs de résolution**

Michèle Marie Renée Gandit, Marie-Paule Balicco, Sylvain Gravier, Simon Modeste

► **To cite this version:**

Michèle Marie Renée Gandit, Marie-Paule Balicco, Sylvain Gravier, Simon Modeste. PETITS CUBES ET BAGUETTES Instruments de compensation du handicap ou inducteurs de résolution. Jouer ou apprendre, JIES, May 2013, Chamonix, France. halshs-02021342

**HAL Id: halshs-02021342**

**<https://shs.hal.science/halshs-02021342>**

Submitted on 15 Feb 2019

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Public Domain

## **PETITS CUBES ET BAGUETTES**

### **Instruments de compensation du handicap ou inducteurs de résolution**

**Michèle GANDIT – Marie-Paule BALICCO – Sylvain GRAVIER – Simon**

**MODESTE**

Université de Grenoble, Maths à modeler

**MOTS-CLÉS :** SITUATION DE RECHERCHE EN MATHÉMATIQUES – COMPENSATION DU HANDICAP – ETAYAGE

**RÉSUMÉ** – Ce texte présente un atelier *Maths à modeler* avec des élèves en situation de handicaps cognitifs et moteurs. Pour que les élèves puissent progresser dans la recherche du problème, il est nécessaire de leur fournir des moyens de compensation (loi 2005). Nous montrons les effets de l'utilisation de ces outils sur la résolution du problème.

**ABSTRACT**– We present a *Maths à modeler* research workshop with students who are experiencing cognitive and physical disability. We have to help students to progress in investigating and provide them compensation (Act 2005). We wonder about these tools that act on students strategies.

Gérer un atelier de recherche *Maths à modeler* avec un public d'élèves en situation de handicaps cognitifs et moteurs permet de questionner autrement *l'étayage*, nécessaire avec tout public. En effet, ces élèves, à besoins éducatifs particuliers, ont droit (loi de 2005) à des *compensations* adaptées aux situations de handicap dans lesquelles ils se trouvent, dans notre cas, par l'obligation de travailler avec des quadrillages.

Au nombre de six, répartis en deux groupes, ces élèves sont scolarisés dans un Institut d'Education Motrice et de Formation Professionnelle, qui accueille des jeunes en situation de handicaps moteurs, présentant également des troubles cognitifs dans l'accès aux langages symboliques et au raisonnement. De manière générale, ces élèves se fatiguent rapidement, ont un besoin de structuration très fort et de beaucoup de temps pour que s'installent les concepts et les méthodes. De plus, dans cet établissement particulier, les élèves bénéficient constamment d'aides importantes, de la part de leurs enseignants, qui tentent ainsi de leur éviter des situations d'échec trop fréquentes. Ceci va entrer en contradiction avec la gestion habituelle d'un atelier *Maths à modeler*, au cours duquel les groupes d'élèves sont confrontés à une situation de recherche (Grenier & Payan, 1998), qu'ils doivent explorer (conjectures, preuves...), avec un étayage léger de la part du chercheur qui gère l'atelier (nous dirons le *meneur du problème*).

Nous présentons, dans ce texte, comment deux instruments de compensation, proposées naïvement aux élèves, interagissent, sur le plan épistémologique, avec la recherche du problème, allant bien au-delà de l'adaptation au handicap. Auparavant, nous donnons quelques éléments sur la situation de recherche (Gandit et al, 2011) (pour une étude plus complète, nous renvoyons au texte des actes intitulé « Les caisses de dynamite : un atelier *Maths à modeler* »).

## **Les caisses de dynamite : un jeu pour apprendre**

Le problème est d'abord présenté aux élèves dans sa généralité, par le meneur du problème (Pastori, 2013) (environ six séances d'une heure dans l'emploi du temps de la classe, suivies d'un séminaire où les élèves présentent leurs résultats à un public de chercheurs). La suite de ce paragraphe laisse entrevoir quelques-uns des savoirs et savoir-faire en jeu dans la recherche, ainsi que les choix effectués par les élèves.

### ***Une présentation générale du problème***

Dans un bâtiment (une surface quadrillée à mailles carrées identiques), on cherche à entreposer le maximum de caisses de dynamite (une caisse occupe une seule case). Chaque caisse doit être entourée d'une zone de sécurité, correspondant à son mode d'explosion. Ainsi les caisses doivent être entreposées de sorte que, si une caisse explose, elle n'endommage aucune autre caisse (voir figure 1). La question porte sur la détermination de ce maximum.

La forme du bâtiment et le mode d'explosion sont deux variables de recherche, dont la figure 1 propose des valeurs. La possibilité laissée à l'élève-chercheur de choisir d'autres valeurs lui permet ainsi de se fabriquer ses propres questions.

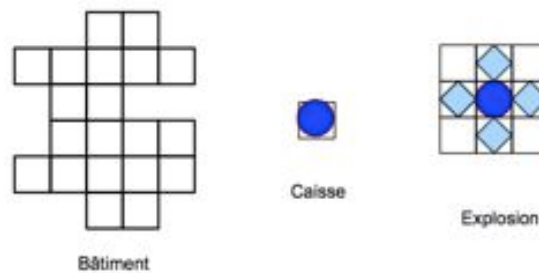


Figure 1 – Le mode d'explosion représenté (explosion en croix) détruit toute caisse de dynamite à droite, à gauche, en haut et en bas de toute caisse posée sur une case.

A gauche, la figure 2 montre une configuration qui n'est pas une solution puisque la contrainte de sécurité n'est pas respectée pour deux pièces. La configuration centrale de la figure 2 est une solution de cardinal 8 : elle est *localement maximale* en ce sens qu'on ne peut pas ajouter de pièce dans les cases vides, sans enfreindre la contrainte de sécurité. Mais cela ne signifie pas que 8 est le nombre maximum cherché. En effet, pourquoi ne pourrait-on pas arranger différemment les pièces sur le quadrillage de façon à pouvoir placer 9, 10... pièces ?

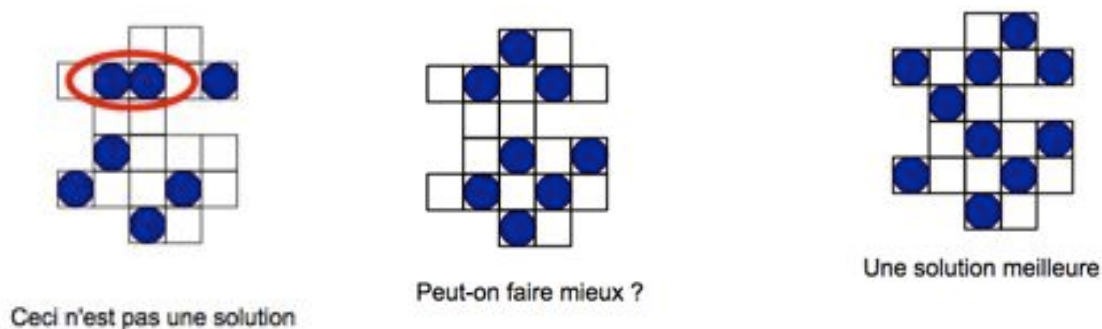


Figure 2 – Un cheminement vers une solution localement maximale de cardinal 10. Peut-on faire mieux que 10 ?

La configuration de droite de la figure 2 montre en effet une solution *meilleure* que celle du centre puisqu'elle comporte 10 pièces, chacune respectant la contrainte de sécurité. Ainsi chaque configuration localement maximale fournit un minorant du maximum cherché. Cette dernière configuration nous permet d'affirmer que le nombre cherché est supérieur à 10 (pour ce type de bâtiment et le mode d'explosion en croix).

Ce problème, dans sa généralité, peut ainsi, comme l'illustre l'étude précédente, se décomposer en deux *problèmes induits* : d'une part, comment construire une solution maximale, ce qui conduit à un minorant de l'optimum recherché, d'autre part, comment obtenir un majorant de cet optimum.

### ***Quelques-uns des savoirs ou savoir-faire en jeu dans la recherche de ce problème***

Comme nous l'avons constaté maintes fois (Gandit & al, 2013), les élèves, placés devant un problème nouveau pour eux, entrent par la complexité : ils ne savent<sup>1</sup> pas comment l'aborder simplement. Aussi est-il important de leur apprendre à réduire cette complexité en choisissant des cas particuliers non triviaux, l'étude de ceux-ci amenant à voir ce qui est généralisable derrière le particulier et à ainsi formuler une conjecture. Tester ensuite cette conjecture sur d'autres cas particuliers, définir, nommer des objets rencontrés au cours de cette recherche, s'engager dans une preuve de la conjecture formulée. Voilà donc les premiers apprentissages visés au travers de la confrontation des élèves à ce problème. A ces savoir-faire assez généraux, relatifs à la démarche expérimentale en mathématiques (Giroud, 2011), s'ajoutent les notions d'extremum local, d'extremum global, de majorant, minorant, la mise en œuvre de certains types de raisonnement (raisonnement par décomposition-recomposition, par induction, par condition nécessaire et condition suffisante...).

Les élèves sont ainsi engagés dans une pratique scientifique qui va au-delà de ce qui se passe usuellement dans les classes. Comme ces savoirs et savoir-faire ne sont en général pas disponibles chez les élèves au moment où ils participent à un atelier *Maths à modeler* (c'est particulièrement le cas des élèves dont il est question ici) et que ces connaissances ne peuvent s'acquérir qu'en situation de recherche, un *étayage* s'avère nécessaire, comme nous allons le voir plus loin.

### ***La recherche du problème telle qu'elle démarre pour les élèves***

Le processus de dévolution du problème s'accompagne de l'utilisation de matériel tel que des plateaux en bois recouverts d'un quadrillage et des jetons ronds qu'on peut disposer sur les carreaux du quadrillage (figure 3).



**Figure 3 – Matériel fourni aux élèves dès le début de l'atelier**

Ainsi, dans un premier temps, on fixe la forme de l'entrepôt à un carré de côté 8 carreaux, tout en laissant à la charge de l'élève le choix de la forme de l'explosion. Il peut alors construire et valider

---

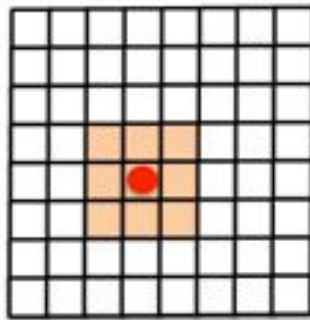
<sup>1</sup> Ils ne peuvent pas le savoir.

(ou non) des solutions, comprendre ce qu'est une solution localement maximale, qu'elle peut être localement maximale sans être maximale.

Le meneur du problème planifie ensuite une progression dans la recherche en fixant, suivant les séances, divers modes d'explosion tout en gardant l'entrepôt sous sa forme de carré  $8 \times 8$  ou en étendant celle-ci à un carré  $n \times n$ . Nous ne développons pas ici cette progression, mais seulement deux points dont il va être question dans la suite.

### **Deux points de l'analyse mathématique et didactique du problème**

Le mode d'explosion dont il est question ci-dessous est celle « du roi » (ou « en carré ») (figure 4) :



**Figure 4 – La zone de sécurité autour d'une caisse comporte les huit cases qui l'entourent.**

Une stratégie courante de construction d'une solution – *stratégie gloutonne* – consiste à poser comme un *bloc*, à la fois, la caisse de dynamite et sa zone de sécurité (les huit cases qui l'entourent). Le recouvrement de la grille par ces blocs, avec chevauchement autorisé des zones de sécurité, permet de construire une solution localement maximale comme le montre la figure 5. Or cette conception, nommée *bloc-roi*, est un obstacle à la résolution du problème ou, au moins, à la preuve de la maximalité de la solution ainsi construite, comme on le voit à la figure 5.



**Figure 5 – Par cette stratégie gloutonne, pour le mode d'explosion *roi*, on obtient une solution localement maximale à 5, qui n'est pas optimale, puisqu'on peut en obtenir une autre maximale à 7.**

Le nombre de caisses ainsi posées est un minorant du maximum  $M$  cherché : la figure 5 permet d'affirmer que, pour cet entrepôt et le mode d'*explosion-roi*,  $M \geq 7$ . Mais elle ne permet pas de prouver que ce maximum est égal à 7.

Une autre stratégie de construction d'une solution repose sur l'observation de régularités dans le placement des caisses les unes par rapport aux autres, comme le montre la figure 6.



Figure 6 – Toute caisse posée sur une case entraîne que restent libres de toute caisse les deux colonnes de part et d'autre de la case, ainsi que les deux lignes.

Ceci permet de construire une solution par répétition d'un motif, comme le montre la figure 7, sur un entrepôt  $8 \times 8$ . On l'appelle *stratégie par motifs*.



Figure 7 – L'observation d'un motif  $2 \times 2$  qui se répète permet la construction d'une solution à 16 caisses sur un entrepôt carré  $8 \times 8$ , comme le montre la figure de gauche. La figure de droite donne une preuve que le maximum de caisses ne peut pas être supérieur à 16.

Cette stratégie *par motifs* est plus performante que la stratégie *gloutonne* car elle permet aussi une preuve de l'optimalité de la solution trouvée. En effet, sur chacun de ces motifs  $2 \times 2$ , on est sûr qu'il ne peut tenir plus d'une caisse. Or comme le carré  $8 \times 8$  se partitionne en 16 motifs, on en déduit que le maximum ne peut dépasser 16. Comme on a trouvé une solution à 16 caisses, le maximum est égal à 16.

## L'étayage, suivant l'axe didactique, voire épistémologique

Suivant un axe didactique, nous considérons *l'étayage* comme une échelle d'aide apportée à l'élève, graduée – de façon épistémologiquement décroissante, pourrait-on dire – suivant le doute ou l'incertitude (moteurs de l'apprentissage) que l'élève peut conserver dans sa recherche. La progression dans les degrés de cette échelle s'accompagne *d'une réduction*, de plus en plus forte, *des degrés de liberté* de l'élève ou *d'une mise en évidence*, de plus en plus appuyée, *des caractéristiques critiques de la tâche* (Bruner, 1983), pouvant aller jusqu'à *l'effet Topaze* (Brousseau, 1986) qui correspond à l'absence totale d'incertitude de la part de l'élève sur la réponse à donner. *La réduction des degrés de liberté* consiste, pour le meneur du problème, en une simplification des tâches de manière à amener l'élève à réussir. *Mettre en évidence les*

*caractéristiques critiques de la tâche* revient à attirer constamment l'attention des élèves sur les éléments fondamentaux qui vont leur permettre de répondre à la question. Sur cette échelle, *la présentation de modèles* (Bruner, 1986) peut se situer à différents degrés, suivant que le modèle proposé est complètement ou grossièrement décrit, suivant qu'il est imposé a priori ou construit à l'issue d'une étape précédente de la recherche. A notre sens, cet axe didactique (et épistémologique) de l'étayage se complète d'un axe psychologique – avec progression dans *l'enrôlement*<sup>1</sup> des élèves, le maintien de leur *orientation* vers la recherche de la réponse à la question posée et les encouragements qui permettent le *contrôle de la frustration* devant les difficultés de la recherche – et d'un axe social (la recherche se faisant en groupes), que nous ne développons pas dans ce texte.

Nous explicitons comment de simples moyens de compensation, proposés au départ pour aider les élèves à *voir* une solution – et nécessaires compte tenu de l'influence de leur handicap dans la perception d'une solution – agissent sur la représentation du problème, l'aide initiale se transformant en source d'une nouvelle difficulté ou en inducteur d'une stratégie.

### **Les petits cubes blancs**

Lors de la deuxième séance, on étudie *l'explosion-roi* sur le plateau  $8 \times 8$ . Devant la difficulté des élèves à visualiser la zone de sécurité autour d'une caisse, il leur est proposé d'utiliser de petits cubes blancs à poser sur les cases de cette zone (voir figure 8). On note alors deux *instrumentalisations* différentes de ces outils (Rabardel, 1995) : un groupe utilise ces cubes pour vérifier la validité d'une solution, l'autre pour construire une solution (voir la *stratégie gloutonne* ci-dessus).



**Figure 8 – Les élèves construisent, pour l'explosion-roi sur le plateau  $8 \times 8$ , deux solutions à 16 caisses.**

Après comparaison de ces deux solutions, différentes quant à la position des caisses, les élèves parviennent à construire une solution *régulière* (facilement généralisable à un carré de côté  $n$ ).

---

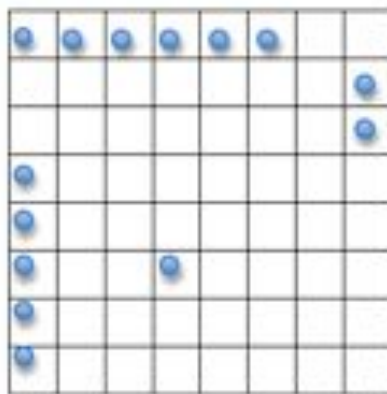
<sup>1</sup> Voir Bruner, 1983, ainsi que pour les deux autres fonctions mentionnées.



Laura et Charles se mettent alors d'accord sur une nouvelle solution à 16, qu'ils décrivent ainsi : « Sur la première ligne, on met une caisse, une case sur deux, sur la deuxième ligne, on ne met rien, sur la troisième, pareil que sur la première, sur la quatrième, pareil que la deuxième... ». A la séance suivante, on demande aux élèves de reproduire cette solution. Laura commence par placer un jeton, une case sur deux, à la première ligne. Charles demande alors les cubes blancs, mais on le voit placer les cubes blancs avant les jetons. A la question, « En quoi les petits cubes blancs t'aident-ils ? », Charles répond : « Parce que ça m'aide... pour savoir où ça explose », puis, il finit par dire : « En même temps, en même temps... on a demandé de refaire le schéma de la semaine dernière ». Ainsi, pour Charles, le moyen de compensation s'est intégré à la solution. Cette représentation va gêner sa progression dans la preuve de l'optimalité de cette solution, puisqu'il va devoir s'en défaire pour être en mesure de repérer *des motifs* qui se répètent, ce qui va s'avérer très difficile à cause du handicap.

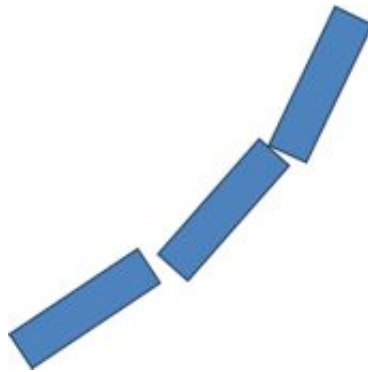
### **Les baguettes**

Lors de la quatrième séance, un autre groupe étudie le mode d'explosion *Diagonales* : la zone de sécurité d'une caisse de dynamite, placée sur une case, est constituée des deux diagonales qui se coupent en cette case. Un élève propose une solution (qui n'est pas valide) (voir figure 9). On lui propose alors comme tâche de valider ou d'invalider cette solution.



**Figure 9 – Une configuration proposée par un élève comme une solution pour le mode d'explosion *Diagonales*.**

L'un des élèves pose des bâchettes pour matérialiser une diagonale et ainsi vérifier si elle contient plus d'une caisse de dynamite. Ce matériel n'est pas adapté aux difficultés psychomotrices des élèves, comme le montre la figure 10.



**Figure 10 – Les élèves ne parviennent pas à matérialiser une diagonale avec des bûchettes.**

Des bandes de papier (feuilles repliées plusieurs fois) sont ensuite proposées aux élèves, mais, ce matériel ne convient pas non plus, car il est trop épais et cache en partie les caisses posées. Devant l'impossibilité des élèves à vérifier leur solution avec le matériel proposé et, par suite, à reproduire sur papier leur configuration, celle-ci leur est finalement reproduite (figure 10) pour qu'ils puissent en disposer lors de la séance suivante. Au début de celle-ci les élèves replacent les caisses sur le plateau. Ils travaillent à deux, l'un posant les jetons, l'autre vérifiant la zone de sécurité, mais sans avoir compris ce qu'est une diagonale. Après explications, les élèves se mettent d'accord sur une procédure de vérification. Pour ce faire, on leur fournit une fine baguette en bois pour visualiser les diagonales. Même si la procédure de vérification est longue et désordonnée, les élèves devant se mettre en position debout, pour mieux observer le plateau du dessus, cette baguette est une aide réelle. Cependant, une fois vérifiée l'une des diagonales, la vision de la seconde est particulièrement difficile : l'un des élèves considère systématiquement une ligne horizontale à la place de la seconde diagonale. Une seconde baguette – que les élèves auraient croisée avec la première sur chaque caisse posée – aurait pu être un moyen de compensation efficace pour la visualisation des diagonales, à la fois pour éliminer une caisse située dans la zone de sécurité d'une autre et pour poser une caisse sur une zone vide.

Avec un public « ordinaire », la visualisation des diagonales constitue déjà une difficulté. Celle-ci apparaît pratiquement insurmontable par ces élèves, à tel point que c'est le meneur du problème qui *montre* une diagonale qui ne contient pas de caisse. On arrive ainsi à exhiber une solution localement maximale à 14 caisses sur le plateau  $8 \times 8$ .

Cependant, la proposition d'une diagonale matérialisée par une baguette interfère avec la résolution du problème. En effet, la stratégie *par motifs* qui permet, moyennant un raisonnement par l'absurde, de prouver qu'il ne peut exister une solution à 15 caisses (et plus), repose sur le motif de la diagonale. Il suffit de partitionner le plateau  $8 \times 8$  en ses 15 diagonales parallèles. Chaque diagonale ne pouvant contenir plus d'une caisse, il est donc impossible de poser plus de 15 caisses. Si l'on en place une par diagonale, une caisse se retrouve placée sur chacune des « diagonales-coins » opposées, donc sur une même diagonale, de l'autre direction. Ce qui est impossible. On ne

peut donc pas placer plus de 14 caisses. Comme on a trouvé une solution à 14, ce nombre est l'optimum.

## Conclusion

Concernant ces élèves à besoins éducatifs particuliers, il y avait peu de chances que la diagonale matérialisée en baguette ne devînt un inducteur de stratégie de résolution, tant la difficulté était importante concernant la vision de ces diagonales. Mais la question se pose pour un public plus ordinaire. Par contre l'utilisation des cubes blancs (ou de tout autre matériel, même du coloriage, couramment utilisé) entraîne directement vers la *stratégie gloutonne*, qui, elle, s'oppose à la vision des *motifs* permettant d'achever la preuve. Ainsi la mise en œuvre de ces deux instruments de compensation du handicap a engendré une réflexion sur l'étayage de manière plus générale, que, faute de place, nous ne développons pas davantage. Nous renvoyons à une publication à paraître sur ce sujet.

## Bibliographie

- Brousseau, G. (1998) *Théorie des situations didactiques*. Grenoble : La Pensée Sauvage.
- Bruner, J.-S. (1983) *Le développement chez l'enfant. Savoir faire, savoir dire*. Paris : PUF.
- Gandit, M., Giroud, N. & Godot, K. (2011) Les situations de recherche en classe : un modèle de situation pour travailler la démarche scientifique en mathématiques. In M. Grangeat (Ed.), *Les démarches d'investigation dans l'enseignement scientifique. Pratiques de classe, travail collectif enseignant, acquisitions des élèves* (p. 35-49). Lyon : Ecole Normale Supérieure.
- Gandit, M., Triquet, E. & Guillaud, J.-C. (2013) – Séances d'investigation en classe en mathématiques et en sciences expérimentales. In G. Gueudet (Dir.) *Symposium Pratiques enseignantes et démarches d'investigation en sciences. Actes du colloque Formes d'éducation et processus d'émancipation*, mai 2012. Rennes.  
[http://python.bretagne.iufm.fr/recace/fepe\\_2012/plage\\_4.html](http://python.bretagne.iufm.fr/recace/fepe_2012/plage_4.html)
- Giroud, N. (2011). *Etude de la démarche expérimentale dans les situations de recherche pour la classe*. Thèse de doctorat. Université de Grenoble.
- Grenier, D. & Payan, C. (1998) Spécificités de la preuve et de la modélisation en maths discrètes. *Recherches en didactique des mathématiques*, 18/1.
- Pastori, M. (2013) Faire pratiquer une démarche d'investigation en classe en mathématiques : un exemple de coopération entre enseignants et chercheurs. In M. Grangeat (Ed.) *Les enseignants de sciences face aux démarches d'investigation. Des formations et des pratiques de classe* (p. 45-58). Grenoble : Presses universitaires de Grenoble.
- Rabardel, P. (1995) *Les hommes et les technologies, une approche cognitive des instruments contemporains*. Paris : Armand Colin.