



**HAL**  
open science

# Note sull'evoluzione delle nozioni di continuità e di continuo in matematica

Marco Panza

► **To cite this version:**

Marco Panza. Note sull'evoluzione delle nozioni di continuità e di continuo in matematica. *L'Arte di Pensare. Matematica e Filosofia*, 2020. halshs-02509618

**HAL Id: halshs-02509618**

**<https://shs.hal.science/halshs-02509618>**

Submitted on 17 Mar 2020

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Note sull'evoluzione delle nozioni di continuità e di continuo in matematica

Marco Panza

IHPST - CNRS, and Univ. of Paris 1

Chapman University

August 21, 2019

Lo scopo di questo saggio è di fornire alcune linee direttive relative alla maniera in cui le nozioni matematiche di continuità e di continuo si sono gradualmente trasformate, a partire dalle concezioni di Aristotele, fino alle concezioni oggi in uso nelle presentazioni elementari dell'analisi reale, risalenti alla seconda metà dell'ottocento. Non solo non prenderò in conto sviluppi più moderni e sofisticati, quali quelli relativi, per esempio, alla teoria degli insiemi e alla cosiddetta ipotesi del continuo, che richiederebbero considerazioni ulteriori e (volendo evitare imprecise banalizzazioni) molto più tecniche. Non mi soffermerò nemmeno su moltissimi aspetti complementari e momenti storici diversamente connessi a quelli che considererò.

La scelta degli aspetti e momenti storici che presenterò è dettata dalla convinzione che essi costituiscono delle pietre miliari, intorno alle quali una riflessione e delle ricostruzioni più fini possono (e dovrebbero, per completezza teorica e storica) prendere corpo. Questa scelta può essere certamente messa in questione e non ha affatto la pretesa di essere la sola possibile. Oltre che essere dettata da ragioni di spazio, essa dipende anche da competenze, conoscenze e gusti personali.

Alla fine del saggio, prendendo spunto, fra l'altro, da alcune considerazioni critiche di C. S. Peirce, cercherò di confrontare le concezioni moderne (di fatto ottocentesche) con quella di Aristotele da cui partirò. Spero che questo possa mostrare come il punto di arrivo della mia discussione non possa in alcun modo essere compreso come un esito inevitabile e

definitivo. Se avessimo modo di seguire alcuni suggerimenti che verranno da questo confronto, saremmo proiettati verso tentativi molto più recenti di rivenire, in un modo o nell'altro, e in contesti teorici appropriati, a concezioni simili a quella di Aristotele. La storia della matematica, se opportunamente compresa, è spesso fonte non solo di rilevanti considerazioni filosofiche, ma anche di sviluppi matematici nuovi, che riprendono idee, aspirazioni e progetti precedenti, in termini nuovi e innovativi. Si tratta, in fondo, di un sintomo di quel grande e affascinante spettacolo di apertura intellettuale e creatività che la matematica ci riserva.

\* \* \*

Cominciamo quindi con Aristotele. Ecco che cosa scrive in *Fisica*, V.3 (226b21-23, 226b34-227a1, 227a, 6-17) a proposito del continuo (traduzione mia, sotto la consulenza di Giovanna Giardina, che ringrazio)

Io dico [...] essere le < cose > insieme, in relazione al luogo, in quanto esse sono in un < unico > luogo proprio [...] e congiunte quelle le cui estremità sono insieme. [...] Consecutivo < è > ciò di cui [...] non vi è alcun intermedio della stessa specie di quello di cui esso è consecutivo. [...] Contiguo [...] è ciò che, essendo consecutivo, è congiunto. [...] Il continuo è proprio un qualche contiguo. Dico che è continuo quando il limite in cui le due < parti > si congiungono l'un l'altra diventa lo stesso e uno, e, come dice la parola stessa, si tiene con < l'altro >. Ma non è così se gli estremi sono due. Questo essendo stato stabilito, è chiaro che il continuo è in quelle cose da cui, per natura, un qualche uno è generato dal contatto. E, così come, un volta generato, ciò che tiene con < l'altro diventa > uno, anche il tutto sarà uno, per esempio grazie a un rivetto, alla colla o all'unione organica.

Più che di una definizione del continuo come oggetto astratto, si tratta di una caratterizzazione di una proprietà essenziale e saliente di certi oggetti o eventi fisici, in particolare corpi e movimento, ovvero del loro essere (dei) continui. Per Aristotele, tuttavia, i *mathēmatiká* emergono dalle entità fisiche, o sono direttamente presenti in esse (la concezione aristotelica dei *mathēmatiká*, come è presentata, in particolare, in *Metafisica*, M.1, è tutt'altro che limpida e è oggetto di un vasto dibattito che non posso certo prendere in conto qui). E questo rende possibile estendere una tale caratterizzazione anche a essi, per esempio a una linea geometrica, o, più in particolare, una retta, o, meglio un segmento di retta.

Intendere il passo precedente come una caratterizzazione di una proprietà saliente di corpi e eventi fisici, ci permette allora di capire che quando questo passo è riferito a un tale caso particolare, esso non ci dice affatto sotto quali condizioni un segmento di retta è continuo, ma piuttosto ciò che lo rende continuo.

Consideriamo una successione di segmenti separati e distanti fra loro, allineati l'un l'altro come qui sotto.



É chiaro che essi non formano affatto, se presi insieme, un nuovo unico segmento. Quello che ci dice Aristotele è che non basta affatto pensare tali segmenti come tanto vicini l'un l'altro che le loro estremità arrivino a toccarsi, perché sia così.

Nel caso di due corpi fisici, possiamo perfettamente concepire la situazione in cui essi, pur toccandosi l'uno l'altro, abbiano estremità separate fra loro. Il passaggio di Aristotele è tutt'altro che limpido e ha dato luogo a interpretazioni diverse. Esso comprende inoltre parti che qui ho omesso, per semplicità, fra cui una caratterizzazione assai problematica dell'essere intermedio. Senza voler entrare in troppi dettagli, mi basterà dire che questa caratterizzazione fa sì che due cose non possano dirsi consecutive come tali, ma solo in relazione a un movimento che ci fa passare dall'una all'altra stabilendo così di un certo ordine fra loro. Così come lo capisco io, tale passaggio ci dice, allora, che, nel caso appena considerato, i due corpi sarebbero, al più, soltanto consecutivi l'uno all'altro — in relazione a un movimento che li percorre passando immediatamente da uno all'altro —, così come lo sarebbero anche se fossero posti in tal modo che, pur non toccandosi fra loro, non vi fosse nessun altro corpo (simile) da cui tale movimento dovesse passare per passare da uno all'altro.

Nel caso dei nostri segmenti alienati potremmo, invece, difficilmente concepire una tale possibilità: disporre questi segmenti in modo che essi si tocchino l'un l'altro sembra comportare che ognuno di essi condivida una sua estremità con il segmento successivo. L'estremità di un segmento sarebbe allora la stessa che quella di un altro, e sarebbe, quindi, nel suo stesso luogo proprio, ovvero insieme con essa. I nostri segmenti verrebbero quindi a essere tutti congiunti. E posto che essi siano anche consecutivi, relativamente a un movimento che passasse da uno all'altro, assegnando loro lo stesso ordine in cui essi sono spazialmente disposti, essi sarebbero quindi contigui (in relazione a tale movimento, o, meglio, a tale ordine). Ma non formerebbero ancora, se presi insieme, un nuovo, unico segmento, ovvero una nuova linea continua. Perché questo avvenga occorre più di questo. Occorre che le loro estremità si fondino fra loro non solo numericamente, ma anche, per così dire, attributivamente (se infatti

bastasse l'identità numerica, non si comprenderebbe più la differenza fra contiguo e continuo, a meno che non si ammettesse che due cose distinte possano essere nello stesso luogo, come nel caso delle estremità di due corpi che si toccano pur restando distinti: un'idea che mi pare cozzare con la nozione relativa di luogo che Aristotele espone nel libro IV della stessa *Fisica*). Occorre, quindi — per evitare che ognuna di tali estremità possa essere pensata tanto come l'estremità finale di un segmento, quanto come l'estremità iniziale di un altro — che i segmenti dati sparissero come tali, dando luogo a una entità non solo unica, ma anche senza parti attuali distinte, atta a essere divisa, ma tale da comportare, come tale, solo parti potenziali.

Si potrebbe pensare che un tale modo di ragionare è alquanto bizzarro: perché si dovrebbe partire dalla composizione di oggetti distinti, per pervenire a un intero risultante proprio dalla sparizione di questi oggetti anche come parti (costitutive) di esso? Perché non descrivere direttamente un continuo, come un tutto unitario immediatamente dato come tale, come lo sono i segmenti più piccoli che, nelle descrizioni precedenti, vengono a fondersi in un unico segmento, continuo proprio perché unico? La risposta mi sembra poter stare nel fatto che il procedimento espositivo scelto da Aristotele permette di presentare la continuità come una proprietà monodica che è, tuttavia, il limite di una serie di cinque relazioni (essere insieme, congiunti, intermedi, consecutivi e contigui), articolando così tale proprietà con queste stesse relazioni, e riuscendo, in tal modo, a descrivere (sia pure in negativo) una proprietà primitiva e originaria, come appunto sembra essere la continuità, piuttosto che limitarsi a mostrarla.

Ciò non toglie che, in accordo a una tale descrizione, la continuità si identifica essenzialmente con una sorta di intima unità, tanto data dal principio, insieme all'oggetto stesso, che si presenta, così, originariamente come uno, quanto, eventualmente, acquisita al termine di un processo di composizione che conduce a cancellare i componenti, nelle loro distinte individualità, fondendoli fra loro. Per tornare al caso del segmento di retta, ciò che è essenziale — quale che sia il modo in cui tale segmento è ottenuto, sia tramite un solo atto generativo (per esempio un movimento a sua volta continuo, per il suo essere unico e privo di parti distinte), oppure tramite prolungamenti successivi — è che in esso non si identifichino parti attuali, che le sue parti non si lascino identificare come tali. Esso potrà certamente venir diviso, ma ogni sua divisione romperà la sua continuità.

In accordo con questa concezione, gli oggetti non continui (o discreti) non costituiscono unità intrinseche. Ognuno di essi è uno solo in quanto è pensato come tale, ovvero grazie all'attribuzione di una unità che non gli

è propria. La semplice congiunzione di consecutivi, ovvero la contiguità delle parti (attuali), è una delle condizioni più naturali (se non la più naturale) che permette di parlare di unità in questo senso derivato. E è proprio la possibilità di articolare questo giudizio che oppone continuità e contiguità, ovvero unità intrinseca e unità attribuita, che giustifica, come ho detto qui sopra, la strana descrizione alla rovescia che il passo precedente ci offre.

\* \* \*

Non sono partito da Aristotele per pure esigenze cronologiche. L'ho fatto perché la concezione di Aristotele resterà per molti secoli alla base del modo in cui i matematici penseranno il continuo, o meglio i continui. Essa resterà essenzialmente immodificata fino all'età moderna: la continuità continuerà a essere pensata come una proprietà di certi oggetti specifici — in particolare oggetti o processi fisici, e, per estensione, ma solo per estensione, delle grandezze geometriche —, più precisamente come quella proprietà che fa di essi delle unità intrinseche (e permette, quindi, di concepirle come grandezze distinte fra loro, che stanno fra loro in appropriate relazioni d'ordine e additive). Vi saranno delle teorie matematiche di oggetti continui, prima fra tutte la geometria di Euclide, ma non vi sarà fino al XIX secolo una teoria del continuo come tale.

Il problema che sarà discusso sarà piuttosto se ciò che è continuo, in quanto uno, è scomponibile in indivisibili (che, proprio perché ottenuti tramite un processo di divisione che si arresta in essi, possono pensarsi come componenti ultimi, anche se immediatamente non percepibili come tali), oppure se è infinitamente divisibile, ovvero divisibile in parti sempre divisibili.

Nel libro VI della *Fisica*, Aristotele sostiene apertamente la seconda opzione, argomentando che essa sola è compatibile con, o meglio deriva da, la sua caratterizzazione precedente (al punto che spesso si è ritenuto, e ancora si ritiene, che sia proprio nel libro VI che Aristotele definisca la continuità, e lo faccia identificandola con l'infinita divisibilità, invece di descriverla in V.3 come ho appena mostrato). La prima opzione era stata sostenuta prima di Aristotele, e continuerà a essere sostenuta dopo di lui, dagli atomisti, in particolare da Democrito, contro cui Aristotele argomenta, e dai suoi continuatori. Questa opposizione segna una larga parte della discussione medioevale, su cui non posso, qui, dire nulla di più.

Mi soffermerò, invece, su un'altra opposizione, ancora più profonda, che percorre l'intera matematica greca (almeno dopo la crisi del progetto pitagorico, dovuta alla scoperta dell'incommensurabilità) e araba, prolungandosi fino all'epoca moderna. Si tratta dell'opposizione fra due tipi,

essenzialmente distinti, di quantità, e le rispettive teorie: i numeri (interi positivi, e anzi perfino maggiori di 1, secondo la caratterizzazione attuale, ma allora semplicemente numeri), studiati dall'aritmetica (direttamente connessa con la teoria musicale), e le grandezze, studiate principalmente dalla geometria, e dalle sue applicazioni (in particolare l'ottica e l'astronomia).

I primi erano intesi come quantità discrete, in quanto essenzialmente composte, per il loro essere, secondo la definizione VII.1 degli *Elementi* di Euclide, “pluralità di unità”; le seconde come quantità continue, in quanto prive, come tali, di parti attuali. Da tale distinzione di natura ne discendeva un'altra, più propriamente operativa e matematicamente certamente più rilevante, anche se derivata e, quindi, in un senso, meno fondamentale. Da una parte, i numeri erano intesi soddisfare la condizione della misura comune: dati due numeri qualsiasi, vi è sempre una misura comune a entrambi, ovvero una parte aliquota (attuale) di entrambi — la quale potrà essere a sua volta un numero (maggiore di uno), il che fa che i numeri dati non siano primi fra loro, o l'unità (essenzialmente distinta da ogni numero), il che fa che i numeri dati siano primi fra loro. Le grandezze erano invece intese non soddisfare tale proprietà: era ammessa la possibilità che due grandezze siano incommensurabili, ovvero che non ve ne sia una terza atta a misurare entrambe, in quanto parte aliquota (potenziale) di entrambe, ottenibile da esse per divisione (più precisamente, che non sia possibile dividere entrambe le grandezze in parti uguali, in modo da ottenere così una parte aliquota della prima, resa attuale dalla divisione, uguale a una parte aliquota della seconda, resa a sua volta attuale dalla divisione).

Per quanto ogni quantità possa, proprio in quanto tale, confrontarsi e sommarsi con altre quantità dello stesso genere, da questa differenza essenziale era fatta discendere l'impossibilità di estendere alle grandezze il modo in cui i numeri si confrontano fra loro come quantità, ovvero tramite una nozione moltiplicativa di proporzionalità.

Contare le parti aliquote di due o più numeri porta immediatamente a definire su di essi delle relazioni moltiplicative interne, che sono proprio ciò che permette di confrontarli nel modo più semplice. Due coppie di numeri possono, infatti, essere considerate come “analoghe” — quanto alla relazione che, come quantità, il primo numero di ognuna di esse ha con il secondo — qualora una (o la) misura comune ai numeri di una di queste coppia entri in questi numeri tante volte quanto una (o la) misura comune ai numeri dell'altra coppia entra in questi altri numeri. La definizione VII.20 degli *Elementi* esprime questa idea avvalendosi dalle nozioni di parte, parti e multiplo (definite in precedenza, nelle definizioni VII.3-4,15, a partire dalla nozione di misura, in modo che un

numero risulta parte di un altro numero se ne è una misura, parti di esso se non ne è una misura, e multiplo di esso se quest'ultimo è una misura del primo):

<Quattro> numeri sono proporzionali [*análogón*] quando il primo <è> del secondo lo stesso multiplo, la stessa parte o le stessi parti che il terzo del quarto.

In notazione logica attuale, la definizione si potrebbe rendere così:

$$a : b = a' : b' \Leftrightarrow \forall m, n, h [(a = mh \wedge b = nh) \Rightarrow \exists h' (a' = mh' \wedge b' = nh')]$$

dove 'a', 'b', 'a'' e 'b'' denotano numeri dati, e 'm', 'n', 'h' e 'h'' sono variabili che variano sui numeri (si noti che per ragioni di generalità, è qui opportuno ammettere che l'unità sia un numero, ovvero che vi sia il numero 1).

La stessa cosa non può essere fatta con le grandezze. Da una parte, contare le loro parti aliquote (potenziali), ovvero dividerle in parti uguali, può al più permettere di definire su di esse delle relazioni moltiplicative esterne, ovvero delle relazioni che ognuna di esse ha con le sue proprie parti aliquote e con un numero, non con un'altra grandezza (mentre se *a* e *b* sono numeri l'identità '*a = nb*' ha perfettamente senso qualora *n* sia a sua volta un numero, se *a* e *b* sono grandezze — omogenee fra loro —, l'identità '*a = nb*' ha senso solo qualora *n* non sia a sua volta una grandezza, ma un numero). Dall'altra, la possibilità che due grandezze siano incommensurabili rende la definizione precedente non applicabile in generale alle grandezze, neppure *mutatis mutandis*. Lo si vede molto chiaramente considerando la traduzione di tale definizione in notazione logica: se *a* e *b* sono grandezze (omogenee) incommensurabili, non vi è alcuna terza grandezza *h* tale che *a = mh*  $\wedge$  *b = nh*, per qualche coppia di numeri *m* e *n*, il che rende l'antecedente dell'implicazione nel secondo membro della definizione sempre falso, e, quindi, l'implicazione sempre vera. Quindi, se tale definizione fosse applicata alle grandezze (assumendo, come necessario, che 'a', 'b', 'a'' e 'b'' siano grandezze date, omogenee due a due, 'h' e 'h'' siano variabili che variano sulle grandezze, rispettivamente omogenee a *a* e *b* e a *a'* e *b'*, e 'm' e 'n' variabili che variano sui numeri), ne seguirebbe che, se *a* e *b* fossero incommensurabili, allora avremmo che *a : b = a' : b'*, quali che siano le grandezze *a'* e *b'*, ovvero che ogni coppia di grandezze (omogenee) incommensurabili è in proporzione con ogni coppia di grandezze (omogenee).

Questo spinse i matematici greci (in particolare Eudosso, un allievo di Platone), a immaginare un'altro modo per confrontare fra loro le grandezze (due a due omogenee) come quantità, ovvero per stabilire quando una



coppia di grandezze (omogenee) possa essere considerata come “analogica” a un'altra. Questo modo è fissato dalla definizione V.5 degli *Elementi*:

<Quattro> grandezze sono dette essere nello stesso rapporto [*lógos*], la prima alle seconda e la terza alla quarta, quando gli stessi multipli della prima e della terza, degli stessi multipli della seconda e della terza, secondo qualsivoglia moltiplicazione, presi rispettivamente a due a due, insieme sono maggiori, o insieme sono uguali o insieme sono minori.

In notazione logica attuale, tale definizione si potrebbe rendere così:

$$a : b = a' : b' \Leftrightarrow \forall m, n \left[ \begin{array}{l} (ma > nb \Rightarrow ma' > nb') \wedge \\ (ma = nb \Rightarrow ma' = nb') \wedge \\ (ma < nb \Rightarrow ma' < nb') \end{array} \right]$$

dove ‘*a*’, ‘*b*’, ‘*a*’ e ‘*b*’ denotano grandezze date (a due a due omogenee), e ‘*m*’, ‘*n*’ sono variabili che variano sui numeri (si noti che, anche qui, per ragioni di generalità, è opportuno ammettere che l’unità sia un numero).

Mentre la prima delle due definizioni precedenti (la VII.20) è finitaria, in quanto, appunto, dati due numeri qualsiasi è sempre possibile trovare, tramite una procedura finita, tutte le loro misure comuni, la seconda (la V.5) è essenzialmente infinitaria, in quanto solo la considerazione e il confronto due a due di tutti gli equimultipli della prima e della terza grandezza con tutti gli equimultipli della seconda e della quarta (o un argomento appropriato che permetta di stabilire *a priori* quale che sia l’esito di questo confronto) permette di stabilire se queste grandezze sono in proporzione (ovvero, hanno lo stesso rapporto). Inoltre, la possibilità di definire sui numeri una moltiplicazione interna, rende possibile riformulare la prima definizione sotto forma di una semplicissima eguaglianza,

$$a : b = A : B \Leftrightarrow aB = bA,$$

mentre nulla di simile è possibile per la seconda definizione.

Queste profonde differenze faranno sì che la teoria dei numeri, o quantità discrete, si sviluppi, dapprima principalmente con lo stesso Euclide e con Diofanto, e poi con gli algebristi arabi, rinascimentali e dell’epoca moderna, come una teoria delle equazioni fondata su algoritmi e prove finitarie, mentre la teoria delle grandezze, o quantità continue, si sviluppa, dapprima, principalmente con lo stesso Euclide, ancora, e con Apollonio e Archimede, poi nel modo arabo e latino, fino a Descartes, e anche oltre, impiegando come strumento essenziale la teoria delle proporzioni conseguente alla seconda delle definizioni precedenti, principalmente fondata su prove per assurdo, rifacentesi, in particolare allo schema dell’esauzione. La distinzione continuo/discreto (o, meglio, continui/ discreti),

quando riferita alle quantità, sfocia, quindi, nella matematica greca, araba e latina, in una opposizione fra teorie distinte, che si sviluppano in modo essenzialmente autonomo, pur se i tentativi di stabilire rapporti, di natura essenzialmente strutturale, o di identificare una teoria unitaria comune, non mancheranno (anche se qui non è possibile renderne conto, neppure brevemente).

\* \* \*

Per quanto tale opposizione continuerà a persistere, per l'essenziale, anche nell'epoca moderna, nel XVI secolo si verificheranno due fatti nuovi, assai rilevanti per la nostra storia.

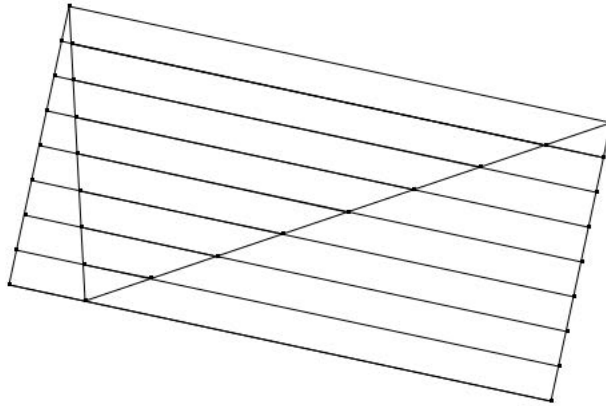
In primo luogo, grazie principalmente a Viète e a Descartes — ovvero alla definizione quasi-assiomatica della moltiplicazione sulle quantità scalari, da parte del primo, e alla definizione della moltiplicazione fra grandezze qualsiasi, in termini di proporzione e elemento neutro, da parte del secondo —, si trova il modo di giustificare un'estensione degli algoritmi dell'algebra aritmetica alla teoria delle grandezze, e quindi alla geometria.

In secondo luogo, grazie principalmente a Cavalieri e poi a Torricelli e a Wallis, si introducono dei metodi per indivisibili atti a studiare le grandezze. Alla concezione di queste come dei continui aristotelici si affianca quindi (senza opporsi a essa, come vedremo sotto) una concezione nuova, che le pensa, almeno operativamente, come composti di parti ultime attuali, contigue, o anche solo consecutive, fra loro (a seconda che tali indivisibili siano intesi come omogenei o non omogenei alle grandezze che compongono: una distinzione più filosofica che matematicamente operativa, ma che farà molto discutere, che, tuttavia, qui non posso considerare).

Non è possibile qui entrare nel merito né della quasi assiomatica di Viète o dell'algebra geometrica di Descartes, né delle diverse versioni del metodo degli indivisibili, e dell'impiego di tecniche infinitesimaliste capaci di sostituirsi alle prove per l'assurdo, che esso porta con se, o almeno suggerisce. Ciò ci condurrebbe a un'indagine storica che non corrisponde allo scopo del mio argomento. Vorrei invece osservare due cose.

La prima è che il metodo degli indivisibili risulta inapplicabile e perfino impensabile senza una sottostante concezione continuista delle grandezze. Le grandezze geometriche sono dapprima date come dei continui dotati di proprietà spaziali e metriche, espresse rispettivamente da appropriati diagrammi e appropriate proporzioni o equazioni. E sono, solo in seguito, analizzate come aggregati di infinite parti indivisibili a cui sono assegnate proprietà e relazioni che dipendono dalle condizioni rispettate dalle grandezze prese nel loro insieme (ovvero come quantità continue).

Questa caratteristica del metodo degli indivisibili non è in nessun esempio così chiara come nel metodo di quadratura di Wallis (che questi espone nella sua *Arithmetica Infinitorum*, 1656). Considero qui un esempio semplicissimo: la quadratura di un triangolo. Dato un triangolo qualsiasi, lo si inscriva in un rettangolo uno dei cui lati sia dato da un lato del triangolo stesso, e si traccino delle corde di entrambe le figure, parallele a questo stesso lato, per esempio così:



È facile vedere che, mentre le corde del rettangolo sono tutte uguali fra loro, quelle del triangolo si succedono secondo una successione aritmetica.

Se vogliamo ragionare in base all'opzione degli indivisibili non omogenei, pensiamo ora le due figure come gli aggregati di tutte le loro corde passanti per tutti i componenti indivisibili dei lati rilevanti. Se vogliamo ragionare in base all'opzione degli indivisibili omogenei, pensiamo invece queste figure come gli aggregati di parallelogrammi longitudinalmente indivisibili, la cui base sia data da corde come quelle che abbiamo tracciato e la cui altezza sia data dagli indivisibili di questi stessi lati (il fatto che si tratta di indivisibili, permette tanto di considerare quelli dei lati del rettangolo, uguali a quelli dei lati del triangolo, che di supporre che anche questi ultimi siano perpendicolari alle corde). Pensiamo, inoltre, le corde come rappresentate dalla somma dei loro indivisibili.

Prendendo, per semplicità, tutti gli indivisibili, tanto delle corde che dei lati del triangolo e del rettangolo, come (uguali fra loro e) unitari, supponendo che la base comune al triangolo e al rettangolo contenga  $\omega$  indivisibili (dove  $\omega$  è naturalmente un numero infinito), e osservando che nulla vieta di estendere la definizione V.5 (e quindi la nozione di proporzionalità fra grandezze) al caso in cui la terza e quarta grandezza ( $a'$  e  $b'$ ) siano rimpiazzate da numeri, perveniamo allora alla seguente proporzione

$$\mathfrak{T} : \mathfrak{R} = 0 + 1 + 2 + 3 + \dots + \omega : (\omega + 1)\omega,$$

dove, naturalmente, ' $\mathfrak{T}$ ' e ' $\mathfrak{R}$ ' denotano, rispettivamente, il triangolo e il rettangolo. Ammettendo che la somma  $0 + 1 + 2 + 3 + \dots + \omega$  si comporti

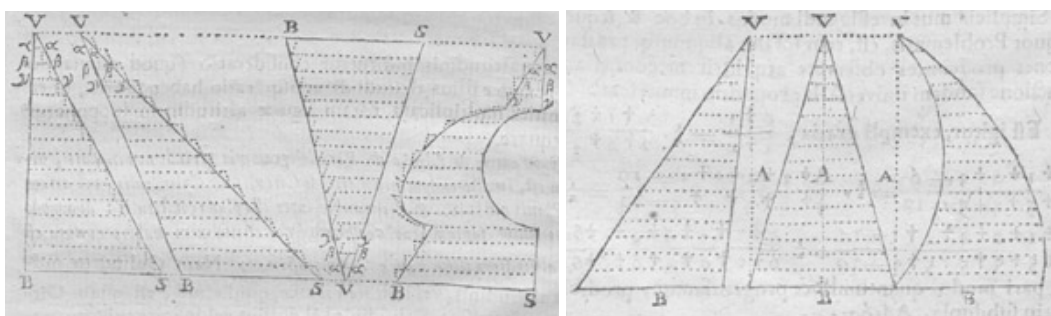
come la somma  $0 + 1 + 2 + 3 + \dots + n$  con  $n$  un numero finito, avremo allora che

$$\mathfrak{T} : \mathfrak{R} = \frac{\omega(\omega + 1)}{2} : (\omega + 1)\omega = 1 : 2,$$

il che prova che il rettangolo è doppio del triangolo.

Potremmo obiettare che le somme in questione sono divergenti e che questo rende l'argomento scorretto. Una volta presupposta la possibilità di analizzare le grandezze come aggregati di infinite parti indivisibili e di lavorare con numeri infiniti, tale obiezione risulta, tuttavia, spuria. Non solo, anche ammesso che l'obiezione si applichi alla considerazione delle somme come tali, non ne segue affatto che essa debba anche applicarsi al rapporto fra tali somme. In tal caso, quello che conta non è, infatti, il valore di tali somme, ma il confronto fra le leggi di generazione dei loro termini. Sono proprio tali leggi di generazione che permettono di considerare il rapporto di  $\mathfrak{T}$  e  $\mathfrak{R}$  come uguale a quello delle due somme infinite, e che sono oggetto del ragionamento e lo rendono corretto. È ben chiaro, tuttavia, che tali leggi sono dettate dalle caratteristiche del triangolo e del rettangolo presi nella loro originaria unità di continui. È proprio su tali continui che si innesta la rappresentazione discreta, e che, quindi, in ultima analisi, verte l'argomento.

Il risultato ottenuto tramite tale argomento era, per Wallis come per noi, assolutamente triviale, in quanto facile da ottenere in molti altri modi di gran lunga più semplici. Ciò che è rilevante nell'argomento precedente non è quindi tale risultato, ma il modo stesso in cui esso è raggiunto, ovvero l'argomento come tale. La ragione è che tale argomento è (abbastanza) facilmente generalizzabile, dapprima a triangoli non rettilinei, come Wallis stesso suggerisce tramite le figure seguenti



poi a tutte le figure delimitate da curve di equazione  $y = ax^q$ , con  $q$  un esponente razionale qualsiasi, e poi anche (più difficilmente) a altre figure, quali il cerchio. E è proprio tramite un argomento simile, esteso al caso del cerchio, che Wallis perviene a mostrare (anche se non propriamente a dimostrare) la non algebricità di  $\pi$ , un risultato ben lungi dall'essere triviale, oggi come allora.

Ciò che ci interessa qui non è tuttavia tanto la generalità e il potere dimostrativo dell'argomento precedente, quanto il fatto che la rappresentazione discreta delle grandezze involte, e, in generale, del metodo stesso degli indivisibili, si innesti su una precedente concezione di queste come continui, ancora perfettamente in linea con la caratterizzazione aristotelica.

La seconda cosa che vorrei osservare non riguarda direttamente né il metodo degli indivisibili, né le teorie de Viète et Descartes, ma la conquista matematica più importante che tale metodo e tali teorie hanno, insieme, e con il contributo di altre innovazioni, innescato: il calcolo infinitesimale, in entrambe le sue versioni, matematicamente equivalenti in senso lato, ovvero il calcolo differenziale di Leibniz e la teoria delle flussioni di Newton.

L'uno e l'altro nascono, per strade diverse, nell'alveo della geometria cartesiana e sulla scorta delle considerazioni infinitesimaliste rese popolari dal metodo degli indivisibili, e pervengono alla definizione di nuovi algoritmi algebrici capaci di sostituirsi ai procedimenti per esaurimento e a condurre quindi alla soluzione algoritmica di problemi classicamente infinitari, quali quello delle tangenti e delle normali e quello delle quadrature.

Anche qui non posso entrare nei dettagli. Vorrei solo osservare che questi algoritmi si fondano, nel caso di Leibniz, sulla nozione di differenziale (e quindi, ancora, come nel caso degli indivisibili, su una rappresentazione discreta di oggetti intesi in primo luogo come continui), e, nel caso di Newton, su una concezione delle grandezze come generate da un movimento perfettamente consono alla descrizione aristotelica di un movimento continuo. La natura algebrica di tali algoritmi non si oppone, quindi, in nessun modo alla concezione aristotelica della continuità delle grandezze, e è anzi, ancora una volta, proprio su tale concezione che la giustificazione e l'applicazione di tali algoritmi si fonda in ultima analisi.

Un'ulteriore osservazione renderà ancora più chiaro il quadro che ho così cercato di delineare. Non vi è dubbio che le teorie di Leibniz e Newton, visti con gli occhi di un matematico moderno, trattino del continuo. I loro teoremi, nelle versioni oggi disponibili, sono tutti introdotti dopo aver fornito una definizione formale del continuo dei numeri reali e della continuità delle funzioni rilevanti. Eppure nulla di lontanamente simile a tali definizioni, in ognuna delle forme in cui esse sono oggi disponibili, lo era per Leibniz e Newton e, più in generale, nel XVII e XVIII secolo. Come è possibile questo? La risposta è semplice: il ruolo che oggi è giocato da tali definizioni, quello di fornire il dominio di variazione delle variabili che esprimono delle grandezze prese nel suo insieme, e quello di garantire che le variabili che esprimono ascissa e ordinata di una curva,

varino in modo coordinato senza bruschi cambiamenti di ritmo, era giocato dalla considerazione di entità geometriche, quali la retta (infinita), — presa come asse di ogni variazione, concepita come un continuo sul quale é sempre possibile operare divisioni atte a attualizzare su di esso delle rappresentazioni di ogni sorta di grandezza lineare, tanto infinita, quanto infinitamente piccola o indivisibile —, o le differenti curve — intese o come come traiettorie di un movimento unico (e quindi continuo), sia pure scomposto in due o tre componenti lungo le direzioni della o delle variabili principali, o come grafico di un incremento spaziale rettilineo, relativamente al parametro temporale espresso dalla variazione di tale o tali variabili.

\* \* \*

Con Leibniz, qualcosa di nuovo tuttavia appare.

L'interesse per la nozione di continuità percorre la sua intera vita intellettuale. Egli avanza, in periodi e contesti diversi, numerose caratterizzazioni e definizioni dei continui e della continuità, così come diverse formulazioni del cosiddetto principio di continuità, affrontando le questione da numerosi punti di vista complementari e, a volte, incompatibili. Non è possibile qui dare un'idea, anche solo sommaria o approssimata, della vasta moltitudine di note, appunti, saggi e opere in cui egli si cimenta con tale questione, dei diversi tentativi che egli compie per pervenire a tali caratterizzazioni, definizioni e fomulazioni, così come di quelle che avanza in modo assertorio, per pervenire poi, spesso, a correggerle, completarle, rigettarle. Mi limiterò a due esempi che non solo mi paiono più significativi di altri, ma che corrispondono anche, a mio parere, a delle svolte cruciali nella storia che sto raccontando. Per ragioni di ordine concettuale, li presenterò in ordine cronologico inverso. Questa scelta espositiva è resa possibile tanto dall'attitudine intellettuale di Leibniz, il quale non si preoccupa affatto di abbandonare o anche contraddire acquisizioni precedenti, seguendo strade diverse, quanto dal fatto che il primo esempio che considererò, pure cronologicamente successivo al secondo, sembra non solo rispondere à uno scopo essenzialmente diverso da questo, ma anche esserne essenzialmente indipendente.

**a.** Incomincerò con presentare quella che, a prima vista, almeno, si presenta come una ripresa della caratterizzazione di Aristotele. Tale ripresa porta tuttavia con sé almeno una differenza essenziale: essa non sembra più essere una caratterizzazione di una proprietà essenziale di corpi e eventi fisici, solo successivamente estendibile a oggetti matematici, ma appare direttamente come una definizione matematica.

La riflessione critica di Leibniz a proposito della nozione aristotelica della continuità, e, in particolare, della differenza fra contiguità e continuità, lo accompagna, anch'essa, lungo tutta la sua vita intellettuale, segnando momenti di maggiore vicinanza e lontananza dalle caratterizzazioni di Aristotele. Qui considererò solo uno stadio di tale riflessione, cui Leibniz giunge verso la metà degli anni '90 del XVII secolo (ringrazio Massimo Mugnai e Vincenzo de Risi per le preziose informazioni e spiegazioni a questo proposito, che hanno avuto la gentilezza di condividere con me; il secondo mi ha anche permesso di leggere un suo ricchissimo lavoro ancora inedito in cui la questione è discussa in dettaglio, entro un vastissimo contesto storico, che include, fra l'altro, una lettura essenzialmente diversa dalla mia del passaggio di Aristotele citato qui sopra).

Mi riferisco in particolare a un passo dello *Specimen geometriæ luciferæ*, uno dei tanti trattati che Leibniz lasciò inedito (pubblicato in seguito da Gerhardt nei *Mathematische Schriften*, VII, 260-299; il passo si trova a p. 284):

<Un> continuo è <un> tutto, qualsivoglia due parti cointegranti del quale (ovvero <due parti> che, prese insieme, coincidono con il tutto) hanno qualcosa in comune, e <che>, inoltre, se non sono ridondanti, ovvero non hanno alcuna parte in comune, o piuttosto se l'aggregato della grandezza di esse è uguale all'aggregato del tutto, allora hanno almeno <un> qualche estremo in comune.

Si potrebbe pensare che non si tratti di nulla di più che di una riformulazione della caratterizzazione di Aristotele, atta a evitare il richiamo alle delicate nozioni di insieme, uno, e parti consecutive. La quantificazione universale sulle coppie di parti cointegranti (data dal pronome 'quævis', qui tradotto con 'qualsivoglia') sembra tuttavia fare molto di più di questo: proprio perché tali parti sono supposte essere cointegranti, richiedere che esse abbiano qualcosa in comune equivale a avanzare una richiesta riguardo al tutto, e non solo alla parti stesse; equivale a richiedere che il tutto contenga esso stesso ciò che queste parti hanno in comune. La questione non è, quindi, più, come per Aristotele, la relazione (possibile o impossibile) che le parti rilevanti sono supposte avere fra di loro, ma piuttosto la condizione che il tutto deve soddisfare perché esse possano condividere qualcosa. A patto che le nozioni di tutto, parte e estremo di una parte possano venir chiarite opportunamente, spostare l'attenzione da una questione all'altra permette inoltre di avanzare una condizione facilmente esprimibile in termini logici. Per comprendere come Leibniz intendesse queste nozioni cruciali, dovremmo entrare in molti dettagli assai fini propri non solo allo *Specimen*, ma anche a altri trattati più o meno

coevi e successivi. Qui non posso certo farlo. Posso però menzionare due possibili interpretazioni, rispettivamente suggerite da Enrico Giusti (in un articolo del 1990, “Immagini del continuo”, ora disponibile anche sul web: <http://lexicon.cnr.it/index.php/DDL/article/view/39/25>), e da Vincenzo De Risi (nel lavoro inedito menzionato qui sopra).

Giusti suggerisce di intendere “con tutte le cautele che sono necessarie” la nozione leibniziana di parte come “molto vicina” a quella di sottoinsieme chiuso, il che, porta, naturalmente, a pensare il tutto come un insieme dotato di una qualche forma di topologia, e un estremo di una parte come un bordo. Ne segue che il passo di Leibniz può essere inteso come tale da avanzare la seguente definizione:

- Un insieme chiuso  $S$  è un continuo se (e solo se)

$$\forall X, Y [(S \subset X \cup Y \wedge S \cap X \neq \emptyset \wedge S \cap Y \neq \emptyset) \Rightarrow S \cap X \cap Y \neq \emptyset],$$

dove le variabili ‘ $X$ ’ e ‘ $Y$ ’ variano su insiemi chiusi.

Modernizzando, ne avremmo allora che, nel passo citato, Leibniz definisce un continuo come un insieme chiuso connesso.

Limitando le interpretazione modernizzanti delle nozioni in questione, ma ammettendo, comunque, che, in senso leibniziano, una parte possa essere assimilata a un “sottoinsieme proprio dell’intero, omogeneo a esso”, e denotando con ‘ $\mathcal{P}(M)$ ’ la “collezione” delle parti di una grandezza geometrica  $M$  e con ‘ $\partial m$ ’ un estremo di una sua parte  $m$ , De Risi suggerisce, invece, di intendere il passo di Leibniz come tale da avanzare quest’altra, molto più imprecisa, definizione:

- Una grandezza geometrica  $M$  è un continuo se (e solo se)

$$\forall x, y \left[ x, y \in \mathcal{P}(M) \Rightarrow \left( \begin{array}{l} (x \cup y = M \wedge x \cap y \notin \mathcal{P}(M)) \Rightarrow \\ \exists z [z \subset M \wedge z = \partial x = \partial y] \end{array} \right) \right]$$

Applicata al caso paradigmatico in cui  $M$  sia una linea, e pensando le parti di essa come delle porzioni proprie di tale linea, ne avremmo che tale linea è continua se (e sole se), prese qualsivoglia due tali porzioni che non hanno, a loro volta, nessuna porzione in comune, ma che, prese insieme, esauriscono la linea, vi è sempre sempre su  $M$  un punto che funge da estremo comune di tali porzioni. Basterebbe allora assumere che due linee date sono continue, per concluderne agevolmente che la loro intersezione genera un punto. Nel caso ben noto della dimostrazione di Euclide della proposizione I.1 degli *Elementi*, basterebbe, per esempio, assumere che i due cerchi aventi il segmento dato come raggio sono



continui, per concluderne che la loro intersezione genera un punto, il che sarebbe, a sua volta, sufficiente per colmare ogni lacuna nella dimostrazione. Di più, una volta ammesso che una linea geometrica possa pensarsi come un insieme di punti, nessuno dei quali ne costituisca una porzione, ne seguirebbe qualcosa di molto simile alla caratterizzazione dell'“essenza della continuità” della retta suggerita da Dedekind, nel suo saggio *Stetigkeit und irrationale Zahlen* (1872), su cui tornerò più avanti.

**b.** Vengo ora al secondo esempio delle riflessioni di Leibniz.

In una breve nota in latino, apparsa sul numero di marzo 1686 degli *Acta Eroditorum* (“Brevis demonstratio erroris memorabilis Cartesii [...]”, pp. 161-63), Leibniz aveva obiettato contro il principio di conservazione della quantità di moto, difeso, invece, da Descartes, difendendo, invece, il proprio principio di conservazione della forza viva. La stessa nota, tradotta in francese, era poi apparsa anche sul numero di settembre dello stesso anno delle *Nouvelles de la République des lettres* (“Démonstration courte d’une erreur considérable de M. Descartes [...]”, pp. 996-999), insieme a una replica dell’abate de Catelan (“Courte remarque de M. l’Abbé D. C. [...]”, pp. 999-1005). Tale replica aveva provocato una reazione dello stesso Leibniz, apparsa sul numero di febbraio 1687 delle stesse *Nouvelles* (“Replique de M. L. à M. l’Abbé D.C. [...]”, pp. 131-145), nel corso della quale questi aveva discusso le considerazioni critiche fatte da Nicolas de Malebranche nella *Recherche de la verité* a proposito delle sette leggi dell’urto fra corpi anelastici (in moto rettilineo), avanzate da Descartes nella parte II dei *Principia Philosophiæ* (§§ 46-52). Pur ammettendo il principio di conservazione della quantità di moto, Malebranche aveva rigettato tre fra queste leggi (la quarta, la sesta e la settima), accettando le altre, mentre, secondo Leibniz, solo la prima di tale leggi (che è di fatto corretta) avrebbe dovuto essere accettata. Malebranche aveva, a sua volta, risposto in modo piuttosto conciliante, in una lettera all’abate de Catelan, anch’essa pubblicata sulle *Nouvelles* (Aprile, 1687, pp. 448-450). Non ancora soddisfatto, Leibniz risponde a Malebranche in una nuova lettera a Pierre Bayle, fondatore e principale redattore delle *Nouvelles*, che questi pubblica di nuovo sul numero del luglio dello stesso anno (pp. 744-753).

E’ proprio quest’ultima lettera che ci interessa. Leibniz osserva che alcune considerazioni di Malebranche collidono con un “certo principio di ordine generale [...] di grande uso nel ragionamento [...] [ma] non ancora impiegato abbastanza, né conosciuto in tutta la sua estensione”, che egli avrebbe “osservato”, e che prende quindi l’occasione di “spiegare” così (pp. 745-46; traduzione mia, latino e italici nell’originale):

Esso [questo principio] trae la sua origine dall’*infinito*, è assolutamente necessario in geometria, ma riesce anche in fisica,

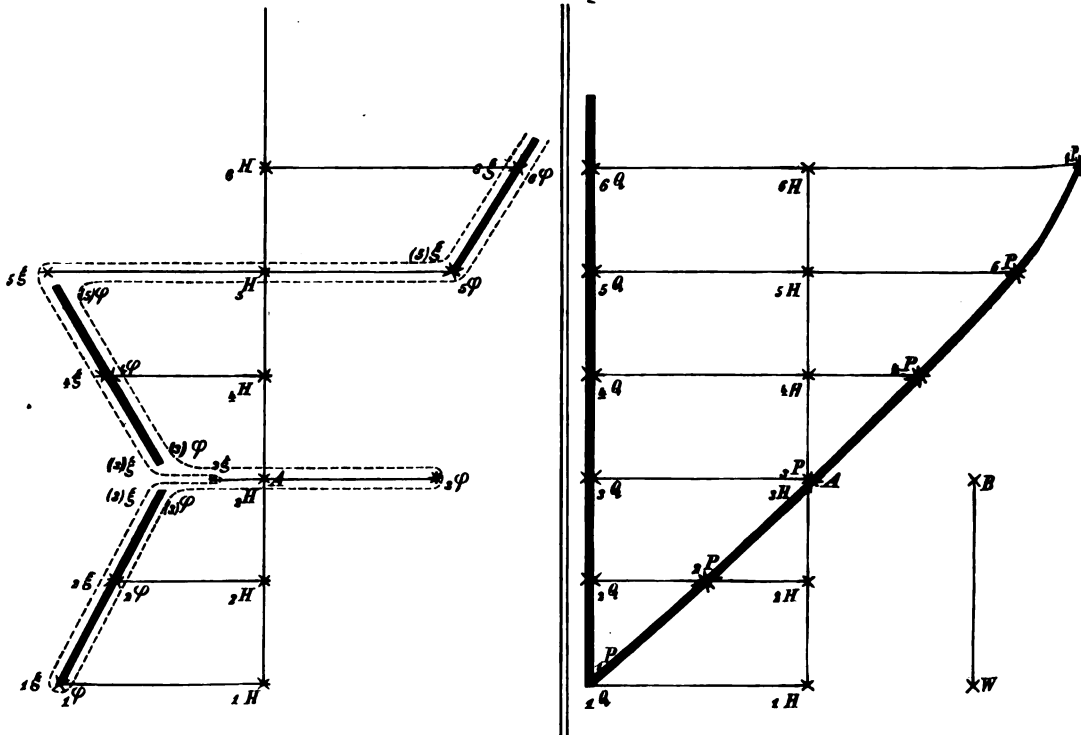
perché la saggezza sovrana, che è fonte di tutte le cose, agisce come un geometra perfetto, e secondo un'armonia alla quale non si può aggiungere nulla. [...] Si può enunciare così: quando *la differenza di due casi* può essere diminuita al di sotto di ogni grandezza data, *in datis*, o in quello che è posto, occorre che essa possa anche trovarsi diminuita al di sotto di ogni grandezza data *in quesitis*, o in ciò che risulta. O, per parlare più familiarmente: *quando i casi (o quello che è dato) si avvicinano continuamente, e infine si perdono l'uno nell'altro, occorre che le successioni degli avvenimenti (o ciò che è richiesto) lo facciano a loro volta.* Ciò dipende a sua volta da un principio più generale, ovvero: *datis ordinatis, etiam quæsitæ sunt ordinata.*

Per esemplificare tale principio, Leibniz ritorna proprio sulle leggi dell'urto di Descartes, osservando, in particolare, che la prima e la seconda di tali leggi non possono valere insieme, perché, se così fosse, il principio appena enunciato sarebbe violato. Entrambe le leggi riguardano due corpi, B e C, che si muovono, con la stessa velocità (scalare), di moto rettilineo lungo la stessa retta, ma con versi opposti, e che pervengono a urtarsi. La prima dice che se tali corpi sono uguali (o meglio hanno massa uguale), allora, dopo l'urto, invertano il loro verso, mantenendo la stessa velocità. La seconda dice che se B è, anche di poco, più grande di C (o meglio, ha massa più grande), allora entrambi continuano a muoversi con la stessa stessa velocità e direzione secondo il verso che B aveva prima dell'urto. Se così fosse, dice Leibniz, una variazione molto piccola in C, che lo rendesse (di massa) uguale a B avrebbe un effetto molto grande, producendo un'inversione del suo moto dopo l'urto.

In un testo successivo, le *Animadversiones in partem generalem Principiorum Cartesianorum* (1692), Leibniz generalizzerà la sua critica alle leggi di Descartes, rendendo manifesta l'incompatibilità fra la prima, da una parte, e la terza, sesta e settima, dall'altra, attraverso un diagramma (*Philosophischen Schriften*, IV, p. 382). La prima, terza e sesta legge riguardano tutte due corpi B e C uguali fra loro. La settima riguarda due corpi diversi, ma Leibniz suppone che essa venga generalizzata al caso in cui i due corpi siano uguali. Il diagramma è quindi supposto rappresentare nello stesso tempo, attraverso un uso astuto di indici appropriati, le quattro leggi in questione, poste a confronto con le corrispettive leggi proposte dallo stesso Leibniz, mostrando, in modo visualmente perspicuo, come l'incompatibilità riguardi solo le prime. Ecco:

Secundum Cartesium.  
Delineatio monstrosa.

Secundum Veritatem.  
Delineatio concinna.



In esso:

- $BW$  rappresenta la velocità uniforme di B prima dell'urto, la quale è supposta essere la stessa in ognuno dei diversi casi considerati, relativi alle diverse leggi;
- $A_iH$  ( $i = 1, 2, \dots, 6$ ) rappresenta la velocità uniforme di C (uguale a B, come si è detto), prima dell'urto, velocità che è supposta variare da caso a caso;
- ${}_iH_i\varphi$  ( $i = 1, 2, \dots, 6$ ) rappresenta la velocità uniforme di B dopo l'urto secondo le leggi di Descartes;
- ${}_iH_iP$  ( $i = 1, 2, \dots, 6$ ) rappresenta la velocità uniforme di B dopo l'urto secondo le leggi di Leibniz;
- ${}_iH_i\xi$  ( $i = 1, 2, \dots, 6$ ) rappresenta la velocità uniforme di C dopo l'urto secondo le leggi di Descartes;
- ${}_iH_iQ$  ( $i = 1, 2, \dots, 6$ ) rappresenta la velocità uniforme di C dopo l'urto secondo le leggi di Leibniz.

Preso il punto A come origine e la retta  $A_iH$  come asse, il verso dei moti (rettilinei) di B e C è rappresentato dall'essere posto del segmento rilevante da un lato o dall'altro di tale punto o asse. I segmenti  $A_iH$  ( $i = 1, 2$ ) e  $A_iH$  ( $i = 3, \dots, 6$ ) rappresentano, quindi, le velocità di C, mentre questo si muove, rispettivamente, con lo stesso verso o con verso contrario rispetto a B. In particolare, la prima legge corrisponde al caso  $i = 5$ :  $A_5H$  è uguale

a  $BW$ , ma posto dal lato opposto di  $A$  rispetto a quest'ultimo, così come  ${}_5H_5\xi$  è uguale a  ${}_5H_5\varphi$ , ma posto dal lato apposto di  ${}_5H$  rispetto a quest'ultimo. Il fatto che lo stesso valga per  ${}_5H_5Q$  e a  ${}_5H_5P$  manifesta il fatto che Leibniz si accorda con Descartes a proposito di tale legge. Lo stesso accordo sussiste anche nel caso  $i = 1$ , che corrisponde alla generalizzazione della settima legge di Descartes al caso limite in cui i due corpi hanno velocità e verso iniziali uguali. In tal caso, infatti, non vi è urto, e tali corpi continuano indefinitamente a muoversi con velocità e verso uguali. In ogni altro caso le leggi di Descartes e Leibniz divergono.

Le due fratture nelle linea in grassetto a sinistra manifestano l'incompatibilità rispettivamente della sesta legge di Descartes con la terza e la generalizzazione della settima, e della prima con la terza. Il caso  $i = 3$  corrisponde, infatti, alla sesta legge, la quale prescrive che se  $C$  è in riposo e  $B$  lo urta,  $C$  si mette in moto con la stessa direzione e verso di  $B$  prima dell'urto, mentre  $B$  stesso inverte il suo verso, mentre il caso  $i = 2$  corrisponde alla generalizzazione della settima legge nel caso in cui  $C$  si muove, prima dell'urto, con velocità minore di  $B$  e con lo stesso verso, la quale prescrive che, dopo l'urto, i due corpi si muovano insieme con lo stesso verso che avevano prima dell'urto, mentre il caso  $i = 4$  corrisponde alla terza legge, la quale prescrive che se  $C$  si muove, prima dell'urto, con velocità minore di  $B$  e con verso contrario, i due corpi si muovano insieme, dopo l'urto, con il verso di  $B$ . D'altra parte, il caso  $i = 6$  corrisponde ancora alla terza legge, posto che i ruoli di  $B$  e  $C$  siano invertiti.

Il fatto che le due linee in grassetto a destra non presentino nessuna frattura manifesta il fatto che la leggi di Leibniz non soffrano, invece, di nessuna incompatibilità.

Al di là del contenuto meccanico delle leggi in questione, ciò che qui ci interessa è che il principio avanzato da Leibniz, che altro non è che la prima versione di quello che diventerà noto come Principio di continuità, non mira affatto a caratterizzate o definire un continuo, inteso come un'oggetto o evento considerato come un tutto, ma riguarda piuttosto la relazione fra due grandezze correlate. E' proprio il modo in cui tali grandezze si correlano che manifesta o no una forma di continuità, o, meglio ancora, un comportamento continuo. Nel caso del diagramma precedente, la continuità e discontinuità, rispettivamente rappresentate nel grafico di destra e di sinistra, riguardano la correlazione fra i valori delle velocità di  $C$  prima dell'urto, rappresentati da segmenti presi sull'asse  $A_iH$ , e i valori della velocità di  $B$  e  $C$  dopo l'urto, rappresentato da segmenti ortoginiali a tale asse. Se l'analogia fra tale rappresentazione e la rappresentazione di una curva relativamente a due assi cartesiani (ortogonali) è lampante, quello che è ancora più rilevante è che la continuità e discontinuità di cui è qui questione non sono tanto quelle delle linee

in grassetto, ovvero di ciò che si presenta qui come analogo alla curva, quanto quella delle diverse leggi di Descartes, al variare della velocità  $C$  prima dell'urto. In termini moderni, si tratta della continuità e discontinuità di una funzione, piuttosto che di una linea. E d'altra parte è la formulazione del principio stesso che ricorda molto da vicino (e evolverà in seguito verso) l'idea che è sottesa dalla nostra definizione di continuità di una funzione: vi è continuità se a una variazione insensibile della variabile principale corrisponde una variazione altrettanto insensibile della variabile dipendente, e discontinuità se alla prima corrisponde, invece, una variazione sensibile della variabile dipendente.

Resta il fatto che, così come per Aristotele, la continuità non era una proprietà che certi oggetti matematici potevano avere o non avere, quanto una proprietà saliente e essenziale di corpi fisici e movimento, anche per Leibniz essa è non tanto una proprietà di alcune correlazioni o funzioni, ma piuttosto una caratteristica essenziale della natura stessa, una legge generale che la nature invariabilmente rispetta. E quando Leibniz applicherà più tardi il suo principio alle curve di cui cercherà, tramite il suo nuovo calcolo, tangenti normali e aree, non lo farà tanto per distinguere curve continue e discontinue, ma piuttosto per giustificare i suoi procedimenti richiamandosi alla continuità di esse, intesa, appunto, come uniformità della correlazione fra le variazioni delle loro ascisse e ordinate.

Quando, un secolo più tardi, Euler parlerà di discontinuità di una funzione ("De usu functionum discontinuarum in analysis", *Novi Comm. Acad. Sci. Petropolitanae*, 1765), lo farà pensando una funzione in modo molto diverso da come la si pensa oggi, ovvero non come una legge di correlazione fra grandezze (o, *a fortiori*, insiem), ma piuttosto come una "quantità determinata in qualsiasi modo da una qualche variabile", e dirà una funzione, così intesa, continua o discontinua qualora essa, in quanto quantità variabile, identificata in base a un qualche criterio esterno, sia rispettivamente determinata da una sola o da più leggi di formazione distinte, ovvero grazie a una sola o a diverse espressioni analitiche: una concezione che richiama molto più da vicino la caratterizzazione aristotelica del continuo come uno, che il principio di Leibniz.

\* \* \*

Sarà solo più tardi, con il cosiddetto processo di aritmetizzazione dell'analisi che le cose cambieranno, e le due idee appena esposte di Leibniz troveranno un'espressione più matura. Non sarà un caso, tuttavia, che tale processo porrà alla propria base non tanto la nozione di funzione, intesa sia come grandezza correlata o legge di correlazione, quanto la nozione di grandezza e quella, da essa derivata, di numero.

Nel suo *Cours d'analyse* (1921), Cauchy definisce un numero come una “misura assoluta di una grandezza”, e una quantità come un numero relativizzato da un segno, ovvero una quantità positiva o negativa (o nulla). Sarà solo a partire dalla precisazione di tali nozioni, che egli perverrà, poi, a parlare di funzioni, come di quantità correlate a un'altra quantità. Il problema diventerà allora quello di stabilire come una quantità (o, nel nostro senso, un numero reale) dipende da un altro, e sarà solo a quel punto che interverrà la celebre definizione di funzione continua. Una funzione  $f(x)$ , intesa proprio come quantità dipendente dall'altra quantità  $x$ , sarà detta continua, “fra due limiti assegnati” a  $x$  quando “per ogni valore di  $x$  intermedio fra questi limiti, il valore numerico [ovvero assoluto, nel nostro linguaggio] delle differenza  $f(x + \alpha) - f(x)$  decresce indefinitamente con quello di  $\alpha$ ”, ovvero quando “un accrescimento infinitamente piccolo della variabile produrrà sempre un accrescimento infinitamente piccolo della variabile stessa”.

Non sarà necessario, qui, entrare in delicati dettagli relativi alla nozione di infinitamente piccolo usata da Cauchy, ciò che richiederebbe una trattazione troppo ampia. Basterà osservare che è solo a patto di porre l'attenzione sui numeri reali stessi (o quantità), e sulla loro variazione (piuttosto che sulla legge da cui tale variazione dipende), che l'idea di Leibniz si trasforma nella prima, ancora incerta, versione della nostra definizione di continuità di una funzione.

L'incertezza della definizione attiene non solo al richiamo alla nozione di infinitamente piccolo o a quella, non precedentemente chiarita, di decrescita indefinita, ma anche, e forse soprattutto, al fatto che essa definisce *d'emblé* la continuità in un intervallo, pur facendo riferimento a ognuno dei valori che  $x$  prende in esso. Supponiamo che  $f(x)$  sia continua in un certo intervallo in accordo a tale definizione. Consideriamo un valore qualsiasi  $x = x_0$  che  $x$  prende in esso. Dalla definizione seguirà che  $|f(x_0 + \alpha) - f(x)|$  “decresce indefinitamente” con  $|\alpha|$ , o, che dir si voglia, che la differenza  $f(x_0 + \alpha) - f(x)$  è infinitamente piccola se  $\alpha$  lo é. Non basterebbe, allora, questo fatto per stabilire che la funzione  $f(x)$  ha una certa, rilevante proprietà nel punto  $x = x_0$ , proprietà che è indipendente, come tale, dalle proprietà che tale funzione potrebbe avere in ogni intorno di tale punto? Non si dovrebbe poter dire che essa è continua in tale punto, indipendentemente dal suo essere tale in un qualsiasi intorno di esso? Cauchy sembra non voler arrischiarsi a compiere tale passo. Egli maschera, in altri termini, la proprietà puntuale che egli stesso definisce presentandola, sotto le mentite spoglie di una proprietà propria a un intervallo, se non genuinamente globale. Sembra, quindi, che Cauchy (coscientemente o meno) arretri spaventato di fronte alla possibilità stessa di concepire la continuità di una funzione come una proprietà puntuale,

il che comporterebbe, infatti, uno *shift* del tutto innaturale se comparato all'idea originale di Leibniz.

Sarà solo Weierstrass, che, una quarantina d'anni più tardi, compirà coscientemente tale passo, nelle sue lezioni di analisi, accompagnandolo con l'introduzione esplicita del cosiddetto metodo  $\varepsilon$ - $\delta$ , implicitamente già largamente anticipato da Lagrange. Egli dirà che una funzione  $f(x)$ , a variabile reale, è continua in un punto  $x$  à condizione che

$$\forall \varepsilon \exists \delta \forall z [ |x - z| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(z)| < \varepsilon ],$$

dove ' $\varepsilon$ ' e ' $\delta$ ' variano sui numeri reali positivi e ' $z$ ' sui reali *tout-court*, stabilendo, poi, che tale funzione è anche continua in un certo intervallo qualora essa lo sia in ognuno dei suoi punti (ciò che permetterà, fra le altre cose, di indicare chiaramente la differenza fra continuità uniforme e non uniforme, che è, invece, difficile da specificare in accordo con la definizione di Cauchy).

Per meglio apprezzare la differenza fra i due approcci (e meglio comprendere come essa sia, come tale, largamente indipendente dal richiamo o meno alla nozione di infinitamente piccolo), consideriamo la seguente funzione:

$$y = \begin{cases} x^2 & \text{se } x \neq 0 \pm \frac{1}{n} \\ x^2 - \frac{1}{n} & \text{se } x = 0 \pm \frac{1}{n} \end{cases} \quad (n = 1, 2, \dots)$$

Non è difficile verificare che, in base alla definizione precedente, essa è continua in  $x = 0$ , pur non essendo tale in qualsiasi intorno di tale punto. Ciò dovrebbe bastare a rendere chiara la profondità dello *shift* indotto dalla definizione di Weierstrass. Non solo, ciò dovrebbe anche chiarire come questo *shift* porti con sé anche un cambiamento radicale nell'immagine stessa del continuo su cui la variabile indipendente  $x$  è intesa variare, il quale appare ora, inevitabilmente, come un insieme (o collezione) di valori o punti (geometricamente parlando), piuttosto che come un sostrato su cui tali valori o punti possano venir presi o attualizzati, come implicato, invece, dalla caratterizzazione di Aristotele.

Ciò comporta, fra le altre cose, che la definizione di tale continuo, quale che essa possa essere, debba necessariamente essere intesa come puramente matematica: non più come riferita a oggetti o eventi fisici pensati, in accordo con Aristotele, come sostrati materiali di forme matematiche, ma come direttamente riferita a oggetti intrinsecamente matematici, indipendenti da ogni sostrato materiale, che, al più, vengono rappresentati da qualche appropriato oggetto o evento fisico, in ottemperanza a appropriate convenzioni.

Questa fu probabilmente una delle ragioni che convinse i matematici della seconda metà dell'ottocento dell'esigenza improrogabile di rendere

precisa l'idea stessa di tale continuo. A fronte di tale esigenza, le due nozioni di continuità e di continuo, che in Aristotele erano fra loro coincidenti, posto che un continuo non era inteso come null'altro se non un oggetto continuo, e che già Leibniz aveva cominciato a distinguere (come la considerazione dei due esempi precedenti dovrebbe bastare a chiarire), vengono definitivamente a separarsi. Se lo scopo di una definizione di continuità appare quello di stabilire che cosa rende continuo un certo oggetto appropriato, quello della definizione di un continuo è di spiegare che cosa renda possibile, in generale, una variazione continua, pensata come parametro di ogni altra variazione, continua o discontinua che essa sia. Nel nuovo quadro matematico, questo secondo scopo si trasforma in quello di definire un insieme continuo e, in particolare, l'insieme continuo dei reali (che sarà poi detto semplicemente 'continuo', o 'il continuo', in forza della categoricità della definizione scelta, posto che sia al second'ordine). L'emergere di tale esigenza deriva da varie ragioni. Una di esse può tuttavia venir indicata in modo preciso e chiaro senza tecnicismi: si tratta di rendere l'analisi matematica veramente autonoma dalla geometria, di poterla presentare come la teoria di un oggetto che le è proprio.

*L'annus mirabilis* a questo riguardo è il 1872, anno in cui comparvero cinque memorie, in cui tale scopo veniva variamente realizzato. I cinque autori di tali memorie furono Kossac (che esponeva però delle idee apprese da Weirstrass), Meray, Cantor, Heine e Dedekind. Per quanto tutte diverse fra loro, le proposte contenute in queste memorie possono ricondursi a due impostazioni fra loro più diverse di altre, quelle che ritroviamo all'opera negli approcci di Dedekind e Cantor, divenuti in seguito paradigmatici. Sono queste che esporrò brevemente.

Per quanto lo scopo indicato sia in qualche modo sostanziale con l'idea di dissociare la nozione della totalità dei numeri reali dall'immagine di una retta su cui si suppone di prendere tutti i possibili segmenti originati in un punto prefissato, esso è realizzato da Dedekind proprio partendo dall'analogia fra tale insieme e i punti di una retta. Come abbiamo accennato sopra, Dedekind comincia, infatti, con il domandarsi quale sia "l'essenza della continuità" di una retta. In senso aristotelico, tale essenza non è null'altro che la caratteristica della retta che fa sì che essa possa contenere come parti di sé tutti i segmenti la cui lunghezza possa essere misurata da un numero reale. Per renderla manifesta, Dedekind inverte, tuttavia, l'ordine concettuale aristotelico, partendo, appunto, dalla totalità di tali segmenti, o, meglio dei loro estremi (posto che essi siano tutti originati in un punto comune), e pensando la retta, come l'insieme di tali estremi. Potremmo riformulare il suo ragionamento come segue. A partire da un punto qualsiasi  $O$  della retta cominciamo, con un qualche metodo lecito, a costruire su di essa, e dai due lati di tale punto, dei seg-



menti diversi, e assegniamo tali segmenti a due classi non vuote  $A$  e  $B$ , tali che ogni segmento che appartiene a  $A$  abbia il suo estremo altro da  $O$  a sinistra dell'estremo altro da  $O$  di ogni segmento che appartiene a  $B$ , in modo che l'intersezione di  $A$  e  $B$  risulti vuota, e che ogni segmento costruttibile (tramite il metodo scelto) appartenga a  $A$  o a  $B$ , in modo che l'unione di  $A$  e  $B$  si identifichi con la totalità dei segmenti costruttibili (con tale metodo). *Mutatis mutandis*, Dedekind osserva allora che il metodo costruttivo ammesso esaurisce tutte le possibilità costruttive, ovvero permette di identificare, come estremi di segmenti costruiti diversi, tutti i punti della retta se e solo se è sempre possibile trovare un segmento il cui estremo altro da  $O$  sia nel contempo a destra di tutti gli estremi altri da  $O$  dei segmenti di  $A$ , con la sola possibile eccezione di uno di essi, con il quale sia coincidente, e a sinistra di tutti gli estremi altri da  $O$  dei segmenti di  $B$ , con la sola possibile eccezione di uno di essi, con il quale sia coincidente.

Tale ragionamento ha un immediato correlato numerico, che mostra come l'insieme dei numeri reali, o meglio una struttura che possa valere come tale insieme, possa essere ottenuto a partire dall'insieme totalmente ordinato  $\langle \mathbb{Q}, < \rangle$  dei numeri razionali. Immaginiamo un metodo costruttivo che permetta di costruire tutti i segmenti la cui lunghezza possa essere espressa da un numero razionale, e solo questi. L'insieme dei loro estremi corrisponde, quindi, all'insieme  $\mathbb{Q}$ . Realizziamo una partizione di tale insieme in due classi, tale che ogni elemento di una classe sia minore di ogni elemento dell'altra classe. Tale partizione è notoriamente detta 'taglio' o 'sezione'. Possiamo pensare l'insieme dei numeri reali come l'insieme di tali sezioni, posto che, per ogni numero razionale  $q$ , le due partizioni

$$\{(-\infty, q], (q, +\infty)\} \quad \text{e} \quad \{(-\infty, q), [q, +\infty)\}$$

siano prese come coincidenti. Ogni partizione come queste, in cui uno dei due sottoinsiemi include un suo estremo, corrisponde a un numero razionale, ovvero a un elemento dell'insieme di partenza, il numero  $q$  stesso. Ogni partizione in cui uno dei due sottoinsiemi include un suo estremo corrisponde a un nuovo numero non più razionale, identificato dalla partizione stessa, ovvero a un numero irrazionale. L'esempio più ovvio è quello della partizione che assegna un numero razionale  $x$  ai due sottoinsiemi se e solo se  $x^2$  è rispettivamente minore o maggiore di 2, che corrisponde, ovviamente a  $\sqrt{2}$ .

L'approccio di Cantor è essenzialmente diverso. Invece di partire dall'insieme ordinato  $\langle \mathbb{Q}, < \rangle$ , egli parte dalla struttura  $\langle \mathbb{Q}, <, +, d \rangle$  costituita dal gruppo additivo totalmente ordinato  $\langle \mathbb{Q}, <, + \rangle$ , su cui è definita la distanza  $d(x, y) = |x - y|$ , e mostra come ottenere da essa l'insieme dei nu-

meri reali, o meglio, di nuovo, un struttura che possa valere come tale insieme. Ne segue che, invece di ragionare sulla costituzione stessa della retta reale, intesa come insieme di punti, Cantor ragiona sulla procedura di misura dei segmenti, presi su di essa, identificando un correlato analitico di essa. In un senso, tale approccio è chiaramente meno economico, perché la struttura di partenza è più ricca, ma la definizione che esso permette di ottenere ha il grande vantaggio di permettere una definizione molto più agevole del campo ordinato dei reali.

Si definiscono dapprima le successioni di Cauchy su  $\langle \mathbb{Q}, <, +, d \rangle$ , come quelle successioni  $\{q_i\}$  di razionali tali che

$$\forall \zeta \exists N \forall m, n [N < m \Rightarrow |q_m - q_{m+n}| < \zeta]$$

dove ‘ $\zeta$ ’ varia su numeri razionali positivi, e ‘ $m$ ’, ‘ $n$ ’ e ‘ $N$ ’ variano sui numeri naturali. Si definisce quindi una relazione di equivalenza fra tali successioni come segue

$$\{q_i\} \equiv \{p_i\} \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} |q_n - p_n| = 0,$$

e si definisce infine l’insieme  $\mathbb{R}$  dei numeri reali come l’insieme delle classi di equivalenza, delle serie di Cauchy su  $\langle \mathbb{Q}, <, +, d \rangle$  rispetto a  $\equiv$ .

Per entrambe le definizioni di Dedekind e Cantor, è poi abbastanza facile mostrare la completezza dell’insieme che esse definiscono. Nel primo caso si tratta di mostrare che l’insieme delle sezioni su  $\langle \mathbb{R}, < \rangle$  ottenute come quelle su  $\langle \mathbb{Q}, < \rangle$  è isomorfo a  $\mathbb{R}$  stesso. Nel secondo si tratta di mostrare che questo ha luogo per l’insieme delle classi di equivalenza delle successioni di Cauchy su  $\langle \mathbb{R}, <, +, d \rangle$ , secondo  $\equiv$ . È inoltre possibile mostrare che le due definizioni sono equivalenti, mostrando, per esempio, che le strutture ottenute dagli insiemi che essi definiscono, definendo su di essi una opportuna relazione d’ordine totale, costituiscono in entrambi i casi un insieme totalmente ordinato, denso e completo (ovvero tale che ogni suo sottoinsieme non vuoto superiormente limitato in tale insieme, possieda un estremo superiore in tale insieme), e che tutti gli insiemi totalmente ordinati, densi e completi sono isomorfi fra loro, ciò che corrisponde alla categoricità delle due definizioni, menzionata sopra.

\* \* \*

Resta un’ultima questione. Il continuo così definito, o, se si preferisce, il continuo, è (un) continuo nel senso di Aristotele? Potrebbe sembrare che basterebbe osservare che si tratta esplicitamente di un insieme per rispondere negativamente. La questione è tuttavia più complessa. Se un

insieme non violasse infatti alcuna condizione propria ai continui aristotelici si potrebbe ugualmente convenire che esso costituisce, per così dire, una buona oggettivazione della continuità aristotelica. Come vedremo, non è tuttavia così.

Prima di mostrarlo, mi pare importante fare un'osservazione ulteriore: per quanto l'insieme  $\mathbb{R}$  sia stato in ultima analisi ottenuto aggiungendo una immensa moltitudine di nuovi elementi all'insieme  $\mathbb{Q}$  dei numeri razionali (inteso come dato), la questione chiave non è affatto quella della sua cardinalità. Certo,  $\mathbb{R}$  è più che numerabile, mentre  $\mathbb{Q}$ , così come gli insiemi  $\mathbb{Z}$  e  $\mathbb{N}$  dei relativi e dei naturali, non sono che numerabili. Ma Cantor ha mostrato come sia possibile definire un sottoinsieme proprio di  $\mathbb{R}$  limitato, chiuso e totalmente ordinato, che sia nel contempo più che numerabile e non completo, e che non può, quindi, essere inteso, non solo come una coppia di un qualche intervallo di  $\mathbb{R}$ , ma neppure, come l'unione di suoi sotto-intervalli appropriati, o come una porzione di un qualche altro continuo.

Si tratta del cosiddetto insieme di Cantor, o semplicemente del cantor, come spesso si dice. Consideriamo l'intervallo  $[0, 1]$  preso sull'insieme totalmente ordinato dei reali stessi, e dividiamolo nei tre intervalli di uguale lunghezza  $[0, \frac{1}{3}]$ ,  $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ ,  $[\frac{2}{3}, 1]$ , escludendo poi l'intervallo aperto intermedio. Ciò permetterà di ottenere il nuovo insieme totalmente ordinato

$$\left[0, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, 1\right].$$

Ripetendo l'operazione su ognuno dei due intervalli chiusi  $[0, \frac{1}{3}]$  e  $[\frac{2}{3}, 1]$ , si ottiene il nuovo insieme totalmente ordinato

$$\left[0, \frac{1}{9}\right] \cup \left[\frac{2}{9}, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, \frac{7}{9}\right] \cup \left[\frac{8}{9}, 1\right].$$

Reiterando all'infinito questo procedimento si otteniamo un insieme con la stessa cardinalità del continuo, ma che non è ovviamente completo, e che anche intuitivamente non può essere concepito come continuo.

Tale conclusione potrebbe sembrare, a prima vista, affrettata. A ogni passo nella costruzione del nostro insieme eliminiamo un sotto-intervallo aperto di ognuno degli intervalli chiusi di cui disponiamo, la cui lunghezza è uguale a un terzo di quella di tale intervallo chiuso. La lunghezza totale degli intervalli eliminati a ogni passo sarà quindi un terzo della lunghezza totale degli intervalli ottenuti al passo precedente. Una breve riflessione ci permette di concludere che la lunghezza totale degli intervalli eliminati alla fine del processo sarà uguale a  $\frac{1}{3} \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^i = 1$ , ovvero alla lunghezza

dell'intervallo di partenza. Come è possibile ottenere, alla fine, un insieme con la stessa cardinalità di tale intervallo?

Per capirlo basta osservare che a ogni passo ci assicuriamo che molti numeri reali non potranno mai essere eliminati in nessuno dei passi successivi.

Questo è chiaramente vero per i limiti degli intervalli chiusi via, via ottenuti. Infatti, se dal principio siamo certi che 0 e 1 fanno parte del cantor, al primo passo ci assicuriamo che ne fanno parte anche  $\frac{1}{3}$  e  $\frac{2}{3}$ , al secondo che ne fanno parte anche  $\frac{1}{9}$ ,  $\frac{2}{9}$ ,  $\frac{7}{9}$  e  $\frac{8}{9}$ , al terzo che ne fanno parte anche  $\frac{1}{27}$ ,  $\frac{2}{27}$ ,  $\frac{7}{27}$ ,  $\frac{8}{27}$ ,  $\frac{19}{27}$ ,  $\frac{20}{27}$ ,  $\frac{25}{27}$  e  $\frac{26}{27}$ , e così via. Così, per ogni  $i$ , al  $i$ -esimo passo si assicuriamo che nuovi  $2^i$  numeri razionali fanno parte del cantor, ciò che ci assicura che esso comprende un'infinita numerabile di numeri razionali.

Ovviamente ciò non basta ancora, però, per concludere che il cantor ha la stessa cardinalità del continuo. Per farlo, denotiamo i reali fra 0 e 1 tramite numerali con la virgola, in base 3, ovvero della forma  $'0, n_1 n_2 n_3 \dots'$ , dove, per ogni  $j$ ,  $'n_j'$  è  $'0'$ ,  $'1'$  o  $'2'$ . Invece di  $'0'$  scriveremo  $'0,000\dots'$  e invece di  $'1'$ ,  $'0,222\dots'$ . Eliminiamo inoltre dai tali numerali quelli che presentano la sequenza  $'1000\dots'$ , i quali denotano gli stessi numeri denotati anche dagli stessi numerali in cui tale sequenza è sostituita da  $'0222\dots'$ . Ogni numero reale diverso contenuto nell'intervallo di partenza  $[0, 1]$  sarà allora denotato da un e un solo fra questi numerali. Potremmo allora dire che i numeri eliminati al primo passo saranno tutti quelli compresi fra  $0,0222\dots$  e  $0,2000\dots$  (limiti esclusi), i quali saranno necessariamente denotati da dei numerali contenenti una o più occorrenze di  $'1'$ . Più in generale, tutti i numeri denotati da numerali contenenti una o più occorrenze di  $'1'$  saranno prima o poi eliminati durante il processo, in quanto compresi fra numeri denotati da  $'0,0\dots0222\dots'$  e  $'0,\dots2222\dots'$ , che fungeranno da limiti di un intervallo aperto eliminato. Di converso, nessun numero denotato da un numerale che non contenga nessuna occorrenza di  $'1'$  sarà mai eliminato: se esso è razionale, esso sarà il limite di un intervallo chiuso conservato a un certo passo del processo (ovvero uno dei razionali conservati considerati qui sopra); se è irrazionale, esso sarà alternativamente nel sotto-intervallo chiuso conservato di destra o di sinistra di un intervallo conservato al passo precedente. Così il cantor conterrà tutti e solo i numeri reali contenuti in  $[0, 1]$  che potranno essere denotati da un numerale con la virgola in base 3 che non presenta nessuna occorrenza di  $'1'$ , posto che i numerali che presentano la sequenza  $'1000\dots'$  non siano presi in conto (in quanto pleonastici).

Denotiamo ora tutti i numeri reali contenuti in  $[0, 1]$  tramite un numerale con la virgola in base 2, eliminando ancora tutti i numerali che presentano la sequenza  $'1000\dots'$  che denoteranno gli stessi numeri denotati dagli stessi numerali in cui tale sequenza è rimpiazzata dalla se-

quenza '0111...', poi rimpiazziamo in ognuno dei numerali rimasti ogni occorrenza di '1' con un'occorrenza di '2'. A ogni reale diverso contenuto in  $[0, 1]$  avremo così associato un diverso numerale con la virgola in base 3 che non presenta nessuna occorrenza di '1', ciò che basta finalmente a mostrare che il Cantor ha la stessa cardinalità di  $[0, 1]$ , ovvero del continuo stesso (che è anche quella di tutte le sequenze infinite composte solo da occorrere di '0' e '2').

La questione della natura del continuo è quindi ben distinta da quella della cardinalità. Essa è, piuttosto, una questione relativa alla connessione della parti dell'oggetto dato, o, che dir si voglia, degli elementi dell'insieme dato. In fondo, ciò è qualcosa che lo stesso Aristotele aveva compreso a suo modo. Interrogiamoci, allora, sulla natura di tale connessione.

Prendiamo un segmento e spezziamolo in due, a esempio a metà. Poi immaginiamo di separare le due parti. Otteniamo due segmenti perfettamente simili. La rottura del segmento dato ha prodotto due effetti perfettamente simmetrici. Prendiamo invece un intervallo chiuso dell'insieme dei numeri reali. A esempio ancora l'intervallo  $[0, 1]$ . Spezziamolo nel mezzo e dividiamo le due parti. Se non aggiungiamo nessun elemento, non possiamo ottenere due nuovi intervalli chiusi  $[0, 1/2]$  e  $[1/2, 1]$ . A seconda di come dividiamo, otteniamo o  $[0, 1/2)$  e  $[1/2, 1]$  oppure  $[0, 1/2]$  e  $(1/2, 1]$ . È allora come se nel continuo geometrico i punti dapprima non ci fossero e poi, per effetto di un taglio non solo si creassero, ma si raddoppiassero, prima attributivamente e poi anche numericamente, mentre nulla di simile succede per l'insieme dei numeri reali.

Ma non era proprio questa, in fondo, la proprietà dei continui messa in luce da Aristotele? Se rispondiamo di sì (come io credo dovremmo fare), allora dobbiamo concludere che il continuo di Cantor e Dedekind non è affatto un continuo nel senso di Aristotele.

Ciò detto torniamo alla questione della continuità, in quanto proprietà di certi oggetti particolari, per esempio certe funzioni, che, come abbiamo visto, nel nuovo quadro matematico, è stata separata da quella del continuo. È facile osservare che, dopo una tale separazione, questa proprietà non ha più veramente a che fare con l'unità di un intero e, a ben guardare, come mostra l'esempio della funzione precedente, continua in un punto ma discontinua in tutti i suoi intorni, nemmeno con la connessione.

Ma, allora, possiamo essere soddisfatti di queste nuove concezioni anti-aristoteliche del continuo e della continuità? C'è chi ha detto di no. Recentemente lo ha fatto, per esempio, René Thom, uno dei grandi matematici del nostro tempo, medaglia Field nel 1958. Molto prima di lui, già fra la fine del secolo XIX e l'inizio del XX, lo ha fatto Charles Sainders Peirce. La sua critica si è svolta in due fasi distinte, separate fra loro da qualche

anno e da un'importante cambio di orientamento.

Nel 1892, in un articolo apparso su *The Monist* ("The Law of Mind") egli critica la definizione di Cantor mostrandosi molto più vicino all'approccio di Dedekind. La prima definizione, egli dice, ha il difetto di impiegare nozioni metriche, quando la questione della continuità non è metrica, e non ci fornisce una precisa idea di quali siano le componenti della nozione di continuità. Se si vuole dire ciò che è una successione continua, meglio è definirla come una successione densa completa.

Non siamo lontani dalla definizione di Dedekind, ma l'immagine che Peirce associa a questa definizione è ben altra. In un testo probabilmente coevo (*Collected Papers*, 4,125-126), egli immagina che sia data una regione continua e che su di essa cada un fulmine che la separi in due regioni più piccole, ma entrambe di grandezza comparabile alla regione data, della stessa "scala di quantità", come degli dice. Poi immagina che avvenga lo stesso per ognuna delle due regioni, in modo da ottenere quattro regioni comparabili e che nel giro di un minuto questa operazione si compia tante volte quante sono le frazioni razionali dell'unità. Alla fine, secondo Peirce, otterremo una collezione più che numerabile di regioni, ma tutte della stessa scala di quantità della regione data. In altri termini, tali regioni saranno infinitamente piccole, ma non saranno punti, in quanto esse potranno, a loro volta, poter essere divise in parti.

Sembra che Peirce supponga erroneamente che  $\lim_{n \rightarrow \aleph_0} 2^n = 2^{\aleph_0}$ . Questo a parte, egli sembra pensare che la definizione di Dedekind sia compatibile con l'idea che, estraendo da un continuo dato  $2^{\aleph_0}$  punti non si possa (e non solo si possa non) esaurire il continuo stesso, il che è ovviamente falso.

Egli riprende esplicitamente e generalizza quest'ultima idea, senza più associarla erroneamente alla definizione di Dedekind, qualche anno più tardi, in occasione di alcune conferenze date a Cambridge (Mass), nel 1898 (*Reasoning and the Logic of Things*, a cura di K. L. Ketner, 1992), quando afferma che una collezione è continua qualora abbia la stessa moltitudine della collezione di tutte le collezioni possibili dei suoi elementi. Quella che Peirce chiama « moltitudine » è grosso modo la nostra cardinalità. E, al di là di qualche difficoltà tecnica nella definizione, sembra che l'idea sia quella di identificare un continuo con una classe propria, una classe costituita dalla collezione di tutti i possibili insiemi costruiti a partire da un insieme infinito numerabile prendendo a ogni passo l'insieme di tutti i sottoinsiemi possibili dell'insieme dato. All'insieme di partenza si aggiunge dapprima un insieme di cardinalità  $2^{\aleph_0}$ , poi l'insieme di tutti i sottoinsiemi possibili di tale insieme, e così via. E' difficile capire che cosa Peirce intenda esattamente con 'e così via'. La sua teoria degli in-

siemi è troppo imprecisa per permettere di specificarlo. Tuttavia è chiaro che egli pensi un continuo come una collezione che non è una collezione di individui distinti. E che non pensa affatto di poter pervenire a costruire una tale collezione, limitandosi a concepirla come un oggetto già dato, pensato come fonte inesauribile di collezioni che potessero venire a attualizzarsi su di esso.

Nelle stesse conferenze, egli suggerisce di rappresentare un tale oggetto tramite una circonferenza, in quanto, egli dice, questa è descritta dal movimento di una particella e si compone quindi di tutti i “punti che questa particella ha occupato”, nel corso di tale movimento, per quanto non vi sia “alcun punto che si differenzia da un altro quanto alla sua identità”. L'immagine che egli offre in questo modo non si discosta molto da quella di Aristotele. Ma essa è davvero un'immagine legittima? Non contraddice forse l'isomorfismo fra una linea geometrica (una retta o una circonferenza) e l'insieme dei numeri reali, un isomorfismo che non solo Dedekind sembra supporre ma che sembra anche facilmente dimostrabile?

La questione è delicata, e proprio per questo getta luce sulla questione. Per dimostrare questo isomorfismo basta osservare che una successione di Cauchy a termini in  $\mathbb{Q}$ , che, secondo la definizione di Cantor, può essere intesa come rappresentante di una classe di equivalenza che costituisce un numero reale, si lascia interpretare come la successione delle misure razionali approssimate di uno e di un solo segmento preso su di una retta a partire da un punto dato, e che per ogni segmento preso su di tale retta è possibile costruire infinite successioni di Cauchy a termini in  $\mathbb{Q}$  che è possibile interpretare in tal modo, e che appartengono tutte alla stessa classe di equivalenza. La questione è allora questa: tale argomento prova davvero l'isomorfismo in questione? La risposta di Peirce è implicitamente negativa, e questo mi pare il contributo principale di quest'ultimo alla comprensione del problema. Quest'argomento prova, infatti, soltanto l'isomorfismo fra l'insieme totalmente ordinato dei numeri reali e quello degli estremi altri dall'origine di tutti i diversi segmenti che possono essere presi su una retta a partire da un'origine comune. Per passare da questo isomorfismo a quello fra il primo insieme e la retta stessa, occorre assumere che tale retta sia composta da tali estremi, ciò che, a ben guardare, è proprio quello che si tratta di provare. Quindi, pensare di aver così provato l'isomorfismo in questione significa confondere misura e composizione di una retta.

La confusione è patente, ma è anche carica di effetti benefici, in quanto è da essa che prende origine la teoria moderna del continuo. Riconoscere che tale teoria non corrisponde all'idea di un continuo come un'unità originaria e non esprime le potenzialità rappresentative dell'idea di Ari-

stotele e della geometria d'Euclide non significa screditare tale teoria, ma solo mostrarne un aspetto. Un aspetto peraltro che appare tanto meno deplorabile quanto più riflettiamo sul fatto che è in questa stessa teoria che hanno trovato fondamento le varie versioni dell'analisi non standard, le quali mostrano, in fondo, che l'impianto stesso della teoria degli insiemi è sufficientemente potente per permettere di costruire strutture più ampie dell'insieme totalmente ordinato dei numeri reali, ma conservative delle sue proprietà e delle sue possibilità operazionali.

Ma non cadiamo nell'estremo opposto. Un ultimo esempio ci permetterà di evitarlo. Se nell'analisi di Cantor e Dedekind vogliamo dimostrare il teorema di Weierstrass — quello che afferma che due funzioni  $f(x)$  e  $g(x)$  continue su di un intervallo  $[a, b]$ , tali che  $f(a) < g(a)$  e  $g(b) < f(b)$  sono tali che  $f(c) = g(c)$  per un certo punto  $c$  in  $(a, b)$  — dobbiamo ricorrere a una prova per l'assurdo che si richiama al terzo escluso. Ovvero dobbiamo supporre che se non si può provare che un certo numero è diverso da un numero dato, allora esso è uguale, o, più in generale, che se l'asserzione di  $\neg A$  comporta una contraddizione, allora si può asserire  $A$ . Molti matematici (intuizionisti) pensano che una tale inferenza non possa essere accettata, e si sforzano di spiegare perché e di costruire una matematica che la eviti. Altri non vedono il problema, o, se lo vedono, pensano che l'accettazione di una tale inferenza sia un inevitabile prezzo da pagare per mantenere inalterato il potere espressivo della matematica. Ma anche se così fosse, siamo sicuri che convenga preferire l'accettazione di prove come questa alla franca introduzione di assiomi di esistenza, corrispondenti alle supposizioni costruttive della geometria classica a proposito di intersezioni? Io non ne sono certo.

E è anche per questo che credo che una buona matematica, sia una matematica la più pluralista possibile, nella quale si accettino e si facciano collaborare teorie diverse, a patto di indicare chiaramente e saper accettare i limiti, i vantaggi e gli svantaggi concettuali, il potere espressivo e deduttivo, e i contesti applicativi di ognuna di esse.