



HAL
open science

Structure et évolution de La Philosophie de l'algèbre de Jules Vuillemin (tomes I et II)

Baptiste Mèlès

► **To cite this version:**

Baptiste Mèlès. Structure et évolution de La Philosophie de l'algèbre de Jules Vuillemin (tomes I et II). *Philosophia Scientiae*, 2020, 24-3, pp.17-42. 10.4000/philosophiascientiae.2512 . halshs-03096996v2

HAL Id: halshs-03096996

<https://shs.hal.science/halshs-03096996v2>

Submitted on 23 Oct 2022

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Distributed under a Creative Commons Attribution - NonCommercial - NoDerivatives 4.0 International License



Philosophia Scientiæ

Travaux d'histoire et de philosophie des sciences

24-3 | 2020

Lectures et postérités de *La Philosophie de l'algèbre* de Jules Vuillemin

Structure et évolution de *La Philosophie de l'algèbre* de Jules Vuillemin (tomes I et II)

Structure and Evolution of Jules Vuillemin's La Philosophie de l'algèbre (volume I and II)

Baptiste Mèlès



Édition électronique

URL : <https://journals.openedition.org/philosophiascientiae/2512>

DOI : [10.4000/philosophiascientiae.2512](https://doi.org/10.4000/philosophiascientiae.2512)

ISSN : 1775-4283

Éditeur

Éditions Kimé

Édition imprimée

Date de publication : 25 octobre 2020

Pagination : 17-42

ISBN : 978-2-84174-

ISSN : 1281-2463

Référence électronique

Baptiste Mèlès, « Structure et évolution de *La Philosophie de l'algèbre* de Jules Vuillemin (tomes I et II) », *Philosophia Scientiæ* [En ligne], 24-3 | 2020, mis en ligne le 01 janvier 2021, consulté le 03 novembre 2021. URL : <http://journals.openedition.org/philosophiascientiae/2512> ; DOI : <https://doi.org/10.4000/philosophiascientiae.2512>

Tous droits réservés

Structure et évolution de *La Philosophie de l'algèbre* de Jules Vuillemin (tomes I et II)

Baptiste Méléès

Archives Henri-Poincaré – Philosophie et Recherches
sur les Sciences et les Technologies (AHP-PRéST),
UMR 7117, CNRS, Université de Lorraine,
Université de Strasbourg, Nancy (France)

Résumé : Ouvrage dense et paru de façon tronquée, *La Philosophie de l'algèbre* de Jules Vuillemin (tomes I et II) peut sembler composite. Nous montrons au contraire que ce manifeste de la structure en philosophie n'est pas rhapsodie mais système : ses parties ne prennent tout leur sens que dans leur relation au tout. Loin de remettre en cause le résultat de l'analyse structurale, l'étude génétique met au jour un souci constant de préservation de la systémativité au fil des transformations successives.

Abstract: Jules Vuillemin's dense book *La Philosophie de l'algèbre* (volume I and II) was only partially published and may appear somewhat composite. In contrast, we show that this manifesto of structure in philosophy is systematic rather than rhapsodic—its component parts take their full meaning only when examined in relationship to the whole. Far from questioning the result of such structural analyses, genetic considerations reveal Vuillemin's effort to preserve systematicity through all the successive transformations.

1 Introduction

Ouvrage dense et technique, *La Philosophie de l'algèbre* de Jules Vuillemin [Vuillemin 1962], [Vuillemin s. d.] est d'une lecture d'autant plus ardue que deux tentations risquent de détourner le lecteur de la recherche de son sens plein. La première est d'y voir un ouvrage composite juxtaposant des analyses

hétéroclites, dont certaines ont d'ailleurs fait l'objet de publications préalables [Vuillemin 1959, 1960a, 1961], la seconde d'arguer de son caractère inachevé pour rejeter sur les tourments de la genèse les prétendus défauts de sa structure.

À rebours de ces deux tentations, nous soutiendrons que *La Philosophie de l'algèbre* est dans son intégralité douée d'une structure forte. Comme toute œuvre systématique, celle-ci ne peut être comprise par des morceaux choisis : chaque partie n'a de sens que dans son rapport au tout. Ce sera donc faire œuvre banale, mais à notre sens non inutile, que de se borner dans un premier temps à décrire la structure strictement interne de l'ouvrage, en espérant n'avoir « point fait œuvre d'érudition » [Vuillemin 1971, 12] et aussi peu que possible d'originalité.

Il ne saurait être question de négliger la philologie, tant il est vrai que « le rébarbatif établissement des textes ne per[d] pas son importance » pour la philosophie récente [Vuillemin 1990, 12]. Mais pour montrer que les considérations génétiques ne sont pas essentielles à la compréhension du texte, nous les rejetons dans un second temps et montrerons qu'elles confirment les conclusions de l'analyse structurale : l'ouvrage a crû non par agrégation d'éléments hétéroclites mais par enrichissement et transformation d'une structure globale satisfaite et transmise de manière récursive au moins depuis la plus ancienne version dont nous ayons la trace.

2 Structure

Décrire la structure de l'ouvrage suppose que l'on commence par distinguer la notion éditoriale de « tome¹ » et la notion logique de « partie ». Comme le montre la page de garde du volume paru en 1962, ce « tome premier » de *La Philosophie de l'algèbre* a pour titre « Recherches sur quelques concepts et méthodes de l'algèbre moderne ». Aussi bien la table des matières que la p. 67 montrent que ce tome contient d'abord une Introduction puis une première partie, « Réflexions sur le développement de la Théorie des équations algébriques », cette dernière étant donc *strictement* incluse dans le tome I. On en conclut premièrement que l'introduction n'est pas propre à la première partie mais que sa portée s'étend à *La Philosophie de l'algèbre* tout entière, deuxièmement que le tome I ne se confond pas avec la première partie, puisqu'il l'inclut strictement.

Ces considérations nous permettent de distinguer la composition éditoriale et la composition logique de l'ouvrage. *Logiquement*, l'ouvrage devait se composer de quatre moments : une Introduction générale, un développement en deux parties et une Conclusion générale. *Éditorialement*, l'ouvrage aurait dû occuper deux à quatre volumes : le volume que nous connaissons aurait

1. Le terme de « volume » eût d'ailleurs été plus exact.

été suivi d'« un autre volume ou [de] trois publications distinctes, ayant pour titre : *Structure, infini, ordre* » (§7, p. 66). Le tome I comprend l'Introduction générale et la première partie ; la ou les publications suivantes auraient contenu la seconde partie et la Conclusion générale. Délaissant désormais autant que faire se peut les considérations éditoriales, nous nous concentrerons sur la composition logique de l'ouvrage.

Nous verrons ainsi d'abord que l'Introduction générale pose le problème de l'ouvrage, qui est de savoir quelles leçons la philosophie peut tirer de la possibilité, attestée par l'algèbre moderne, d'une connaissance pure. Le développement bipartite décrit et analyse ensuite l'avènement de cette connaissance pure comme le passage d'une méthode génétique à une méthode structurale (première partie) puis de celle-ci à une méthode proprement axiomatique (seconde partie). La Conclusion répond enfin au problème posé par l'Introduction en montrant quelles perspectives l'évolution récente de l'algèbre offre sur l'évolution prochaine de la philosophie théorique.

La *Divine comédie* de Vuillemin décrit donc la voie qui mène la philosophie pure de l'Enfer au Purgatoire puis au Paradis, l'algèbre étant son Virgile et sa Béatrice.

2.1 Introduction générale : position du problème et point de départ historique

L'Introduction générale prend pour point de départ « l'affinité d'inspiration entre les Mathématiques pures et la Philosophie théorique » (§2, p. 5), disciplines qui se distinguent non seulement des connaissances et de la philosophie empiriques, mais également de celles qui, quoique *a priori* dans leur méthode, n'en empruntent pas moins leurs principes à l'expérience (§1-2).

Cette faculté commune qu'ont deux disciplines de s'abstraire de toute dépendance à l'expérience explique leur destinée commune. Comme l'illustrent les figures de Platon, Descartes, Leibniz et Kant, « l'histoire des Mathématiques et de la Philosophie montre qu'un renouvellement des méthodes de celle-là a, chaque fois, des répercussions sur celle-ci » (§2, p. 4). L'auteur propose donc naturellement de prolonger l'analogie en examinant quelles conséquences la philosophie théorique peut espérer tirer de la possibilité de la connaissance pure attestée par l'algèbre moderne.

Je me propose donc un double but :

1. j'examinerai comment une connaissance pure est possible eu égard à notre faculté de penser ;
2. j'utiliserai les analogies de la connaissance mathématique pour critiquer, réformer et définir, autant qu'il se pourra, la méthode propre à la Philosophie théorique. (§2, p. 5)

Reste à déterminer les conditions d'émergence de cette connaissance pure en montrant à partir de quelle méthode – et surtout en rupture avec laquelle – elle a pu advenir. C'est pourquoi l'auteur propose avant toute chose de retracer, « selon l'ordre chronologique, quelques méthodes de la connaissance pure ou *a priori* qui ont paru définir avec le plus de précision à l'époque classique les rapports de la Métaphysique et des mathématiques » (p. 5). Ces analyses révèlent l'apparition parallèle de la « méthode génétique » en philosophie (§ 3–5) et en mathématiques (§ 6).

Le premier temps est celui de l'apparition de la méthode génétique en philosophie, de Descartes à Fichte (§ 3–5). L'étude des rapports entre « mathématiques et métaphysique chez Descartes », qui avait donné son titre au livre de 1960 [Vuillemin 1960*b*], [Schwartz 2015], est systématiquement prolongée avec Leibniz et Kant.

Auteur	Mathématiques	Métaphysique
Descartes	p. 5–13	p. 13–28
Leibniz	p. 28–41	p. 41–50
Kant	p. 50–56	p. 56–60

Tableau 1 – Structure des § 3-5 de *La Philosophie de l'algèbre*

Vuillemin voit dans les trois étapes de ce parcours historique « une évolution qui a détaché peu à peu l'idée de son contexte représentatif et théologique, pour la réduire à un acte de l'intelligence » (§ 5, p. 59). Par ces « crises successives de la méthode philosophique » (§ 6, p. 60), la philosophie, renonçant à l'idée de fonder en Dieu la représentation, en est venue à la « méthode génétique », définie comme « méthode radicale, qui construit tous les concepts de la philosophie pure uniquement à partir des opérations du Moi fini » (§ 5, p. 59) et dont Fichte est le premier représentant. Mais bien loin que l'histoire ne s'achève, elle prend ici un nouveau départ : « dans la première partie de ce livre, je tenterai de montrer qu'une fois écarté le préjugé dogmatique de la représentation, un problème nouveau naît inexorablement du développement de la méthode génétique et que ce problème n'est autre que celui des structures » (§ 5, p. 60) [Vuillemin 1960*b*, 141]. Ainsi, de même que l'échec d'une fondation de la représentation en Dieu a mené à sa fondation dans l'esprit humain, l'échec de la méthode génétique qui en résulte conduira à la méthode structurale².

Le second temps de la description de la méthode génétique est le récit de son émergence en mathématiques, de Descartes à Lagrange, parallèlement

2. Elisabeth Schwartz parle ainsi fort justement d'un « parallélisme dialectique » des cours respectifs de l'histoire des mathématiques et de la philosophie [Schwartz 2005, 23, 25].

à la philosophie pure (§6). Rompant avec la méthode encore mi-sensible mi-intellectuelle des mathématiciens du XVIII^e siècle et leur « frénésie de l'ingéniosité » (p. 64), Lagrange « adopte un procédé uniforme pour toutes les sciences exactes » (p. 64, ainsi que §13, p. 116–117). En proposant de partir d'« un principe exprimé dans un algorithme, c'est-à-dire défini par certaines lois d'opérations », pour en dériver, « sans qu'on ait besoin de faire appel à aucune intuition sensible, [les] divers théorèmes qui composent les sciences », Lagrange, contemporain de Fichte, s'est fait l'apôtre en mathématiques de la méthode génétique.

Le point de départ étant ainsi fixé, l'auteur peut désormais décrire l'avènement – avéré en mathématiques, imminent en philosophie – d'une connaissance pure. Ce développement aura lieu en deux temps. La première partie, intitulée « Réflexions sur le développement de la théorie des équations algébriques », porte sur les « méthodes proprement dites » et leur « irruption ». La seconde, qui décrira les « objets et idées nouvelles que leur application a permis d'apercevoir », devrait s'intituler « Structure, infini, ordre » (§7, p. 65).

2.2 Première partie : de la méthode génétique à la méthode structurale

Pour décrire « l'irruption de ces méthodes nouvelles tirées de l'analyse abstraite », la première partie du développement procède en trois temps : elle analyse d'abord les règles de la méthode, ensuite certaines de ses mises en œuvre les plus exemplaires, enfin les leçons philosophiques que l'on peut en tirer.

2.2.1 Règles

Comme l'annonce Vuillemin dans le plan de l'ouvrage (§7, p. 66), la première section de la première partie, intitulée « Les règles de la méthode », décrit « l'avènement de la méthode de Galois » afin d'« examine[r] quelles règles ou quels préceptes l'experiment³ ». Ce serait donc se méprendre gravement que de chercher dans les chapitres I à IV une histoire incomplète et partielle de la théorie des équations algébriques : au début de la Conclusion, le §49 révélera en effet que les quatre premiers chapitres de l'ouvrage, dont chacun porte un nom de mathématicien – Lagrange, Gauss, Abel, Galois – ne sont pas dictés par la chronologie, méthode rejetée d'entrée de jeu par l'auteur (§2, p. 3), mais épousent l'ordre des quatre règles de la méthode de la « mathématique matérielle » formulées par Descartes.

Première règle : à l'évidence cartésienne de *natures simples* se substitue l'étude *a priori* des structures, entrevue par Lagrange dans son analyse critique des méthodes de résolution algébrique des équations polynomiales (chap. I),

3. Voir la contribution de Sébastien Maronne dans le présent dossier.

même si la méthode génétique l'a empêché de concevoir la structure autrement que comme une genèse inversée. De même, l'intuition intellectuelle de Fichte, anticipation d'une notion de structure en philosophie, reste conditionnée de manière extrinsèque par le choc de la sensation (§ 13).

Deuxième règle : l'*analyse*, plutôt que d'être menée « jusqu'aux parcelles des difficultés », cible les « structures élémentaires nécessaires pour la résolution » (§ 49, p. 468), dont Gauss a montré l'exemple en réduisant le problème de la constructibilité des polygones réguliers à ce que l'on peut interpréter de manière moderne comme l'étude de groupes cycliques (chap. II), même si la persistance d'une conception aristotélicienne de la construction et d'un intuitionnisme extrinsèque (§ 20–22) l'ont empêché de mener à son terme l'élimination du génie (§ 15 et 18 ; § 49, p. 469). De même la philosophie doit-elle s'affranchir de toute faculté extrinsèque à la raison, le seul intuitionnisme viable étant celui, intrinsèque, de la limitation des procédés intellectuels (§ 20–22).

Troisième règle : la *synthèse*, de simple outil pédagogique, devient gage de pureté, comme le faisait Abel en faisant dépendre toute recherche de solutions d'une démonstration préalable de leur possibilité (chap. III) – méthode que la philosophie serait bien inspirée de suivre pour l'analyse du concept de Dieu (§ 25), comme le fera Vuillemin quelques années plus tard [Vuillemin 1971]⁴.

Quatrième règle : l'*énumération* des natures simples cède la place à celle des structures permettant la solution d'un problème, inventée par Galois lorsqu'il articula la décomposition des groupes à l'extension des corps (chap. IV). On peut, de manière analogue, examiner la portée et les limites de la notion de structure en philosophie (§ 34).

Vuillemin annonçait qu'« une fois écarté le préjugé dogmatique de la représentation, un problème nouveau apparaît inexorablement du développement de la méthode génétique et que ce problème n'est autre que celui des structures » (§ 5, p. 60) : la première section montre en effet que la méthode génétique de Lagrange est à la fois l'achèvement des règles cartésiennes de la méthode et l'amorce des transformations menant à la méthode structurale de Galois.

2.2.2 Applications

Après l'exposition des règles viennent ce que Vuillemin appelle modestement « quelques applications » (§ 7, p. 66). On l'excusera du peu : la section II ne décrit rien de moins que la mutation de la géométrie induite par l'étude abstraite des structures. Son titre cartésien de « Mathématique universelle » témoigne d'une transformation analogue à celle des « règles de la méthode » : de même que la théorie des proportions avait selon Vuillemin permis à Descartes de refonder la géométrie sur l'algèbre, l'algèbre des

4. Voir notre article « Les Anselme de Jules Vuillemin : de la critique générale de la raison pure à la classification des systèmes philosophiques » [Mèlès 2020].

structures reprend le programme cartésien de *mathesis universalis*⁵, du moins sous la forme de ce que les *Regulae ad directionem ingenii* annoncent comme « science générale qui explique tout ce qu'on peut chercher touchant l'ordre et la mesure, sans application à une matière particulière » [Descartes 1986, AT X, 378]. La méthode structurale renouvelle donc la *mathesis universalis* entendue comme programme, interne aux mathématiques, d'unification. La purification de l'algèbre a définitivement fait quitter à la géométrie l'image pour le concept (chap. V) et la description pour l'explication (chap. VI).

L'algèbre a d'abord transformé la méthode de la géométrie en l'affranchissant de toute dépendance à l'intuition sensible (chap. V) :

Nous avons développé la Théorie de Galois dans nous référer à des illustrations géométriques, tout en signalant l'analogie que cette Théorie permettait d'établir, par exemple, entre l'étude de l'équation $x^4 - 2x^2 + 9 = 0$ et celle des symétries du rectangle. À vrai dire, de telles analogies instaurent entre le concept algébrique et l'intuition géométrique un rapport assez nouveau eu égard à celui qu'établit la Géométrie analytique. Il convient donc de les étudier systématiquement et de les saisir sous leur forme générale. (§ 35, p. 303)

Contrairement à la conception antique de la mathématique universelle, héritée de Platon (§ 40–41), les travaux de Klein montrent que l'image ne doit être conçue que comme un langage conventionnel. En révélant l'isomorphisme entre les polygones réguliers et les groupes de rotations dans le plan (§ 37) ainsi qu'entre les polyèdres réguliers et les groupes finis de rotations dans l'espace (§ 38–39), la « théorie de Klein », qui donne son titre au chapitre, a dépouillé l'image géométrique de toute utilité propre par rapport au concept algébrique. Désormais indépendante de toute intuition, fût-elle pure, et directement corrélée à la seule notion abstraite de structure, la géométrie, autrefois connaissance simplement *a priori* car « dépendant[e] de l'expérience pour [ses] notions et [ses] axiomes fondamentaux », a été promue par l'algèbre au rang de connaissance pure, « indépendant[e] de l'expérience pour [ses] principes primitifs comme pour [ses] enchaînements » (§ 1, p. 1).

En même temps qu'elle quittait définitivement l'image pour le concept, la géométrie passait « de la description à l'explication » (§ 42, p. 368) : d'étude idiographique des courbes, elle devint classification de structures abstraites. Vuillemin consacre ainsi le chapitre VI à étudier « l'application de cette nouvelle méthode, due essentiellement à Lie, à propos des “courbes W” » (§ 43, p. 369), Lie ayant substitué à la description *a posteriori* de la spirale logarithmique la dérivation *a priori* et générale de ses propriétés grâce aux liens entre groupes continus et courbes auto-projectives (§ 42–46). Ce renouvellement de la géométrie permet notamment de purifier le concept d'espace de toute origine empirique et absolue pour ne le rapporter qu'à ses

5. Voir dans le présent dossier la contribution de David Rabouin, « L'idée de *mathesis universalis* dans *La Philosophie de l'algèbre* I et II de Jules Vuillemin ».

propriétés abstraites : « La Théorie des groupes continus permet de résoudre rationnellement les problèmes concernant le réel ou du moins la “forme” qui s’impose à celui-ci. Elle fournit donc l’instrument mathématique approprié pour analyser le problème de l’espace » (§ 47, p. 399), comme le montre l’étude des axiomatisations de l’espace par Riemann, Helmholtz, Lie et Poincaré.

La deuxième section de la première partie montre ainsi qu’en appliquant les méthodes et concepts de l’algèbre nouvelle, la géométrie s’est à son tour approprié deux de ses principales vertus : l’indépendance par rapport à l’expérience sensible et la vertu explicative.

2.2.3 Leçons philosophiques

Le troisième temps de la première partie devait, selon l’Introduction générale, s’appuyer sur l’étude des règles de la méthode de Galois et de leur « extension » à la géométrie pour « poser le problème, si important et si négligé aujourd’hui, de la *mathesis universalis* dans ses rapports avec la philosophie » (§ 7, p. 66). Telle est la mission de la Conclusion.

Nous avons vu que l’Introduction du tome I portait sur l’ensemble de l’entreprise plutôt que sur la seule première partie. Il en va autrement de la Conclusion, dont la présentation typographique montre qu’elle est incluse dans la première partie – on pourrait même croire dans la deuxième section⁶, si par son contenu (notamment p. 465 et dans son premier moment, « Règles pour la direction de l’esprit ») elle ne tirait clairement les leçons de la première partie dans son ensemble. Le tome I contenait donc une Introduction générale à *La Philosophie de l’algèbre* mais une Conclusion restreinte à sa première partie.

À l’article défini près, la Conclusion porte le même nom que la section précédente : « La Mathématique universelle ». Gardons-nous pourtant de les croire redondantes : si la section précédente analysait la modernisation de l’idée de *mathesis universalis* comme programme d’unification interne aux mathématiques, la Conclusion se propose de rechercher le fondement philosophique des nouvelles méthodes mathématiques. Elle se donne pour programme, en termes cartésiens, de « contenir les premiers rudiments de la raison humaine, et s’étendre jusqu’à faire surgir des vérités de quelque sujet qu’on voudra » [Descartes 1986, AT X, 374]. Cette seconde *mathesis universalis*, qui prolonge la première en l’étudiant « dans ses rapports avec la philosophie », n’est donc plus tant entreprise d’unification interne aux mathématiques que de fondation externe. Une chose est de refonder la géométrie à la lumière de l’algèbre, une autre de fonder métaphysiquement cette science universelle. Comme l’avait vu Platon dans un passage que cite souvent Vuillemin, le mathématicien s’appuie sur les principes, le philosophe

6. Si l’on compare la police et la disposition des chapitres V et VI avec celle de la Conclusion, aussi bien p. 303, 366 et 465 d’une part que p. 580–581 de l’autre, la Conclusion semblera incluse dans la deuxième section, « Mathématique universelle ».

examine leur pertinence⁷. La seconde section et la Conclusion ne sont donc rien moins que redondantes : elles réalisent des parties complémentaires mais distinctes du programme de *mathesis universalis*.

La Conclusion procède en trois moments, qui correspondent aux « trois problèmes » posés par la première partie (p. 465). En prolongeant une remarque d'Élisabeth Schwartz, qui propose de comprendre le titre de l'ouvrage « par extension et métonymie tout à la fois » [Schwartz 2005, 3], nous comprendrons ces trois problèmes comme trois sens de l'expression « philosophie de l'algèbre ». D'abord sont tracés les contours de la philosophie *immanente* à l'algèbre moderne – les règles de sa méthode. Ensuite vient une philosophie *prenant pour objet* l'algèbre moderne, à la façon dont le jeune Husserl avait écrit une « philosophie de l'arithmétique ». Enfin peut-on tirer de ces analyses le programme d'une philosophie *digne de* l'algèbre moderne. Les trois philosophies de l'algèbre sont une philosophie *dans* l'algèbre, une philosophie *sur* l'algèbre, une philosophie *par* l'algèbre.

Le premier problème est ainsi celui des « préceptes de la méthode mathématique quand l'Algèbre devient formelle » ; il est traité dans la première section de la Conclusion, « Règles pour la direction de l'esprit » (§ 49–51), où Vuillemin lève en particulier le voile sur la structure quadripartite de la première section en la reliant expressément aux quatre règles cartésiennes de la méthode.

Le deuxième problème est celui des « positions philosophiques » qu'implique « l'existence d'une Algèbre formelle » ; il fait l'objet de la deuxième section, « Mathématiques et métaphysique » (§ 52–56), où l'auteur se livre à une critique de la philosophie mathématique de la phénoménologie, tant pour avoir prétendu fonder le droit sur le fait – les mathématiques sur la conscience – que pour avoir considéré qu'une entreprise de fondation impliquerait nécessairement l'unicité de l'édifice. Le philosophe doit prendre acte de l'une des principales leçons de l'algèbre moderne : la pluralité des choix d'axiomes possibles.

Le troisième problème est de savoir comment justifier l'application à la philosophie des préceptes de la méthode mathématique ; il est examiné dans la troisième section de la Conclusion, « L'idée d'ontologie formelle » (§ 57–60). La philosophie doit renoncer non seulement au dogmatisme analogique d'origine aristotélicienne, qui prétendait fonder sur la théologie l'unité de la science et de la philosophie (§ 57) et dont la philosophie moderne est heureusement revenue (§ 3–5), mais également au dogmatisme du phénomène, qui pensait pouvoir unir la science et la métaphysique par les méthodes du fini, autrement dit par la méthode génétique (§ 58). Si la philosophie ne veut pas renoncer à sa mission comme le fait l'existentialisme, radicalisation de la phénoménologie (§ 54 et 59), elle doit, par-delà la philosophie des mathématiques, faire sien le pluralisme de la connaissance pure dont l'algèbre moderne a montré l'exemple,

7. Platon, *République*, VII, 553c, passage auquel Vuillemin fait plusieurs allusions : § 2, p. 4 ; § 31, p. 278 ; § 50, p. 476.

c'est-à-dire étudier la pluralité des choix internes à la mathématique et leurs implications en philosophie théorique et pratique (§ 60).

Ces trois moments peuvent également être lus comme une réponse provisoire aux deux questions de l'Introduction générale. Le passage de la philosophie *dans* l'algèbre à la philosophie *sur* l'algèbre montre au lecteur, selon les termes du § 2, « comment une connaissance pure est possible eu égard à notre faculté de pensée ». Celui de la philosophie *sur* l'algèbre à la philosophie *par* l'algèbre consiste bien, quant à lui, à « utilis[er] les analogies de la connaissance mathématique pour critiquer, réformer et définir, autant qu'il se pourra, la méthode propre à la Philosophie théorique ». Cette cohérence interne a pu contribuer à faire croire, même aux lecteurs attentifs de Vuillemin, que le tome I pouvait se suffire à lui-même.

2.3 Seconde partie : de la méthode structurale à l'algèbre de l'algèbre

Le manuscrit du tome II, composé de sept chapitres – VII et VIII dans le ms. B, VIII [*sic*⁸] à XII dans le ms. A – puis une Conclusion, montre clairement que nous n'en étions qu'au milieu du chemin. La seconde partie de l'ouvrage, telle que l'annonçait le § 7 du tome I, devait décrire les « objets et idées nouvelles que leur application a permis d'apercevoir ». Dans son ultime état, le manuscrit porte bien le titre promis en 1962 : « Deuxième partie. Structure, infini, ordre⁹ ».

En revanche, l'affirmation plus tardive de l'auteur – en quatrième de couverture de la réédition de 1993 – selon laquelle il aurait été « dissuadé de publier la première section de ce second tome et de rédiger les deux autres », n'est vraie que si l'on entend « rédiger » dans le sens exigeant de « parvenir à une version définitive ». Le manuscrit est en effet complet, si l'on en croit le critère – assurément algébrique – de la clôture par références internes.

2.3.1 Structure

Si la seconde partie a conservé le titre promis en 1962 de « Structure, infini, ordre », celui de sa première section semble s'être étoffé : le titre « Structure »

8. Dans l'état le plus ancien dont nous disposions (ms. A), les chapitres étaient numérotés de VI à XII. La numérotation a été décalée d'une unité lors de la réécriture des deux premiers chapitres (ms. B), probablement en raison de l'ajout d'un chapitre au tome I. Il existe donc deux chapitres VIII, que nous appellerons, selon leur ordre logique, VIIIa et VIIIb.

9. Ce titre peut dater des refontes de la première partie ou être ultérieur à la publication du tome I. Le plus ancien titre attesté dans les manuscrits pour la seconde partie est « De quelques structures d'Algèbre et d'Arithmétique et de leur utilisation en Théorie des nombres », titre qui deviendra, aux augmentations près que nous verrons, celui de la seule première section de la seconde partie.

s'est transformé en « De quelques structures d'Algèbre et d'Arithmétique, de leur utilisation en Théorie des nombres et en Géométrie et des problèmes philosophiques qui s'y rattachent ».

Comme le montre cet intitulé, Vuillemin se propose d'examiner la notion de structure selon les trois points de vue qui structuraient la première partie : d'abord la description des innovations mathématiques – les « quelques structures d'Algèbre et de Géométrie » faisant ainsi pendant aux « Règles de la méthode » du tome I – puis les « applications » – dans le tome I en géométrie (chap. V–VI), dans la présente section « en Théorie des nombres et en Géométrie » – et enfin « les problèmes philosophiques qui s'y rattachent » – tâche explicitement dévolue dans la première partie à la Conclusion (p. 465).

En pratique, dans les chapitres expressément consacrés à la notion de structure, Vuillemin va systématiquement regrouper les deux premiers moments – la description des structures et celle de leurs applications – dans un chapitre et traiter des « problèmes philosophiques » dans le suivant. Ce balancement permet de comprendre la composition logique de la section consacrée aux « divers problèmes mathématiques et philosophiques liés à la notion de structure » :

Parallèlement, on étudiera, [a] en correspondance avec [a1-2] le problème de l'extension de la notion de nombre, [a3] le problème philosophique de la définition et [b] en correspondance avec [b1-2] celui des invariants mathématiques et du dogmatisme des groupes [b3] celui des invariants phénoménologiques et du dogmatisme philosophique qui y est lié. (t. II, § 61, B2-3)

Le plan ainsi annoncé peut être clairement relié aux quatre premiers chapitres, en distinguant les deux moments mathématiques – règles et applications – du moment philosophique :

	1 et 2. Règles et applications mathématiques	3. Philosophie
a	VII. Les trois types d'extension de la notion de nombre	VIII[a]. Philosophie de la définition
b	VIII[b]. Structures gaussiennes, Théorie des nombres et Géométrie	IX. L'invariant phénoménologique et le problème de la réflexion

a1. Les trois types d'extension de la notion de nombre décrits dans le chapitre VII¹⁰ sont d'abord le principe déjà « formaliste » de permanence des

10. Le tome I contient plusieurs renvois au chapitre VII : §13, p. 118 (renvoi à VII, §62) ; §15, p. 139 (ce que Vuillemin appelle les « chapitres I et II » semble être les chapitres VII et VIIIb) ; §18, p. 149 (vers VII et VIIIb et peut-être plus particulièrement VII, §66) ; §20 p. 172 (VII, §66) ; §22, p. 203 (VII, §63) et 206 (VII, §68) ; §55, p. 498 (VII, §63–64). C'est peut-être aussi le cas p. 137 (« comme on verra plus tard » au sujet des congruences de Gauss) et p. 202.

lois formelles de Hankel, ensuite le programme intuitionniste de Kronecker fondé sur une généralisation des congruences gaussiennes, enfin la méthode d'extension structurale, qui repose sur la construction de l'ensemble-quotient puis une identification à isomorphisme près.

a2. Le chapitre VII montre que les deux dernières extensions, seules légitimes selon Vuillemin – qui fait sienne la critique fregéenne du principe de Hankel –, sont des généralisations du calcul des congruences. Elles sont donc bien ce que promettait le titre de la section : un exemple d'« utilisation [...] de quelques structures d'Algèbre et d'Arithmétique [...] en Théorie des nombres ».

a3. Le chapitre VIIIa¹¹, « Philosophie de la définition », porte quant à lui sur les « problèmes philosophiques qui [se] rattachent » aux extensions de la notion de nombre, et pour cela se propose de procéder en trois temps, où l'on reconnaîtra aisément les trois moments de la Conclusion de la première partie :

En réfléchissant sur les deux types légitimes d'extension de la notion de nombre [sc. la méthode de Kronecker et celle des extensions structurales], en les opposant tous deux à l'extension génétique [d'Euler] et en les distinguant l'un de l'autre, on s'efforcera de répondre aux trois sortes de problèmes généraux qu'a paru poser la constitution d'une Mathématique universelle : ceux de la méthode, ceux des rapports entre Mathématique et Métaphysique, ceux d'une ontologie formelle. (VIIIa, p. 34)

Le chapitre VIIIa commence ainsi par une sous-section « I. Questions de méthode », mais le manuscrit laissant bientôt la place à une version plus ancienne, baptisée par Gudrun Vuillemin « manuscrit A », les deux autres sous-sections ne sont pas plus explicitement marquées que ne le sont les sections « Infini » et « Ordre ».

Les deux chapitres suivants adoptent la même structure.

b1. Le chapitre VIIIb¹² décrit d'abord les invariants qui permettent la classification des structures que sont les formes quadratiques : « du point de vue arithmétique » le déterminant, « du point de vue algébrique » le rang, l'index d'inertie et la signature.

b2. Ayant exposé l'« idée nouvelle » de la classification par invariance relativement à des groupes de transformations, Vuillemin décrit une application importante de cette idée en géométrie : le programme d'Erlangen, entreprise de

11. Le chapitre VIIIa pourrait avoir été ajouté après une première rédaction de la première partie car nous n'avons identifié aucun renvoi du tome I à ce chapitre – à moins que Vuillemin n'ait décidé de séparer la partie philosophique, initialement intégrée au chapitre précédent ?

12. Le chapitre VIIIb semble avoir été à un moment de la rédaction – antérieur au ms. A – le deuxième de la seconde partie. Le tome I y renvoie plusieurs fois : § 15, p. 139, § 18, p. 149, § 30 p. 263 (VIIIb, § 46), § 34, p. 292 (VIIIb, § 48 à 49'), § 46, p. 393 (VIIIb § 48 à 49') et 395 (VIIIb, § 46), § 47, p. 402 (VIIIb, § 48) et 415 (VIIIb, § 47 A241).

classification des géométries selon leurs invariances par rapport aux différents groupes de transformation.

b3. Le chapitre IX est au VIIIb ce que le VIIIa était au VII : l'étude des « problèmes philosophiques qui [se] rattachent » à ces idées nouvelles¹³. Vuillemin s'y livre à une critique de la méthode phénoménologique de recherche des invariants par variation eidétique : Husserl aurait surestimé la lucidité de la conscience¹⁴. En étudiant les essences libérées de leurs applications, la phénoménologie a en effet perdu la garantie existentielle qui les accompagnait dans l'expérience ; celle-ci doit donc, comme en théorie des ensembles, limiter *a priori* la formation des concepts et, plutôt que d'en appeler au *deus ex machina* de la conscience (t. I, § 54), fonder logiquement tous les concepts fondamentaux de la phénoménologie ; le concept de temps ne doit ainsi pas être fondé sur l'expérience mais, par adjonctions successives, sur le concept logique d'ordre.

Le plan du § 61 cité plus haut et la symétrie intrinsèque des quatre premiers chapitres nous convainquent qu'ils formaient à eux seuls la totalité de la section « Structure ». Ils accomplissent également en intégralité le programme que le tome I assignait à cette section :

Étudiant d'abord quelques structures, dont les *Disquisitiones arithmeticae* de Gauss, fondamentales pour expliquer la découverte de Galois, fournissent les rudiments, je montrerai comment elles s'appliquent tant à l'Algèbre qu'à l'Arithmétique et sont supposées dans les principales Théories des nombres rationnels qui se forment à la fin du XIX^e siècle. Je ferai voir surtout comment les idées de définition et d'invariant qui en résultent ont considérablement modifié nos représentations de l'abstraction et de l'objectivité. (t. I, § 7, p. 66)

2.3.2 Infini

À la suite immédiate de ces quatre chapitres composés de manière parallèle et pour lesquels seuls Vuillemin semble être parvenu à une rédaction quasi définitive, le manuscrit du tome II comporte trois chapitres, numérotés de X à XII, qui semblent accomplir précisément la tâche que le tome I annonce pour les sections « Infini » et « Ordre ». Même si l'absence de ces titres dans le ms. A nous condamne aux conjectures, les deux premiers de ces chapitres nous semblent traiter l'idée d'infini dans ses rapports avec celle de structure (chap. X) et d'ordre (chap. XI).

13. Le tome I contient plusieurs renvois au chapitre IX : § 21 , p. 180 (IX, § 55), 182 (*idem*) et 183 (IX, § 53, A261). Ici et par la suite, nous indiquons le nom du manuscrit avant chaque numéro de page.

14. Voir [Vuillemin 1962, 498–499] ainsi que les articles de Hourya Benis-Sinaceur et Emmylou Haffner, Gabriella Crocco, Sébastien Maronne, pour une comparaison de cette critique avec celle de Cavailles [Cavaillès 1947, 71–72].

Le chapitre X, intitulé « La théorie des nombres idéaux », montre d'abord comment l'étude des structures a permis l'introduction en algèbre de l'idée d'infini¹⁵. C'est en effet par des considérations *structurales* que Gauss et ses successeurs, cherchant à généraliser les théorèmes de réciprocité, ont mis au jour des domaines d'intégrité et généralisé le théorème de factorisation unique. Gauss démontra ainsi le théorème de réciprocité quadratique pour les entiers relatifs, le théorème de réciprocité biquadratique pour les entiers complexes $a + bi$ (a et b étant des entiers relatifs) et le théorème de réciprocité cubique pour les entiers de la forme $a + bp$, où p est solution de l'équation $y^2 + y + 1 = 0$; Kummer étendit la généralisation à des anneaux d'entiers algébriques enrichis de nombres complexes idéaux. Mais c'est à Dedekind que revint l'idée décisive de remplacer l'étude des nombres individuels soumis à l'opération arithmétique de divisibilité par la considération directe des systèmes *infinis* d'entiers algébriques – les idéaux – et de leur relation logique d'inclusion. Le chapitre X réalise ainsi le programme que le tome I annonçait pour la section « Infini » : montrer comment « l'extension des méthodes algébriques a permis d'annexer à cette science l'idée d'infini et de rejoindre une découverte qu'avait indépendamment suscitée l'Analyse concernant la notion d'ensemble¹⁶ ». Citant Bell, Vuillemin observe qu'« un problème strictement fini est résolu en termes de classes infinies » [Bell 1945, 225], [Vuillemin s. d., A284]. Ainsi l'« idée nouvelle » de structure a-t-elle mené à celle d'« infini ».

Dans le chapitre XI, « La théorie des nombres naturels chez Dedekind », Vuillemin voit dans l'ouvrage de Dedekind *Was sind und was sollen die Zahlen?* la voie qui mène de l'idée d'infini à celle d'ordre¹⁷. L'outillage conceptuel pré-ensembliste de Dedekind lui permet de définir logiquement la notion de chaîne puis de leur appliquer une généralisation du théorème d'induction, que prolongera Zermelo avec son théorème du bon ordre. L'analyse par Vuillemin de la « démonstration » par Dedekind de l'existence d'un ensemble infini correspondant aux applications successives de notre pensée à une pensée initiale (chap. XI, § 60) confirme la leçon du chapitre XI : l'« idée nouvelle » d'infini conduit naturellement à l'idée d'ordre.

Nous proposons ainsi de voir dans les chapitres X et XI le passage, via l'idée d'infini, de l'idée de structure à l'idée d'ordre.

2.3.3 Ordre

C'est à l'analyse intrinsèque de l'idée nouvelle d'ordre qu'est consacré le chapitre XII¹⁸. « L'Algèbre générale », qui lui donne son titre, prolonge

15. Le tome I renvoie deux fois au contenu du chapitre X : § 22, p. 204 (X, § 56) et § 30, p. 260 (*idem*).

16. Le texte publié renvoie à la « Note II, *infra*, p. 526 » : la page est correcte mais il faut lire « Note I ».

17. Le tome I contient un renvoi au chapitre XI : § 34, p. 297 (XI, § 60); peut-être aussi § 20, p. 171 (XI, § 60 et 62).

18. Le tome I contient un renvoi au chapitre XII : § 30, p. 262 (XII, § 65).

l'entreprise dedekindienne d'introduction de notions logiques dans les mathématiques¹⁹, en l'appliquant à l'Algèbre même des structures dont elle procède :

Elle est d'abord Algèbre des structures et, comme telle, elle étudie les propriétés de ces structures, dans leurs variations relatives aux adjonctions d'axiomes de plus en plus particuliers. Au terme de l'évolution [...], elle se retrouve Algèbre au second degré, en ce qu'elle considère comme ses objets propres ces structures elles-mêmes, dans toute leur généralité. (chap. XII, § 64, A326)

L'Algèbre générale se caractérise donc par sa réflexivité : elle est une algèbre de l'algèbre. Plutôt que de raisonner à l'intérieur d'une algèbre particulière, l'Algèbre générale raisonne simultanément sur toutes les algèbres et étudie leurs rapports avec les sous-algèbres. Vuillemin voit en la théorie des treillis l'outil privilégié d'une telle entreprise²⁰. Les treillis ne sont pas simplement une autre application rigoureuse de la méthode structurale : ils la dotent d'une pure réflexivité. Loin de se borner à décrire des objets donnés comme les équations et les courbes, ils permettent une analyse structurale des relations entre les structures mêmes et leurs sous-structures. Les théorèmes de représentation et de décomposition pour les algèbres de Boole permettent même aux treillis de prendre pour objet la logique même dans laquelle on raisonne. Ces objets permettent donc à la méthode structurale de devenir son propre objet.

L'algèbre n'est dès lors plus seulement réflexion structurale sur des objets mathématiques hérités du passé – équations ou figures. « Jetant l'échelle » de la théorie des équations dont elle provient historiquement, elle réfléchit désormais de manière structurale sur ses objets propres que sont les structures, redoublant de ce fait la sentence du tome I : « la définition de Hegel selon laquelle dans les mathématiques la réflexion demeure étrangère à son objet et qui fait de cette science une connaissance de l'entendement pourra, à juste titre, faire dresser les cheveux » (t. I, § 18, p. 159). Par la coïncidence finale de ses méthodes et objets, l'algèbre semble avoir atteint un état enfin stable, qu'en termes fichtéens ou hegelien on pourrait appeler le savoir absolu²¹.

Les mathématiques n'en restant pas moins, selon l'indépassable analyse de Platon, dépendantes d'hypothèses dont elles n'examinent pas le sens, c'est au

19. Vuillemin se garde pour autant de parler d'un logicisme de Dedekind : voir la contribution de Hourya Benis Sinaceur et Emmylou Haffner dans le présent dossier.

20. Sur la réception par Vuillemin de la théorie des treillis, voir la contribution de Simon Decaens dans le présent dossier.

21. L'échec final de la théorie des treillis nous semble paradoxalement confirmer les analyses de Vuillemin. Que la dialectique des mathématiques les ait menées à leur unification et à leur fondation dans un langage et une théorie réflexifs permettant de décrire les structures, leurs relations mutuelles et jusqu'aux logiques qui permettent de raisonner sur elles nous semble avoir été bien plutôt confirmé qu'infirmé par la théorie des catégories [Mélès 2012], comme par les candidates à sa succession telles que la théorie homotopique des types. Prolongeant la notion vantée par Vuillemin d'« homomorphisme » jusqu'à celles de foncteur et de transformation naturelle, ces dernières théories vont *au-delà* de la théorie des treillis : elles vont plus loin mais dans la même direction.

Section	Chapitres
I. Structure	VII, VIIIa, VIIIb, IX
II. Infini	X (Structure \rightarrow Infini) XI (Infini \rightarrow Ordre)
III. Ordre	XII

philosophe que revient cette tâche : « Le philosophe ne dit pas autre chose que le mathématicien : il en montre seulement le sens » (chap. XII, §64, A333). Ainsi Vuillemin peut-il soutenir, non sans quelque provocation, que « dans sa partie pure, la philosophie n'est que la théorie transcendantale de l'Algèbre abstraite et des treillis » (chap. XII, §64, A330), c'est-à-dire l'étude du rapport que les structures induites par les choix d'axiomes entretiennent avec la conscience.

Ainsi est achevé le programme qu'annonce le tome I. Le ou les volumes supposés traiter des « trois idées de structure, d'infini et de *logique* » devaient porter le titre « Structure, infini, *ordre* » (nous soulignons), la section « Ordre » devant montrer que « cette complication même [sc. l'annexion à l'algèbre de l'idée d'infini] conduisait spontanément à un rapprochement des Mathématiques et de la Logique et à l'étude algébrique de certaines structures logiques » – tâche bel et bien accomplie par le chapitre XII.

2.4 Conclusion générale

La « Conclusion » qui clôt le tome II est-elle générale – comme l'Introduction du tome I – ou bien restreinte à la partie qui la précède – comme la Conclusion du tome I ? D'un point de vue typographique, rien ne la distingue des chapitres qui la précèdent ; mais par son contenu sa portée dépasse clairement la seconde partie. Elle se présente on ne peut plus explicitement comme la réponse aux deux questions que posait l'Introduction générale (t. I, §2), précisant simplement le statut algébrique de la « connaissance pure » examinée dans l'ouvrage :

En étudiant le développement de l'Algèbre, j'ai voulu poser deux problèmes : 1) Quelle est la nature de la connaissance pure en Algèbre ? 2) dans quelle mesure la réponse à ce problème permet-elle d'espérer un renouvellement de la philosophie théorique ? (t. II, p. 355)

Les deux questions de l'Introduction donnent à la Conclusion un plan naturel.

2.4.1 Nature de la connaissance pure en Algèbre

L'histoire en trois étapes synthétisée dans le §70²² est bien celle que retrace *dans son ensemble La Philosophie de l'algèbre*. La première partie décrivait le passage de la « théorie des équations » à l'« algèbre des structures » comme celui de la *méthode* « génétique » – dont les *objets* sont les équations et qui pose comme *principe* « la nature de notre esprit » – à la *méthode* « structurale », dont les *objets* sont les structures et qui autorise le libre choix des *principes*. La seconde partie décrit quant à elle le passage de « l'algèbre des structures » à « l'algèbre de l'algèbre », au sens de l'algèbre universelle, qui adopte la *méthode* « axiomatique²³ », dont les *objets* sont les algèbres et qui étudie pour elles-mêmes les propriétés des systèmes déductifs qu'engendrent les *principes* choisis.

La tripartition ici adoptée par Vuillemin pour résumer de manière transversale les deux parties du développement – méthodes, objets, principes – semble entrer en conflit avec le §7 du tome I, où Vuillemin distinguait les « méthodes proprement dites », dont il se propose de décrire « l'irruption », des « objets et idées nouvelles que leur application a permis d'apercevoir » et « qui correspondent à ces méthodes » (t. I, § 7, p. 65–66). L'on ne saurait pourtant soutenir que le tome I néglige les objets – qu'il s'agisse des structures comme celle de groupe, de classes d'objets comme les courbes W ou du nouveau statut de l'objectivité et de l'individualité – ni que le tome II néglige les méthodes – que l'on pense aux méthodes d'extension de la notion de nombre (chap. VII), de définition par abstraction (chap. VIIIa), à la méthode axiomatique (chap. VIIIb), à la méthode phénoménologique (chap. IX) et à la méthode dedekindienne de généralisation du théorème de factorisation unique (chap. X). Une première précaution sera donc de supposer orthogonales les deux distinctions entre méthode et objet avant de préciser leurs définitions respectives ; partons donc du tableau p. 34.

Pour résoudre le conflit apparent de ces deux couples de concepts homonymes, nous proposons de comprendre les « idées nouvelles » non pas comme les objets de premier niveau que constitue et manipule expressément la méthode décrite dans le tome I, mais comme ceux de second niveau qui résultent de l'application de la méthode et de ses objets à *eux-mêmes*, selon la méthode réflexive qui caractérise le dernier moment de l'histoire de l'algèbre.

22. Voir ce texte et le commentaire qu'en propose Sébastien Maronne dans le présent dossier.

23. La méthode axiomatique avait été distinguée de la première méthode structurale – illustrée par le programme d'Erlangen – dans les §49 et 49' de la seconde partie. Mais dès le tome I, Vuillemin montrait déjà certaines limites de la conception de l'espace à partir de la seule théorie des groupes (Helmholtz, Lie, Poincaré) : dans le prolongement du kantisme (analysé au §48), elle se limite arbitrairement aux espaces homogènes (c'est-à-dire à courbure constante), aux géométries archimédiennes et à l'infinitésimal (§47, p. 426–430, et §48). La conception axiomatique de Riemann et surtout de Hilbert échappe à ces critiques.

	Partie I : « Méthodes proprement dites »	Partie II : « Objets et idées nouvelles »
A : Méthodes	de la méthode génétique à la méthode structurale	de la méthode structurale à la méthode axiomatique
B : Objets	de la théorie des équations à l'algèbre des structures	de l'algèbre des structures à l'algèbre de l'algèbre
C : Principes	de la nature de notre esprit au libre choix des principes	du libre choix des principes à l'étude des propriétés des systèmes déductifs

Les quatre combinaisons de la méthode et de l'objet seraient alors à comprendre comme suit :

1. la *méthode de l'algèbre des structures* (IA) s'exprime dans les « règles » dont le tome I décrit l'« irruption », les « applications » et les « leçons » ;
2. les *objets de l'algèbre des structures* (IB) sont ceux qu'elle manipule – les structures algébriques – ou qu'elle engendre – par exemple les classes de courbes ou d'espaces ;
3. la *méthode de l'algèbre de l'algèbre* (IIA) est l'utilisation des structures pour l'étude même des structures ; ainsi Dedekind dégage-t-il une structure de structure en remplaçant l'opération mathématique de division par la relation logique abstraite d'inclusion (chap. X, § 58, A286) et Wedderburn en raisonnant non sur des structures algébriques particulières mais sur des classes d'algèbres (chap. XII, § 64, A326–A329) ;
4. les *objets de l'algèbre de l'algèbre* (IIB) sont enfin ceux qui permettent l'application de ces dernières méthodes, c'est-à-dire la description systématique de cette activité réflexive ; tels sont selon Vuillemin les concepts de la théorie des treillis, car « on peut prévoir que la théorie des treillis jouera, sur le plan de l'Algèbre générale, le même rôle unificateur que la structure de groupe dans l'Algèbre abstraite » (chap. XII, § 64, A330).

La méthode axiomatique ne s'opposerait donc pas à la méthode structurale comme celle-ci à la méthode génétique : elle en serait bien plutôt une évolution interne, comme peut le laisser entendre l'assertion selon laquelle « lorsqu'on en tire toutes les conséquences, la méthode structurale doit être axiomatique » (t. II, Conclusion, § 70, A358).

2.4.2 Programme philosophique

Le court et extraordinairement dense §71, par lequel se termine la conclusion, montre, en écho au §2 du tome I, qu'à chaque étape de l'évolution récente de l'algèbre correspond un renouvellement de ses rapports avec la philosophie.

D'abord, parallèlement à l'avènement de la méthode génétique s'est imposé un premier dogmatisme, « appliqué[ant] à la connaissance philosophique des méthodes propres à une discipline particulière, les mathématiques » (t. II, Conclusion, §71, A361). Kant y a heureusement mis fin.

Ensuite, parallèlement à la méthode structurale est apparue l'entreprise phénoménologique, qui s'efforce « d'appliquer à la pensée les procédés de l'Algèbre des structures » ; inconsciente de ses propres limites, elle s'est soldée par un nouvel échec.

Enfin, l'algèbre moderne ayant fait sienne la critique de ses procédés, il revient désormais à la philosophie d'en faire de même. L'auteur se fixe quatre grandes questions : la fondation philosophique de la logique²⁴, l'étude intrinsèque de l'idée de Dieu, la classification des systèmes philosophiques et l'étude de la signification de la logique dans la philosophie grecque.

Nous connaissons la suite [Vuillemin 1968, 1971, 1984, 1967]. À contre-pied d'une pratique courante en son siècle, Vuillemin aura donc finalement renoncé à publier son « programme philosophique », se contentant de le réaliser.

3 Évolution

La Philosophie de l'algèbre prise dans son ensemble est une structure soumise à une transformation inachevée. Les considérations génétiques qui suivent permettront de décrire cette transformation et de comprendre en quel sens on peut dire qu'elle est restée inachevée ; mais loin d'atténuer, elles confirmeront la thèse selon laquelle cette transformation était structurale : moins une genèse qu'une *évolution*.

Nous en voudrions pour preuve, dans le tome I, l'intégration successive des Notes au contenu des chapitres, et dans le tome II, les phases de la réécriture du manuscrit.

24. Projet annoncé sous le titre de *Philosophie de la logique* (t. I, p. 505) ou d'*Éléments de logique philosophique* (t. II, chap. VIIIa, A218 et chap. XII, A337). Peut-être est-ce aussi le projet annoncé dans le §7, p. 65 : « Je traiterai [...] de la connaissance pure mathématique avant d'en étudier le fondement logique. »

3.1 La préservation de la structure par enrichissement

Le manuscrit du tome II contient un document de travail qui semble témoigner des modifications successives qu'a subies le plan des « Notes » – c'est-à-dire des annexes – au tome I²⁵ :

- I. Sur la nature mathématique de l'infini [ajouté manuellement]
- II. Sur l'utilisation de la méthode directe de Lagrange pour résoudre les équations d'un degré inférieur à 5 [renuméroté de I en II puis raturé]
- III. Sur l'application du théorème de Lagrange à la solution de l'équation générale du troisième degré [renuméroté de II en III puis raturé]
- IV. Sur l'actualité de Fichte dans la philosophie mathématique [ajouté manuellement]
- V. [ajouté manuellement, sans titre]
- VI. Démonstration du théorème d'Abel [renuméroté de III en VI puis raturé]
- VII. À propos des nombres de Fermat [renuméroté de IV en VII puis raturé]
- VIII. Sur l'application de la théorie de Galois à la résolution des équations du deuxième et du troisième degré [renuméroté de V en VIII puis raturé]
- IX. Sur l'équation « pure » de Klein [renuméroté de VI en IX]
- X. L'équation du dièdre [renuméroté de VII en X]
- XI. Sur l'expression analytique des rotations de la sphère autour de son centre [renuméroté de VIII en XI]

La comparaison entre les modifications effectuées sur ce document et l'ouvrage publié permet de retracer certaines grandes lignes de la transformation du tome I.

Après une tendance à l'accroissement – Vuillemin ajoute aux Notes initialement dactylographiées les Notes I, IV et V –, leur nombre a considérablement décliné à mesure que Vuillemin intégrait leur contenu au corps du texte. La biffure des titres de Notes correspond ainsi probablement à l'intégration des

25. On peut d'abord se demander si, dans un état très précoce du projet, Vuillemin n'a pas prévu une « Note I » sur Husserl (citée dans A, chap. VIIIa, § 43, A216 n. 5), dont le contenu serait finalement devenu une note de bas de page du tome I (Conclusion, II, § 55, p. 501 n. 2). À un stade plus avancé de la rédaction, Vuillemin semble avoir utilisé deux copies dactylographiées d'une même liste de Notes pour retravailler sur l'une le plan des Notes de la seconde partie et sur l'autre celui de la première – probablement dans cet ordre, puisque la numérotation des Notes relatives à la seconde partie n'a pas été affectée par la modification de celles de la première. Vuillemin s'est contenté d'ajouter une note XVI, « Exemple de treillis constitué par tous les sous-ensembles d'un ensemble », renumérotant de ce fait les deux notes suivantes, avant d'ajouter ce qui s'est d'entrée de jeu – sans renumérotation – appelé Note XIX, « Idée générale des théorèmes de représentation ». On trouvera le plan complet des Notes dans la précieuse notice philologique de Gudrun Vuillemin, base de toute reconstitution sérieuse de la genèse du tome II.

Notes II à IV dans le chapitre I sur Lagrange (respectivement dans les §9, 8 et 12), des Notes VI et VII dans le chapitre II sur Gauss (§15) et de la Note VIII dans le chapitre IV sur Galois (peut-être le §29). Vuillemin a ensuite manifestement cessé de mettre à jour ce plan des Notes, mais nous pouvons deviner qu'il a promu les Notes IX à XI (restées non raturées sur le plan) comme §37, 39 et 38 du chapitre V sur Klein. Loin d'aboutir à un collage artificiel, tous ces développements se sont intégrés naturellement à la structure que nous avons décrite et c'est avec parcimonie que Vuillemin semble avoir ajouté dans un dernier moment les Notes II et III que le lecteur connaît :

- I. Sur la notion mathématique de l'infini
- II. Sur les constructions géométriques dans les *Éléments* d'Euclide
- III. Sur le « principe des relations internes »

Sachant comme il est trivial de rejeter des digressions en annexe mais ardu d'intégrer au développement des considérations extrinsèques, on mesure quels durent être les efforts de Vuillemin pour réduire à la portion congrue le nombre des Notes, ce qui n'avait pas été le cas pour *le Descartes*. Ce lourd investissement trahit le souci de Vuillemin d'unifier le discours en une structure unique²⁶.

3.2 La préservation de la structure par réécriture

La rédaction du tome II a connu plusieurs phases, que Gudrun Vuillemin a retracées avec une admirable méticulosité philologique. Ces réécritures ont-elles mis en danger l'architecture de la seconde partie ?

La version la plus ancienne dont nous ayons la trace certaine est un sous-ensemble de la partie dactylographiée du manuscrit A. Elle commence à la fin du chapitre VIIIa (qui portait alors le numéro VII) et finit au chapitre XII. Il semble facile d'établir que cette portion du ms. A est antérieure à la publication du tome I : quand les renvois au tome I ne sont pas laissés en blanc (« voir plus haut, p. [sic] »), ils portent la pagination du manuscrit original du tome I, qui contenait six chapitres perdus ; la p. 244b du ms. A (A244b) cite ainsi une « p. 28 » que nous n'avons pas pu identifier, la page A259 une « p. 142 »

26. Le plan des Notes du tome II aurait probablement aussi dû subir une refonte. La Note relative au chapitre VII intitulée « Exemple pour illustrer la théorie de Kronecker » s'est d'abord appelée IX et semble ultérieurement avoir été renumérotée en II (p. B41) – peut-être après l'ajout de la Note I sur l'infini. Elle a été logiquement suivie d'une Note III, « Sur la définition des nombres rationnels par Russell », relative au chapitre VIIIa. Mais si l'ajout des deux dernières Notes du tome I a finalement décalé à IV la numérotation de la Note du Kronecker, la Note III sur Russell n'a pas été renumérotée en V comme on aurait pu s'y attendre ; peut-être parce qu'elle se trouve dans la partie finale que le ms. B hérite du ms. A sans avoir fait l'objet d'une refonte achevée.

qui correspond à la p. 290 du volume publié²⁷. Nous pouvons appeler ce texte l'« état 0 » du livre. Malgré l'absence de certaines « applications » géométriques (§ 48 à 49') et de certaines leçons philosophiques (§ 55), on voit que l'essentiel de la structure y figurait déjà.

Cette version a ensuite fait l'objet de nombreuses modifications. Il est malheureusement difficile de dater les modifications manuelles ainsi que les ajouts de paragraphes et d'alinéas à cette base dactylographiée : corrections diverses, notes de bas de page aux chapitres VIIIb, X et XI, ajouts des paragraphes sur le programme d'Erlangen (§ 48 et 49 dactylographiés, § 49' manuscrit) dans le chapitre VIIIb, du § 55 dactylographié sur la phénoménologie du temps et les deux paragraphes dactylographiés de Conclusion. Certains sont probablement antérieurs à la publication du tome I²⁸, d'autres contemporains ou postérieurs, mais dans la plupart des cas il est impossible de déterminer la part de ce qui aurait été modifié, de ce qui l'a été avant ou après la publication du tome I et, par-dessus tout, de ce qui aurait survécu sans modification – et qui est donc matériellement indiscernable – de l'état 0 au tome II. Le fait que les chapitres IX et XII ne contiennent que de rares corrections manuelles doit-il être interprété comme le signe d'un abandon précoce ou au contraire de leur maturité précoce ? Au moins un indice montre avec certitude qu'une partie du ms. A a été retouchée *après* la publication du tome I : dans le chapitre X, une référence manuscrite de la page A271–272, n. 1 renvoie à la pagination du volume publié. Une portion non nulle de « l'état 0 » a donc bien fait partie à part entière du projet de tome II.

Le contenu publié comme tome I semble avoir évolué parallèlement aux modifications portées sur le ms. A. Il semble notamment que Vuillemin ait ajouté tardivement au moins le chapitre V, peut-être aussi le VI du tome I. Dans le plan de l'état 0 du ms. A, la numérotation des chapitres commence à VI. Nous ne pouvons que conjecturer le contenu des cinq premiers. À supposer que les quatre premiers chapitres aient été les chapitres I–IV du tome I, le chapitre V pourrait être soit celui sur la théorie de Lie soit tout ou partie de ce qui est paru comme Conclusion du tome I. Il semble en tout cas certain que le chapitre V, sur la théorie de Klein, a été ajouté tardivement. Dans un plan des Notes que Vuillemin projetait d'ajouter à la première partie de l'ouvrage, des Notes alors numérotées IX, X et XI devaient porter sur « l'équation "pure" de Klein », « l'équation du dièdre » et « l'expression analytique des rotations de la sphère autour de son centre », ce qui correspond à une part importante du chapitre V publié. On observe par ailleurs que le chapitre publié « La théorie de Klein » renvoie presque exclusivement au chapitre IV sur Galois, et qu'inversement ce chapitre n'est cité presque que par le chapitre IV. Nous

27. La page B19 contient elle aussi une pagination en blanc, dans une note de bas de page qui n'est pas appelée depuis le texte. Il s'agit donc peut-être d'un résidu du ms. A.

28. En particulier les paragraphes § 48-49' et 55, auxquels renvoie le tome I (les premiers aux § 34, p. 292, § 46, p. 393 et § 47, p. 402 ; le dernier au § 21, p. 180 et 182).

proposons d'en inférer que le chapitre sur Klein a pris son autonomie à partir d'annexes au chapitre IV. Le ms. A ne contient d'ailleurs que deux références tardives aux chapitres sur Klein et Lie. L'une, située dans une partie ajoutée après coup – mais quand ? – au ms. A, mentionne les courbes W (VIIIb, § 48, A244f). L'autre, dans un ajout manuel à une page du ms. A qui a ensuite été réutilisée dans le ms. B, renvoie à la version publiée du chapitre V (VII, § 68, B21/A187). Vuillemin a donc enrichi la première partie sans fragiliser la structure d'ensemble.

Tous les indices prouvent, comme l'avait déjà conclu Gudrun Vuillemin, que le ms. B du tome II est postérieur à la publication du tome I. D'abord, ce manuscrit prolonge la numérotation du livre publié : la numérotation des chapitres commence à VII, celle des paragraphes à 61, celle des Notes à IV. De plus, tous les renvois à la première partie sont cohérents avec le livre publié, qu'ils soient notés de manière dactylographiée sur les pages propres à B ou de manière manuscrite sur les pages récupérées de A (B21/A187, B29/A196, B32 par collage, B33 par collage). Même en prenant en compte les rares modifications manuscrites sur les pages du ms. B qui ne sont pas héritées de A, le ms. B n'est pas encore une version définitive : certaines notes et références sont encore à préciser²⁹. Mais la principale leçon de ce manuscrit nous semble être l'effort de renforcement de la structure par des tripartitions imbriquées : Vuillemin introduit la division de la seconde partie en « Structure, infini, ordre », recompose le chapitre VII pour le structurer en trois sections – formalisme de Hankel, intuitionnisme de Kronecker, logicisme de Frege et Russell – et entame la restructuration du chapitre VIIIa selon les trois moments de la Conclusion du tome I. La refonte entamée de la seconde partie non seulement préservait mais renforçait la structure d'ensemble tout en l'harmonisant aux modifications effectuées sur la première.

Résumons donc l'évolution du plan entre l'état 0 du ms. A, les modifications portées au ms. A et le ms. B :

1. L'« état 0 » est la plus ancienne trace dont nous disposons.
2. Dans un deuxième temps, trois paragraphes ont été ajoutés sur le ms. A, sans doute avant la publication du tome I, qui y renvoie : les paragraphes dactylographiés 48 et 49 à la fin du chapitre VIIIb, le § 55 dactylographié du chapitre IX sur la phénoménologie du temps et peut-être également les § 70–71 dactylographiés de la Conclusion.
3. Dans un troisième temps, postérieur à la publication du tome I, fut réalisé le ms. B : un paragraphe a été déplacé (l'ancien § 33 sur le programme pythagoricien de Kronecker a été déplacé après les § 34–36 sur le principe de permanence des lois formelles de Hankel) et deux ont été ajoutés au début du chapitre VII (§ 61–62 du ms. B) ; mais surtout, le ms. B introduit la tripartition « Structure, infini, ordre », la tripartition

29. À savoir chap. VII, B4, n. 2, B19, n. 2 et 3, B20, n. 2 ; chap. VIIIa, B34, n. 2, B35, n. 1, B41, n. 2, B42, n. 1 et 3, A210, n. 1 manquante, A212, n. 1, A213, n. 2.

du chapitre VII et entame la tripartition du chapitre VIIa parallèle à la Conclusion du tome I.

4. C'est aussi tardivement que dut être ajouté le paragraphe manuscrit 49', dont le titre, « Retour au problème de l'intuition spatiale en géométrie », pourrait d'ailleurs indiquer la postériorité par rapport au chapitre V du tome I sur la théorie de Klein. Vuillemin a interrompu la refonte de son manuscrit au milieu du chapitre VIIa.

Le texte a donc subi bien des transformations. Il n'est que plus saisissant de constater à quel point ces restructurations et enrichissements successifs, loin d'avoir lieu par agrégat et juxtaposition au détriment de la structure, montrent un souci constant non seulement de préserver, mais de renforcer la systématisme voulue dès le départ.

4 Conclusion

La Philosophie de l'algèbre est un ouvrage complet obéissant à une structure rigoureuse, que les réélaborations successives de chacune des deux parties ont préservée tout en l'enrichissant. C'est ce que nous semblent montrer tant une lecture attentive du texte que les considérations génétiques.

Les transformations qu'eût encore subies la structure ne nous sont que partiellement prévisibles ; mais la connaissance de la structure de départ et celle du morphisme en cours d'application n'en permettent pas moins de deviner quelle eût été dans ses grandes lignes la structure d'arrivée.

Remerciements

Le présent travail a été financé par l'ANR VUILLEMIN <ANR-17-CE27-0017-01>. L'auteur remercie vivement Sébastien Maronne, qui par ses remarques et ses précieux conseils joua un rôle crucial dans l'élaboration de ce texte ; † Gudrun Vuillemin, Françoise Létoublon, Jean Vuillemin, qui ont confié aux Archives Henri-Poincaré le précieux fonds Jules-Vuillemin ; Thomas Bénatouil, qui a invité l'auteur en 2012 à initier l'exploration du manuscrit du tome II ; Gerhard Heinzmann et le Comité scientifique des Archives Jules-Vuillemin, qui ont permis ces recherches ; et plus généralement l'ensemble de l'équipe qui a procédé à l'étude du tome II : Simon Decaens, Emmylou Haffner, Gerhard Heinzmann, Sébastien Maronne, Philippe Nabonnand, David Rabouin et David Thomasette.

Bibliographie

- BELL, Eric T. [1945], *The Development of Mathematics*, New York : Mc Graw-Hill, 2^e éd.
- CAVAILLÈS, Jean [1947], *Sur la logique et la théorie de la science*, Paris : PUF.
- DESCARTES, René [1986], *Œuvres de Descartes*, Paris : Vrin, édition de Ch. Adam et P. Tannery.
- MÉLÈS, Baptiste [2012], Pratique mathématique et lectures de Hegel, de Jean Cavailès à William Lawvere, *Philosophia Scientiæ*, 16(1), 153–182, doi : 10.4000/philosophiascientiæ.725.
- [2020], Les Anselme de Jules Vuillemin : de la critique générale de la raison pure à la classification des systèmes philosophiques, *Klesis*, à paraître, dossier « Théorie des ensembles et théologie : l'Anselme de Jules Vuillemin », dir. S. Roudaut et B. Mélès.
- SCHWARTZ, Elisabeth [2005], Histoire des mathématiques et histoire de la philosophie chez Jules Vuillemin, dans *Philosophie des mathématiques et théorie de la connaissance. L'Œuvre de Jules Vuillemin*, édité par R. Rashed & P. Pellegrin, Paris : Librairie Albert Blanchard, 1–28.
- [2015], Le Descartes de Jules Vuillemin et sa contribution à sa *Philosophie de l'algèbre 1*, *Les Études philosophiques*, 112(1), 31–50, doi : 10.3917/leph.151.0031.
- VUILLEMIN, Jules [1959], Le problème phénoménologique : intentionnalité et réflexion, *Revue Philosophique de la France et de l'Étranger*, 149, 463–470, doi : 10.2307/41088874.
- [1960a], La philosophie de l'algèbre de Lagrange (réflexions sur le mémoire de 1770-1771), *Les Conférences du Palais de la Découverte*, Série D(71), 5–24, conférence faite le 6 février 1960.
- [1960b], *Mathématiques et Métaphysique chez Descartes*, Épipiméthée, Paris : PUF.
- [1961], Sur la différence et l'identité des méthodes de la métaphysique et des mathématiques chez Descartes et Leibniz et sur la conception classique des principes de causalité et de correspondance, *Archiv für Geschichte der Philosophie*, 43(3), 267–302, doi : 10.1515/agph.1961.43.3.267.
- [1962], *La Philosophie de l'algèbre. Tome premier. Recherches sur quelques concepts et méthodes de l'algèbre moderne*, Épipiméthée, Paris : PUF.
- [1967], *De la logique à la théologie. Cinq études sur Aristote*, Nouvelle Bibliothèque Scientifique, Paris : Flammarion.

- [1968], *Leçons sur la première philosophie de Russell*, Philosophies pour l'âge de la science, Paris : Armand Colin.
- [1971], *Le Dieu d'Anselme et Les Apparences de la raison*, Paris : Aubier.
- [1984], *Nécessité ou contingence. L'aporie de Diodore et les systèmes philosophiques*, Paris : Minuit ; Fondation Singer-Polignac.
- [1990], Présentation générale du numéro « La Philosophie et son histoire », *L'Âge de la science. Lectures philosophiques*, 3 : La Philosophie et son histoire, 9–13.
- [s. d.], *La Philosophie de l'algèbre. II. Structure, Infini, Ordre*, Nancy.