



HAL
open science

De l'usage des transformations géométriques à la notion d'invariant : la contribution d'al-Siğzī

Pascal Crozet

► **To cite this version:**

Pascal Crozet. De l'usage des transformations géométriques à la notion d'invariant : la contribution d'al-Siğzī. *Arabic Sciences and Philosophy*, 2010, 20 (1), pp.53-91. 10.1017/S0957423909990087 . halshs-03098903

HAL Id: halshs-03098903

<https://shs.hal.science/halshs-03098903>

Submitted on 6 Jan 2023

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

DE L'USAGE DES TRANSFORMATIONS GÉOMÉTRIQUES À LA NOTION D'INVARIANT : LA CONTRIBUTION D'AL-SIĞZĪ

PASCAL CROZET

(CNRS)

L'utilisation de plus en plus fréquente des transformations – homothéties, affinités orthogonales ou similitudes – constitue sans aucun doute l'un des faits les plus marquants de l'histoire de la géométrie entre les IX^e et XI^e siècles. Parce qu'une telle utilisation s'est étendue à des chapitres de plus en plus nombreux, parce qu'elle incitait à s'intéresser aux relations entre les figures plus qu'à les considérer isolément, parce qu'elle interrogeait dès lors la légitimité du recours au mouvement et, par là, faisait surgir la question des fondements, elle a pu conduire en effet à infléchir la nature même de l'objet de la discipline. Roshdi Rashed a brossé ailleurs les grandes lignes de cette évolution qui, partant de l'œuvre des Banū Mūsā en passant par celles de Thābit ibn Qurra, de son petit-fils Ibrāhīm ibn Sinān et de bien d'autres, aboutit notamment à la remise en ordre d'Ibn al-Haytham dans ses traités sur les *Connus* et sur le *Lieu*¹.

De cette histoire, le moment qui correspond à la contribution d'al-Siğzī, à la fin du X^e siècle, est l'un des plus importants. On ne trouve certes rien dans cette œuvre qui invite à repenser les fondements de la géométrie : contrairement à son successeur Ibn al-Haytham, al-Siğzī ne cherche pas, du moins explicitement, à dépasser le cadre légué par Euclide. Pourtant, deux points particulièrement remarquables suffisent à distinguer les écrits d'al-Siğzī de ceux de ses prédécesseurs : en premier lieu, le fait que, pour la première fois, il introduise un terme générique pour désigner les transformations et la méthode qui leur est attachée ; et, en second lieu, la recherche auquel il se livre explicitement pour dégager des invariants géométriques en faisant varier certains éléments d'une figure. C'est à expliciter le premier point et à mettre en évidence le second que nous voudrions nous consacrer ici.

I- LES TRANSFORMATIONS COMME MÉTHODE GÉOMÉTRIQUE

C'est d'une façon pour le moins succincte qu'al-Siğzī introduit le mot transformation (*naql*). Dans son traité intitulé *Pour aplanir les voies en vue de déterminer les propositions géométriques*², où il entreprend d'une façon générale de présenter l'ensemble des méthodes dont dispose le géomètre, il écrit en effet simplement :

¹ Roshdi Rashed, *Les mathématiques infinitésimales*, vol. IV (al-Furqān, Londres, 2002), pp. 1-11. L'ouvrage comprend en outre l'édition critique, la traduction et un commentaire détaillé des traités d'Ibn al-Haytham relatifs aux transformations et aux méthodes géométriques..

² Traité édité, traduit et commenté par Roshdi Rashed, *Les mathématiques infinitésimales*, vol. IV, *op. cit.*, pp. 690-735 et 766-825. Nous nous référerons à cette édition dans ce qui suit. Ce texte important avait déjà été édité deux fois auparavant : Aḥmad Saʿīdān, *Rasāʾil Ibn Sinān*, Maḡlis al-waṭānī li-l-tāqāfa wa-l-funūn

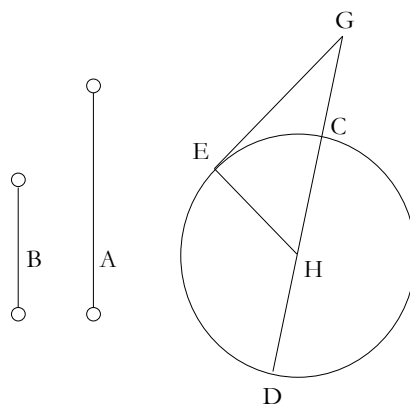
Peut-être apparaîtra-t-il au chercheur une méthode grâce à laquelle il lui sera facile de déterminer de nombreuses propositions difficiles, qui soit la transformation (*naql*) que nous allons expliquer et dont nous donnerons des exemples³.

Que recouvre alors une telle méthode et, au-delà, quel sens donner au mot transformation dès lors que l'on entend rendre compte par ce biais de la pratique mathématique de l'époque ? Al-Siğzī ne donnant en réalité aucune explication générale, nous sommes donc conduits à revenir de façon détaillée tant sur les exemples qu'il fournit lui-même dans ce traité que sur d'autres résolutions situées ailleurs dans ses écrits.

I-1 Premier exemple

Notre premier exemple est précisément celui sur lequel s'appuie le mathématicien pour illustrer sa méthode⁴. Il est ainsi introduit :

Comment trouver deux droites proportionnelles à deux droites données dont l'une est tangente à un cercle donné et l'autre rencontre le cercle, et telle que si on la mène dans le cercle, elle passe par son centre ? Supposons la figure construite selon la voie de l'analyse afin de chercher ses lemmes ; exemple : supposons le rapport, le rapport de A à B et le cercle, le cercle CD , et les deux droites GE et GC dans le rapport de A à B – ce sont celles que nous cherchons ; comme si la figure était construite et trouvée et comme si nous avions sa construction d'après ce que nous avons exposé, à savoir que si on mène GC dans le cercle jusqu'à D , CD sera un diamètre de celui-ci.



Les seules données du problème sont donc le cercle et le rapport de A à B . Al-Siğzī remarque qu'on ne connaît ni l'angle en G ni l'arc EC . Si l'on nomme H le centre du cercle, on connaît par contre l'angle GEH , égal à un droit. Pour déterminer l'angle en G , il suffit donc de connaître la forme du triangle rectangle GEH . Le problème pourrait donc être posé de façon légèrement différente : EH étant connue, comment trouver le triangle rectangle GEH , sachant que le rapport de GE , l'un des côtés de l'angle droit, à l'hypoténuse diminuée de EH , l'autre côté de l'angle droit, soit égal à un rapport donné. Toutefois, puisque l'on cherche à déterminer en premier lieu la forme du triangle GEH ,

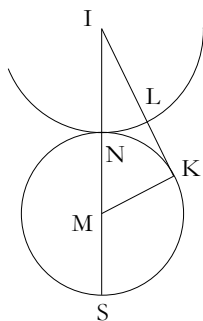
(Koweit, 1983), pp. 339-372 ; *al-Sijzī's Treatise on Geometrical Problem Solving*, translated and annotated by Jan P. Hogendijk, with the Arabic text and a Persian translation by Mohammad Bagheri, Fatemi Publishing Co. (Téhéran, 1996).

³ *Op. cit.*, p. 770.

⁴ *Ibid.*, pp. 774-782.

l'usage de la transformation permet de se ramener à un problème plus simple. En effet, ne chercher que la forme du triangle permet de s'abstraire des dimensions de la figure d'origine en considérant une figure semblable ; dès lors, on va pouvoir changer les données de départ : si, plutôt que se donner le côté à soustraire de l'hypoténuse, on se donne l'autre côté de l'angle droit, le problème est effectivement plus aisé à résoudre. C'est bien ce que propose al-Siğzī, en signalant qu'il va procéder à la construction de la figure « par la transformation »⁵.

On se donne donc un segment IK arbitraire et on cherche le triangle IMK , rectangle en K , tel que si N est le point de l'hypoténuse vérifiant $MN = KM$, alors le rapport de IK à IN est égal au rapport connu de A à B .



Pour résoudre ce nouveau problème, le mathématicien conduit une analyse classique : supposant la figure construite, il trace le cercle de centre M . La puissance du point I par rapport à ce cercle est alors connue puisque IK est connue. Si l'on appelle S l'intersection du prolongement de IM et du cercle, on aura donc $IN \cdot IS$ connu. Mais puisque le rapport de IK à IN est connu, IN est connue et IS est connue. Par conséquent, NS et MK sont connues, et donc le triangle IMK est connu. Al-Siğzī peut alors conclure :

Nous avons construit cette figure comme nous le voulions. Nous la transformons (*nanqulubni*) ensuite dans le cercle donné par la similitude et le rapport, et nous le démontrons. Ce qu'il fallait démontrer.

Cet exemple appelle d'emblée plusieurs remarques. En premier lieu, il faut noter que les mots *transformation* et *transformer* sont utilisés ici dans un contexte particulier qui est celui de l'analyse. Tel qu'il est présenté dans ce traité, le recours à la transformation constitue donc une méthode qui s'inscrit au sein d'une méthode de résolution plus vaste et plus générale, la méthode analytique, qu'elle vient enrichir de façon substantielle. Comme le note Roshdi Rashed⁶, « la transformation ponctuelle a une double fonction : mathématique (transformation d'une figure) et logique (réduction à un problème plus facile) ». Ainsi qu'il est apparu, la fonction logique repose sur une inversion des données de l'analyse : des grandeurs connues du premier problème sont inconnues dans le second et d'autres qui étaient inconnues y deviennent connues. Or cette inversion n'est permise que par la prise en considération explicite d'une propriété commune à deux figures – ici la forme – autrement dit en faisant abstraction de la position et de la dimension de la première figure.

⁵ *Ibid.*, p. 776.

⁶ *Ibid.*, p. 699.

Ces deux fonctions de la transformation sont donc indissociables, et le mathématicien en a bien perçu tous les enjeux.

En second lieu, il faut remarquer que le mot *transformation* ne désigne pas ici une transformation particulière, même si en l'espèce il ne peut s'agir que d'une transformation qui conserve la forme, à savoir une similitude directe. Lorsque al-Siğzī utilise plus haut le mot *similitude*, il veut simplement signifier le fait que les triangles *IMK* et *GEH* sont semblables et que l'on peut dès lors construire la figure demandée. La position et la grandeur de *IM* étant arbitraires, on ne peut définir ici pour cette similitude aucun centre et aucun angle de rotation, ce qui n'est du reste nullement nécessaire pour mener à bien l'analyse. Le mot *transformation* renvoie donc au lien existant entre deux figures, plus qu'au processus géométrique précis par lequel on va pouvoir passer de l'une à l'autre. Ce qui ne veut pas dire qu'on ne puisse trouver ailleurs la description d'un tel processus.

Aussi, avant d'aller plus loin, donnons encore quelques exemples.

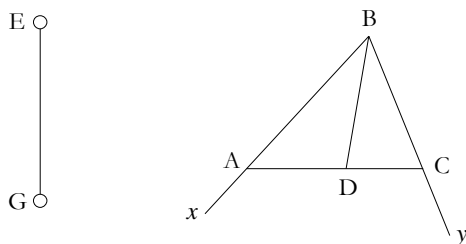
I-2 Deuxième exemple

A la différence de l'exemple précédent, notre deuxième exemple prend place dans le cadre d'une synthèse et met en œuvre une isométrie et non plus une simple similitude ; il permet néanmoins de confirmer nos premières conclusions. En outre, il permet également de dater plus précisément l'usage du mot *transformation* par le mathématicien. L'*Anthologie de problèmes* d'al-Siğzī, composée vers 970, est en effet citée dans le traité que nous venons d'évoquer, et celui-ci lui est donc postérieur⁷. Or on y trouve, en plusieurs endroits, une utilisation du verbe *naqala* semblable à celle dont que nous venons de décrire. C'est le cas en particulier de la proposition 119 de ce traité, où al-Siğzī résout un problème que lui a soumis l'un de ses correspondants, Abū al-Ġūd.

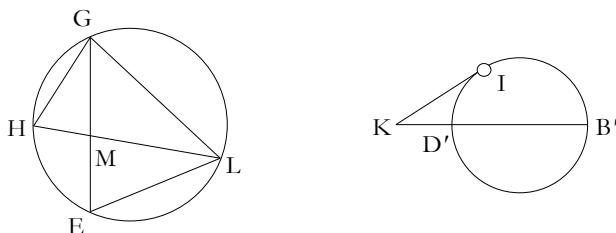
Soit donc deux demi-droites Bx et By , se rencontrant en B selon un angle donné. On considère sur la bissectrice de l'angle $\angle B$ un point D donné, et l'on veut construire une droite passant par D et coupant Bx et By en A et C de sorte que AC soit égal à une grandeur EG donnée. L'auteur impose en outre une condition dont il est aisé de se rendre compte du caractère nécessaire : EG doit être plus grand que la distance entre les deux points d'intersection de la perpendiculaire à BD passant par D avec les deux demi-droites Ax et By ⁸.

⁷ Livre de *Aḥmad ibn Muḥammad ibn 'Abd al-Ġalīl sur une anthologie des problèmes qui ont été soulevés entre lui et les géomètres de Chirāz et du Khorassan, et ses commentaires*, MS Dublin, Chester Beatty 3652/7, fol. 35^r-52^v, édition, traduction et commentaires à paraître dans : Roshdi Rashed & Pascal Crozet, *Œuvres mathématiques d'al-Siğzī*, vol. II (). Ce traité est cité dans *Pour aplanir les voies* sous son nom abrégé de *Commentaires géométriques*. Il est également cité dans une lettre du mathématicien à son père, datée du 12 février 972 (voir Roshdi Rashed, *Œuvre mathématique d'al-Siğzī*, Peeters (Louvain, Paris, 2004), vol. I, p. 208).

⁸ Nous évoquerons plus loin le caractère suffisant de cette condition (voir note 10). Notons que ce problème est très vraisemblablement issu du livre I du traité des *Inclinaisons* d'Apollonius, aujourd'hui perdu : en premier lieu par qu'il correspond bien à l'énoncé général fourni par Pappus pour rendre compte de ce traité ; en second lieu parce qu'al-Siğzī lui-même fait suivre sa propre résolution d'une résolution toute différente qu'il attribue à Apollonius ; enfin parce que Pappus donne, à propos du 9^e problème de ce livre, le même diorisme que nous venons de citer (Pappus, *Collection mathématique*, éd. Ver Eecke, II, 608-610).



Pour résoudre ce problème, al-Siğzī se place délibérément sur le segment EG . Il y construit un cercle passant par E et G tel que l'un des deux arcs \overline{EG} soit capable d'un angle égal à l'angle donné en B , puis il partage l'autre arc \overline{EG} en deux moitiés selon le point H et joint HG . Il mène ensuite un cercle de diamètre égal à BD , trace un segment IK de longueur HG qui lui est tangent en I , et mène depuis K la droite passant par le centre du cercle et le coupant en D' et B' ⁹. Il détermine enfin un point M sur le segment GE tel que HM égale KD' ¹⁰, et prolonge HM jusqu'à ce qu'il coupe le cercle en L .

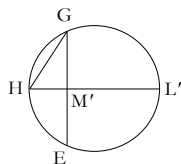


Il démontre alors que LM est égal à BD . En effet, les triangles HGL et HMG étant semblables, LH à HG est égal au rapport de HG à HM et donc $HG^2 = HM \cdot HL$. Or $HG^2 = KD' \cdot KB' = HM \cdot KB'$. Donc $HL = KB'$, ce qui assure le résultat. Puis il conclut :

Si nous *transportons* (*naqalna*)¹¹ la figure du triangle vers les droites AB et BC , en menant DA égale à MG et en le faisant parvenir de l'autre côté jusqu'en C , alors le triangle ABD est semblable au

⁹ Al-Siğzī nomme ces deux points D et B . Nous ne faisons cette modification que pour plus de clarté.

¹⁰ Pour déterminer le point M , on peut tracer un cercle de centre H et de rayon KD' . Comme le remarque al-Siğzī, KD' est nécessairement plus petit que KI et donc que HG ; si donc le cercle de centre H coupe la droite GE , ce ne pourra être qu'entre les points G et E . Par contre, le mathématicien n'assure pas que ce cercle coupe bien la droite GE . Cette intersection existe bien néanmoins si l'on satisfait au diorisme du problème, qui fournit dès lors une condition suffisante. Considérons en effet la médiatrice $HM'L'$ du segment EG .

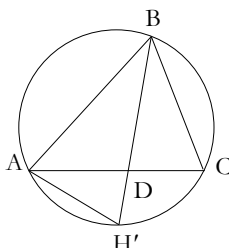


Il est clair que la condition stipulée par al-Siğzī conduit à $M'L' > BD$. Or on a à la fois $HG^2 = HM' \cdot HL'$ et $HG^2 = KD' \cdot KB'$. Donc $HM'^2 + HM' \cdot M'L' = KD'^2 + KD' \cdot D'B' = KD'^2 + KD' \cdot BD < KD'^2 + KD' \cdot M'L'$. Par conséquent, $(HM' - KD')(HM' + KD' + M'L') < 0$ et donc $HM' < KD'$, ce qui assure l'existence d'une intersection. Notons que deux points sont solutions, ce qui donnera deux solutions au problème de départ, symétriques par rapport à la bissectrice BD .

¹¹ Nous traduisons ici par *transporter* plutôt que par *transformer* en raison de la spécification du lieu d'arrivée et des usages de la langue. Mais il s'agit bien du même verbe arabe et du même sens que plus haut. D'autre part, ce même verbe recouvre bien dans ce traité un sens plus étendu que celui d'un simple déplacement, puisqu'il s'applique à une similitude dans la proposition 135.

triangle LMG et, de même, le triangle CBD est semblable au triangle ELM . Or la droite LM est égale à la droite BD , donc la droite AC est égale à la droite EG ; ce qu'il fallait démontrer.

Pour mieux comprendre encore les ressorts d'une telle démonstration, tentons de reconstituer l'analyse qui a pu y conduire. Supposons donc le triangle ABC construit, menons-en le cercle circonscrit, appelons H' l'intersection de ce cercle avec la droite BD et joignons AH' .



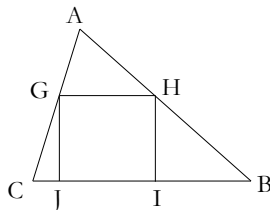
H' est alors le milieu de l'arc $\overset{\frown}{AC}$ et, pour les mêmes raisons que celles expliquées plus haut, on a : $AH'^2 = H'D \cdot H'B$. Des quatre points intervenant dans cette égalité, B et D sont connus, et A et H' sont inconnus. Or cette égalité est serait plus simple à traiter si l'on avait l'inverse, c'est-à-dire si, toutes choses restant égales par ailleurs (l'angle en B et la distance BD notamment), on avait A et H' connus et B et D inconnues : en traçant un cercle de diamètre connu BD et en en considérant une tangente de grandeur AH' , on pourrait en effet aisément déterminer $H'D$ et $H'B$.

Tout conduit donc à chercher à construire une autre figure, qui sera au bout du compte identique à la première mais en étant définie autrement ; c'est bien ce que réalise al-Siğzī dans sa synthèse, et l'on retrouve bien la même fonction logique que dans le premier exemple, reposant de la même façon sur une inversion des données. Le passage d'une figure à l'autre peut être réalisé par une isométrie directe qui, pas plus que précédemment, n'est ici explicitée¹².

I-3 Troisième exemple

Notre dernier exemple est constitué de la proposition 143 de l'*Anthologie de problèmes*. Il diffère des précédents sur deux points : en premier lieu parce que le mathématicien n'y a pas recours au verbe *naqala*, et ensuite parce qu'il y fait usage d'une transformation que l'on peut cette fois préciser, puisqu'il s'agit d'une homothétie dont le centre et le rapport sont déterminés.

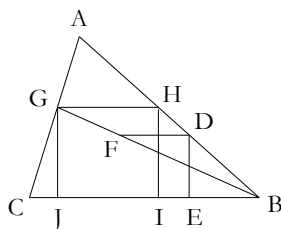
On se donne un triangle ABC , et on veut y inscrire le carré $GHIJ$ tel que l'un de ses côtés soit sur l'un des côtés du triangle et les deux sommets opposés sur les deux autres côtés.



¹² Etant donné que les deux solutions du problème sont symétriques l'une de l'autre, ce pourrait être du reste une isométrie quelconque, mais cela ne correspond pas à ce qu'écrit al-Siğzī.

Remarquons d'emblée que le problème pourrait être traité exactement de la même façon que dans les deux exemples précédents. On pourrait en effet résoudre le problème obtenu en inversant les données de départ, à savoir en se donnant un carré totalement arbitraire $G'H'I'J'$ et en cherchant un triangle circonscrit semblable au triangle donné ABC ; la solution en est immédiate puisque les angles en H' et en G' sont connus, et il suffit alors d'utiliser une similitude pour revenir dans la configuration d'origine.

Quoiqu'il nous semble douteux qu'al-Siğzī n'ait pas envisagé une solution aussi simple alors qu'il use de cette méthode dans le même traité et qu'il en souligne ailleurs tout l'intérêt pour le géomètre, la synthèse qu'il propose est, du moins sur un plan formel, légèrement différente. Le fond en est cependant fort voisin. Le mathématicien considère en effet un point D arbitraire sur le segment AB , il abaisse en E la perpendiculaire à BC passant par D , et construit DF perpendiculairement à DE en posant $DF = DE$. Il mène ensuite BF , qu'il prolonge jusqu'à ce qu'elle rencontre AC en G , achève la construction du rectangle $GHIJ$ et démontre, au moyen d'égalité de rapports, que ce rectangle est bien un carré.



La construction est donc obtenue en considérant les éléments d'un carré judicieusement choisi et en transportant les propriétés par une homothétie de centre B . Que le mathématicien n'utilise pas ici le mot *transformation* tient essentiellement à ce que cette transformation est contenue dans la figure qu'il construit. En utilisant un tel carré plutôt qu'un carré totalement arbitraire, il exploite cependant les mêmes potentialités logiques que précédemment et sa solution y gagne de surcroît en élégance.

I-4 Conclusion

Que sont alors les transformations pour al-Siğzī ? Il ne s'agit sans doute pas – ou du moins pas encore – d'un objet mathématique en tant que tel, dans le sens où il pourrait être étudié pour lui-même. Le mot renvoie simplement, nous semble-t-il, au lien qui existe entre deux figures, sans que soient jamais exploitées les propriétés qui relèvent du processus mathématique de passage de l'une à l'autre. Même dans notre troisième exemple, où l'on peut clairement identifier une homothétie, la démonstration repose sur des égalités de rapports et non sur les propriétés de la transformation, qui pourraient assurer en l'espèce que la transformée d'un carré est un carré. On comprend alors pourquoi, dans les deux premiers exemples, la transformation n'est pas même explicitée : de telles propriétés ne sont pas disponibles ni même pensées. Roshdi Rashed a sans aucun doute raison lorsqu'il voit dans le traité d'Ibn al-Haytham *Sur les propriétés du cercle* « la première étude connue de certaines propriétés » de l'homothétie, comme : la figure homothétique d'un arc est un arc, celle d'un rayon un rayon, celle d'un angle de deux droites l'angle des deux droites homologues, les tangentes à deux arcs homothétiques aux points homologues sont

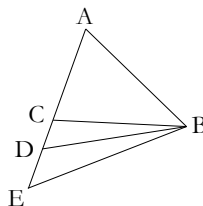
parallèles, etc.¹³ Chez al-Siğzī en effet, rien de tel : les transformations y demeurent cantonnées à l'usage qui en est fait ; elles renvoient essentiellement à une méthode.

Il n'en reste pas moins que reconnaître et nommer une telle méthode, de même qu'en dégager toutes les potentialités logiques, constitue un acte essentiel. Si l'utilisation de cette méthode n'assure pas encore véritablement aux transformations d'existence en tant que telles, elle ne peut en effet qu'attirer bien plus qu'auparavant l'attention sur les propriétés communes entre les figures. Dès lors, il n'est guère surprenant de retrouver chez le même auteur non pas une tentative de dégager les propriétés des transformations – ce qui aurait supposé qu'elles fussent saisies en tant qu'objet – mais un mode d'appréhension des figures qui, de façon explicite et délibérée, rompt avec une manière euclidienne de les considérer de façon isolée et statique.

II- VARIATIONS ET INVARIANTS

Comme le remarque fort justement Roshdi Rashed dans son commentaire¹⁴, l'idée de variation constitue l'un des thèmes récurrents du traité *Pour aplanir les voies*. On trouve en effet dans ce texte aussi bien une étude des variations d'un élément d'une figure, que des variations de méthodes de résolution d'un même problème, des variations des lemmes par lesquels on peut mener une démonstration, etc. Il y a là un procédé heuristique dont le mathématicien souligne tout l'intérêt, en particulier pour « la recherche des propriétés des figures »¹⁵. Prenant un exemple simple, il écrit ainsi :

Nous supposons un triangle ABC et nous cherchons la propriété de ses angles, à savoir : la somme des deux angles est égale à la somme des angles d'un triangle donné, avant de savoir qu'elle est égale à deux droits. La méthode pour notre recherche dans cette première visée est de supposer que l'un de ses angles reste dans l'état et de *faire varier* (*nūḥālifu*) ses côtés afin que la somme des deux angles qui restent soit plus grande ou plus petite que celle des deux premiers ou leur soit égale.



Laissant l'angle A inchangé, il fait ainsi varier le côté opposé en en maintenant fixée l'extrémité B . Lorsque l'un des deux autres angles augmente, alors le troisième diminue. Si nous trouvons que l'augmentation compense la diminution, alors « nous aurons trouvé une propriété pour les triangles, absolument »¹⁶. Il n'y a plus alors, explique al-Siğzī, qu'à soumettre ce résultat à la méthode de l'analyse pour le démontrer ou l'infirmier.

Une telle démarche ne pouvait que conduire à faire surgir la notion d'invariant, à savoir une propriété commune entre figures de même genre comme ici la somme des

¹³ Roshdi Rashed, *Les mathématiques infinitésimales*, vol. IV, *op. cit.*, p. 21.

¹⁴ *Ibid.*, p. 697.

¹⁵ *Ibid.*, p. 782.

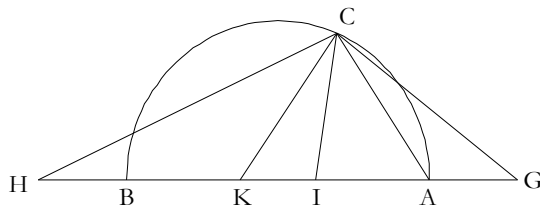
¹⁶ *Ibid.*, p. 784.

angles d'un triangle. C'est bien ce à quoi al-Siğzī consacre un petit traité, dont nous donnons plus loin une édition et la traduction française.

Ce texte, vraisemblablement contemporain de l'*Anthologie de problèmes*, porte un titre qui pourrait paraître à première vue énigmatique : *Sur l'obtention de lois géométriques déterminées* (*Fī taḥṣīl al-qawānīn al-handasiyya al-maḥdūda*). Le mot *déterminé* s'applique habituellement en effet à des objets géométriques ou à des problèmes à résoudre, mais il semble peu adapté à désigner une classe de théorèmes ou de « lois géométriques ». Pour mieux comprendre l'intention d'al-Siğzī, il nous faut donc décrire plus précisément le texte lui-même.

Celui-ci comprend douze propositions, ou plutôt douze énoncés puisque la plupart ne sont pas accompagnés de démonstration, le mathématicien se contentant en effet le plus souvent de renvoyer à ses traités antérieurs : son *Anthologie de problèmes*, désignée sous son nom abrégé de *Commentaires géométriques* ; ses traités, aujourd'hui perdus, sur les *Propriétés de l'ellipse* et sur les *Cercles tangents* ; le texte qu'il consacre à des démonstrations alternatives d'un certain nombre de propositions des *Éléments* d'Euclide¹⁷. Il ne peut donc s'agir de signaler des résultats nouveaux. Si ces propositions sont ainsi rassemblées par al-Siğzī, ce ne peut donc être que parce qu'il tient à en souligner la proximité, comme si elles relevaient d'un même ordre d'intention.

Or l'examen de ces énoncés montre qu'ils mettent tous en œuvre des figures dans lesquelles certains éléments sont fixes, et d'autres variables ou, du moins, quelconques. Dans la première proposition se superposent ainsi deux résultats issus de l'*Anthologie de problèmes*. Le premier qui, notons-le, fera l'objet de la proposition 22 du livre I des *Connus* d'Ibn al-Haytham¹⁸, envisage un demi-cercle de diamètre AB et un couple de points de ce même diamètre, symétriques par rapport au centre, et situés soit à l'extérieur du cercle (H et G), soit à l'intérieur (K et I) ; si l'on appelle C un point quelconque (ou variable) du demi-cercle, alors $HC^2 + GC^2$ (ou $KC^2 + IC^2$) est égal à une constante indépendante de C .



Dans le second, qui est une sorte de généralisation du théorème de Pythagore, on considère trois arcs sur le segment AB , l'un capable d'un angle droit et les deux autres capables de deux angles supplémentaires, l'un aigu et l'autre obtus. Puis on mène à partir de B une droite quelconque coupant les trois arcs successivement en D , C et E . On obtient alors deux quantités invariables, indépendantes de la droite issue de B :

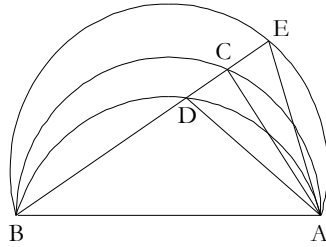
$$AD^2 + DB^2 + BD \cdot DE = AB^2$$

et

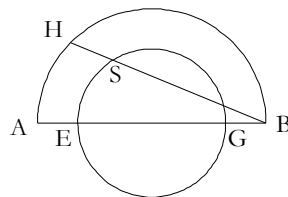
$$AE^2 + EB^2 - BE \cdot ED = AB^2$$

¹⁷ Voir notre article « Al-Sijzī et les *Éléments* d'Euclide : commentaires et autres démonstrations des propositions », *Perspectives médiévales (arabes, latines, hébraïques) sur la tradition scientifique et philosophique grecque*, A. Hasnaoui, M. Aouad, A. Elamrani-Jamal édés, Peeters (Louvain, Paris, 1997), pp. 61-77.

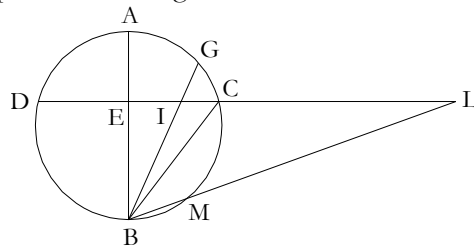
¹⁸ Roshdi Rashed, *Les mathématiques infinitésimales*, vol. IV, *op. cit.*, pp. 530-533.



La deuxième proposition fait également apparaître des quantités invariables. On considère de deux cercles concentriques de diamètres EG et AB , où $AB > EG$, et l'on mène du point B la corde HB , coupant le cercle intérieur en deux points dont le plus proche de H est nommé S . Le produit $BS \cdot SH$ est alors une constante indépendante de la corde menée de B ¹⁹.



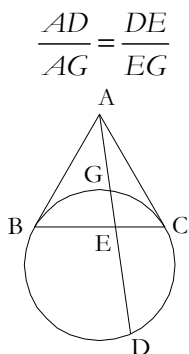
Certains résultats faisant apparaître des quantités invariables sont bien connus, comme la propriété bifocale de l'ellipse (proposition 7). D'autres font apparaître des transformations. Ainsi la proposition 5 met en œuvre deux cercles tangents, intérieurement ou extérieurement, et signale l'invariance du rapport de l'homothétie qui fait de l'un le transformé de l'autre. De même, la proposition 12 dégage l'invariance du produit de l'inversion qui échange un cercle et une droite ; si une droite DL est perpendiculaire au diamètre AB d'un cercle, toute droite issue de B rencontrant le cercle et la droite DL définit deux segments dont le produit des longueurs est constant : $BI \cdot BG = BM \cdot BL = BC^2$.



Dans certaines propositions toutefois, ce ne sont pas des quantités qui sont invariables, mais des propriétés, comme des proportions. C'est le cas, par exemple, pour la proposition 6, où al-Siğzī donne la propriété pôle/polaire dans le cercle²⁰. Si A est un point extérieur à un cercle, on appelle B et C les points du cercle appartenant aux deux tangentes issues de A , on mène la polaire BC puis une droite quelconque issue de A et coupant le cercle en G et D et la polaire en E ; on a alors, quelle que soit cette droite :

¹⁹ La proposition fait également apparaître un troisième cercle, intérieur au cercle de diamètre EG . Le résultat obtenu étant similaire, nous l'omettons ici par souci de simplification.

²⁰ Cette propriété fait l'objet de deux démonstrations dans l'*Anthologie de problèmes* (propositions 7 à 9), l'une attribuée à al-Qūhī et une autre par al-Siğzī lui-même. Ce résultat était déjà énoncé à la proposition III-38 des *Coniques* d'Apollonius, mais les démonstrations de l'*Anthologie* sont, à notre connaissance, les premières à être réalisées dans le contexte d'une géométrie à la règle et au compas.



Le dessin d'al-Siğzī est donc parfaitement clair : faire apparaître des quantités ou des propriétés invariables alors même que les éléments qui les définissent sont soumis à la variation. Dans ce sens, ces quantités ou ces propriétés sont parfaitement déterminées malgré cette variabilité. Tel est selon nous le sens qu'il faut donner au titre même du traité : par « lois géométriques déterminées », d'une manière peut-être maladroite, le mathématicien nous semble ne pas vouloir désigner autre chose que des propriétés invariantes. En cela, ce texte annonce le traité des *Connus* d'Ibn al-Haytham, où celui-ci explore lui aussi ce qui est invariant – et donc connu²¹ – dans une figure dont certains éléments sont mobiles. Les projets sont certes différents : outre que celui d'Ibn al-Haytham est sans aucun doute plus ambitieux et plus maîtrisé – le mathématicien redéfinit une notion de connu restée figée depuis les *Données* d'Euclide, il met en œuvre des transformations de façon beaucoup plus nette que son prédécesseur immédiat – il faut en effet remarquer qu'al-Siğzī n'interprète pas ses résultats en termes de connus et que, du reste, une propriété comme la propriété pôle/polaire peut difficilement l'être dans le sens que donne Ibn al-Haytham au mot *connu*. Mais on ne peut que relever une communauté de préoccupations qui est bien le signe d'une inflexion de la rationalité géométrique.

III- CONCLUSION

Ibn al-Haytham ne cite pas al-Siğzī, de sorte qu'il serait hasardeux d'affirmer en toute certitude qu'il ait eu connaissance des travaux de son prédécesseur. Le fait qu'on ne retrouve dans les *Connus* que certaines propositions du traité *Sur l'obtention de lois géométriques déterminées* tendrait même à suggérer le contraire, tant il est vrai que des résultats comme la propriété de l'inversion, pour ne prendre qu'un exemple, avaient de quoi séduire Ibn al-Haytham tout en s'insérant parfaitement dans le cadre de son étude. Toutefois, la comparaison entre les deux textes permet de mesurer la distance parcourue et d'apprécier toute la nouveauté de la contribution de ce dernier : début de l'étude des transformations ponctuelles pour elles-mêmes, fondements théoriques renouvelés pour prendre acte des nouveaux modes d'appréhension des figures. En cette fin de X^e siècle, l'heure n'est sans doute pas à de tels développements programmatiques, même si peut se manifester, comme chez al-Siğzī, un souci de tenter de penser autrement l'activité du géomètre, de chercher des raisons plus profondes derrière la saisie première des faits géométriques et de dépasser une manière strictement euclidienne d'envisager figures et propositions. Il s'agit alors plutôt de

²¹ Pour Ibn al-Haytham, « le connu est la notion qui n'admet pas le changement » (Roshdi Rashed, *Les mathématiques infinitésimales*, vol. IV, *op. cit.*, p. 446).

multiplier les exemples et de déployer une activité en quelque sorte exploratoire qui, nous semble-t-il, trouve tout naturellement son expression dans les anthologies de problèmes qui fleurissent à l'époque.

La contribution d'al-Siğzī est ainsi le témoin d'un moment particulièrement riche de l'histoire des mathématiques, de ces moments de bascule où l'on commence à mettre des mots – transformation, lois géométriques déterminées – sur des pratiques antérieures pour faire surgir de façon explicite de nouvelles réalités ou de nouveaux objets, permettant ainsi aux successeurs de mieux les penser et de s'en saisir de façon plus ample.

IV- TEXTE ET TRADUCTION

Le traité *Sur l'obtention de lois géométriques déterminées* nous est parvenu sous la forme de deux manuscrits :

- Paris, Bibliothèque Nationale 2458/3, fol. 3^r-5^r, copié en 539 de l'Hégire (1144-1145), noté « B »²² ;
- Istanbul, Reçit Istanbul 1191, fol. 70^r-72^v, copié avant le milieu du XVIII^e siècle, noté « R ». Ce manuscrit fait partie d'un recueil copié à partir d'un volume consacré aux œuvres géométriques d'al-Siğzī et conservé à la bibliothèque Chester Beatty à Dublin sous la côte 3652. Ce dernier volume, dont la copie a été achevée le vendredi matin 7 ramaḍān de l'année 611, soit le 9 janvier 1215, comprend des textes copiés à partir de l'original ; certains feuillets en ont été arrachés puis perdus après la copie de R et contenaient, comme le montre l'index en début de volume, le texte qui nous intéresse ici.

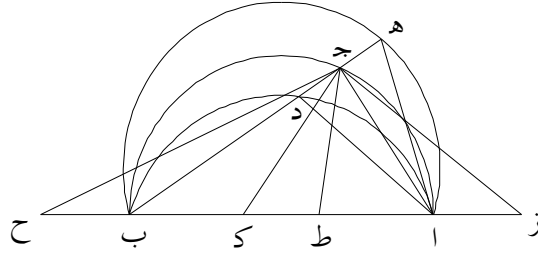
Ces deux manuscrits offrent quelques différences : B ne contient pas la douzième et dernière proposition, consacrée à la propriété de l'inversion et qui est issue de l'*Anthologie de problèmes* ; dans la proposition 10, B renvoie aux *Données* d'Euclide alors que R renvoie à « notre livre sur les *Commentaires géométriques* », autrement dit encore l'*Anthologie de problèmes*. Ces différences ne sont pas assez nombreuses pour conclure de façon certaine, mais elles suggèrent que ces deux manuscrits puissent être issues de deux versions successives du même texte. En effet, les renvois des propositions 10 et 12 dans le manuscrit R ciblent des propositions qui se trouvent plus en aval dans le texte de l'*Anthologie* que les renvois précédents ; d'autre part, quelques propositions encore plus éloignées de l'*Anthologie* pourraient trouver leur place dans le traité qui nous occupe. Al-Siğzī pourrait ainsi avoir voulu amender et étendre son texte selon le dernier état d'avancement de la composition de son *Anthologie*, ce qui ferait du traité *Sur l'obtention de lois géométriques déterminées* un contemporain de cette dernière.

²² Une erreur de relieur fait que les pages doivent être lues dans l'ordre suivant : 4^v, 3^r, 3^v, 5^r, la page 4^r étant relative à un autre traité.

كتاب أحمد بن محمد بن عبد الجليل : في تحصيل القوانين الهندسية المحدودة

٥ أ. خط $\overline{اب}$ معطى، ونضيف إليه نصف دائرة وقوسين تقبلان زاويتين حادة ومنفرجة، وهي $\overline{اج}$ $\overline{ب اد}$ $\overline{ب اه}$ $\overline{ب}$ ، ونجعل القوسين تقبلان زاويتين يكون مجموعهما يعدل قائمتين. ونخرج القطر في الجهتين على أن يكون $\overline{از}$ مثل $\overline{ب ح}$ ، ونجعل $\overline{اط}$ أيضاً مساوياً $\overline{ب ك}$. ونخرج من نقط $\overline{ز ا}$ $\overline{ط ك}$ $\overline{ب ح}$ خطوطاً إلى محيط نصف دائرة $\overline{اج ب}$ ، وهي $\overline{ز ح ح ج}$ $\overline{اج ب ج}$ $\overline{ط ج ك ج}$. ونخرج $\overline{ب ج}$ إلى $\overline{ه}$ ، ونصل $\overline{اه اد}$ ؛ أقول : إن مجموع مربعي $\overline{اج ب ج}$ يعدل مربع $\overline{اب}$ ، وإن مجموع مربعي $\overline{ط ج ج ك}$ يعدل مجموع مربعي الخطين الخارجين من نقطتي $\overline{ط ك}$ إلى محيط نصف دائرة $\overline{اج ب}$ ، وكذلك مجموع مربعي $\overline{ز ح ح ج}$ يعدل مجموع مربعي الخطين الخارجين من نقطتي $\overline{ز ح}$ إلى محيط نصف دائرة $\overline{اج ب}$ ، وإن مجموع مربعي $\overline{اد د ب}$ ناقص عن مربع $\overline{اب}$ بضرب $\overline{ب د}$ في $\overline{د ه}$ ، وإن مجموع مربعي $\overline{اه ه ب}$ زائد على مربع $\overline{اب}$ بضرب $\overline{ب ه}$ في $\overline{ه د}$.

1 البسمة : ناقصة [ر] نجد بعدها «رَب يسر» [ب] - 2-3 كتاب (...) المحدودة : تحصيل القوانين الهندسية المحدودة لأحمد بن محمد بن عبد الجليل السجزي رحمه الله [ب] - 4 : ناقصة [ر] / معطى : معطى، ولن نشير إلى مثلها فيما بعد [ر] معطاة [ب] / تقبلان : متقابلان [ر] - 5 تقبلان : يقبلان [ر] / يعدل : يعدلان [ر، ب] - 6-7 مساوياً $\overline{اب ك}$: يعدل $\overline{ب ك}$ [ب] - 9 : يعدل : يعدلان [ر، ب] / يعدل : يعدلان [ر، ب] - 10-11 نقطتي $\overline{ط ك}$ (...) الخطين الخارجين : ناقصة [ر] - 11 : يعدل : يعدلان [ب].

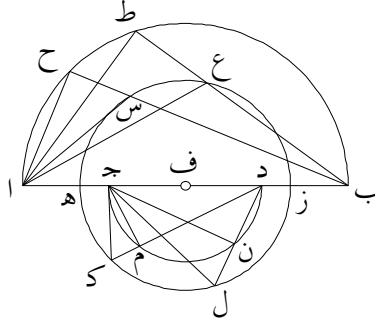


برهان ذلك : أمّا مساواة مربع \overline{AB} مربعي \overline{AC} \overline{CB} ، فلأن زاوية \overline{ACB} قائمة،
 يكون مربعاً \overline{AC} \overline{CB} مساويان لمربع \overline{AB} . وأمّا مساواة مربعي \overline{TK} \overline{CK} و \overline{ZC} \overline{CK}
 مربعي أي خطين مخرجين من نقطتي \overline{TK} أو \overline{ZC} إلى محيط نصف دائرة \overline{ACB} ، فقد بينا
 ذلك في كتابنا في التعليقات الهندسية. وأمّا مربع \overline{AB} زائد على مربعي \overline{AD} \overline{DB} بضرب
 \overline{BD} في \overline{DE} ، فقد بين أيضاً في ذلك الكتاب بعينه. وكذلك نقصان مربع \overline{AB} عن مربعي
 \overline{AE} \overline{EB} بضرب \overline{BE} في \overline{EH} ، فبين في ذلك الكتاب أيضاً؛ وذلك ما أردنا أن نبين.

\overline{B} . في عمل ثلاث دوائر على مركز واحد وإخراج القطر ووقوع النقط على أطراف
 قطري الدائرة الداخلة والخارجة وإخراج الخطوط من النقط إلى محيطي الدائرة الصغرى
 والوسطى وإلى محيطي الدائرة الوسطى والعظمى، يحدث مناسبة عجيبة جداً.

فلندر على مركز \overline{F} دوائر \overline{AT} \overline{PB} \overline{HE} \overline{ZC} \overline{ND} ، وقطر الدائرة العظمى \overline{AB} ؛
 أقول : إن الخطوط المخرجة من \overline{A} \overline{B} إلى محيط دائرة \overline{AT} \overline{PB} تقسمها دائرة \overline{HE} \overline{ZC} على
 التكافئ، وإن الخطوط المخرجة من \overline{D} إلى محيط دائرة \overline{HE} \overline{ZC} تقسمها دائرة \overline{CN} \overline{DE} على
 التكافئ. فلنخرج \overline{BT} \overline{PC} \overline{HD} \overline{LE} . ينبغي أن نبين أن \overline{BE} في \overline{EC} \overline{PT} مساوٍ \overline{AB} \overline{CS}
 في \overline{SE} ، وأن \overline{DL} في \overline{LN} مساوٍ \overline{LD} في \overline{KM} .

1 برهان ذلك : برهانه [ب] - 2 مربعاً : مربعي [ر، ب] / مساويان لمربع : يعدلان مربع [ب] - 3 أي : \overline{AD} [ر] \overline{AB}
 [ب] / \overline{TK} : \overline{AC} \overline{CB} [ر] - 4 ذلك : ناقصة [ر] / التعليقات : تعليقات [ر، ب] - 5 بين : بينا [ر، ب] / في : ناقصة [ر] - 6 ما
 أردنا أن نبين : ما أردناه [ر] - 8 محيطي : محيط [ر، ب] - 9 والوسطى : والواسطي [ر] / محيطي : محيط [ب] / يحدث : يحدث
 [ر] / جداً : ناقصة [ر] - 11 \overline{AB} : \overline{AB} [ر، ب] / تقسمها : نفسها [ر] - 12 \overline{CD} : \overline{CD} [ر] / \overline{HE} \overline{ZC} : معدل [ر] / تقسمها :
 يقسمها [ر] - 13 مساوٍ \overline{AB} \overline{CS} : يعدل \overline{AB} \overline{CS} [ب] - 14 مساوٍ \overline{LD} \overline{DK} : يعدل \overline{LD} \overline{DK} [ب].



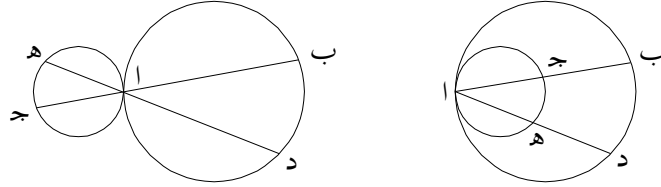
برهان ذلك : أن نخرج $\overline{ج ن}$ $\overline{ج م}$ $\overline{ا ع}$ $\overline{ا س}$. فلأن مربع $\overline{ج د}$ ناقص عن مربعي $\overline{د ك}$ $\overline{ج ك}$ بضعف $\overline{د ك}$ في $\overline{ك م}$ ، ومربع $\overline{ج د}$ ناقص أيضاً عن مربعي $\overline{د ل}$ $\overline{ل ج}$ بضعف $\overline{د ل}$ في $\overline{ل ن}$ ، ومربعي $\overline{د ك}$ $\overline{ك ج}$ يعدلان مربعي $\overline{د ل}$ $\overline{ل ج}$ ، يكون ضعف $\overline{ل د}$ في $\overline{ل ن}$ يعدل ضعف $\overline{د ك}$ في $\overline{ك م}$. فـ $\overline{د ل}$ في $\overline{ل ن}$ يعدل $\overline{د ك}$ في $\overline{ك م}$. وكذلك جميع الخطوط المخرجة من نقطة $\overline{ج}$ إلى دائرة $\overline{ه ز}$ التي تقطعها دائرة $\overline{ج ن د}$ ، فلتقطعها على هذه النسبة.

ر-٧١-و / وأيضاً، لأن مربع $\overline{ا ب}$ زائد على مربعي $\overline{ا ع}$ $\overline{ب ع}$ بضعف $\overline{ب ع}$ في $\overline{ع ط}$ ، ومربع $\overline{ا ب}$ أيضاً زائد على مربعي $\overline{ب س}$ $\overline{ا س}$ بضعف $\overline{ب س}$ في $\overline{س ح}$ ، ومربعي $\overline{ب ع}$ $\overline{ا ع}$ يعدلان مربعي $\overline{ب س}$ $\overline{ا س}$ ، يكون ضعف $\overline{ب ع}$ في $\overline{ع ط}$ يعدل ضعف $\overline{ب س}$ في $\overline{س ح}$ ، فـ $\overline{ب ع}$ في $\overline{ع ط}$ يعدل $\overline{ب س}$ في $\overline{س ح}$ ؛ وذلك ما أردنا أن نبين.

ب-٣-و / 10 وإن فرض على محيط دائرة ما مثل دائرة $\overline{ا ب}$ نقطتين مثل $\overline{ا ب}$ ، وأخرج من نقطة $\overline{ا}$ إلى $\overline{ب}$ خط $\overline{ا ب}$ المستقيم، وأخرج من نقطة $\overline{ا}$ خط $\overline{ا ج}$ يماس الدائرة، وأخرج $\overline{ا د}$ تكون زاوية $\overline{ب ا د}$ تعدل زاوية $\overline{ج ا ب}$ ، فأی خط أخرج من نقطة $\overline{ب}$ إلى خط $\overline{ا د}$ تقسمه قوس $\overline{ا ز ب}$ على التكافئ؛ مثل $\overline{ب د ب ه}$ ، فيكون $\overline{ب د}$ في $\overline{ب ز}$ يعدل $\overline{ب ه}$ في $\overline{ب ح}$ ويعدل مربع $\overline{ا ب}$. وقد تبين ذلك في تعليقاتنا الهندسية؛ وذلك ما أردنا أن نبين.

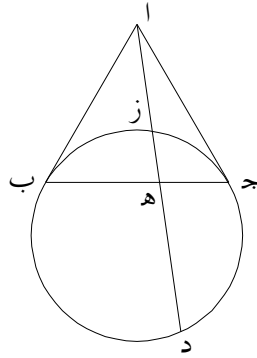
1 برهان ذلك : برهانه [ب] - 2-1 $\overline{د ك}$ $\overline{ج ك}$: $\overline{د ل}$ $\overline{ج ل}$ [ر] - 2 $\overline{د ك}$: $\overline{د ل}$ [ر] - 4 $\overline{د ك}$: $\overline{د ل}$ [ر] / وكذلك :
 ولذلك [ب] - 6 مربعي : مربع [ر] - 7 مربعي : مربع [ر] - 7-8 ومربعي $\overline{ب ع}$ $\overline{ا ع}$ (...) ضعف $\overline{ب س}$ في $\overline{س ح}$: ناقصة [ر] -
 9 يعدل : مساوٍ لضعف [ر] - 11 تكون : يكون [ر] - 12 تعدل : يعدل [ر] - 13 مثل : مثلي [ر] - 13-14 يعدل $\overline{ب ه}$ في $\overline{ب ح}$
 ويعدل مربع $\overline{ا ب}$: مساوٍ لـ $\overline{ب ه}$ في $\overline{ب ح}$ وللمربع $\overline{ا ب}$ [ر] - 14 وذلك ما أردنا أن نبين : ناقصة [ر].

هـ. وفي تماسّ الدائرتين على نقطة وإخراج الخطوط المستقيمة إلى محيطي الدائرتين، تحدث أيضاً مناسبة.



ر-٧١-ظ فليكن الدائرتين المتماستين في الصورتين، عليهما $\overline{اب}$ / $\overline{اج}$ ، ونقطة تماسهما $\overline{ا}$. وقد أخرج خط $\overline{باج}$ د $\overline{اه}$ ، فتحدث نسبة $\overline{اب}$ إلى $\overline{اج}$ كنسبة $\overline{اد}$ إلى $\overline{اه}$ ؛ وقد بينّا ذلك في الشكل الأول من كتابنا في الدوائر. 5

و. ومن إخراج خطين مماسين لدائرة معطاة من نقطة معطاة واتصاهما بخط مستقيم، وإخراج الخطوط من النقطة المعطاة إلى محيط الدائرة المعطاة في داخلها، تحدث مناسبة عجيبة جداً.



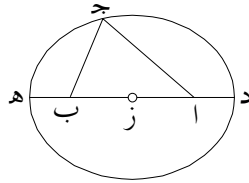
فليكن نقطة $\overline{ا}$ معطاة ودائرة $\overline{بج}$ د معطاة، وقد خرج $\overline{اب}$ $\overline{اج}$ وبماسّا الدائرة على $\overline{ب}$ ، ووصل $\overline{بج}$ بخط مستقيم؛ أقول: إن الخطوط المخرجة من نقطة $\overline{ا}$ إلى قوس 10

1 محيطي: محيطا [ر] محيط [ب] / تحدث: يحدث [ر] - 3 تماسها: تماسها [ب] - 4 خطا: خطي [ر] / فتحدث:
فيحدث [ر] - 6 معطاة: معطى [ر] / من: ومن [ب] - 7 النقطة: النقطة [ب] / تحدث: يحدث [ر] - 8 جداً: ناقصة [ب] -
10 $\overline{بج}$: $\overline{بج}$ [ر، ب].

ج د ب، مثل خط ا د، تقسمه قوس ج ز ب وخط ه ب على نسبة واحدة، أعني أن تكون نسبة ا د إلى ا ز كنسبة د ه إلى ه ز؛ وقد بينّا ذلك في تعليقاتنا الهندسية.

ز. ومن لوازم هذا الفصل يقع خاصة في القطع الناقص يليق أن نُضيفها إلى خواص الدائرة، وهي أن كل قطع ناقص، إذا قسم قطره الأطول بثلاثة أقسام يكون ضرب أحد كل قسمين من الثلاثة في الآخر الذي يلي الطرف يعدل نصف قطره الأصغر، فإن الخطوط المخرجة من النقطتين اللتين هما موضعاً القسمة من القطر الأطول إلى محيط القطع ويجتمعان على محيطه على نقطة واحدة، فيكون مجموعهما، كخط واحد مستقيم، يعدل قطر القطع الناقص.

ب-3-ظ فليكن القطع الناقص د ج ه، وقطره الأطول د ه. ونجعل د ب / في ب ه مثل مربع نصف القطر الأصغر، و د ا مثل ب ه. ونخرج خطي ا ج ب ج إلى محيط القطع، فيكون خطا ا ج ب ج يعدلان خط د ه؛ وقد بينّا ذلك في الشكل الثاني والسبعين من كتابنا في خواص القطع الناقص؛ وذلك ما أردنا أن نبين.



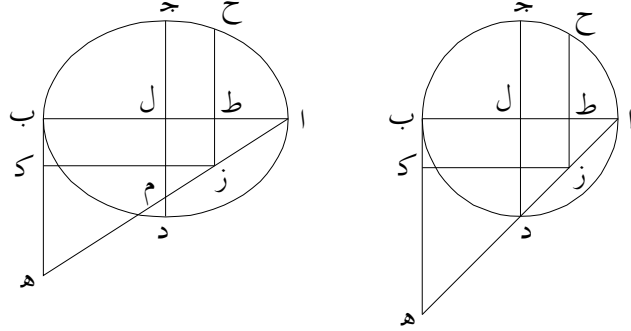
ح. ويقع في القطع الناقص والدائرة تكافئ من جهة تناسب الأقطار.

وذلك أنا نفرض ا ج ب قطعاً ناقصاً أو دائرة، وقطره الأطول ا ب والأصغر ج د.

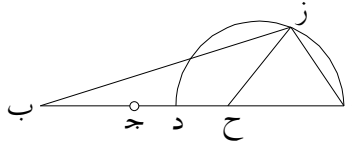
ر-٧٢-و ونجعل نسبة ا ب إلى ج د كنسبة ج د إلى ب ه، ونخرج ب ه يقوم / على خط ا ب على زوايا قائمة، ونصل ا ه؛ أقول: إن العمود المخرج من محيط القطع أو الدائرة إلى قطر القطع

1 تقسمه: يقسمه [ر] / ج ز ب: ج د ز [ر] - 2 تكون: يكون [ر] / د ه: د ه زه [ر] - 3 د ه: زه [ر] - 4 وهي: وهو [ر]، ب [ر] - 5 الأصغر: الأقصر، ثم كتب تحتها «أصغر» [ر] - 6-7-8 القطع الناقص: القطع [ر] - 11 خطا: خطي [ر]، ب [ر] / خط: لخط [ر] / د ه: ج ه [ب] - 12 ما أردنا أن نبين: ما أردناه أن نبين [ر] - 13 ويقع: وقد يقع [ب] - 14 قطعاً ناقصاً: قطع ناقص [ر] - 15 نسبة: ناقصة [ب] / خط: ناقصة [ب].

أو الدائرة، مثل $\overline{ط ح}$ ، وأخرج إلى خط $\overline{ا ه}$ ، مثل $\overline{ط ز}$ ، أعني $\overline{ط ح}$ يقوى على سطح $\overline{ط ز}$ في $\overline{ط ب}$ ، أعني $\overline{ط ك}$ في الدائرة. وأمّا في القطع الناقص، فتكون نسبة مربع $\overline{ط ح}$ إلى مربع $\overline{ج ل}$ كنسبة سطح $\overline{ط ب}$ في $\overline{ط ز}$ إلى سطح $\overline{ل ب}$ في $\overline{ل م}$ ؛ وقد بينّا ذلك في خواص القطع الناقص؛ وذلك ما أردنا أن نبين.



5 $\overline{ط}$. وقد يوجد أيضاً محيط دائرة إذا أخرج من نقطتين مفروضتين خطين مستقيمين إليه، فإن نسبة أحدهما إلى الآخر كنسبة واحدة مفروضة.

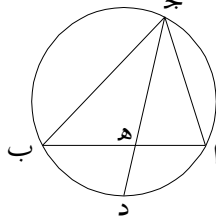


وذلك أن نترض $\overline{ح ب}$ ونصل $\overline{ح ب}$ بخط $\overline{ح ب}$ المستقيم، ونسبة $\overline{ح د}$ إلى $\overline{د ب}$ معطاة. ونقسم $\overline{ح ب}$ بنصفين على $\overline{ج}$ ، ونجعل ضرب $\overline{ح د}$ في $\overline{د ب}$ مساوياً لـ $\overline{ا د}$ في $\overline{د ج}$ ، وندير على $\overline{ا د}$ نصف دائرة $\overline{ا ز د}$ ، فإن الخطين الخارجين من نقطتي $\overline{ح ب}$ إلى محيط نصف

1-2 أعني $\overline{ط ح}$ (...). سطح $\overline{ط ز}$: ناقصة [ر] - $2 \overline{ط ك}$: $\overline{ط ل}$ [ر] / فتكون : فيكون [ر] / نسبة : فوق السطر [ب] / $\overline{ط ح}$: خط [ر] - 3 خواص : الخواص [ر] - 4 ما أردنا أن نبين : ما أردناه أن نبين [ر] - 5 مفروضتين : مفروضتين [ب] - 7 $\overline{ح ب}$: $\overline{ح ب}$ [ر] / وتصل : ونصل [ر] / $\overline{ح ب}$: $\overline{ح ب}$ [ر]، [ب] - 8 مساوياً لـ $\overline{ا د}$: يعدل $\overline{ا د}$ [ب] - 9 دائرة $\overline{ا ز د}$: نجد بعدها «ونخرج $\overline{ج ه}$ عموداً على $\overline{ا ب}$ »، وعلى الشكل نقطة $\overline{ه}$ على استقامة خط $\overline{ز د}$ [ب]؛ ونقطة $\overline{ه}$ يستعملها السجزي في البرهان من كتابه في التعليقات الهندسية، ولكنها بدون فائدة هنا في الدعوى / فإن الخطين : فالخطين [ب] / $\overline{ح ب}$: $\overline{ح ب}$ [ب] / محيط : المحيط، و«ال» مشطوب [ر].

دائرة $\overline{ازد}$ يكونان على نسبة $\overline{ح د}$ إلى $\overline{د ب}$ ، وقد تبين من كتابنا في التعليقات الهندسية؛ وذلك ما أردنا أن نبين.

ي. وقد بقي أيضاً خاصة من جهة إخراج خطين مستقيمين من نقطتين مفروضتين على محيط الدائرة واجتماعهما على المحيط أيضاً على نقطة واحدة.

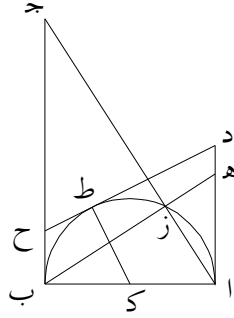


5 فليكن دائرة $\overline{اج ب د}$ والنقطتان المفروضتان على محيطها $\overline{أ ب}$ ، ولنقسم قوس $\overline{اد ب}$ بنصفين على $\overline{د}$ ، ونصل $\overline{اب}$ ، ونخرج $\overline{اج ب ج د ه ج}$ ، فيلزم أن تكون نسبة $\overline{اج}$ إلى $\overline{ج ب}$ كنسبة $\overline{اه}$ إلى $\overline{ه ب}$. وذلك بين في السادسة من كتاب الأصول وفي براهيننا لكتاب الأصول. ويلزم أيضاً أن ضرب $\overline{اج ج ب}$ مجموعين في $\overline{ه د}$ مثل ضرب الخطين الخارجين من نقطتي $\overline{أ ب}$ إلى محيط الدائرة في الخط الذي يخرج من نقطة $\overline{د}$ إلى خط $\overline{اب}$ ، الذي يكون تمامه الخارج على استقامته إلى اجتماع الخطين الخارجين من نقطتي $\overline{أ ب}$ إلى محيط الدائرة. ويلزم أيضاً أن نسبة $\overline{ب ج ج ا}$ مجموعين إلى $\overline{ج د}$ كنسبة الخطين الخارجين من $\overline{أ ب}$ إلى محيط الدائرة إلى الخط الخارج من موضع اجتماعهما إلى نقطة $\overline{د}$ ، وقد بيننا ذلك في كتابنا في التعليقات الهندسية؛ وذلك ما أردنا أن نبين.

1 دائرة : الدائرة، و«ال» مشطوب [ر] / يكونان : يكون [ر، ب] / التعليقات : تعليقات [ر، ب] - 2 ما أردنا أن نبين : ما أردناه [ر] - 3 مستقيمين : ناقصة [ب] / مفروضتين : مفروضتين [ب] - 5 والنقطتان المفروضتان : النقطتين المفروضتين [ر] النقطتين المفروضتين [ب] - 6 $\overline{د ه ج}$: $\overline{د ج ه ج}$ [ب] / تكون : يكون [ر] - 7 كتاب الأصول : كتاب أقليدس [ب] - 7-8 وفي براهيننا لكتاب الأصول : ناقصة [ب] - 8 مثل : ناقصة [ر] - 9 نقطة $\overline{د}$: نقطة $\overline{ج}$ [ر] نقطتي $\overline{د}$ ، و«د» فوق السطر [ب] - 12 نقطة $\overline{د}$: نقطة $\overline{ج}$ [ر] نقطتي $\overline{د}$ ، و«د» فوق السطر [ب] - 13-1 وقد بيننا ذلك في كتابنا في التعليقات الهندسية : قد بين ذلك أقليدس في كتابه في المعطيات [ب] - 13 وذلك ما أردنا أن نبين : ناقصة [ر].

ر-٧٢-ظ / يا. وقد يحدث من إخراج خطين مماسين لدائرة معطاة ويكونان متوازيين، وإخراج خطين آخرين من نقطتي التماس إلى محيط الدائرة واجتماعهما على المحيط وافتراقهما إلى أن يلتقيا الخطين المماسين، تناسباً بين القطر وبين الخطين اللذين يفصلان الخطين الخارجين من الخطين المماسين. وكذلك من إخراج خط مماسٍ للدائرة ويكون طرفاهما على الخطين المماسين / المتوازيين، يحدث تناسباً بينهما وبين نصف قطر الدائرة.

5



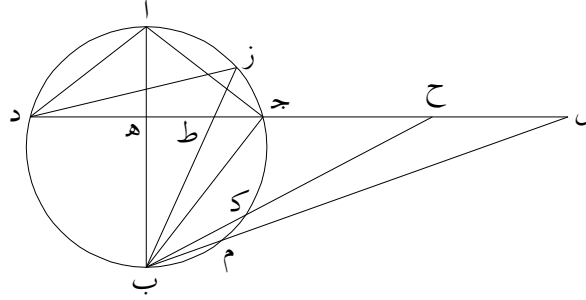
فليكن نصف دائرة ا ط ب و ا د ب ج يماسانه، وقد خرج از ج ب ز ه. فإن نسبة ب ج إلى ا ب كنسبة ا ب إلى ا ه. وقد بينا ذلك في كتابنا في التعليقات الهندسية. وأيضاً نخرج د ط ح يماس دائرة ا ط ب على نقطة ط، ونخرج من مركز ك خط ك ط، فيحدث من ذلك أن تكون نسبة ا د إلى ط ك، الذي هو نصف قطر الدائرة، كنسبة ط ك إلى ب ح. وقد بينا ذلك أيضاً في ذلك الكتاب بعينه؛ وذلك ما أردنا أن نبين.

10

يب. وقد يقع خاصة من إخراج خطوط من منتصف قوس ج ب د، الذي هو نقطة ب، مثل خطوط ب ه ا ب ط ز ب ج ب ك ح ب م ل، فيكون ب ا في ب ه مساوياً لب ز في ب ط ولربيع ب ج ول ب ح في ب ك ول ب ل في ب م. ويقع خاصة أخرى وهي:

1 متوازيين : موازيين [ر، ب] - 3 يلتقيا : يلتقيا [ر] ليقيا [ب] - 4 من الخطين : ناقصة [ر] - 4 مماس : مماسين [ر] / طرفاهما : طرفيهما [ر، ب] - 6 و ا د ب ج : ا د ب ج [ر] - 7 التعليقات : تعليقات [ر، ب] - 8 ونخرج من مركز ك خط ك ط : ناقصة [ب] - 9 تكون : يكون [ر] / ط ك : ط ل [ر] / ط ك : ط ل - 11-15 يب وقد يقع (...) وذلك ما أردنا أن نبين. : ناقصة [ب] - 12 مثل خطوط : خطوطا [ر] / مساوياً : مساو [ر] - 13 ولربيع : لمربع [ر] / ب ك : ب ل [ر].

إذا أخرجنا خطوط $\overline{ب ز د ج ا ا د}$ ، فيكون نسبة $\overline{ب ا}$ إلى $\overline{ا ز}$ كنسبة $\overline{ج ا ا د}$ مجموعين إلى $\overline{ب ز د ج ا ا د}$ مجموعين. وقد بيّنا ذلك في كتاب *التعليقات الهندسية*؛ وذلك ما أردنا أن نبين.



تمت الرسالة بحمد الله.

Livre sur l'obtention de lois géométriques déterminées

B-4^v

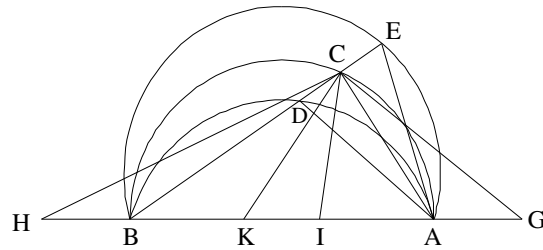
Au nom de Dieu Clément et Miséricordieux.

R-70^r

Livre d'Aḥmad ibn Muḥammad ibn 'Abd al-Ġalīl sur l'obtention de lois géométriques déterminées.

1) La droite AB est donnée, nous lui appliquons un demi-cercle et deux arcs capables de deux angles, aigu et obtus, soit ACB , ADB et AEB , et nous posons les deux arcs comme étant capable de deux angles dont la somme égale deux droits. Menons le diamètre des deux côtés de sorte que AG soit égale à BH et posons également AI égale à BK . Menons des points G , A , I , K , B et H des droites vers la circonférence du demi-cercle ACB , soit GC , HC , AC , BC , IC et KC . Prolongeons BC jusqu'en E , et joignons AE et AD ; je dis que la somme des carrés de AC et de BC égale le carré de AB , que la somme des carrés de IC et de CK égale la somme des carrés des deux droites menées des deux points I et K vers la circonférence du demi-cercle ACB et de même que la somme des carrés de GC et de HC égale la somme des carrés des deux droites menées des deux points G et H vers la circonférence du demi-cercle ACB , que la somme des carrés de AD et de DB est inférieure au carré de AB du produit de BD par DE , et que la somme des carrés de AE et EB excède le carré de AB du produit de BE par ED .

R-70^v



Démonstration. Pour l'égalité du carré de AB et de <la somme des> deux carrés de AC et de CB : puisque l'angle ACB est droit, alors <la somme des> deux carrés de AC et de CB est égale au carré de AB . Pour l'égalité <de la somme> des deux carrés de IC et de CK , de GC et de CH et <de la somme> des deux carrés de deux droites quelconques menées des deux points I et K ou G et H vers la circonférence du demi-cercle ACB : nous avons démontré cela dans notre livre sur les *Commentaires géométriques*¹. Pour <le fait que> le carré de AB excède <la somme des> deux carrés de AD et de DB du produit de BD par DE : <cela> a également été démontré dans ce même livre². De même <pour> le défaut du carré de AB sur <la somme des> deux carrés de AE et de EB du produit de BE par EB : <cela> a également été démontré dans ce livre³ ; ce qu'il fallait démontrer.

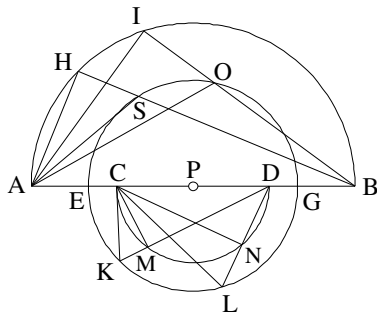
2) Dans la construction de trois cercles de même centre, le fait de mener le diamètre, de la position des points sur les extrémités des deux diamètres du cercle intérieur et <du cercle> extérieur, et le fait de mener les droites des points vers les deux circonférences du petit cercle et du moyen et vers les deux circonférences du cercle moyen et du grand, il se produit une proportion très remarquable.

Menons, autour du centre P , les cercles AIB , EOG et CND , le diamètre du grand cercle étant AB ; je dis que les droites menées de A et de B vers la circonférence du cercle AIB sont partagées par le cercle EOG selon la proportion inverse, et que les droites menées de C et de D vers la circonférence du cercle EOG sont partagées par le cercle CND selon la proportion inverse. Menons BI , BH , DL et DK . Il faut que nous démontrions que BO par OI est égal à BS par SH , et que DL par LN est égal à DK par KM .

¹ *Anthologie de problèmes*, problème 5 (propositions 11 à 16).

² *Ibid.*, problème 21 (proposition 32).

³ *Ibid.*

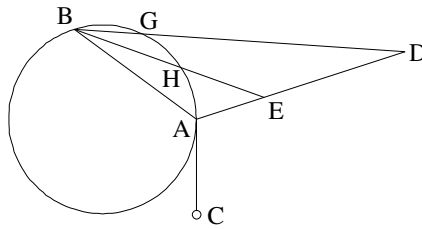


Démonstration. Menons CN , CM , AO et AS . Puisque le carré de CD est inférieur à <la somme des> deux carrés de DK et de CK du produit de DK par KM , que le carré de CD est également inférieur à <la somme des> deux carrés de DL et de LC du produit de DL par LN , et que <la somme des> deux carrés de DK et de KC égale <la somme des> deux carrés de DL et de LC , alors le produit de LD par LN égale le produit de DK par KM . Donc DL par LN égale DK par KM . De même, toutes les droites menées du point C vers le cercle EOG et que coupe le cercle CND sont coupées par lui selon ce rapport.

R-71^r / Également, puisque le carré de AB excède <la somme des> deux carrés de AO et de BO du produit de BO par OB , que le carré de AB excède également <la somme des> deux carrés de BS et de AS du produit de BS par SH , et que <la somme des> deux carrés de BO et de AO égale <la somme des> deux carrés de BS et de AS , alors le produit de BO par OI égale le produit de BS par SH , donc BO par OI égale BS par SH ; ce qu'il fallait démontrer.

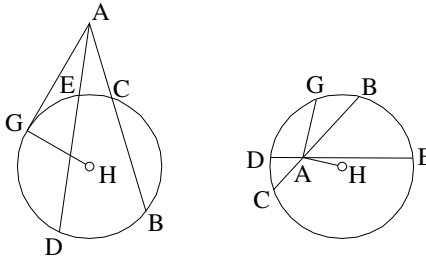
B-3^r / 3) Si l'on suppose, sur la circonférence d'un cercle quelconque comme le cercle AB , deux points comme A et B , que l'on mène du point A vers B la ligne droite AB , que l'on mène du point A la droite AC tangente au cercle, et que l'on mène AD de sorte que l'angle BAD égale l'angle CAB , alors toute droite menée du point B vers la droite AD est partagée par l'arc AGB selon la proportion inverse ; ainsi de BD et de BE : BD par BG égale BE par BH et égale le carré de AB . <Cela> a été démontré dans nos *Commentaires géométriques*⁴ ; ce qu'il fallait démontrer.

⁴ *Ibid.*, problème 4 (proposition 10). Le résultat signifie que le cercle et la droite AD sont des images réciproques par une inversion de centre B . La même inversion est mise en évidence dans la proposition 12 de ce traité, la droite AD étant alors définie, ce qui est équivalent, comme la perpendiculaire passant par A au diamètre du cercle passant par B .



4) Dans la position du point à l'intérieur et à l'extérieur du cercle, le fait de mener deux lignes droites vers la circonférence du cercle et leur intersection ou de leur jonction au point donné, il se produit une propriété <relevant> de la proportion et de la proportion inverse.

Supposons le point A dans deux figures, qu'il soit <dans> l'une des deux à l'extérieur et <dans> l'autre à l'intérieur, que le cercle soit BC et le centre H , on a mené du point A deux droites vers la circonférence du cercle, soit BCA et DEA ; je dis que le rapport de AB à AD est égal au rapport de AE à AC .

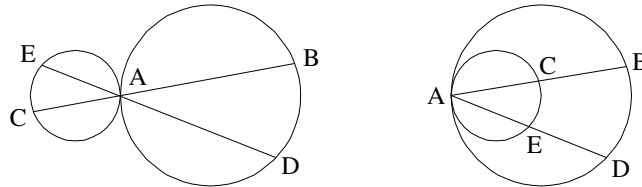


Démonstration. Puisque AB par AC est égal à AD par AE , alors le rapport de AB à AD est égal au rapport de AE à AC .

Je dis que si l'on mène, du point A vers la circonférence du cercle, une droite qui entoure, avec la droite menée de G vers le centre dans le premier <cas de figure>, ou avec la droite menée de A vers le centre dans le second, un angle droit, alors le rapport de AE à AG est égal au rapport de AG à AD .

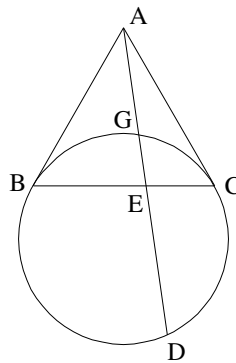
Démonstration. Puisque AE par AD égale le carré de AG , alors le rapport de AE à AG est égal au rapport de AG à AD ; ce qu'il fallait démontrer.

5) Dans la tangence des deux cercles en un point et le fait de mener les lignes droites vers les deux circonférences des deux cercles, il se produit également une proportion.

R-71^v

Que les deux cercles tangents soient dans les deux <cas de> figures, qu'ils soient $AB /$ et AC et leur point de tangence A . On a mené les deux droites BAC et DAE , le rapport de AB à AC alors produit est égal au rapport de AD à AE ; nous avons démontré cela dans la première proposition de notre livre *Sur les cercles*⁵.

6) Du fait de mener, d'un point donné, deux droites tangentes à un cercle donné, de leur jonction par une ligne droite, et du fait de mener les droites du point donné vers la circonférence du cercle donné, dans son intérieur, il se produit une proportion très remarquable.

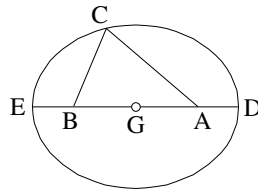


Que le point A soit donné et que le cercle BCD soit donné, on a mené AB et AC tangentes au cercle en C et en B , et on a joint CB par une droite ; je dis que les

⁵ Siğzī a composé un livre, aujourd'hui perdu, sur les cercles tangents.

droites menées du point A vers l'arc CDB , comme la droite AD , sont partagées par l'arc CGB et la droite EB selon un même rapport, c'est-à-dire que le rapport de AD à AG est égal au rapport de DE à EG ; nous avons démontré cela dans nos *Commentaires géométriques*⁶.

7) Parmi les conséquences de ce paragraphe⁷, on trouve une propriété sur l'ellipse qu'il convient d'ajouter aux propriétés du cercle, qui est que toute ellipse, si son grand diamètre est divisé en trois parties de sorte que le produit de <la somme de> deux parties quelconques des trois par l'autre qui est adjacente à l'extrémité égale le carré de la moitié de son petit diamètre, alors <la somme des> droites menées des deux points qui sont le lieu du partage du grand diamètre vers la circonférence de la section et qui se rencontrent sur sa circonférence en un même point, considérée comme une même ligne droite, égale le diamètre de l'ellipse. Que l'ellipse soit DCE , et que son grand diamètre soit DE . Posons DB / par BE égal au carré de la moitié du petit diamètre, avec DA égal à BE . Menons les deux droites AC et BC vers la circonférence de la section. Alors <la somme des> deux droites AC et BC égale la droite DE . Nous avons démontré cela dans la soixante-douzième proposition de notre livre sur les *Propriétés de l'ellipse*⁸; ce qu'il fallait démontrer.

B-3^v

8) On trouve sur l'ellipse et le cercle une proportion inverse du point de vue de la proportion des diamètres.

Supposons que ACB soit une ellipse ou un cercle, que son grand diamètre soit AB et le petit CD . Posons le rapport de AB à CD égal au rapport de CD à BE . Menons BE s'élevant / sur la droite AB selon des angles droits et joignons AE ; je dis que la perpendiculaire menée de la circonférence de l'ellipse ou du cercle vers le

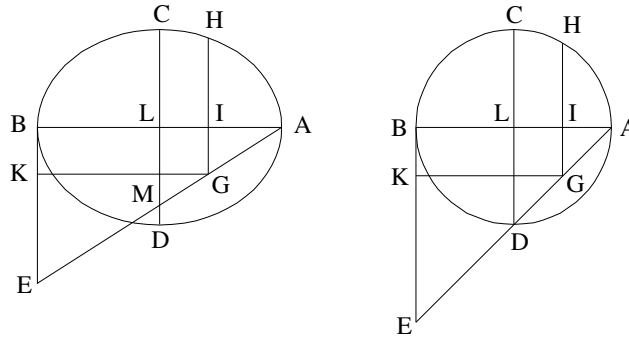
R-72^r

⁶ *Anthologie de problèmes*, problème 3, en particulier les propositions 7 à 9.

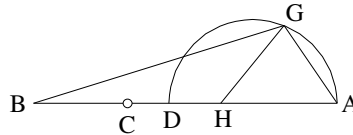
⁷ C'est-à-dire la proposition précédente.

⁸ Livre aujourd'hui perdu, où Siġzī semble avoir déduit les propriétés de l'ellipse de l'étude des sections du cylindre.

diamètre de l'ellipse ou du cercle, comme IH , prolongée jusqu'à la droite AE , comme IG , je veux dire que IH peut le plan IG par IB , c'est-à-dire IK dans le cercle. Quant à l'ellipse, le rapport du carré de IH au carré de CL est égal au rapport du rectangle IB par IG au rectangle LB par LM ; nous avons démontré cela dans les *Propriétés de l'ellipse* ; ce qu'il fallait démontrer.



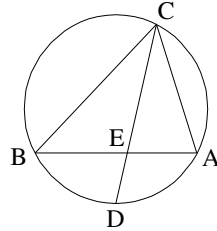
9) Il y a également une circonférence de cercle si l'on mène de deux points donnés deux droites vers elle, alors le rapport de l'une d'elles à l'autre est égal à un même rapport donné.



Supposons H et B et joignons H et B par la droite HB , le rapport de HD à DB étant donné. Partageons HB en deux moitiés en C , posons HD par DB égal à AD par DC et traçons sur AD le demi-cercle AGD , alors les deux droites menées des deux

points H et B vers la circonférence du demi-cercle AGD sont selon le rapport de HD à DB , <cela> a été démontré dans notre livre sur les *Commentaires géométriques*⁹ ; ce qu'il fallait démontrer.

10) Il reste également une propriété du fait de mener deux lignes droites de deux points donnés sur la circonférence du cercle se rencontrant également sur la circonférence en un même point.



Soit le cercle $ACBD$, et que les deux points donnés sur sa circonférence soient A et B , partageons l'arc ADB en deux moitiés en D , joignons AB et menons AC , BC et DEC , il s'en suit que le rapport de AC à CB est égal au rapport de AE à EB . Ceci a été démontré dans le sixième <livre> des *Éléments* et dans nos *Démonstrations de l'ouvrage des Éléments*¹⁰. Il s'en suit également que le produit de la somme de AC et de CB par ED est égal au produit <la somme> des deux droites menées des deux points A et B vers la circonférence du cercle par la droite qui est menée du point D vers la droite AB et dont le complément prolongé <aboutit> au <point de> rencontre des deux droites menées des deux points A et B vers la circonférence du cercle. Il s'en suit également que le rapport de la somme de BC et de CA à CD est égal au rapport <de la somme> des deux droites menées de A et B vers la circonférence du cercle à la droite menée du lieu de leur rencontre vers le point D , nous avons démontré cela dans notre livre sur les *Commentaires géométriques*¹¹ ; ce qu'il fallait démontrer.

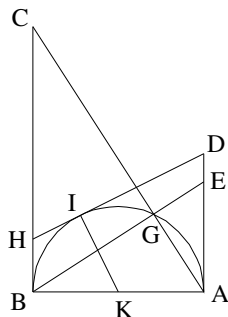
⁹ *Anthologie de problèmes*, problème 2, proposition 4.

¹⁰ *Éléments*, VI-3.

¹¹ *Anthologie de problèmes*, problèmes 42 et 43, propositions 63 et 64. Dans le manuscrit B , on trouve : « Euclide a démontré cela dans son livre sur les *Données* » (*Données*, proposition 94).

R-72^v

/ 11) Il peut être produit, du fait de mener deux droites tangentes à un cercle donné et parallèles entre elles, du fait de mener deux autres droites des deux points de tangence vers la circonférence du cercle, leur rencontre étant sur la circonférence, et de leur séparation de par ce qu'elles rencontrent les deux droites tangentes, une proportion entre le diamètre et les deux droites qui séparent les deux droites menées des deux droites tangentes. De même, du fait de mener une droite tangente au cercle dont les deux extrémités sont sur les deux droites tangentes / parallèles entre elles, il se produit une proportion entre elles deux et entre le demi-diamètre du cercle.

B-5^r

Soit le demi-cercle AIB , et que AD et BC lui soient tangentes, on a mené AGC et BGE . Alors le rapport de BC à AB est égal au rapport de AB à AE . Nous avons démontré cela dans notre livre sur les *Commentaires géométriques*¹². Egalement, menons DIH tangente au cercle AIB au point I et menons du centre K la droite KI . Il se produit de cela que le rapport de AD à IK , qui est le demi-diamètre du cercle, est égal au rapport de IK à BH . Nous avons également démontré cela dans ce même livre¹³ ; ce qu'il fallait démontrer.

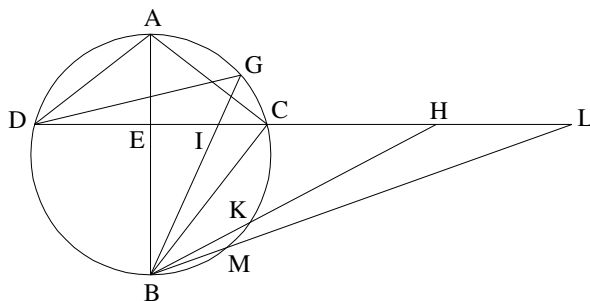
12)¹⁴ On peut trouver une propriété en menant, du milieu de l'arc CBD , qui est le point B , des droites comme les droites BEA , BIG , BC , BKH et BML : alors BA par BE est égal à BG par BI , au carré de BC , à BH par BK et à BL par BM . On trouve

¹² *Anthologie de problèmes*, problème 1, propositions 1 à 3.

¹³ *Ibid.*, problème 6, proposition 17.

¹⁴ Proposition absente du manuscrit *B*.

une autre propriété : si nous menons les droites BG , GD , CA et AD , alors le rapport de BA à AG est égal au rapport de la somme de CA et de AD à la somme de BG et de GD , nous avons démontré cela dans le livre des *Commentaires géométriques*¹⁵ ; ce qu'il fallait démontrer.



L'épître est achevée, grâce à Dieu.

¹⁵ *Anthologie de problèmes*, problèmes 41 et 42, propositions 62 et 63.