



**HAL**  
open science

## **JEUX, PREUVES ET LOGIQUES**

Shahid Rahman, Laurent Keiff

► **To cite this version:**

| Shahid Rahman, Laurent Keiff. JEUX, PREUVES ET LOGIQUES. 2005. halshs-03204126

**HAL Id: halshs-03204126**

**<https://shs.hal.science/halshs-03204126v1>**

Submitted on 22 Apr 2021

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

## JEUX, PREUVES ET LOGIQUES

Shahid Rahman et Laurent Keiff  
*Université Lille 3*

### 1. UN PEU D'HISTOIRE

La logique, comme codification des formes canoniques du raisonnement, est née dans le contexte d'une pratique dialectique du débat à des fins de connaissance scientifique. Il est possible de comprendre cette notion de débat comme une forme de jeu, et c'est à l'évidence la thèse défendue par les sophistes. De ce point de vue, on pourrait dire que le lien entre la logique et les jeux est aussi ancien que la logique elle-même.

Cependant, c'est sur la base de la mathématisation des deux domaines que les interactions profondes et fécondes dont nous allons parler se sont développées.

La théorie mathématique des jeux a émergé progressivement durant la première moitié du 20<sup>e</sup> siècle.<sup>1</sup> C'est dans ce contexte que la logique dialogique est née, dans les travaux de Paul Lorenzen, en rapport avec la logique *intuitionniste* (Lorenzen [1955]), une logique dans laquelle le principe du tiers exclu ( $A$  ou non- $A$ ) n'est pas valide en général. A partir de ces premiers résultats décisifs en logique intuitionniste, Kuno Lorenz eut l'idée d'utiliser la théorie des jeux pour systématiser l'étude des dialogues et restituer ainsi à la logique la dimension dynamique et rhétorique qu'elle avait à ses débuts. Lorenzen et Lorenz [1978] développèrent le cadre

<sup>1</sup> On considère généralement le théorème de Zermelo [1913], montrant que le jeu d'échec possède une solution, comme le point de départ de la discipline en tant que telle. Les premiers développements importants datent des années 30, notamment Borel [1921] et von Neumann [1928]. L'ouvrage que la plupart des historiens considèrent comme fondateur est celui de von Neumann & Morgenstern [1944]. Dans les années 50 paraissent les premières études explicites des liens entre la théorie des jeux et le domaine de la logique : Gale & Stewart [1953] et Henkin [1959]

conceptuel dialogique de façon à intégrer également la logique classique de Frege et Russell. Sur cette base, il devenait possible de donner une expression dialogique à un grand nombre de logiques non classiques et de les combiner.

Mentionnons quelques exemples (nous reviendrons plus loin sur les trois dernières):

- Les *logiques paraconsistantes* qui acceptent certaines contradictions sans que le système devienne trivial<sup>2</sup>. Dans une telle logique, de la prémisse « *Bush est le président des USA et Bush n'est pas le président des USA* » il n'est pas permis d'inférer la conclusion « *la conjecture de Goldbach est vraie* ».
- Les *logiques modales*, où des opérateurs sont introduits pour exprimer la nécessité et la possibilité (ce qui permet de traduire formellement des phrases telles que « *il est possible que les martiens existent* »).
- Les *logiques libres* qui autorisent le raisonnement sur les fictions (on peut y raisonner avec des expressions comme « *Pégase est un cheval ailé* »).
- La *logique linéaire* qui est capable de tenir compte de la limitation des ressources du system formel. Et ainsi de suite pour de nombreux autres systèmes...

Ce travail fut mené essentiellement par Rahman et ses collaborateurs : l'idée principale est ici d'appréhender la dialogique non comme une logique particulière, ni comme une autre présentation de systèmes connus, mais comme un cadre conceptuel dynamique et unifiant permettant de construire des logiques<sup>3</sup>.

La notion essentielle de cette approche est celle de dialogue, c'est à dire d'interaction réglée entre deux joueurs où les coups peuvent être compris comme des actes illocutoires (assertions et interrogations). Une preuve est donc le fruit de l'interaction entre les joueurs : on considère qu'un joueur a fourni la preuve de la validité d'une assertion s'il a été en mesure de fournir une réponse satisfaisante à toutes les questions que son assertion autorise dans le jeu. Voyons à quoi ressemble un tel jeu.

<sup>2</sup> Un système trivial est un système où toute expression bien formée est un théorème.

<sup>3</sup> Voir par exemple : Rahman [1993], [2001], [2002] et [2004], Rahman et Carnielli [2000], Rahman et Keiff [2004], Rahman et Rückert [2001]

## 2. LOGIQUE DIALOGIQUE, CONCEPTS ÉLÉMENTAIRES

### 2.1 Les règles du jeu

Un dialogue est un jeu logique à deux joueurs : le *Proposant* (**P**) qui affirme la thèse (la formule initiale du jeu et qui exprime une proposition) et qui a pour rôle d'en montrer la validité, et l'*Opposant* (**O**) qui a pour rôle de réfuter la thèse. **O** cherche à construire un contre-modèle de la thèse (c'est à dire décrire une situation où la thèse ne peut pas être prouvée). **P** cherche à montrer l'échec systématique des tentatives de **O**. On remarquera la ressemblance avec le jeu d'échecs. Les exercices d'échecs de type « les blancs matent en deux coups » invitent précisément à définir une stratégie de victoire : un joueur possède une *stratégie de victoire* (*SV*) s'il connaît une fonction qui, pour chaque coup possible de l'adversaire, indique les coups à jouer pour gagner la partie. La notion de validité est définie à partir de celle de stratégie : une proposition *A* est valide si, et seulement si, **P** possède une *SV* dans un dialogue dont *A* est la thèse.

Pour comprendre comment s'organisent les règles du jeu dialogique, on peut songer aux règles du jeu d'échecs. Une partie de ces règles définissent les mouvements de chacune des pièces, indépendamment du fonctionnement général du jeu. En ce sens ce sont des règles locales. L'autre partie des règles (précisant qui commence, qui gagne, etc.) décrit le déroulement général d'une partie. En ce sens, ces règles sont globales. Il est important de remarquer ici que les mêmes règles locales peuvent générer différents jeux par l'altération des règles globales. On peut par exemple imaginer une variante des échecs dans laquelle un joueur perd s'il perd toutes ses pièces. De la même manière, les règles dialogiques se divisent en deux sous-ensembles : les règles *de particule* et les règles *structurelles*. Les premières décrivent les formes argumentatives, c'est à dire la forme locale du dialogue : elles ne tiennent compte de rien d'autre que de la principale constante logique de la formule initiale — la disjonction (*A* ou *B*), la conjonction (*A* et *B*), l'implication (si *A* alors *B*), la négation et les quantificateurs (pour tout *x*, pour quelque *x*)<sup>4</sup>. Les secondes décrivent le fonctionnement du jeu

<sup>4</sup> Conjonction et disjonction se distinguent au sens dialogique par le fait que dans le premier cas c'est l'attaquant qui choisit le conjoint avec lequel le dialogue se poursuivra, alors que dans le second cas, c'est le défenseur qui choisit le disjunctif qu'il est prêt à défendre. De la même manière, les deux quantificateurs se distinguent par le joueur qui a le choix de la constante d'individu substituée à la variable.

indépendamment de la nature de la thèse, elles sont donc globales (elles déterminent l'ordre du jeu, s'il joue un rôle, la structure mathématique du flux d'information dans le jeu, etc.). Les règles structurelles déterminent les propriétés de la relation de conséquence logique, en décrivant le déroulement général du jeu. Le cadre de la théorie des jeux logiques, et particulièrement celui de la dialogique, est intrinsèquement pluraliste en ce sens qu'il offre un cadre conceptuel dans lequel il est possible d'exprimer un grand nombre de systèmes logiques différents, de les comparer et de les combiner, par des procédés analogues à ceux que nous avons mentionné à propos des échecs : par exemple, fixer les règles de particules et altérer les règles structurelles, ou bien faire l'inverse.

### Exemples

- Dialogique Modale :  
Une vieille question de logique modale, intéressante et philosophique, est illustrée par l'exemple suivant. Imaginons qu'un professeur de mathématiques affirme qu'une certaine proposition (par exemple que la somme des angles d'un triangle rectangle est égale à deux droits) est nécessaire. Que se passerait-il si un de ses étudiants, qui aurait lu Leibniz, lui demandait : cette proposition est-elle *nécessairement* nécessaire ? Cette nécessité est-elle valable dans tous les contextes possibles ? Dieu lui-même est-il contraint de l'accepter ? Une façon (typiquement dialogique) d'analyser la controverse consisterait à laisser l'élève choisir le contexte, et donner au professeur la tâche de montrer la nécessité de l'égalité de notre exemple. Il est assez clair que le succès du professeur dépend des conditions dans lesquelles il lui est permis de transporter la vérité d'une proposition dans un contexte donné vers un autre contexte. La dialogique modale a précisément pour vocation d'étudier la dynamique de telles conditions<sup>5</sup>.
- Un problème du même genre, mais plus difficile, est lié à ce qu'on a appelé la logique des « contrepossibles ». Imaginons qu'un mathématicien tienne une certaine proposition pour vraie (l'Axiome du Choix par exemple). Est-il contraint d'accepter que la fausseté de cette proposition entraînerait n'importe quelle conséquence<sup>6</sup> ?

---

La négation engendre une inversion des rôles : attaquer la négation d'une proposition, c'est la même chose que défendre cette proposition. L'attaque contre l'implication consiste à concéder l'antécédent, et la défense correspondante consiste à asserter le conséquent.

<sup>5</sup> Voir Rahman et Keiff [2004] et Blackburn [2001].

<sup>6</sup> Rappelons que si l'antécédent d'un conditionnel est faux, le conditionnel est vrai quel que soit le conséquent. Dans notre exemple, il serait donc vrai que la fausseté de l'Axiome du Choix entraîne n'importe quelle conséquence.

- Dialogique libre :

Un autre problème célèbre concerne les entités fictives. Que peut-on dire, du point de vue logique, de Mme. Bovary ou d'un objet inexistant d'une expérience de pensée? Russell fournit une solution classique : on considère que si l'on dit quelque chose d'Emma Bovary, on dit qu'il existe un individu qui est Emma Bovary et possède telle ou telle propriété. Un tel énoncé est donc faux. Mais on peut vouloir une logique qui soit capable de distinguer entre le vrai et le faux concernant les fictions. Il est faux qu'Emma Bovary existe. Il est vrai qu'elle est l'épouse de Charles Bovary. Que le jour de ses quatre ans elle portait une robe bleue n'est ni vrai ni faux, on ne sait pas. Comme on le voit, une telle logique doit au moins être capable de distinguer entre différentes formes de quantification (c'est-à-dire d'existence), et accepter de restreindre la validité du tiers exclu. La dialogique libre<sup>7</sup> a précisément pour vocation d'étudier la dynamique des formes correctes du raisonnement dans un univers linguistique où les fictions ont droit de cité.

### 3. SÉMANTIQUE, PRAGMATIQUE ET LA STRATÉGIE DU COPIEUR

On l'a vu, les règles des jeux dialogiques se répartissent entre règles de particule déterminant la signification locale des constantes logiques, et les règles structurelles déterminant la signification de la relation de conséquence. En réalité, les systèmes de dialogues dont nous parlons sont *formels*, en ce sens qu'aucun jeu n'est associé aux formules atomiques comme « *Dubucs a gagné le tour de France* ». On peut considérer le problème de ces formules de la façon suivante : si **P** doit défendre la validité de la thèse, il doit être capable de le faire indépendamment de la justification informelle des formules atomiques qui la composent. La règle structurelle correspondant à cette idée est la suivante : **P** a le droit d'asserter une formule atomique  $\alpha$  dans un dialogue si, et seulement si, **O** a asserté  $\alpha$  lors d'un coup précédent. Cette règle garantit que si **P** possède une stratégie de victoire, celle-ci sera par définition en accord avec les preuves informelles acceptées par **O**.

Imaginons trois joueurs d'échecs (ou plutôt, une variante des échecs où le pat n'est pas possible) : Karpov, Kasparov et Hintikka. Ce dernier a d'autre part l'avantage structurel de décider s'il joue Noir ou Blanc. Dans ces conditions, Hintikka pourrait défier les deux champions avec la certitude de

<sup>7</sup> Voir Rahman [2001].

gagner une partie exactement. Jouant Noir contre Kasparov, il copiera les coups de celui-ci en jouant Blanc contre Karpov.

La signification de la règle formelle est liée à une telle stratégie. On peut le voir facilement dans la preuve de la tautologie triviale par excellence,  $A \rightarrow A$ . celle-ci recèle en fait une dynamique interne que seule l'approche dialogique peut faire apparaître. Le dialogue a la forme suivante : **P** affirme la thèse. **O** l'attaque en concédant l'antécédent ( $A$ ), à quoi **P** répond en utilisant cette concession. On pourrait étendre le dialogue, en autorisant **O** à attaquer la formule atomique  $A$ , mais il resterait toujours possible pour **P** de copier la stratégie informelle utilisée par **O** pour soutenir sa propre assertion. En définitive, la validité de  $A \rightarrow A$  repose sur un flux d'information qu'une approche statique de la notion de preuve ne peut que manquer.

Ce qui précède éclaire un point essentiel de la théorie dialogique de la signification. Celle-ci est en général placée sous le signe de la pragmatique. La notion de pragmatique est en général comprise du point de vue de Charles William Morris<sup>8</sup> : la syntaxe s'occupe de la relation des signes entre eux, la sémantique des relations entre les signes et les objets, et la pragmatique des relations entre les signes et les utilisateurs de ces signes. Mais dans la dialogique on conteste la séparation stricte entre signification et pragmatique. Un exemple typique de mot dont la signification est pragmatique est fourni par les pronoms : le mot « je » désigne une personne variable, c'est le contexte où ce mot est utilisé qui permet de déterminer sa référence. L'édifice de la théorie dialogique de la signification repose sur une idée de ce genre : cette théorie est une pragmatique lorsque l'ensemble des règles du jeu n'est pas fixé. C'est le cas par exemple lorsqu'on envisage les seules règles de particule. Elle devient une sémantique lorsque toutes les règles sont données. L'enchaînement preuves informelles / règles de particule / règles structurelles suggère une transition graduelle entre pragmatique et sémantique. Il est d'ailleurs possible<sup>9</sup> de construire des systèmes de dialogues où ce qui est recherché est un système de règles en un certain sens minimal permettant de gagner le dialogue pour une thèse donnée. Pour de tels dialogues, la transition pragmatique / sémantique devient l'objet d'une dynamique interne à la preuve : le dialogue est pragmatique jusqu'à ce qu'il parvienne à une conclusion sémantique : la fixation des règles permettant la victoire.

<sup>8</sup> Voir Morris [1938].

<sup>9</sup> Voir Rahman et Keiff [2004].

## 4. LOGIQUE LINÉAIRE

L'aspect procédural de la notion dialogique de preuve a fait de cette approche le mode d'expression privilégié de certains systèmes importants pour l'informatique théorique, et particulièrement la logique linéaire. Celle-ci est née dans les années 80 du travail de J. Y. Girard (voir Girard [1987] etc.) Les textes de présentation classiques (Girard [1987], Blass [1992]) insistent sur une idée centrale qui distingue la logique linéaire, et qui fonde son rapport privilégié avec la sémantique dialogique : la notion de limitation des ressources.

Dans l'ensemble des approches de la logique précédant le programme linéaire, les formules du langage objet dénotent des *types propositionnels*, en ce sens qu'en général, le système de déduction ne permet pas de distinguer entre les différentes occurrences d'une formule dans une preuve. Par exemple, en logique standard, des prémisses  $A \rightarrow B^{10}$  et  $A \wedge A^{11}$ , on peut conclure  $B$ . En d'autres termes, si une formule appartient à l'ensemble de prémisses d'un argument, il est possible d'en faire usage autant de fois qu'il est nécessaire pour dériver la conclusion, ou bien de ne pas s'en servir. La logique linéaire au contraire n'autorise pas une telle dérivation, parce qu'une partie des informations contenues dans les prémisses est redondante (une des occurrences de  $A$ ). Pour expliquer les intuitions fondamentales de son système, Girard a généralement recours à une analogie. Si un paquet de cigarettes coûte un euro, je ne peux acheter de cigarettes que dans la mesure où j'ai les euros et qu'il y a des cigarettes à vendre. On n'achète pas différentes occurrences du paquet de cigarettes avec différentes occurrences d'un euro. De la même manière, chaque dérivation d'une formule déterminée utilise certaines prémisses déterminées. Une dérivation correcte équilibre les comptes : chacune des prémisses est utilisée exactement une fois dans l'exécution de la preuve.

Cette idée a une traduction dialogique particulièrement directe : chaque fois qu'une assertion a été attaquée et convenablement défendue, on peut dire qu'elle a servi dans la preuve. Ce qui est essentiel ici, c'est qu'une preuve dialogique est un processus où jouer un même coup deux fois n'est pas équivalent à jouer une seule fois le coup.

Ce qu'illustre l'exemple de la logique linéaire, comme nos remarques sur la notion dialogique de pragmatique, c'est la fécondité logique de l'approche procédurale et constructive incarnée dans les dialogues en tant que cadre d'étude de la diversité des systèmes logiques et leurs relations dynamiques. Un autre cas particulièrement intéressant, mais qu'il n'est pas possible de

<sup>10</sup> Si  $A$  alors  $B$ .

<sup>11</sup>  $A$  et  $A$ .



développer, ici est celui des relations entre les jeux de preuve formelle dialogiques et le raisonnement dans un modèle qui est au cœur de la sémantique des jeux (GTS) décrite ailleurs dans ce numéro. Le tournant dynamique en théorie de la signification, pour reprendre une qualification célèbre<sup>12</sup>, n'a certainement pas fini de porter ses fruits.

<sup>12</sup> Voir Peregrin [2003].

## REFERENCES

- Blackburn, P. [2001] : « Modal logic as dialogical logic » dans Rahman & Rückert (éds.), *New perspectives in dialogical logic*, pp. 57-93, numéro spécial de *Synthese*, vol. **127**, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.
- Blass, A. [1992] : « Is game semantics Necessary? » dans Boerger, Gurevich et Meinke (éds.) : *Springer Lecture Notes in Computer Science*, **832**, pp. 66-77.
- Borel, E. [1921] : “La Théorie du Jeu et les équations intégrales à noyau symétrique”, *Comptes rendus hebdomadaires des Séances de l’Académie des Sciences*, **173**, pp. 1304-8.
- Girard, J. Y. [1987] : « Linear logic » dans *Theoretical Computer Science*, **50**, pp. 1-102.
- Henkin, L. [1959] : “Some remarks on infinitely long formulas”, *Infinitistic Methods*, Varsovie, pp. 167-183.
- Lorenzen, P. [1955] : *Einführung in die operative Logik und Mathematik*, Springer, Berlin.
- Lorenzen P. & Lorenz K. [1978] : *Dialogische Logik*. WBG, Darmstadt.
- Morris, C. W. [1938] : *Foundations of the Theory of Signs*, University of Chicago Press, Chicago
- von Neumann J. et Morgenstern O. [1944] : *Theory of Games and Economic Behaviour*, John Wiley and Sons, Oxford.
- von Neumann [1928] : « Zur Theorie der Gesellschaftspiele », *Mathematische Annalen*, **100**, pp. 295-320.
- Peregrin, J. [2003] : (éd.) *Meaning : The Dynamic Turn*, Elsevier, New York.
- Rahman S. [1993] : *Über Dialogue, protologische Kategorien und andere Seltenheiten*, Peter Lang Verlag, Frankfurt a. M., Berlin, New York, Paris, Wien.
- Rahman S. [2001] : « On Frege’s Nightmare. A Combination of Intuitionistic, Free and Paraconsistent Logics », dans H. Wansing (éd.), *Essays on Non-Classical Logic*, World Scientific, New Jersey, London, Singapore, Hong Kong, pp. 61-85.
- Rahman S. [2002] : « Un desafío para las teorías cognitivas de la competencia lógica: los fundamentos pragmáticos de la semántica de la lógica linear » dans M. B. Wrigley (éd.), *Dialogue, Language, Rationality. A Festschrift for Marcelo Dascal*, numéro spécial de *Manuscrito*, vol. XXV-2. pp. 383-432.
- Rahman S. [2004] : « Non-normal Dialogics for a wonderful world and more » dans Heizmann G. (éd.) *Philosophical insights into Logics and Mathematics*, Kluwer, Dordrecht.
- Rahman S. et Carnielli W. A. [2000] : « The Dialogical Approach to Paraconsistency », dans *Synthese*, **125**, No. 1-2, pp. 201-232.
- Rahman S. et Keiff L. [2004] : « On how to be a dialogician » dans D. Vandervecken (éd.), *Logic and Action*, Kluwer, Dordrecht, pp. 359-408.
- Rahman S. and Rückert H. [2001] : « Dialogische Modallogik (für T, B, S4, und S5) », dans *Logique et Analyse*, **167-168**. pp. 243-282.
- Zermelo, E. [1913] : “Über eine Anwendung der Mengenlehre auf die Theorie des Schachspiels”, Hobson E. et Love A. (éds.) *Proceedings of the 5th International Congress of Mathematicians*, **II**, pp.501-504.