HAL
open science

L'histoire des oscillations de relaxation : de Gérard-Lescuyer (1880) à Van der Pol (1926)

Jean-Marc Ginoux, Loic Petitgirard

To cite this version:

Jean-Marc Ginoux, Loic Petitgirard. L'histoire des oscillations de relaxation : de Gérard-Lescuyer (1880) à Van der Pol (1926). Rencontres du Non Linéaire 2010, Jan 2010, Paris, France. halshs-03227552

HAL Id: halshs-03227552

https://shs.hal.science/halshs-03227552v1

Submitted on 4 Jun 2021

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

L'Histoire des Oscillations de Relaxation : de Gérard-Lescuyer (1880) à Van der Pol (1926)

Jean-Marc Ginoux[1] & Loïc Petitgirard[2]

[1] Université Pierre et Marie Curie (Paris VI), Institut de Mathématiques de Jussieu (UMR 7586), 175, rue du Chevaleret, F-75013 Paris, France
[2] Conservatoire National des Arts et Métiers, Case 600, 292 rue Saint Martin, 75141 Paris CEDEX 3
jmginoux@orange.fr

Résumé. Les oscillations de relaxation se réduisent généralement à la contribution de Balthazar Van der Pol [18] intitulée : "On relaxation-oscillations", dans laquelle il utilisa cette terminologie pour désigner un phénomène oscillatoire produit par une triode. Ainsi, il sera démontré dans cet article que les oscillations de relaxation n'ont pas été observées pour la première fois par Van der Pol en 1926 au moyen d'une triode mais par Gérard-Lescuyer [6] en 1880 avec une machine série-dynamo puis par Blondel [3] en 1905 avec un arc chantant. De plus, il sera établi que la toute première mise en équation des oscillations de la triode n'a pas été réalisée par Van der Pol [19] en 1920 mais par Blondel [4] en 1919. En englobant en 1929 les oscillations de relaxation dans le cadre théorique des oscillations auto-entretenues, Andronov [1] est depuis considéré comme le tout premier à avoir mis en évidence un lien entre les travaux de Poincaré [10] et la solution de l'équation d'un oscillateur de type Van der Pol. Il sera alors démontré que cette correspondance entre cycle limite et solution périodique a été réalisée vingt ans plus tôt par Poincaré [15,16] lui-même lors d'une série de conférences faite à l'École supérieure des Postes et Télégraphes (aujourd'hui Sup'Télécom) en 1908. La découverte de ce texte "oublié" relance ainsi le débat d'une part sur l'implication de Poincaré dans les développements de la technique et notamment de la T.S.F. et, d'autre part sur la question de son héritage scientifique.

1 La machine série-dynamo : la non-linéarité en action

En 1880, un jeune ingénieur du nom de Jean-Marie-Anatole Gérard-Lescuyer est le témoin d'une expérience qu'il qualifie alors de "paradoxe électrodynamique". Poursuivant des recherches sur la fabrication de générateurs d'électricité il réalise une expérience consistant en l'associanttion d'une machine dynamo-électrique qui joue le rôle de générateur à une machine magnéto-électrique que l'on peut assimiler dans ce cas à un moteur. Il expose dans une unique note aux Comptes Rendus de l'Académie des Sciences (C.R.A.S.) de Paris les effets qu'il observe :

> " ... si l'on envoie le courant produit par une machine dynamo-électrique dans une machine magnéto-électrique, on assiste à un phénomène étrange. Aussitôt que le circuit est fermé, la machine magnéto-électrique se met en mouvement ; elle tend à prendre une vitesse de régime, en rapport avec l'intensité du courant qui l'anime ; mais subitement elle se ralentit, s'arrête et repart dans le sens contraire, pour s'arrêter de nouveau et tourner dans le même sens que précédemment. En un mot, elle est animée d'un mouvement alternatif régulier, qui dure autant que le courant qui l'actionne." [6, p. 226]

Il constate une inversion périodique du sens de rotation de la machine magnéto-électrique alors que le courant est continu ce qu'il considère comme un "paradoxe scientifique". D'après lui, c'est un accroissement de vitesse de la machine magnéto-électrique qui en induisant un courant de sens inverse provoque l'inversion de polarité des inducteurs et renverse le sens de rotation. En fait, il sera mis en évidence bien plus tard par Paul Janet en 1893 que l'intervalle situé entre les balais de la dynamo est le siège d'une force électromotrice (f.é.m.) représentant la différence de potentiel ou la tension à ses bornes et qui est une fonction non-linéaire de l'intensité. Ainsi, l'essence même de son paradoxe est l'apparition d'une f.é.m. dont la caractéristique courant-tension non-linéaire conduit à des oscillations que Balthazar Van der Pol [21, p. 116] qualifiera d'oscillations de relaxation. Ce phénomène représente, semble-t-il, l'une des premières manifestations d'un composant à caractéristique non-linéaire au sein d'un dispositif électrotechnique.

© **Non Linéaire Publications**, Bât.510, Université de Paris-sud, 91405 Orsay

2 L'arc chantant

2.1 Des réverbères à la T.S.F.

À la fin du XIXe on utilisait pour l'éclairage des phares, des balises côtières et des villes un dispositif, ancêtre de la lampe à incandescence, appelé arc électrique . Il présentait indépendamment de sa faible lueur, un inconvénient majeur : le bruit engendré par la décharge électrique qui gênait les habitants. À Londres, le physicien britannique William Du Bois Duddell (1872-1917), fut mandaté en 1899 par les autorités anglaises pour résoudre ce problème. Il eut l'idée d'associer un circuit oscillant composé d'une bobine d'induction L et d'un condensateur de capacité C à l'arc électrique pour en faire cesser le bruissement. Il réalisa ainsi un dispositif qu'il appela arc chantant et put établir que la période du son musical émis par l'arc correspondait à la période propre du circuit oscillant qui lui est associé et s'exprimait par la formule de Thomson [17] : $T = 2\pi\sqrt{LC}$. En réalité, Duddell venait d'inventer un circuit oscillant susceptible de produire non seulement des sons d'où son nom, mais aussi et surtout des ondes électromagnétiques. Ainsi, cet appareil sera utilisé comme émetteur pour la Télégraphie Sans Fil (T.S.F.) jusqu'à l'avènement de la triode. En effet, l'arc chantant ou arc de Duddell était un dispositif "éclateur" produisant des étincelles qui engendraient la propagation d'ondes électromagnétiques mises en évidence par les expériences de Heinrich Hertz (1857-1894) comme le rappelle Henri Poincaré (1854-1912) :

> "Si un arc électrique est alimenté par un courant continu et si l'on place en dérivation une self-induction et un condensateur, on a quelque chose d'analogue à l'excitateur de Hertz." [14, p. 79]

Après sa découverte Duddell poursuit ses recherches sur l'arc chantant dans le but de produire des ondes électromagnétiques susceptibles de transmettre un signal.

2.2 De l'entretetien des oscillations aux cycles limites de 1908

En France, la vétusté des installations électriques des systèmes de signalisation maritime incite le jeune ingénieur André Blondel (1863-1938), affecté au Service central des Phares et Balises, à effectuer des recherches sur l'arc électrique dans le but d'améliorer ce genre de dispositif. Pour y parvenir il inventera l'oscillographe galvanométrique en 1893. Durant l'année 1905, il publie un imposant mémoire dans lequel il réalise une étude complète de l'arc chantant de Duddell. Il obtient alors, pour différentes valeurs de la tension et de l'intensité, deux nouveaux types d'oscillations pour l'arc qu'il qualifie d'arc sifflant et d'arc strident en lesquels Van der Pol [21, p. 30] reconnaitra des oscillations de relaxation. Blondel [3] met de plus en évidence que la courbe d'évolution de la tension aux bornes de l'arc à courant continu en fonction de l'intensité qui le traverse prend la forme de cycles qui rendent possible l'entretien de l'oscillation.

Dans les dernières années de sa vie Henri Poincaré publie plusieurs travaux fondamentaux sur la T.S.F. (Poincaré [14,15,16]). C'est lors d'une série de conférences faite à l'École supérieure d'Électricité en 1908 que Poincaré [15] établit le lien entre ses propres travaux sur les *cycles limites* ([10, p. 261]) et l'équation différentielle caractérisant les oscillations entretenues dont l'arc chantant est le siège. Poincaré s'intéresse naturellement à ce problème parce que les développements de la T.S.F. nécessitent de résoudre le problème de l'entretien des oscillations. Il étudie alors un circuit (voir Fig. 1) qui comprend une source de force électromotrice constante continue E, une résistance et une self, et, en parallèle, d'une part un arc, de l'autre une self et une capacité. Il précise que $\rho x'$ étant un terme correspondant à la résistance interne de la self et aux autres causes possibles d'amortissement, y compris le rayonnement par l'antenne, $\varphi\left(x + x'\right)$ le terme dû à l'arc. Ce dernier représente la f.é.m. de l'arc chantant qui est à reliée à l'intensité qui le traverse par une relation non-linéaire déterminée empiriquement.

L'indétermination de cette relation rend impossible l'intégration analytique de l'équation différentielle que va établir Poincaré. Mais cela ne constitue pas un obstacle pour lui car il envisage une analyse qualitative du problème. En appelant x la charge du condensateur et i le courant dans le circuit extérieur, il obtient la toute première mise en équation des oscillations de l'arc chantant :

$$Lx'' + \rho x' + \varphi\left(i + x'\right) + Hx = 0 \tag{1}$$

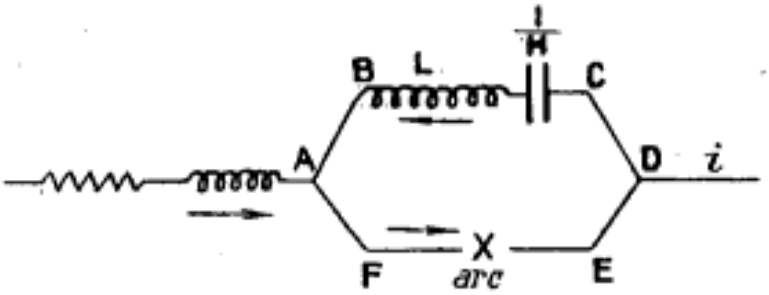


Fig. 1. Oscillations entretenues par l'arc chantant, d'après Poincaré [15, p. 390].

Poincaré explique alors que si la fonction φ était connue il serait possible d'établir une relation entre $i + x'$ et x'. Il remplace donc $\varphi\,(i + x')$ par une fonction $\theta\,(x')$. Ce qui le conduit à l'équation suivante :

$$Lx'' + \rho x' + \theta\,(x') + Hx = 0 \tag{2}$$

Il se place ensuite dans le plan de phase (x', x'') tel qu'il l'a lui-même défini ([12, p. 168]) en posant : $x' = y$ et $x'' = y'$ puis, il trace une représentation de la courbe solution de cette équation différentielle.

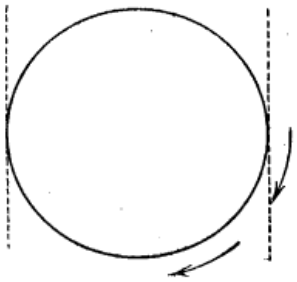


Fig. 2. Courbe fermée, d'après Poincaré [15, p. 390].

Il précise ensuite que l'on "peut construire les courbes qui satisfont à cette équation différentielle, à condition de connaître la fonction θ. Les oscillations entretenues correspondent aux courbes fermées, s'il y en a. Mais toute courbe fermée ne convient pas, elle doit remplir certaine conditions de stabilité que nous allons étudier" [15, p. 391]. Puis, il exprime la condition nécessaire à l'entretien des oscillations :

> "*Condition de stabilité.* - Considérons donc une autre courbe non fermée satisfaisant à l'équation différentielle, ce sera une sorte de spirale se rapprochant indéfiniment de la courbe fermée. Si la courbe fermée représente un régime stable, en décrivant la spirale dans le sens de la flèche on doit être ramené sur la courbe fermée, et c'est à cette seule condition que la courbe fermée représentera un régime stable d'ondes entretenues et donnera lieu à la solution du problème." [15, p. 391]

Dans la Notice sur les Travaux scientifiques d'Henri Poincaré faite par lui-même en 1886, il définit le concept de cycle limite ainsi :

> "J'appelle ainsi les courbes fermées qui satisfont à notre équation différentielle et dont les autres courbes définies par la même équation se rapprochent asymptotiquement sans jamais les atteindre. Cette seconde notion n'est pas moins importante que la première. Supposons, en effet, que l'on ait tracé un cycle limite ; il est clair que le point mobile dont nous parlions plus haut ne pourra jamais le franchir et qu'il restera toujours à l'intérieur de ce cycle, ou toujours à l'extérieur." [13, p. 30]

En comparant avec la condition de stabilité présentée dans le texte de 1908 il apparaît clairement que la "courbe fermée" qui représente le régime stable d'ondes entretenues n'est rien d'autre qu'un cycle limite au sens où il l'a lui-même défini. On peut néanmoins s'interroger sur les raisons qui l'ont poussé à ne pas l'écrire explicitement. On peut alors arguer d'une part que cette présentation était destinée à des ingénieurs et non à des mathématiciens et, d'autre part que l'introduction de ce concept n'apporte rien de plus qu'une terminologie. Poincaré a donc bien établi, vingt avant Andronov [1] une correspondance entre oscillations entretenues et cycles limites. Il peut être intéressant de mettre en parallèle la condition de stabilité de Poincaré avec cette phrase d'Andronov [2] qui conclut le paragraphe de l'édition originale russe de 1937 de son ouvrage :

> "L'existence de cycles limites dans le portrait de phase du système dynamique envisagé est une condition nécessaire et suffisante garantissant la possibilité (avec des conditions initiales appropriées) d'auto-oscillations dans le système." [2, p. 293]

Après sa disparition prématurée en 1912, un nouveau dispositif développé au cours du premier conflit mondial va jouer un rôle déterminant pour la suite dans le domaine des transmissions : la lampe à trois électrodes ou triode.

3 La lampe à trois électrodes ou triode

Bien que l'audion (premier tube électronique de type triode) ait été réalisé en 1907 par Lee de Forest (1873-1961) ce n'est qu'à partir de la première guerre mondiale que sa diffusion commence à se généraliser pour des raisons militaires puis commerciales. En 1919, Paul Janet publie aux C.R.A.S. de Paris un article dans lequel il démontre l'existence d'une analogie électromécanique entre les trois dispositifs : machine série-dynamo, arc chantant et triode. Il en déduit d'une part que leur caractéristique d'oscillations, i.e., que la f.é.m. aux bornes de chacun de ces dispositifs peut être assimilée à une "résistance négative"et d'autre part qu'ils le siège d'un même phénomène oscillatoire. Six mois plus tard, le 17 novembre 1919, André Blondel présente aux C.R.A.S. de Paris une note dans laquelle il propose de calculer l'amplitude et la période des oscillations d'une triode. Pour y parvenir, il propose de modéliser la caractéristique non-linéaire de la triode par un développement "sous forme d'une série à termes impairs, qui sera sûrement convergente" [4, p. 946]. Il l'écrit :

$$i = F\left(u + k\nu\right) = b_1\left(u + k\nu\right) - b_3\left(u + k\nu\right)^3 - b_5\left(u + k\nu\right)^5 - ... \tag{3}$$

Le montage qu'il utilise (Fig. 3a) possède deux résistances internes r_1 et r_2. L'application des lois Kirchhoff le conduit à l'équation différentielle d'ordre trois suivante :

$$\frac{d^3u}{dt^3} + \frac{r_2}{L}\frac{d^2u}{dt^2} + \left(\frac{1}{CL} - \frac{r_1 r_2}{L^2}\right)\frac{du}{dt} - \frac{r_1}{CL^2}u - r_2\frac{d^3i}{dt^3} - \frac{1}{C}\frac{d^2i}{dt^2} = 0 \tag{4}$$

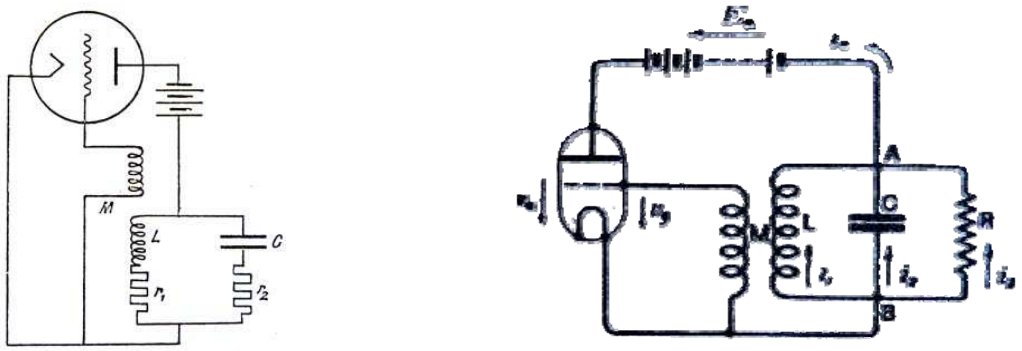
En remplaçant dans l'Eq. (4) i par son expression (Eq. (3)) puis en négligeant les résistances internes et en intégrant une fois par rapport au temps on obtient :

$$C\frac{d^2u}{dt^2} - \left(b_1 h - 3b_3 h^3 u^2 - ...\right)\frac{du}{dt} + \frac{u}{L} = 0 \tag{5}$$

Au mois de juin de l'année suivante Blondel [5] expose ces résultats dans un article plus long et plus détaillé. Moins d'un mois après, le 17 juillet 1920, Van der Pol [19] achève la rédaction d'un article qui ne sera publié qu'en novembre et décembre et dans lequel il effectue la mise en équation de la triode oscillatrice. Son montage (Fig. 3b) qui ne comporte pas de résistances interne mais une résistance R en parallèle le conduit à une équation différentielle d'ordre deux.

Auparavant, Van der Pol fait appel à un à un développement limité de Taylor-McLaurin pour modéliser la caractéristique de la triode qui d'après-lui "can be represented by the equation" [19, p. 703] :

$$i = \psi\left(k\nu\right) = \alpha\nu + \beta\nu^2 + \gamma\nu^3 \tag{6}$$



(a) Montage de Blondel 1919. (b) Montage de Van der Pol, 1920.

Fig. 3. Montages de la triode oscillatrice.

Il obtient alors l'équation suivante :

$$C\frac{d^2\nu}{dt^2} + \left(\frac{1}{R} - \alpha\right)\frac{d\nu}{dt} + \beta\frac{d\left(\nu^2\right)}{dt} + \gamma\frac{d\left(\nu^3\right)}{dt} = 0 \tag{7}$$

Il ajoute que, par des considérations de symétrie on peut choisir $\beta = 0$. Cependant, afin de permettre une comparaison avec les travaux de Blondel [4] il convient de faire abstraction de la résistance R. On a alors :

$$C\frac{d^2\nu}{dt^2} - \left(\alpha - 3\gamma\nu^2\right)\frac{d\nu}{dt} + \frac{1}{L}\nu = 0 \tag{8}$$

Ainsi, il apparaît clairement que, moyennant les simplifications effectuées, les équations (6, 8) de Van der Pol [19] et (3, 5) de Blondel [4] sont totalement identiques, au signe près des coefficients qui dépendent du sens choisi pour le courant.

4 Conclusion

Il a ainsi été établi dans cet article que l'histoire des oscillations de relaxation ne commence pas avec le montage de la triode oscillatrice mais avec l'inversion périodique du sens de rotation de la machine série-dyanmo observée en 1880 par Jean-Marie-Anatole Gérard-Lescuyer. De plus, ce n'est pas Balthazar Van der Pol [19] qui a réalisé la toute première mise en équation de la triode en 1920 mais André Blondel [4] un an auparavant. Enfin et surtout, il a été démontré que la correspodance entre cycle limite et oscillations entretenues a été établie par Poincaré lui-même en 1908 dans le cadre d'une application technique à la T.S.F. vingt avant les travaux d'Andronov [1]. Une analyse détaillée de la bibliographie de l'ouvrage d'Andronov [2] a montré que bien qu'il ait été également concerné par des problèmes radiotechnique à la fin des années 1920 il ne semblait pas avoir eu connaissance des travaux de Poincaré [15]. La découverte de ce texte "oublié" de Poincaré relance ainsi la question de son héritage scientifique à laquelle on ne peut apporter que des éléments de réponses fondés sur des hypothèses. Le premier est bien entendu la disparition brutale et prématurée d'Henri Poincaré en 1912. Le second est le premier conflit mondial qui va décimer les rangs de l'élite de la nation. En effet, alors que les allemands placent leurs scientifiques et ingénieurs en arrière du front, les élèves des grandes écoles françaises sont envoyés en première ligne. Le troisième est que le texte des conférences de Poincaré [15] n'apparaît pas dans ses oeuvres complètes. Cependant, même s'il ne semble pas y avoir trace, comme en U.R.S.S., "d'école de non-linéaire" en France durant les années 1920 et 1930 les contributions françaises vont s'avérer fondamentales pour permettre l'élaboration d'une théorie des oscillations non-linéaires. Ce sera le cas notamment de l'article d'Alfred Liénard [8] qui va établir l'existence et l'unicité du cycle limite de l'équation de Van der Pol.

De plus, au cours de cette période la France apparaît comme le "berceau" de cette théorie naissante des oscillations non-linéaires. En effet, bon nombre d'articles des écoles russes de Gorki et de Kiev vont être publiés aux Comptes Rendus de l'Académie des Sciences ou dans la Revue Générale des Sciences Pures et Appliquées. Enfin, un fait important qui vient d'être récemment mis au jour [7] : la toute première Conférence Internationale de Non-Linéaire qui eut pour objet de permettre une rencontre entre ces écoles russes et les physiciens et mathématiciens français les plus impliqués dans le domaine des oscillations non-linéaires eut lieu à l'Institut Henri Poincaré à Paris entre les 28 et 30 janvier 1933.

Références

1. A. A. Andronov, Les cycles limites de Poincaré et la théorie des oscillations auto-entretenues, *Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences*, **189**, 559-561 (1929).
2. A. A. Andronov & S. E. Khaikin, *La théorie des oscillations*, Moscow, Leningrad : ONTI, (1937).
3. A. Blondel, Sur les phénomènes de l'arc chantant, *Éclairage Électrique*, **XLIV** (28), 41-58 (1905) — *Éclairage Électrique*, **XLIV** (29), 81-104 (1905).
4. A. Blondel, Amplitude du courant oscillant produit par les audions générateurs, *Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences*, **169**, 943-948 (1919).
5. A. Blondel, Théorie graphique des audions générateurs et calcul de l'amplitude des oscillations, *Radioélectricité*, **1**, 7-13 & 63-72 (1920).
6. J. M. A. Gérard-Lescuyer, Sur un paradoxe électrodynamique, *Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences*, **168**, 226-227 (1880).
7. J.-M. Ginoux & L. Petitgirard, The first "lost" international conference on nonlinear, *in press*, (2010).
8. A. Liénard, Étude des oscillations entretenues, *Revue générale de l'Electricité*, **23**, 901-912 et 946-954 (1928).
9. H. Poincaré, Sur les courbes définies par une équation différentielle, *Journal de mathématiques pures et appliquées*, 3° série, **7**, 375-422 (1881).
10. H. Poincaré, Sur les courbes définies par une équation différentielle, *Journal de mathématiques pures et appliquées*, 3° série, **8**, 251-296 (1882).
11. H. Poincaré, Sur les courbes définies par une équation différentielle, *Journal de mathématiques pures et appliquées*, 4° série, **1**, 167-244 (1885).
12. H. Poincaré, Sur les courbes définies par une équation différentielle, *Journal de mathématiques pures et appliquées*, 4° série, **2**, 151-217 (1886).
13. H. Poincaré, *Notice sur les Travaux scientifiques de Henri Poincaré*, Gauthier-Villars, Paris, (1886).
14. H. Poincaré, *La théorie de Maxwell et les oscillations hertziennes : la télégraphie sans fil*, (3ème édition) Gauthier-Villars, Paris, (1907).
15. H. Poincaré, Sur la télégraphie sans fil, *Lumière Électrique*, **4**, 259-266 — 291-297 — 323-327 — 355-359 — 387-393 (1908).
16. H. Poincaré, *Conférences sur la télégraphie sans fil*, Éds. La Lumière Électrique, Paris, (1909).
17. W. Thomson, On transient electric currents, *Philosophical Magazine*, Series 4, **5**, 393-405 (1853).
18. B. Van der Pol, On "relaxation-oscillations", *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, **7** (2), 978-992 (1926).
19. B. Van der Pol, A theory of the amplitude of free and forced triode vibrations, *Radio Review* (London), **1**, 701-710 — 754-762 (1920).
20. B. Van der Pol, Über ,,Relaxationsschwingungen II", *Jahrbuch der drahtlosen Telegraphic und Telephonie*, **29**, 114-118 (1927).
21. B. Van der Pol, Oscillations sinusoïdales et de relaxation, *Onde Électrique*, **9**, 245-256 — 293-312 (1930).